室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

テーパ付部材を含む平面骨組構造物の解析と最小重量設計について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 土木学会北海道支部 公開日: 2013-03-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 杉本, 博之, 菅田, 紀之, 吉岡, 修治 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/1957

室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

テーパ付部材を含む平面骨組構造物の解析と最小重量設計について

著者	杉本　博之，菅田　紀之，吉岡　修治
雑誌名	論文報告集
巻	43
号	I-27
ページ	125-128
発行年	1987-02
URL	http://hdl.handle.net/10258/1957

Ⅰ—27　テーパ付部材を含む平面骨組構造物の解析と最小重量設計について

室蘭工業大学　正　員　杉本博之
室蘭工業大学　正　員　菅田紀之
室蘭工業大学　学生員　吉岡修治

1．まえがき

平面骨組構造物の最小重量設計は、その各部材が等断面であるのが一般である[1) 2)]。しかし、部材を変断面で設計すれば、構造によってはかなりの重量の軽減が期待できるのは明らかである。このような研究は少なく、また製作コスト等を考慮すると必ずしも実用的ではないが、等断面部材で設計した場合と変断面部材で設計した場合の総鋼重の差は興味あるテーマであるし、また、構造系の中の２次的な構造を変断面部材で設計することにより１次的な構造の設計のための死荷重を軽減させることができる。

変断面部材を含む骨組構造物を変位法で解く場合、部材剛性マトリクスの要素に、閉じた形で表すことができない積分を含むのが一般である。その値を数値積分で求めることも可能であるが、最適設計のように多数の構造解析を要する場合には、数値積分は実用的でない。そこで本論文では、部材断面積あるいは部材断面２次モーメントを２次多項式近似し、閉じた形で積分を求めて効率化する方法を提案している。

次に、断面は上下・左右対称のＩ形断面よりなる変断面部材を含む平面骨組構造物の最小重量設計の定式化を説明し、２、３の計算例について結果を考察する。

2．変断面部材の部材剛性マトリクス

右図に示すように、両端の節点番号がｉ、ｊであるｍ部材が変断面部材だとする。右図において、点線の力は部材内力であり、実線の力は節点外力である。部材内力の符号は、ｉ節点を左に置いた場合の構造力学の常識的な正の向きを正としている。Mmi^* は、ｍ部材ｉ節点の部材曲げモーメントであり、Fm^*、Sm^* は、それぞれｍ部材の軸力、せん断力である。$Xi^{(m)}$、$Yi^{(m)}$および$Mi^{(m)}$は、ｉ節点に作用するそれぞれの方向の外力の内、ｍ部材が分担する外力である。サフィックスｊが付いている記号の意味も同様である。

節点変位は、ｕ、ｖ、βであり、それぞれ右図のＸ、Ｙおよびｍが対応し、それらと同符号である。

変形は、δm^*、βmi^*、βmj^*であり、それぞれ右図のFm^*、Mmi^*およびMmj^*が対応し、それらと同符号である。

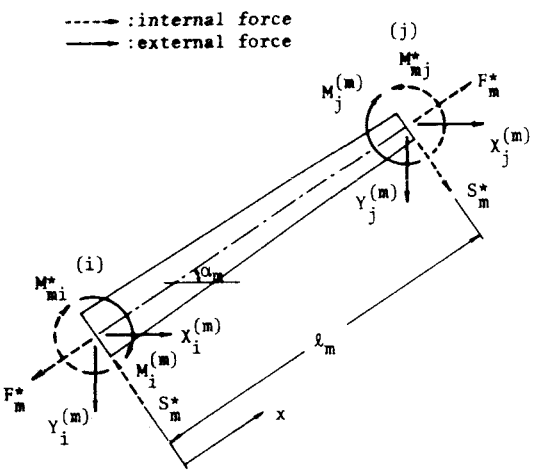


Fig.1　Tapered beam and forces.

