



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



## 鉄筋コンクリート矩形版の挫屈荷重(第1報)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-05-20 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 佐伯, 利吉 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3011">http://hdl.handle.net/10258/3011</a>

# 鐵筋コンクリート矩形版の挫屈荷重 (第1報)

佐 伯 利 吉

## Buckling Loads of Rectangular Reinforced Concrete Slabs (1)

Rikichi Saheki

### Abstract

Rectangular reinforced concrete slabs with uniform thickness may be considered orthogonally anisotropic plates. Adopting H. Marcus' assumptions on the elastic properties, in this paper, are reduced the formulae for the buckling loads of plates of this kind subjected to uniform pressures on two pairs of sides.

Also their numerical values corresponding to various boundary conditions, side length ratios and rigidity ratios are tabulated to the aid of designing such structural members.

### I. ま え が き

矩形版の挫屈についてはすでに多くの研究があるが、主として isotropic plate に關するもので anisotropic plate として各種の場合における挫屈荷重の數値を廣く算出したものは少い。しかるに鐵筋コンクリート版にあつては、直交2方向に鐵筋の量およびその配置層が異なるため、かような版は異方性板として取扱うのが一層合理的であると考えられる。

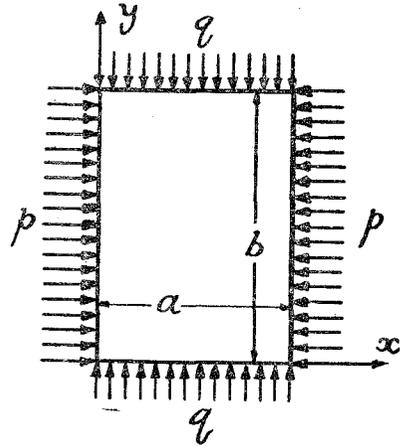
本稿においては問題を簡單にするため、版の厚さが一樣で、かつ兩邊各方向の鐵筋配置もまたそれぞれ一樣であるとする。すなわち鐵筋コンクリート矩形版を直交異方性板と假定して、邊に平行な一樣壓縮荷重による挫屈荷重の公式を求め、各種の兩方向荷重比に對し挫屈荷重が邊長比および版剛比によつていかに變化するかをあきらかにし、その數値表を作製して實際設計の便に資したいと思う。

この種問題では境界條件によつてその數學的操作や計算過程に著しい繁簡の別あることは周知のことであるが、まづ比較的簡單で應用の廣いものから始める。

II. 基本方程式

$a$   $b$  を邊長とする矩形版中心面の坐標軸を圖の  
 ようにとり、一様壓縮荷重  $p$  が  $x$  軸の方向に又  $q$   
 が  $y$  軸の方向に作用し、兩軸方向の版剛度が等し  
 くないときの板の撓み  $w$  はそれが厚さに比して小  
 さければ一般に次の式<sup>1)</sup>で表わされる。

圖-1



$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし  $D_1 = \frac{(EI)_x}{1-\nu_x \nu_y}$  :  $x$  方向の版の曲げ剛さ

$D_2 = \frac{(EI)_y}{1-\nu_x \nu_y}$  :  $y$  方向の版の曲げ剛さ

$\nu_x, \nu_y$  : それぞれ  $x$  および  $y$  方向の Poisson's Ratio

$D_3 = \frac{1}{2}(\nu_x D_2 + \nu_y D_1) + 2(GI)_{xy}$

$2(GI)_{xy}$  : Torsional rigidity

また H.Marcus<sup>2)</sup>は  $E = \text{const.}$  かつ  $\nu$  は兩方向に等しいものとして、次の関係を出してい  
 る。

$$D_1 = \frac{EI_x}{1-\nu^2}, \quad D_2 = \frac{EI_y}{1-\nu^2}, \quad D_3 = \frac{E(I_x + I_y)}{2(1-\nu^2)}$$

これには異論もあるがなお將來の實驗結果にまつべきもので、今はこれに従う。

よつて

$$I_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (I_x + I_y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + I_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1-\nu^2}{E} \left( p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

あるいは

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1+k^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{1-\nu^2}{EI_x} \left( p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ただし  $k^2 = \frac{I_y}{I_x}$

さらに

$$P = \frac{p a^2 (1-\nu^2)}{\pi^2 EI_x} \quad (\text{dimension の無い數})$$

1) M.T.Huber: Bauing. 1923, Heft 12 u. 13.

2) H.Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, s. 105.

とすれば (2) 式は次のようになる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1+k^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{P\pi^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ただし  $\alpha = \frac{q}{p}$

今後この公式を使用する。なお以下においては  $b \geq a$  を採ることとするらか  $I_x \geq I_y$  したがつて  $k^2 \leq 1$  である。

### III. 四邊共に單純に支承される場合

この場合はすべての境界條件は

$$w = A \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (4)$$

$$A = \text{const. } (m, n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots)$$

によつて満足される。

これを (3) 式に代入すれば

$$A \left\{ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} + (1+k^2) \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + k^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{P\pi^2}{a^2} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \alpha \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \right\} \times \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$

を得る。(4) 式が恒等的に零でないためには

$$\frac{m^4}{a^4} + (1+k^2) \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + k^2 \frac{n^4}{b^4} - \frac{P}{a^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \alpha \frac{n^2}{b^2} \right) = 0$$

これより

$$P = \frac{m^4 + (1+k^2) m^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + k^2 n^4 \frac{a^4}{b^4}}{m^2 + \alpha n^2 \frac{a^2}{b^2}} \dots\dots\dots (5)$$

$P$  を捩屈荷重と呼ぶことにする。

#### 1. $\alpha \leq 1$ の場合

このときは  $P$  の最小値は  $m=1, n=1$  のとき起る。すなわち捩屈面は  $xy$  兩方向とも半波形となり

$$P_{\min} = \frac{1 + (1+k^2) \frac{a^2}{b^2} + k^2 \frac{a^4}{b^4}}{1 + \alpha \frac{a^2}{b^2}} \dots\dots\dots (6)$$

ちなみに、 $k^2=1$  すなわち  $I_y=I_x$  のときは

$$P_{\min} = \frac{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}{1 + \alpha \frac{a^2}{b^2}}$$

さらに  $b = \infty$  では

$$P_{\min} = 1$$

したがって

$$p_{\min} = \frac{\pi^2 EI_x}{(1-\nu^2)a^2} = \frac{\pi^2 EI_x}{a^2}, \quad (\nu=0 \text{ とすれば})$$

これは長さ  $a$  なる一様断面の棒に対する Euler 屈曲荷重である。

公式 (6) によつて  $P_{\min}$  の値を  $\alpha=0$ ,  $\alpha=0.5$  及び  $\alpha=1$  として計算したのが、それぞれ表-1(A), 圖表-1(A); 表-1(B), 圖表-1(B) および表-1(C), 圖表-1(C) である。

表-1(A) 公式 (6) による  $P_{\min}$  の値 ( $q=0$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	4.000	3.230	2.690	2.086	1.760	1.563	1.346	1.235	1.170	} 1.000
0.9	3.800	3.087	2.585	2.022	1.716	1.531	1.327	1.222	1.161	
0.8	3.600	2.943	2.480	1.958	1.673	1.500	1.308	1.210	1.152	
0.7	3.400	2.800	2.375	1.894	1.630	1.469	1.290	1.198	1.143	
0.6	3.200	2.657	2.270	1.830	1.586	1.438	1.271	1.185	1.135	
0.5	3.000	2.514	2.165	1.766	1.543	1.406	1.253	1.173	1.126	
0.4	2.800	2.370	2.060	1.701	1.500	1.375	1.234	1.160	1.117	

