振りもーめんとを受ける拱橋の新解法について

捩りもーめんとを受ける拱橋の新解法について★

中 村 作 太 郎

On the New Solution of Arched Bridge loaded with a Torsional Moment

Sakutaro Nakamura

Abstract

This is a thesis, in which the author proposed new solution in order to solve the distribution of torsional stress when unit torsional moment was loaded on any point of arches and he calculated torsional stress of two arches with I-section.

I 緒 言

拱橋の捩り応力問題に次の三つがある。即ち，その1は拱の軸面内に作用する外力により捩り挫屈を生ずる場合，その2は，拱に軸面外の力が作用し，曲げと捩りを共に生ずる場合，その3は，拱が外力として捩りもーめんとだけを受け，各種の捩り応力度を生ずる場合である。その1の問題は，拱の挫屈に於て取扱はれているので，玆では触れない事とする。その2の問題は，曲り梁として数多くの学者によつて研究されている。即ち，曲り梁の研究は，18世紀の末 Grasshof[1] 氏のバネの研究に始まり， Unold[2] 氏等の弾性曲線の方程式を解く方法，Müller Breslau[3] 氏等による最少働の原理による方法等がある。又， Marcus[4] 氏は拱理論に於ける弾性荷重に相当する量を三次元的に彎曲せる棒について導く事に成功しているが，式の誘導に止つている。岡本舜三[5] 氏は，軸線を含む面に垂直なる荷重をうけ，曲げと捩りを共にうける円形曲梁について撓角撓度式を導いている。又，近藤繁人[6] 氏は最近，立体曲り梁の

★ 土木学会北海道支部研究発表会に於て一部研究発表〃拱の捩り理論について〃 1953.
1 Grashof : Theorie der Elastizität und Festigkeit. 1878.
2 Unold : Der Kreisträger Forschungsarbeiten Heft 255. 1922.
3 Muller Breslau : Die neuere Methoden der Festigkeitslehre. 1913.
4 Marcus : Die elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestaltung Z.f.Bauwesen. 1919.
5 岡本舜三：軸線を含む面に垂直なる荷重をうける円形曲り梁の研究. 土木学会誌29—3 March, 1943.
6 近藤繁人：立体曲り梁の解法．土木学会第10回年次学術講演会概要，May, 1954.

解法について考究しているし，Hauranek[7], Engesser[8], Mörsch[9], 大野博[10], Jokobsen[11]氏等は，19世紀の初期より円梁を実際の橋梁の設計に応用せんと試みている。その3の問題は上述の曲り梁の問題とはその趣きが異つて居り，未だ研究されていない。著者は，この3の問題，即ち，拱が外力として捩りもーめんとだけを受ける場合について興味を持ち，5，6年以前より，その解法を研究しつゝあるが，先づ，捩り応力に関する基礎理論として直材について数多の学者の研究せる成果を繙いて見る。即ち，矩形断面の捩りについては，St. Venant[12]氏が精密なる解を求め，A. Föppl[13], Engelmann[14]氏等は，各種の断面の捩りについて実験的研究と理論値との比較を行つている。又，K. Huber[15]氏も捩り応力度に関する実験的研究を行つている。然して，単純な捩り応力の基礎をなす法則は，実際には，円形又は円壔形断面以外には成立せず，鋼拱橋に用いられるI形断面などの場合は，単純な捩り応力だけでなく，縦応力度をも同時に生ずるとして取扱つた解法でなくてはならない。I形断面直梁に関しては S. Timoschenko[16]氏が三次の微分方程式を解いて各種の応力度を求めているのは注目に価する。而して，捩りもーめんとを受ける拱橋に於ては，直梁の場合と同様，両端の支持構造が捩りに対しては固定なることが一つの条件であつて，この点が普通の平面拱と異るところである。著者はこの捩りに対して，固定なる条件を持つ二つの代表的な拱橋即ち，二次不静定の二鉸固定拱及四次不静定の 無鉸固定拱に対し，捩り応力度を求める新しい解法を提案した。即ち，S. Timoschenko氏の基本的直梁の理論を基として，二鉸固定拱に対しては，不静定未知量に一個の捩り反力，無鉸固定拱に対しては，三個の捩り反力を仮定し，不静定力の決定には，Castigliano[17]氏の理論を用い，捩りもーめんとの合成分解に関しては，一般偶力と同様，円形ベクトル法[18]を用い，更に，各種の捩り応力度の公式を定めるに当つては，上述の基本梁の理論を合成誘導した。尚，最後に，鋼I形断面の二鉸固定拱，無鉸固定拱について数値積分法により，詳細なる数値計算を試みた。