またℓm、αm、Ｅｍは、それぞれｍ部材の部材長、傾き角およびヤング率である。

変位法による骨組構造物の解析は、各部材の部材剛性マトリクスをまず作成し、それらを対応する自由度の位置に重ね合せ、境界条件を考慮して全体系の剛性マトリクスを作り、それを解いて変位を求め、それらの変位の値より各部材の内力を求める。

部材剛性マトリクスは、外力と内力の関係を表す平衡条件、内力と変形の関係および変形と変位の関係を表す適合条件の３条件より求まる。

それらの条件は、それぞれ以下のように定義される。

（1） 平衡条件

$$P^{(m)} = D^{(m)} \cdot F^{(m)} \tag{1}$$

ここで、

$$P^{(m)} = \begin{bmatrix} Xi \\ Yi \\ Mi \\ Xj \\ Yj \\ Mj \end{bmatrix}^{(m)}, \quad D^{(m)} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha m & \sin\alpha m/\ell m & -\sin\alpha m/\ell m \\ \sin\alpha m & \cos\alpha m/\ell m & -\cos\alpha m/\ell m \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\alpha m & -\sin\alpha m/\ell m & \sin\alpha m/\ell m \\ -\sin\alpha m & -\cos\alpha m/\ell m & \cos\alpha m/\ell m \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F^{(m)} = \begin{bmatrix} Fm^* \\ Mmi^* \\ Mmj^* \end{bmatrix} \tag{2}$$

（2） 部材端力と変形の関係

$$F^{(m)} = S^{(m)} \cdot d^{(m)} \tag{3}$$

ここで、

$$S^{(m)} = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}^{-1}, \quad d^{(m)} = \begin{bmatrix} \delta m^* \\ \beta mi^* \\ \beta mj^* \end{bmatrix} \tag{4}$$

また、s_{ij} は一般に次式で定義される。

$$\begin{aligned} s_{11} &= (\ell m/Em) \int_0^1 [1/A(\xi)]\, d\xi \\ s_{22} &= (\ell m/Em) \int_0^1 [(1-\xi)^2/I(\xi)]\, d\xi \\ s_{23} &= (\ell m/Em) \int_0^1 [\xi(1-\xi)/I(\xi)]\, d\xi \\ s_{33} &= (\ell m/Em) \int_0^1 [\xi^2/I(\xi)]\, d\xi \end{aligned} \tag{5}$$

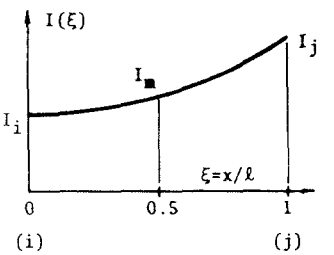


Fig. 2 I(ξ)－ξ relationship.

ここで、ξはFig. 2に示すように、無次元化された部材軸座標である。

（3） 適合条件

$$d^{(m)} = [D^{(m)}]^T \cdot X^{(m)} \tag{6}$$

ここで、

$$X^{(m)} = [ui \quad vi \quad \beta i \quad uj \quad vj \quad \beta j]^T \tag{7}$$

以上の式（1）～（7）より部材剛性マトリクスが求まる。つまり、式（3）、（6）より、

$$F^{(m)} = S^{(m)} \cdot [D^{(m)}]^T \cdot X^{(m)} \tag{8}$$

式（1）、（8）より、

$$P^{(m)} = K^{(m)} \cdot X^{(m)} \tag{9}$$

ここで、

$$K^{(m)} = D^{(m)} \cdot S^{(m)} \cdot [D^{(m)}]^T \tag{10}$$

ところで、式（5）のs_{ij}は、部材が等断面であれば、それぞれ、

$$s_{11} = \ell m/(Em \cdot Am), \quad s_{22} = s_{33} = \ell m/(3 \cdot Em \cdot Im), \quad s_{23} = s_{32} = \ell m/(6 \cdot Em \cdot Im) \tag{11}$$

となるが、部材が変断面だと、A(ξ)、I(ξ)は一般にξに関して高次多項式となり、3次以上の多項式になると式（5）の積分を閉じた形で表すのは困難となる。もちろん、それらを数値積分で求めることは可能であるが、数値積分を含む構造解析法を最適化の過程で用いることはできるなら避けたい。

しかし、A(ξ)あるいはI(ξ)が3次以上の多項式であっても、それを2次近似することにより、式(5)の積分を閉じた形で表現することができる。例えば、Fig. 2のように3点の断面2次モーメントの値が既知の場合は、

$$I(\xi) \fallingdotseq (2 \cdot Ii - 4 \cdot Im + 2 \cdot Ij) \cdot \xi^2 - (3 \cdot Ii - 4 \cdot Im + Ij) \cdot \xi + Ii \tag{12}$$