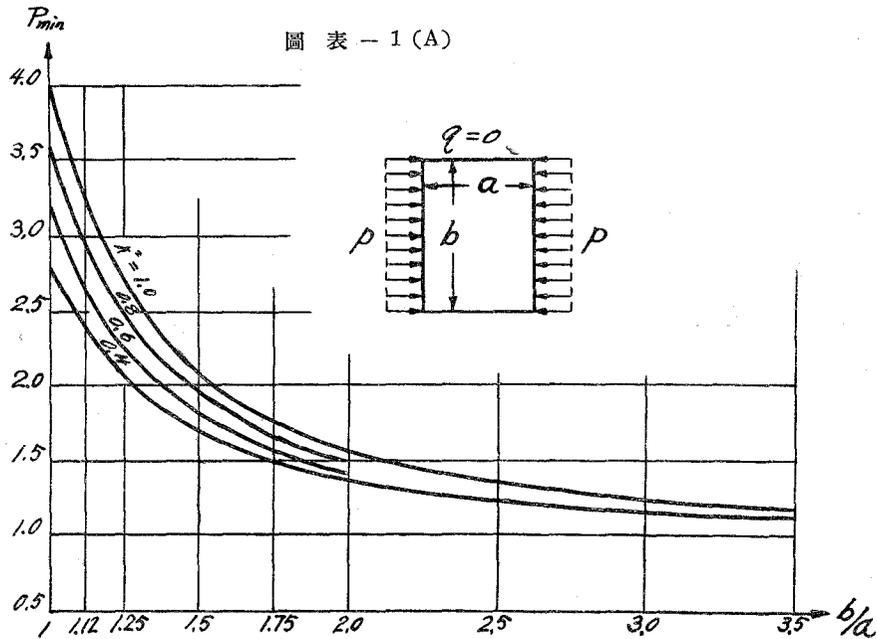


表-1 (B) 公式 (6) による  $P_{min}$  の値 ( $q=0.5p$ )

$k^2$ \ $b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	2.667	2.309	2.038	1.707	1.513	1.389	1.246	1.170	1.124	} 1.000
0.9	2.533	2.207	1.958	1.655	1.475	1.361	1.229	1.158	1.116	
0.8	2.400	2.105	1.879	1.602	1.438	1.333	1.212	1.146	1.107	
0.7	2.267	2.002	1.799	1.550	1.401	1.306	1.194	1.135	1.099	
0.6	2.133	1.900	1.720	1.497	1.364	1.278	1.177	1.123	1.090	
0.5	2.000	1.797	1.640	1.444	1.327	1.250	1.160	1.111	1.082	
0.4	1.867	1.695	1.560	1.392	1.289	1.222	1.143	1.099	1.073	

圖表 - 1 (B)

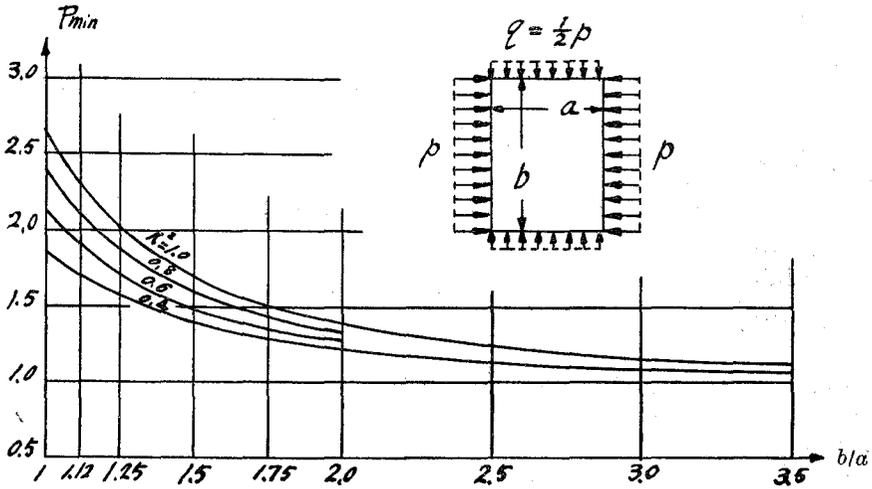
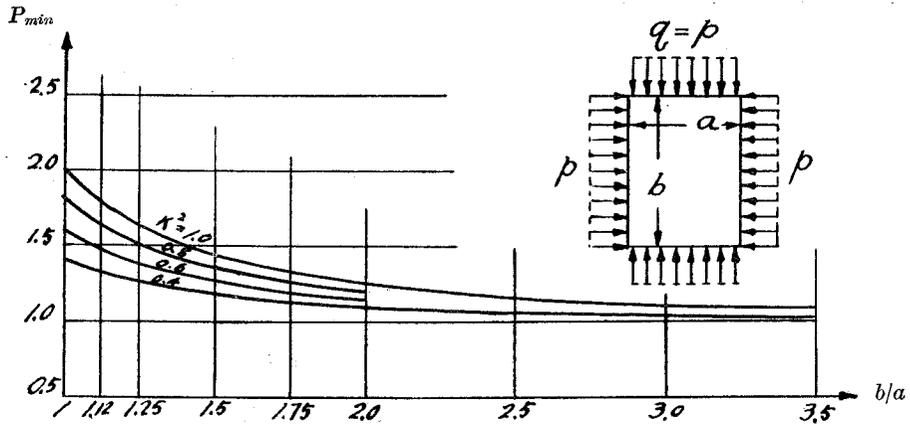


表-1 (C) 公式 (6) による  $P_{min}$  の値 ( $q=p$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	2.000	1.797	1.640	1.444	1.327	1.250	1.160	1.111	1.082	} 1.000
0.9	1.900	1.717	1.576	1.400	1.294	1.225	1.144	1.100	1.073	
0.8	1.800	1.638	1.512	1.356	1.261	1.200	1.128	1.089	1.065	
0.7	1.700	1.558	1.448	1.311	1.229	1.175	1.112	1.078	1.057	
0.6	1.600	1.478	1.384	1.267	1.196	1.150	1.096	1.067	1.049	
0.5	1.500	1.399	1.320	1.222	1.163	1.125	1.080	1.056	1.041	
0.4	1.400	1.319	1.256	1.178	1.131	1.100	1.064	1.044	1.033	

圖表 - 1 (C)



2.  $\alpha > 1$  の場合

特に  $p=0$  では  $\alpha = \infty$  となるから (5) 式を用いることができない。このときは  $P$  の代りに

$$Q = \frac{qa^2(1-\nu^2)}{\pi^2 EI_x}$$

を挫屈荷重とすれば

$$P = \beta Q, \quad \alpha P = Q \quad \text{ただし} \quad \beta = \frac{p}{q}$$

であるから、

$$Q = \frac{m^4 + (1+k^2)m^2n^2 \frac{a^2}{b^2} + k^2n^4 \frac{a^4}{b^4}}{\beta m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}} \dots\dots\dots (7)$$

これは  $m=1$  で最小であるから

$$Q_{\min} = \frac{1 + (1+k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} + k^2 n^4 \frac{a^4}{b^4}}{\beta + n^2 \frac{a^2}{b^2}} \dots\dots\dots (8)$$

$n$  については  $\beta$  及び  $k^2$  の値に応じて次の関係式 (9) によつて  $n$  から  $n+1$  に移行して  $Q$  の最小値が得られる。すなわち  $b/a$  が増すときは  $y$  方向には挫屈面の半波形数が増して挫屈を起すのである。

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{2k^2 n^2 (n+1)^2}{\sqrt{\beta^2 k^4 \{n^2 + (n+1)^2\}^2 - 4k^2 n^2 (n+1)^2 \{\beta(1+k^2) - 1\} - \beta k^2 \{n^2 + (n+1)^2\}}} \dots\dots\dots (9)$$

この値が存在するには

$$\beta(1+k^2) < 1$$

なることを要する。

i)  $\beta=0.5$  すなわち  $p=0.5q$  のとき

$\beta \leq 0.5$  において  $k^2$  のすべての値に對して (9) 式の  $b/a$  があり、 $n=1$  より  $n=2$  に移る點は次の表のごとくである。

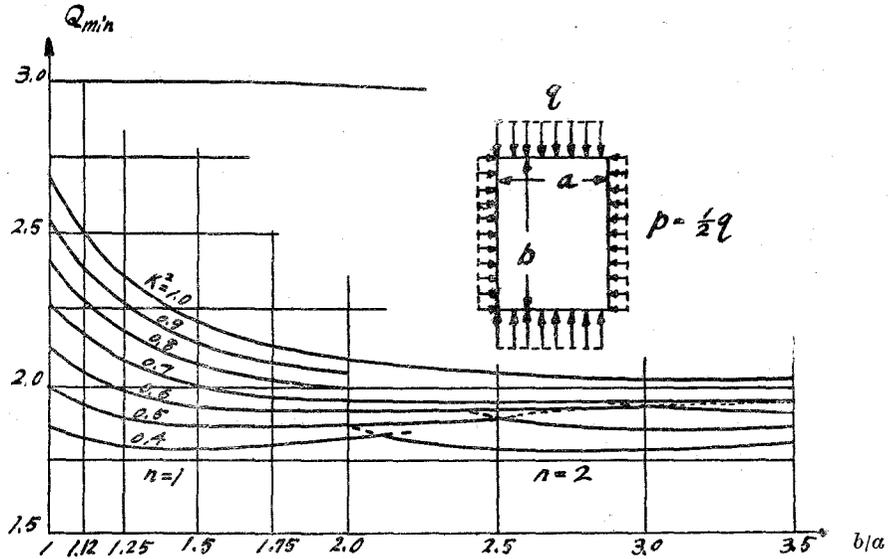
$k^2$	0.7	0.6	0.5	0.4
$b/a$	3.62	2.98	2.51	2.12

(8) 式によつて  $Q_{\min}$  の値を求めると 表-1 (D) および 圖表-1 (D) を得る。

表-1 (D) 公式 (8) による  $Q_{\min}$  の値 ( $p=0.5q$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	2.667	2.490	2.359	2.209	2.129	2.083	2.039	2.020	2.011	2.000
0.9	2.533	2.379	2.267	2.141	2.077	2.042	2.011	2.000	1.996	1.995
0.8	2.400	2.269	2.175	2.073	2.024	2.000	1.983	1.980	1.981	1.980
0.7	2.267	2.159	2.083	2.005	1.972	1.958	1.954	1.960	1.966	1.954
0.6	2.133	2.048	1.991	1.937	1.919	1.917	1.926	1.937	1.919	1.917
0.5	2.000	1.938	1.899	1.869	1.867	1.875	1.898	1.869	1.867	1.866
0.4	1.867	1.827	1.807	1.801	1.815	1.833	1.807	1.801	1.815	1.800

圖 表 - 1 (D)



圖表によつてあきらかなごとく、 $k^2$  の特定の値において  $Q_{min}$  は  $b/a$  が増すと漸減し極小値を経てさらに増加するが、上記の點で半波形式が1つ多い挫屈面の形をとつて再び降下する。

その極小値は

$$Q_{min}(k^2) = 1 + \sqrt{k^2(2 - k^2)}$$

で與えられ、最初に起る  $b/a$  の値とともに下表のようになる。

$k^2$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
$Q_{min}(k^2)$	2.000	1.995	1.980	1.954	1.917	1.866	1.800
$b/a$	$\infty$	4.353	2.983	2.348	1.947	1.653	1.414

ii)  $\beta=0$  すなわち  $p=0$  のとき

式(8)から求めた  $Q_{min}$  の値が表-1(E)および圖表-1(E)である。この場合挫屈面の  $y$  方向における半波形式が  $n$  から  $n+1$  に移る  $b/a$  の値は

$$\frac{b}{a} = \sqrt{kn(n+1)}$$

で定まり、次表のごとくなる。

$n \backslash k^2$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
1	1.414	1.377	1.338	1.294	1.224	1.189	1.125
2	2.449	2.386	2.317	2.241	2.156	2.060	1.948
3	3.464	3.374	3.276	3.169	3.049	2.913	2.755

また特定の  $k^2$  についての極小値  $Q_{\min}(k^2)$  は

$$Q_{\min}(k^2) = (1+k^2)$$

であつて、その最初におこる  $b/a$  の値とともに下表に挙げる。

$k^2$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
$Q_{\min}(k^2)$	4.000	3.791	3.589	3.373	3.149	2.914	2.665
$b/a$	1.000 (2.000)*	1.891	1.891	1.829	1.760	1.682	1.591

\* 第2回目におこる値

表-1 (E) 公式 (8) による  $Q_{\min}$  の値 ( $p=0$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	4.000	4.052	4.203	4.340	4.072	4.000	4.134	4.000	4.072	4.000
0.9	3.800	3.872	4.039	4.063	3.841	3.800	3.890	3.800	3.841	3.797
0.8	3.600	3.692	3.875	3.785	3.611	3.600	3.646	3.600	3.611	3.589
0.7	3.400	3.512	3.711	3.507	3.380	3.400	3.402	3.400	3.380	3.373
0.6	3.200	3.333	3.527	3.229	3.149	3.200	3.158	3.200	3.149	3.149
0.5	3.000	3.153	3.171	2.951	2.919	3.000	2.914	2.951	2.919	2.914
0.4	2.800	2.973	2.815	2.674	2.688	2.744	2.670	2.674	2.688	2.665

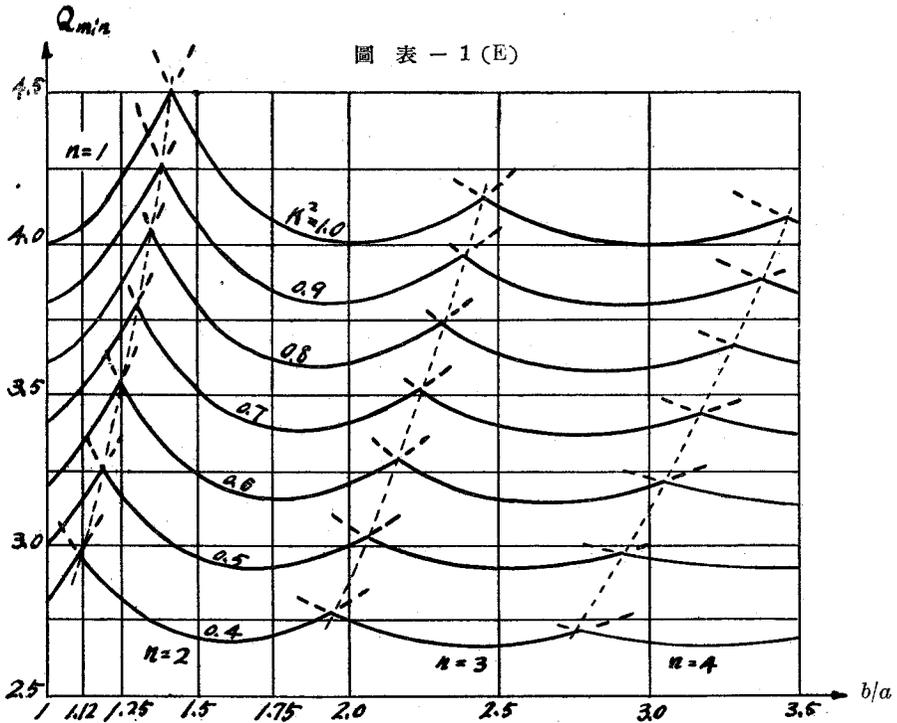
#### IV. 邊 $x=0$ および $x=a$ が固定せられ 他の2邊が單純に支承される場合

この場合には、 $X_n$  を  $x$  のみの函数とし

$$w = X_n \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (10)$$

と置けば、 $y=0$  および  $y=b$  に對する境界條件は満足せられるから、これを基本微分方程式に代入すれば、

$$\left\{ \frac{d^4 X_n}{dx^4} - (1+k^2) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + k^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} X_n + \frac{P \pi^2}{a^2} \left( \frac{d^2 X_n}{dx^2} - \alpha \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X_n \right) \right\} \times \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$



これから

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - \left\{ (1+k^2) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - P \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \left( k^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \alpha P \frac{n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \right) X_n = 0 \dots (11)$$