と近似できる。

分母が1次および2次多項式の場合の積分公式は文献（3）に詳しい。

3．最小重量設計の定式化

Fig. 3 に示す断面を持つ変断面部材よりなる平面骨組構造物の最小重量設計は、以下のように定式化される。

なお、応力に関する制約条件式においては、問題を簡単にするために局部座屈に関する検討を無視している。

（1）目的関数　：

$$V=\sum_{k=1}^{n} \ell_k \cdot \{2\, t_k \cdot b_k + t_w\,(h_{ki}+h_{kj})/2\} \longrightarrow \min \qquad (13)$$

ここで、nは部材数である。

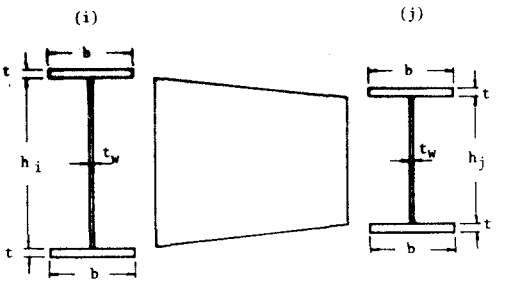


Fig.3 Variable cross section element.

（2）制約条件式　：　道路橋示方書[4]を参考にして、応力および幅厚比に関する制約条件を以下のように考えた。

（a）　応力に関する制約条件式

i）　軸方向力が引張の場合

$$(\sigma t+\sigma bty)/\sigma ta-1\leqq 0 \qquad (14)$$

$$-\sigma t/\sigma ta+\sigma bcy/\sigma bagy-1\leqq 0 \qquad (15)$$

ii）　軸方向力が圧縮の場合

$$\sigma c/\sigma caz+\sigma bcy/\sigma bagy-1\leqq 0 \qquad (16)$$

以上を各部材毎にi端、j端両方で検討する。

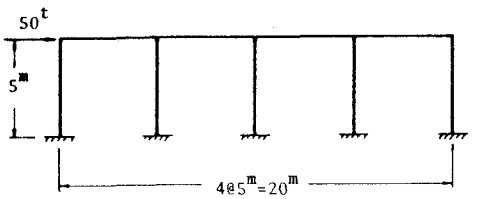


Fig.4a Rahmen structure.

ここで、σt、σc：軸方向力による引張および圧縮応力度、σbty、σbcy：曲げによる引張および圧縮応力度、σta：許容軸方向引張応力度、σcaz：弱軸まわりの許容軸方向圧縮応力度、$\sigma bagy$：局部座屈を考慮しない強軸まわりの許容曲げ圧縮応力度　である

（b）　幅厚比に関する制約条件式

$$(b-t_w)/(32\,t)-1\leqq 0 \qquad (17)$$

（3）設計変数　：　b_k、t_k、h_{ki}、h_{kj}　　$k=1\sim n$

腹板厚は、最小板厚としている。

以上の最適化問題を、本論文では汎用最適化プログラムＡＤＳ（automated design synthesis）[5]中のＳＱＰ[6]により解いた。

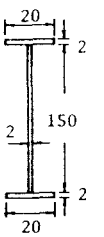


Fig.4b Section A.

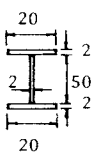


Fig.4c Section B.

4．数値計算例

数値計算例として、４径間連続ラーメン構造物の解析と門形ラーメン構造物の最小重量設計の例を示す。

（1）４径間連続ラーメン構造物の解析

Fig. 4 a に示すラーメン構造物の解析を、本論文の方法と式（5）の積分をシンプソン法により行なった場合の両方で行い、結果を比較した。脚部材は、下端が断面Ａ、上端が断面Ｂの変断面部材であり、水平部材は、断面Ｂよりなる等断面部材である。

荷重載荷点の水平変位と計算時間をFig. 5 に示した。横軸はシンプソン法の分割数である。Ｎ＝８０の場合の結果と本論文の方法による結果を比較すると、水平変位の誤差は 0.1%であり、計算時間は６割程度になっている。すべて等断面部材で解析すると計算時間は113 msec（本論文の方法では115 msec）であるから、