未知函数  $X_n$  はこの方程式を  $x=0$  および  $x=a$  に対する境界条件が満足されるように解くことで決定される。(11) 式の特性方程式は

$$\mu^4 - \left\{ (1+k^2) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - P \frac{\pi^2}{a^2} \right\} \mu^2 + \left( k^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \alpha P \frac{n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \right) = 0$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{1}{2} \left[ \left( (1+k^2) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - P \frac{\pi^2}{a^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left\{ (1+k^2) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - P \frac{\pi^2}{a^2} \right\}^2 - 4 \left\{ k^2 \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \alpha P \frac{n^2 \pi^4}{a^2 b^2} \right\}} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2a^2} \left[ \left( (1+k^2) n^2 \frac{a^2}{b^2} - P \right) \pm \sqrt{\left\{ (1+k^2) n^2 \frac{a^2}{b^2} - P \right\}^2 - 4 \left\{ k^2 n^4 \frac{a^4}{b^4} - \alpha P n^2 \frac{a^2}{b^2} \right\}} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{a^2} \left\{ \lambda_n^2 \right. \\ &\quad \left. \lambda_n'^2 \right\} \end{aligned}$$

とおけば次の4つの根をえる。

$$\pm \frac{\pi \lambda_n}{a}, \pm \frac{\pi \lambda'_n}{a}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n \\ \lambda'_n \end{aligned} \right\} = \frac{1}{1/2} \sqrt{(1+k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} - P \pm \sqrt{\{(1+k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} - P\}^2 - 4 \{k^2 n^4 \frac{a^4}{b^4} - \alpha P n^2 \frac{a^2}{b^2}\}}} \dots\dots\dots (12)$$

よつて (11) 式の一般解は、 $\lambda_n \neq \lambda'_n$  ならば

$$X_n = A e^{\frac{\pi \lambda_n x}{a}} + B e^{-\frac{\pi \lambda_n x}{a}} + C e^{\frac{\pi \lambda'_n x}{a}} + D e^{-\frac{\pi \lambda'_n x}{a}}$$

積分常数  $A, B, C, D$  は邊  $x=0$  および  $x=a$  に對する境界條件によつて定められる。

上記の解は別に次のごとく書くことができる

$$\begin{aligned} X_n = A \cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + B \sinh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + A' \cosh \pi \lambda'_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \\ + B' \sinh \pi \lambda'_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

したがつて

$$\begin{aligned} w = \left\{ A \cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + B \sinh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + A' \cosh \pi \lambda'_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \right. \\ \left. + B' \sinh \pi \lambda'_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

境界條件

$$\left. \begin{aligned} x=0 \\ x=a \end{aligned} \right\} \quad \text{で} \quad \left\{ \begin{aligned} w=0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \end{aligned} \right. \quad \text{から}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n + B \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n + A' \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_n + B' \sinh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \\ A \lambda_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n + B \lambda_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n + A' \lambda'_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda'_n + B' \lambda'_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \\ A \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n - B \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n + A' \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_n - B' \sinh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \\ A \lambda_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n - B \lambda_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n + A' \lambda'_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda'_n - B' \lambda'_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \end{aligned} \right\}$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} A \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n + A' \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \\ A \lambda_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n + A' \lambda'_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \\ B \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n + B' \sinh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \\ B \lambda_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n + B' \lambda'_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda'_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (a)$$

この解の1つとして

$$A=0, B=0, A'=0, B'=0$$

を得るが、この場合には  $w$  は恒等的に零となり、挫屈は起らないこととなるから、この場合を除外して (a) の関係が成立つためには

$$\begin{vmatrix} \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n & \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n' \\ \lambda_n \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n & \lambda_n' \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n & \sinh \frac{\pi}{2} \lambda_n' \\ \lambda_n \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n & \lambda_n' \cosh \frac{\pi}{2} \lambda_n' \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

なることを要する。

あるいは整理して

$$\lambda_n \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n - \lambda_n' \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n' = 0 \dots\dots\dots (16)$$

または

$$\lambda_n' \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n - \lambda_n \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_n' = 0 \dots\dots\dots (17)$$

のいずれかが必要である。

$\lambda_n, \lambda_n'$  には  $P$  が含まれているから、この式を解くことによつて  $P$  の値を算出することができる。

式 (16) を採れば

$$B=0, B'=0$$

となるから

$$w = \left\{ A \cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + A' \cosh \pi \lambda_n' \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{b} y$$

しかるに

$$\cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{a-x}{a} \right) = \cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right)$$

なることから

$$w(a-x) = w(x) \dots\dots\dots (b)$$

すなわち圖 - 2 において  $C, C'$  2 點の撓みは  $x$  の値に拘わらず相等しい。ゆえに (16) 式は挫屈面が  $x$  の方向に中心線  $x=a/2$  に関して對稱的となるとききの挫屈條件式であり、

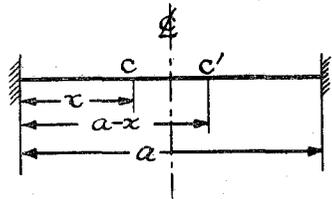
また (17) 式をとれば

$$A=0, A'=0$$

$$w(a-x) = -w(x) \dots\dots\dots (c)$$

となるから、(17) 式は挫屈面が中心線  $x=a/2$  に関して斜對稱的となる場合の條件式なるこ

圖 - 2

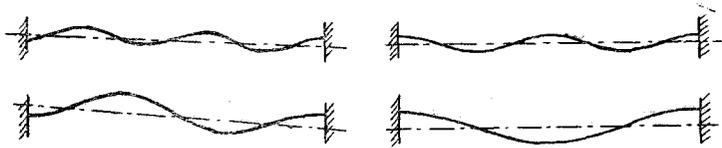


とを知る。

圖 - 3

斜對稱型

正對稱型



すなわち (16) 式より得られる捩屈荷重は捩屈面が  $x$  方向に偶数の半波形を有するときの値で、(17) 式によるものは奇数半波形の場合である。したがって、(16) および (17) により  $\alpha, k^2, b/a$  の特定値に對する捩屈荷重を求むるに當つては、 $n=1, 2, 3, \dots$  (捩屈面の  $y$  方向の半波形數) に對する (16) および (17) 式のそれぞれの根  $P_1, P_2, P_3, \dots$  および  $P_1', P_2', P_3', \dots$  の内最小のものが第 1 次の捩屈荷重  $P_{\min}$  である。

なお (12) 式は

$$\left. \begin{matrix} \lambda_n \\ \lambda_n' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\varphi \pm \sqrt{\theta}} \dots\dots\dots (d)$$

の形に書けるが、(16) 又は (17) 式を解くに當つては一應  $\theta \geq 0$  の 3 つの場合を別に考えて置く必要がある。

a)  $\theta > 0$  のときは  $\lambda_n \neq \lambda_n'$  であつてこの假定のもとに (16) および (17) 式が導かれたのである。

b)  $\theta = 0$  のときは  $\lambda_n' = \lambda_n$  したがつて

$$w = \left[ A \cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + B \sinh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + x \left\{ A' \cosh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + B' \sinh \pi \lambda_n \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) \right\} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y$$

となり、境界条件を用いて積分常數のすべてが零でないために

$$(\sinh \pi \lambda_n + \pi \lambda_n) (\sinh \pi \lambda_n - \pi \lambda_n) = 0$$

が必要となる。第 1 因數をとれば捩屈面が  $x$  方向に中心線に關して對稱的な場合に、また第 2 因數をとれば斜對稱的な場合に當る筈であるが、いずれも  $\lambda_n = 0$  以外に解はない。しかるに  $\lambda_n' = \lambda_n = 0$  に對する特定方程式の 4 根は等しくなるから

$$w = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3) \sin \frac{n\pi}{b} y$$

となつて、 $A = B = C = D = 0$  の他には常數間の關係は得られない。

c)  $\theta < 0$  のときは

$$\left. \begin{matrix} \lambda_n \\ \lambda_n' \end{matrix} \right\} = \sqrt{\varphi \pm i\psi} = \theta \pm i\psi \quad \text{ただし } \theta \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} + \varphi}{2}}, \quad \psi \equiv \sqrt{\frac{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2} - \varphi}{2}}$$

よつて (16) および (17) 式は

$$\Psi \sinh \pi\theta \pm \theta \sin \pi\Psi = 0$$

となる。あるいは

$$\frac{\theta}{\sinh \pi\theta} = \pm \frac{\Psi}{\sin \pi\Psi}$$

これもまた  $\theta = \Psi = 0$  したがつて  $\lambda_n' = \lambda_n = 0$  の他に解はない。

結局  $\theta > 0$  の場合のみ解が得られるから挫屈荷重を求むるには (16) または (17) 式の根を求むればよい。一般にこれらの式が解を有するためには少くとも 1 項は三角函数とならねばならぬから、(d) 式において  $\varphi - \sqrt{\theta} < 0$  すなわち

$$\sqrt{\theta} > \varphi \dots\dots\dots (e)$$

これは  $\theta > 0$  とともに  $P$  の下界を定めることになる。

1.  $\alpha = 1$  すなわち  $q = p$  の場合

(12) 式より

$$\lambda_n = n \frac{a}{b}, \quad \lambda_n' = \sqrt{k^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} - P}$$

これを (16) 式に入れると

$$n \frac{a}{b} \tanh \frac{\pi}{2} n \frac{a}{b} - \sqrt{k^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} - P} \tanh \frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} - P} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

とくに  $k^2 = 1$  に對しては

$$\lambda_n = n \frac{a}{b}, \quad \lambda_n' = \sqrt{n^2 \frac{a^2}{b^2} - P}$$

したがつて

$$n \frac{a}{b} \tanh \frac{\pi}{2} n \frac{a}{b} - \sqrt{n^2 \frac{a^2}{b^2} - P} \tanh \frac{\pi}{2} \sqrt{n^2 \frac{a^2}{b^2} - P} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

となり井口博士の公式<sup>3)</sup>と一致する。

この場合の  $P_{\min}$  は挫屈面が  $x$  方向に単一波形のと き得られることは計算によつてあきらかであるから、(16)式を用いた (18) 式によつて  $P_{\min}$  が求められる。その第 2 項が三角函数であるためには

$$P > k^2 n^2 \frac{a^2}{b^2}$$

ゆゑに

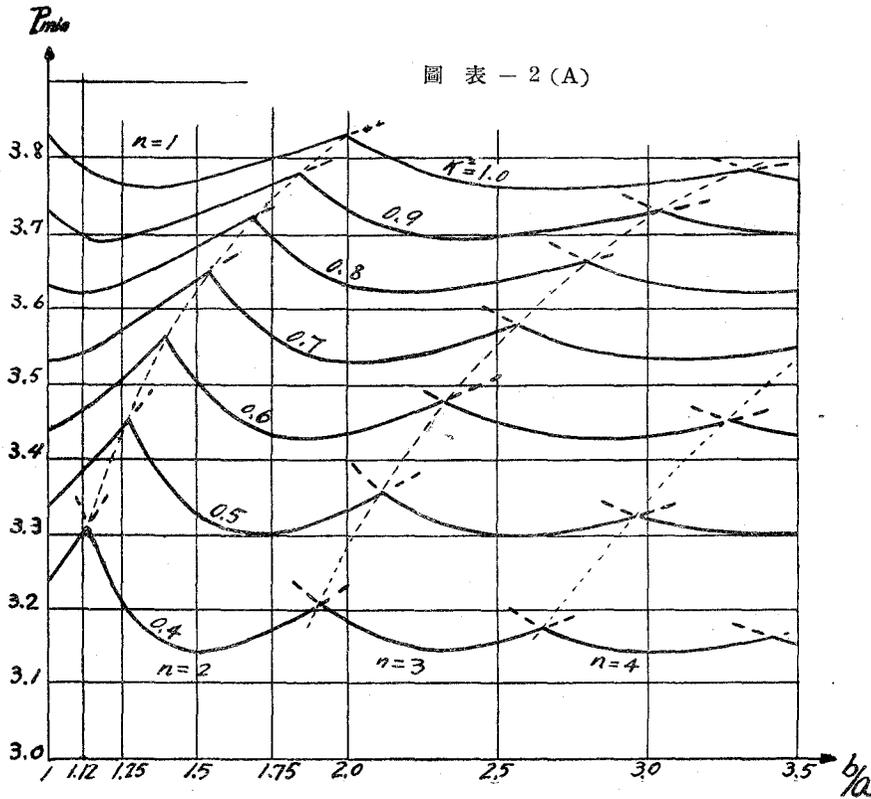
3) 北大紀要 vol. 4 (1938) No. 4, P.348

$$n \frac{a}{b} \tanh \frac{\pi}{2} n \frac{a}{b} + \sqrt{P - k^2 n^2 \frac{a^2}{b^2}} \tan \frac{\pi}{2} \sqrt{P - k^2 n^2 \frac{a^2}{b^2}} = 0 \dots\dots (18)'$$

これで得られた  $P_{min}$  を表-2(A) および 圖表-2(A) に示す。

表-2(A) 公式 (18)' による  $P_{min}$  の値 ( $q=p$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	3.830	3.778	3.759	3.768	3.795	3.825	3.759	3.768	3.768	3.757
0.9	3.730	3.698	3.695	3.724	3.763	3.730	3.695	3.724	3.694	3.694
0.8	3.630	3.619	3.631	3.679	3.690	3.630	3.631	3.630	3.621	3.618
0.7	3.530	3.539	3.567	3.635	3.559	3.530	3.567	3.530	3.547	3.530
0.6	3.430	3.459	3.503	3.498	3.429	3.430	3.441	3.430	3.429	3.424
0.5	3.330	3.379	3.439	3.320	3.298	3.330	3.297	3.320	3.298	3.297
0.4	3.230	3.300	3.212	3.142	3.168	3.173	3.153	3.142	3.153	3.142



圖表において見るとく  $n$  については  $b/a$  が増大するに伴い、順次  $n=1, n=2, \dots$  に對して  $P_{\min}$  が得られる。すなわち  $y$  方向には漸次半波形の多い挫屈面を探ることとなるのであるが、 $\lambda_n, \lambda_n'$  が  $na/b$  の函數であるから各  $k^2$  に對する曲線は  $b/a$  の大くなるにつれて扁平となり、 $b/a=\infty$  における  $P_{\min}$  の極限值は下表に示す  $P_{\min}(k^2)$  の値をとる。表は  $k^2$  の特定値に對する  $P_{\min}$  の極小値およびその最初に起る  $b/a$  の概値である。

$k^2$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
$P_{\min}(k^2)$	3.757	3.694	3.618	3.530	3.424	3.297	3.141
$b/a$	1.33	1.19	1.09	1.00	1.85	1.70	1.50

2.  $\alpha=0$  ( $q=0$ ) の場合

(12) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n \\ \lambda_n' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} - P \pm \sqrt{\left\{ (1+k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} - P \right\} \left\{ (1-k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} - P \right\}}} \dots\dots\dots(20)$$

この場合は  $n=1$  に對する上式の  $\lambda_n, \lambda_n'$  を (16) 式に代入したときの根の最小値が第1次の挫屈荷重となり、 $x$  方向にも  $y$  方向にもともに単一波形の挫屈面をとる。

なお (e) 式により

$$P > (1+k)^2 \frac{a^2}{b^2}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \lambda \tan \frac{\pi}{2} \lambda - \lambda' \tan \frac{\pi}{2} \lambda' = 0 \\ \text{但し } \left. \begin{aligned} \lambda \\ \lambda' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{P - (1+k^2) \mp \sqrt{\left\{ P - (1+k^2)^2 \frac{a^2}{b^2} \right\} \left\{ P - (1-k^2)^2 \frac{a^2}{b^2} \right\}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)'$$