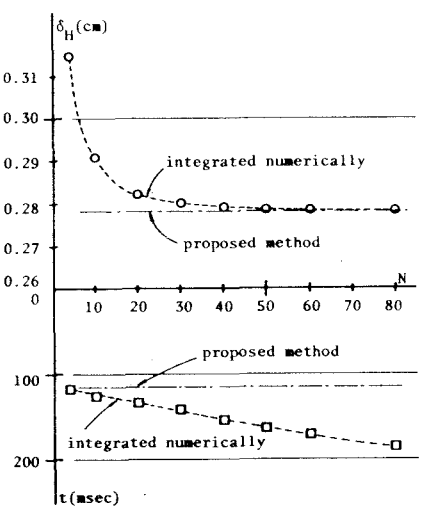
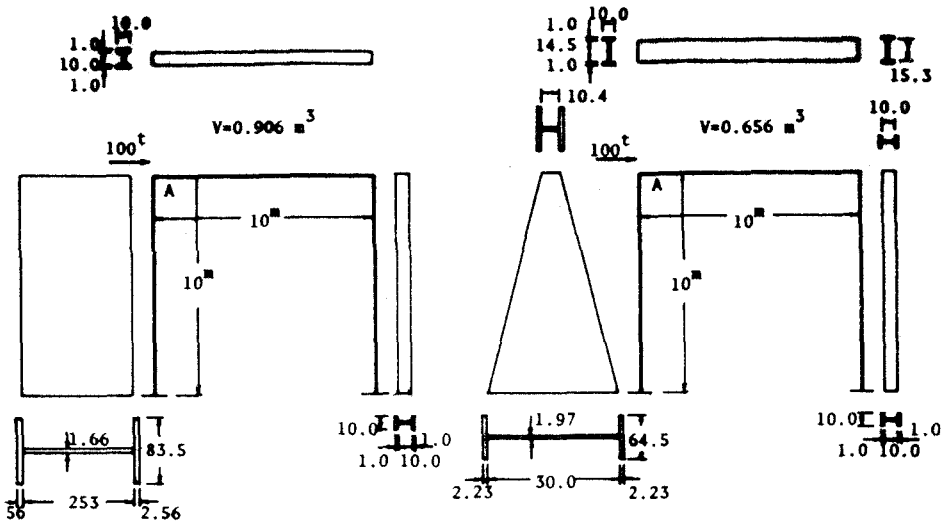


Fig.5 Displacement and computation time of both methods.



a. Equal cross section.　　b. Variable cross section.

Fig.6 Results of minimum weight design.

本論文の方法は十分実用的であると思われる。

（2）門形ラーメンの最小重量設計

Fig.6に示すラーメン構造物の最小重量設計を、部材が等断面部材の場合と変断面部材の場合について行い、結果をFig.6 a（等断面部材）およびFig.6 b（変断面部材）に示した。鋼材はSS41である。

荷重載荷側の脚に剛性が配分され、反対側の脚の断面の各寸法はそれぞれの下限値で決定されている。目的関数（総容積；V）を比較すると、変断面部材で設計する方が3割程鋼重が減少している。

5．結論

変断面部材を要素に持つ平面骨組構造物の最小重量設計のために、近似構造解析法、その最適化問題の定式化およびそれらを用いた数値計算例を示した。

部材軸座標の3次以上の多項式で表される断面積および断面2次モーメントの2次近似による構造解析法は、計算時間は等断面部材のみよりなる構造物の解析とほとんど差がなく、精度も実用上十分であると考えられる。また、門形ラーメン構造を等断面部材と変断面部材で設計した結果、後者の方が鋼重はかなり少ないことが示された。

参考文献

1) Braivant,V. and C.Fleury:Some applications of dual methods to optimal design of elastic structures, Engg. Struct., Vol.6, pp.19～25, January, 1984.　2) Lust,R.V. and L.A.Schmit: Alternative Approximation Concepts for Space Frame Synthesis, AIAA/ASME/ASCE/AHS 26th.Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, pp.333～348, April, 1985.　3) 森口繁一　他2名：数学公式Ⅰ、岩波書店、1968.　4) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説　II 鋼橋編、丸善株式会社、1980.　5) Vanderplaats,G.N. and H.Sugimoto:A General-Purpose Optimization Program for Engineering Design, Journal of Computers and Structures, will be published.　6) Vanderplaats,G. N. and H.Sugimoto:Application of variable metric methods to structural synthesis, Engineering Computations, Vol.2, No.2, pp.96～100, 1985.