の根を求めることとなり、計算の結果表-2 (B) および 圖表-2 (B) が得られる。

$b/a=\infty$  においては

$$\sqrt{P} \tan \frac{\pi}{2} \sqrt{P} = 0$$

となり、 $P=0$  を除外して  $P_{\min} = 4$  を得る。

3.  $p=0$  の場合

このときは III-2. におけると同じく  $P$  の代りに  $Q$  を用いて (12) 式を書きかえると。

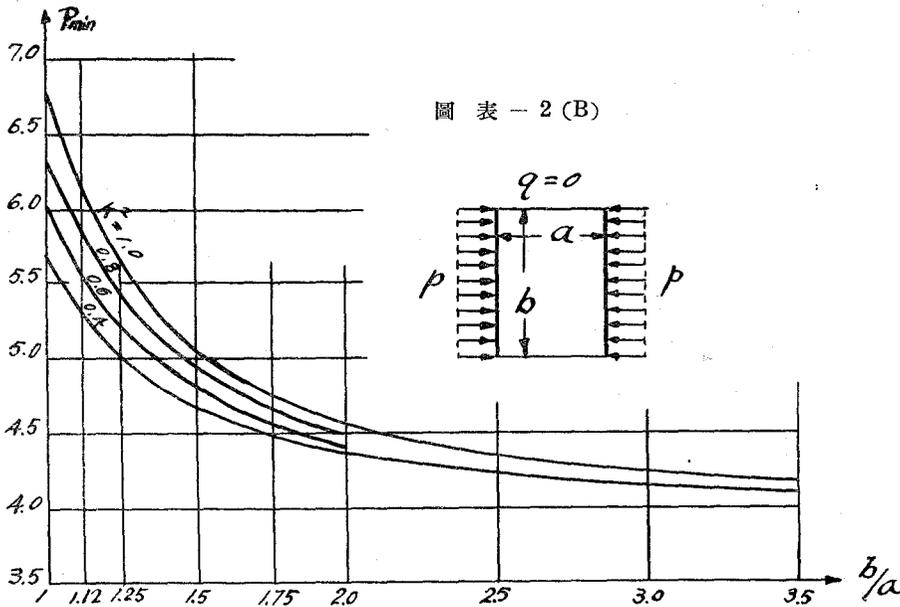
$$\left. \begin{aligned} \lambda_n \\ \lambda_n' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{b} \sqrt{(1+k^2)n^2 - \beta Q \pm \sqrt{\left\{ (1+k^2)n^2 - \beta Q \right\}^2 - 4n^2(k^2n^2 - Q)}}$$

これに  $\beta=0$  として

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n \\ \lambda_n' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1+k^2)n^2 \frac{a^2}{b^2} \pm n \frac{a}{b} \sqrt{(1-k^2)^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + 4Q}} \dots\dots\dots(21)$$

表-2 (B) 公式 (20)' による  $P_{min}$  の値 ( $q=0$ )

$k^2$ \ $b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	6.743	6.068	5.586	5.037	4.733	4.547	4.339	4.231	4.168	} 4.000
0.9	6.569	5.941	5.492	4.978	4.692	4.517	4.321	4.219	4.160	
0.8	6.396	5.814	5.397	4.918	4.652	4.488	4.303	4.207	4.151	
0.7	6.222	5.687	5.302	4.859	4.611	4.458	4.285	4.195	4.142	
0.6	6.048	5.560	5.208	4.800	4.570	4.428	4.268	4.183	4.134	
0.5	5.873	5.433	5.113	4.741	4.530	4.398	4.250	4.171	4.125	
0.4	5.699	5.306	5.019	4.681	4.489	4.369	4.232	4.159	4.116	



圖表 - 2 (B)

(e) 式によつて  $Q > k^2 n^2 a^2 / b^2$

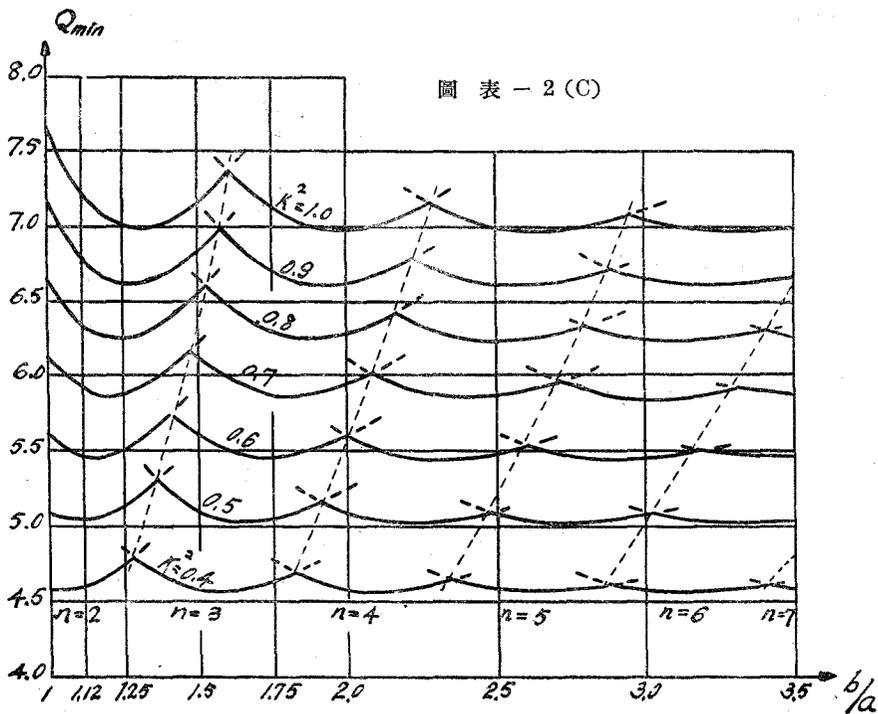
計算を行うと、すべての  $n$  および  $b/a$  の値に對して  $Q_{min}$  は式 (16) でえられるから、捩屈面は  $w$  の方向に單一波形をなす。 $y$  の方向については  $b/a=1$  においてすでに  $n=2$  のほう  $n=1$  よりも小なる  $Q$  を與え、 $b/a$  が増すにつれて  $n$  が大きくなつて  $Q_{min}$  がえらされる。計算の結果は表-2 (C) および 圖表-2 (C) に示すとうりである。

また各  $k^2$  について極小値  $Q_{min}(k^2)$  およびその最初に起る點  $b/a$  の概値は次表の通りである。

$k^2$	1.0	0.9	0.8	7.7	0.6	0.5	0.4
$Q_{min}(k^2)$	6.971	6.618	6.248	5.864	5.460	5.031	4.570
$b/a$	1.33	1.28	1.25	1.20	1.15	1.10	1.05

表-2 (C) 公式 (21) による  $Q_{min}$  の値 ( $p=0$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	7.691	7.220	6.999	7.117	7.112	6.971	6.999	7.055	6.998	6.971
0.9	7.174	6.783	6.623	6.818	6.699	6.627	6.623	6.658	6.677	6.618
0.8	6.657	6.345	6.248	6.531	6.287	6.282	6.248	6.262	6.266	6.248
0.7	6.139	5.907	5.872	6.139	5.877	5.937	5.872	5.865	5.874	5.864
0.6	5.621	5.469	5.497	5.621	5.460	5.596	5.497	5.467	5.460	5.460
0.5	5.102	5.031	5.121	5.102	5.047	5.102	5.102	5.070	5.047	5.031
0.4	4.584	4.594	4.745	4.584	4.633	4.584	4.584	4.584	4.584	4.570



曲線の模様は II-2. の  $p=0$  の場合と似ているが荷重方向の 2 邊を固定した本節の場合はこれを單純に支承せるときよりも  $n$  の増しかたが急速である。すなわち挫屈面の波長が小さくなる。

V. 邊  $y=0$  および  $y=b$  が固定せられ  
他の 2 邊が單純に支承される場合

この場合には

$$w = Y_m \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots (22)$$

と置いて前節と同様に扱うことが出来るから

$$\left. \begin{aligned} \lambda_m \\ \lambda_m' \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2k^2}} \frac{b}{a} \sqrt{(1+k^2)m^2 - \alpha P \pm \sqrt{\{(1+k^2)m^2 - \alpha P\}^2 - 4k^2m^2(m^2 - P)}} \dots\dots\dots (23)$$

として

$$w = \left\{ A \cosh \pi \lambda_m \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{b} \right) + B \sinh \pi \lambda_m \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{b} \right) + A' \cosh \pi \lambda_m' \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{b} \right) + B' \sinh \pi \lambda_m' \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{b} \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \dots\dots\dots (24)$$

が得られ、境界条件を用いて 4 個の積分常数のすべてが零でないために

$$\lambda_m \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_m - \lambda_m' \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_m' = 0 \dots\dots\dots (16)'$$

または

$$\lambda_m' \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_m - \lambda_m \tanh \frac{\pi}{2} \lambda_m' = 0 \dots\dots\dots (17)'$$

が必要であることもあきらかであり、またその意味も (16) および (17) と同様である。

1.  $\alpha=1$  すなわち  $q=p$  の場合

式 (23) から得られる

$$\lambda_m = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{m^2 - P}{k^2}}, \quad \lambda_m' = m \frac{b}{a}$$

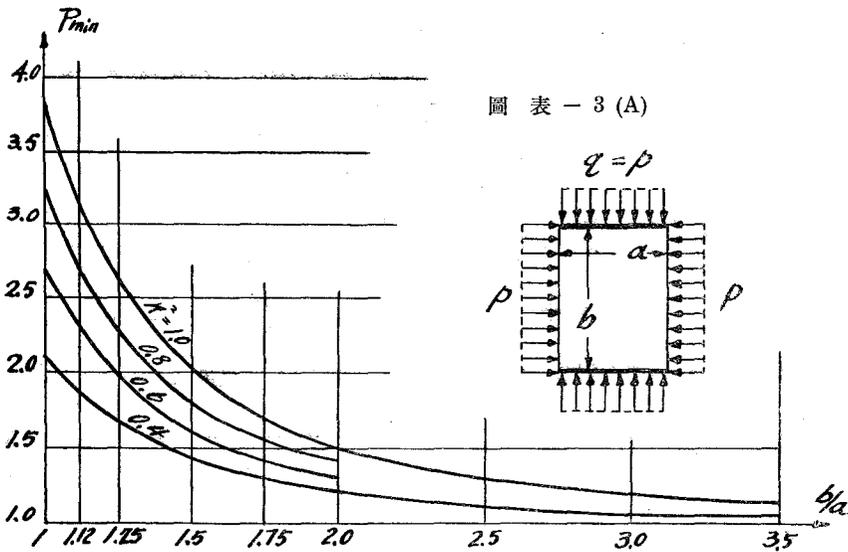
を (16)' 式に入れて

$$\sqrt{\frac{m^2 - P}{k^2}} \tanh \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} \sqrt{\frac{m^2 - P}{k^2}} - m \tanh \frac{\pi}{2} m \frac{b}{a} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

この場合には挫屈面が  $x, y$  兩方向ともに單一波形をなすとき  $P_{\min}$  が得られるから (16)' を用いたのであつて、 $m=1$  に對する計算値は表-3 (A) および 圖表-3 (A) に示す通りである。

表-3 (A) 公式 (25) による  $P_{min}$  の値 ( $q=p$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	3.830	3.131	2.613	2.010	1.679	1.481	1.273	1.177	1.120	1.000
0.9	3.547	2.918	2.452	1.909	1.611	1.433	1.246	1.159	1.108	
0.8	3.264	2.705	2.290	1.808	1.543	1.385	1.218	1.142	1.096	
0.7	2.981	2.492	2.129	1.707	1.475	1.337	1.191	1.124	1.084	
0.6	2.698	2.279	1.968	1.606	1.407	1.289	1.164	1.106	1.072	
0.5	2.415	2.066	1.806	1.505	1.339	1.241	1.137	1.089	1.060	
0.4	2.132	1.852	1.645	1.404	1.271	1.192	1.109	1.071	1.048	



圖表 - 3 (A)

2.  $\alpha=0$  すなわち  $q=0$  の場合

このときは

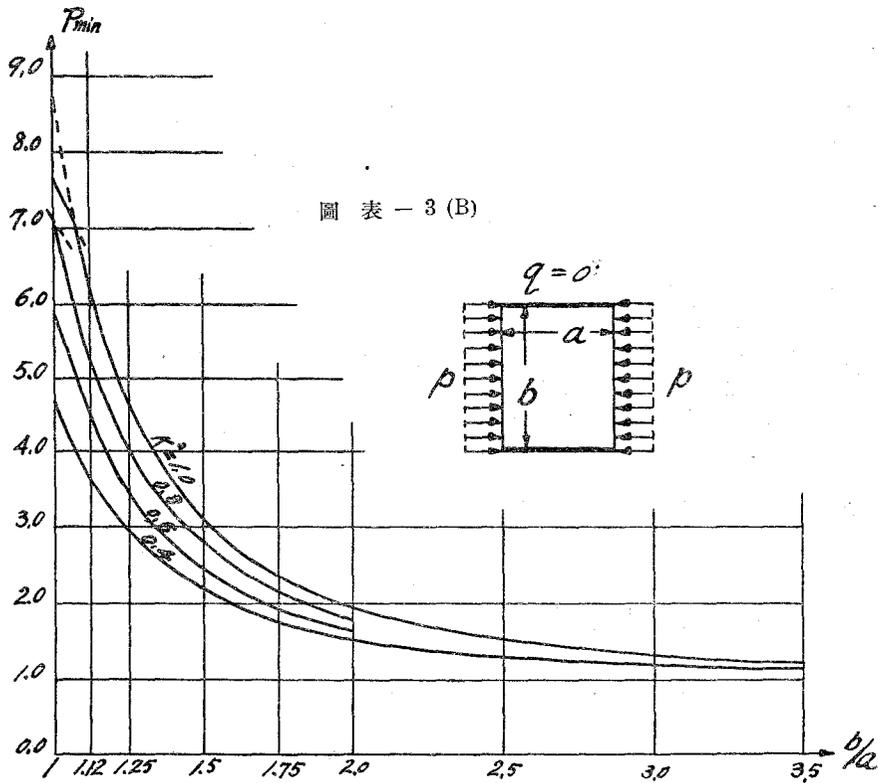
$$\left. \begin{matrix} \lambda_m \\ \lambda'_m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2k^2}} \frac{b}{a} \sqrt{(1+k^2)m^2 \pm \sqrt{(1-k^2)^2 m^4 + 4k^2 m^2 P}} \dots\dots\dots (26)$$

計算の結果  $y$  方向に単一波形のとき  $P_{min}$  がえられる。すなわち (16)' 式によるのであるが、 $x$  の方向については  $b/a=1$ ,  $k^2=1$  に對し  $m=2$  (2半波形) でまづ挫屈することを示す他はつねに  $m=1$  で  $P_{min}$  がえられる。

$P_{min}$  の下界は  $m^2$  に對應し、 $b/a=\infty$  における  $P_{min}$  の極限值は1となる。(26) より得た値は表-3 (B) および 圖表-3 (B) のごとくである。

表-3 (B) 公式 (26) による  $P_{min}$  の値 ( $q=0$ )

$k^2 \backslash b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	7.691	6.226	4.674	3.100	2.340	1.923	1.512	1.324	1.224	1.000
0.9	7.439	5.800	4.384	2.942	2.244	1.860	1.479	1.304	1.210	
0.8	7.187	5.373	4.094	2.785	2.148	1.797	1.446	1.285	1.197	
0.7	6.689	4.947	3.803	2.628	2.053	1.734	1.413	1.265	1.184	
0.6	6.049	4.520	3.513	2.471	1.954	1.670	1.380	1.245	1.171	
0.5	5.410	4.094	3.222	2.313	1.861	1.607	1.347	1.224	1.157	
0.4	4.769	3.667	2.930	2.155	1.765	1.543	1.314	1.204	1.144	



3.  $p=0$  の場合

この場合は  $P$  を  $Q$  で置きかえると

$$\left. \begin{matrix} \lambda_m \\ \lambda_m' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2k^2}} \frac{b}{a} \sqrt{(1+k^2)m^2 - Q \pm \sqrt{\{(1+k^2)m^2 - Q\} \{(1-k^2)m^2 - Q\}}} \dots \dots \dots (27)$$

計算によると、 $m=1$  すなわち  $x$  方向には単一波形で  $Q_{min}$  が與えられるが、 $y$  方向に

は  $b/a$  の増加につれて順次半波形数を増すことがわかる。

この際は  $Q > (1+k)^2$  であるから (16)' および (17)' 式は

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_m \tan \frac{\pi}{2} \lambda_m - \lambda_{m'} \tan \frac{\pi}{2} \lambda_{m'}) (\lambda_{m'} \tan \frac{\pi}{2} \lambda_m - \lambda_m \tan \frac{\pi}{2} \lambda_{m'}) = 0 \\ & \left. \begin{aligned} \lambda_m \\ \lambda_{m'} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2k^2}} \frac{b}{a} \sqrt{Q - (1+k^2) \pm \sqrt{\{Q - (1+k^2)\} \{Q - (1+k^2)\}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)'$$

となる。第1および第2因子を零と置いたものがそれぞれ (16)' および (17)' 式であるが、 $b/a$  の小なるときは (16)' によつて  $Q_{\min}$  がえられ  $b/a$  が増すと (17)' による  $Q$  が小くなり、さらに進むと再び (16)' による  $Q$  が小くなる。この半波形数を異にする境界線は兩式が同時に零となる点の軌跡であつて、最初に  $\lambda_{m'}=1$ ,  $\lambda_m=3$  次には  $\lambda_{m'}=2$ ,  $\lambda_m=4$  第3番には  $\lambda_{m'}=3$ ,  $\lambda_m=5$ .....で決められる。すなわち  $\lambda_{m'}$  と  $\lambda_m$  とかともに奇数となるか偶数となることにより  $\tan \frac{\pi}{2} \lambda_m$  と  $\tan \frac{\pi}{2} \lambda_{m'}$  とが同時に無限大もしくは零となるときである。故に一般に半波形数  $n$  から  $n+1$  に移る點は

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2k^2(n^2+1)}{Q-(1+k^2)} \quad \text{ただし} \quad Q = \frac{(1+k^2)(n^2-1)+2k(n^2+1)}{n^2-1}$$

特に  $k^2=1$  のときは

$$\frac{b}{a} = \sqrt{(n-1)(n+1)}$$

これは Timoshenko<sup>4)</sup> の  $b/a = \sqrt{m(m+2)}$  と同じ内容であるが、この場合は半波形数の最小を2と見るべきであるから上式をとる。

これによつて半波形数が  $n$  から  $n+1$  に移る點  $b/a$  は

$n \backslash k^2$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
2	1.73	1.69	1.64	1.58	1.52	1.46	1.38
3	2.83	2.76	2.68	2.59	2.49	2.38	2.25
4	3.87	3.77	3.66	3.56	3.42	3.27	3.08

(27)' 式によつて  $Q_{\min}$  を計算した値は 表-3 (C) および 圖表-3 (C) である。

$k^2$  の特定値に對し  $b/a$  が増すときの  $Q_{\min}$  は上記の點で不連続ではあるが單純に減小する。

なお  $b/a = \infty$  における極限值は

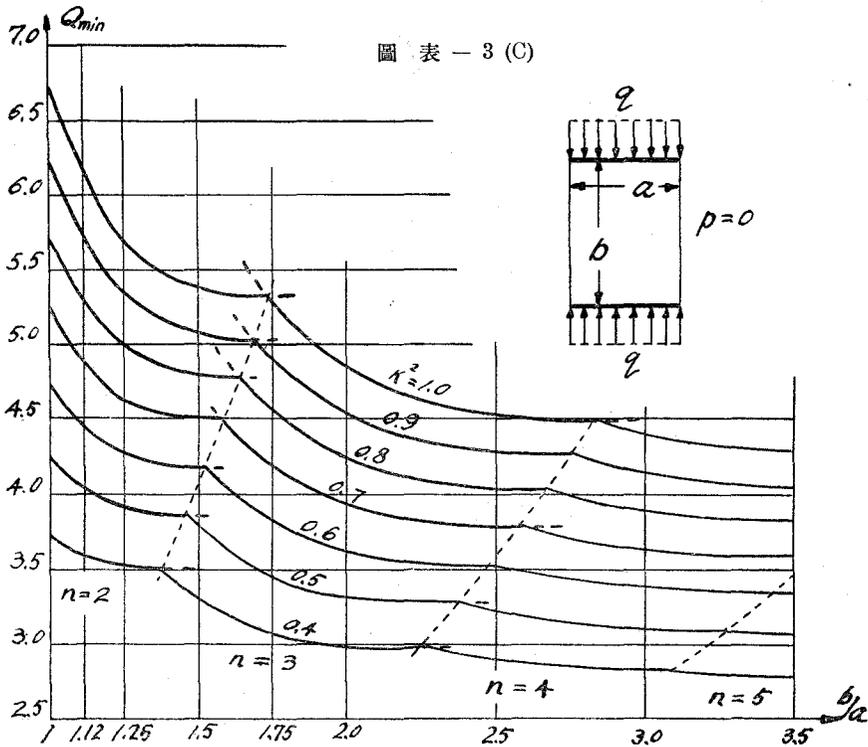
$$Q_{\min} = (1+k)^2$$

これは III-2.  $\beta=0$  の場合の極小値であつて同時にその  $b/a = \infty$  における極限值でもあるから、 $b/a = \infty$  では  $y=0$ ,  $y=b$  を固定した影響が消失するのは當然である。

#### 4) Theory of Elastic Stability

表-3 (C) 公式 (27)' による  $Q_{min}$  の値 ( $p=0$ )

$k^2$ \ $b/a$	1.00	1.12	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	3.50	$\infty$
1.0	6.743	6.116	5.704	5.375	5.290	4.847	4.520	4.406	4.279	4.900
0.9	6.242	5.693	5.345	5.085	4.922	4.541	4.283	4.151	4.055	3.791
0.8	5.741	5.270	4.985	4.791	4.554	4.235	4.040	3.894	3.828	3.589
0.7	5.240	4.847	4.623	4.491	4.186	3.927	3.792	3.635	3.597	3.373
0.6	4.737	4.424	4.259	4.182	3.817	3.618	3.531	3.373	3.337	3.149
0.5	4.236	4.002	3.892	3.772	3.448	3.308	3.211	3.107	3.062	2.914
0.4	3.732	3.579	3.517	3.308	3.077	2.994	2.886	2.834	2.779	2.665



VI. む す び

$P = pa^2(1-\nu^2)/\pi^2 EI_x$  の最小値を挫屈荷重と呼ぶこととしたが、これはもとより無名数（固有値）で力の dimension をもっていない。しかし圧縮力  $p$  は  $P$  に比例するから、版の寸法が同一で  $I_x$  が等しく、 $I_y$  の値を異にするものについて比較するときは、上乗の  $k^2$  による  $P_{min}$  の変化は  $p$  の critical value ( $p_{cr}$ ) の変化と見ることが出来る。 $a$  を同一に保つて  $b$  を変化する場合の邊長比  $b/a$  の影響についても同様である。

$k^2$  の影響は周邊條件にまた邊長比にも關し、ことに同一邊長比においても  $k^2$  により挫屈波形數を異にすることがあるから一層複雑となり、簡単な法則には従わない。

#### 附 記

本文の一部はさきに本學研究速報第1號に發表せられたが、これを整理追加したものである。

本稿を草するに當つては、井口學長から御指導を受けた所が極めて大きい。こゝに記して深く感謝の意を表す。

(昭和 26 年 2 月 8 日 受付)