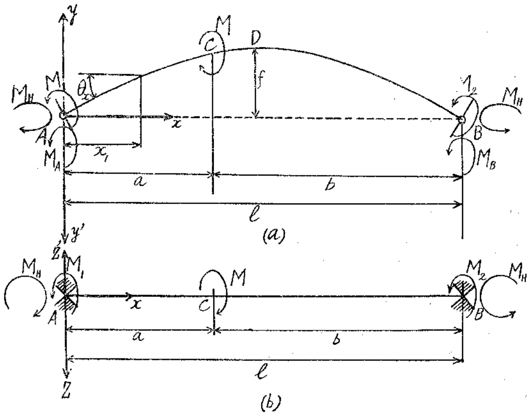
---

7 Hauranek : Berechnung von Bogenbrücken bei raumlichen Kraftangriff B.u.E. 1918.
8 Engetzer : Der elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestaltung. Z.f.Bauwesen.1918.
9 Mörsch : Berechnung der Brückengewölbe für Windruck exzentrische Belastung und einseitige Erwärmung. B.u.E. 1923.
10 大野博：鉄筋コンクリート無鉸拱の経済的並に耐震的設計（2）土木試験所報告第34号. 1936.
11 Jokobsen : Windruck auf Bogenbrücken. B.u.E. 1940.
12 Saint-Venantの編輯. Navier : Résumé des lecons sur lápplication de la wécaniq'ue, Paris. 1864.
13 A.Föppl & L.Föppl : Drang und Zwang, BdII, München und Berlin 1920.
14 Engelmann : Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Drehfestigkeit der Stäbe. Z.a.M.u.M. 1928.
15 K.Huber : Der Einfluss einer Einspannung beim I-Träger auf den Widerstand gegen Verdrehen. Bauing. 1925.
16 S.Timoschenko : Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z.f.M.u.Ph.1910.
17 Southwell : Castigliano's Principle of minimum energy Proc. Roy. Soc. London vol 154. 1936 ,　S.Timoschenko : Theory of Elasticity. 1934.
18 坂井卓三：一般力学, 1947 ,　山内恭彦：一般力学, 1943.

Ⅱ　捩りもーめんとを受ける拱の解法

1.　二 鉸 固 定 拱 の 解 法

第1図は，両端が捩りに対し固定され，拱の軸面内に作用する外力に対しては二鉸の働きをなす拱とする。即ち，二次不静定の拱であつて，著者は，この種の拱を二鉸固定拱と名付ける事とする。今，拱の軸面内にのみ外力の作用する平面的二鉸拱に於て，水平反力 H を不静定量に仮定する[19]のと同様，両端に水平捩りもーめんとM_Hを不静定量として仮定する。又，捩りもーめんとの合成分解には，一般偶力と同様，円形ベクトル法を用い，不静定量 M_H の誘導には， Castigliano 氏の理論を用いる。そこで，弾性構造物に外力が作用する場合，その内部仕事を W, 任意の外力を X, X の作用方向の変位を δ とすれば， Castigliano 氏の定理を用いる事に依り，次式を得る。



第 1 図　任意の点に捩りもーめんとをうける二鉸固定拱の図

$$\frac{\partial W}{\partial X}=\delta \qquad (1)$$

又，X の作用方向に変位の起らぬ場合には，

$$\frac{\partial W}{\partial X}=0 \qquad (2)$$

任意の点に，外力として，捩りもーめんと M が作用する場合，内部仕事 W は次の如くなる。

$$W=\int\frac{M_x^2}{2EJ}ds+\int\frac{M_N^2}{2EI}ds+\int\frac{M_Q^2}{2GJ'}ds \qquad (3)$$

玆に，E：弾性係数，　G：剪断弾性係数，　J：拱の軸線に垂直なる断面の捩りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと，　I：拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんとに対する，抵抗慣性もーめんと，　J'：拱の x 軸に垂直なる断面の捩り剪断もーめんとに対する抵抗慣性もーめんと，　M_x：拱の任意点に於ける軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんと，M_N：拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんと，　M_Q：拱の x 軸に垂直なる断面の捩り剪断もーめんと，　ds：線素とする。（1）式より次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial X}=\int M_x\frac{\partial M_x}{\partial X}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M_N}{\partial X}\frac{ds}{EI}+\int M_Q\frac{\partial M_Q}{\partial X}\frac{ds}{GJ'}=\delta \qquad (4)$$

19　大野博：桁橋及拱橋　1940，　　成瀬勝武：弾性橋梁　1953.

今，拱軸線が対称なるものとする。（4）式に於て，任意の点 x, y に於ける軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんと M_x は，基本拱の軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんと $M_0'=M_0\cos\theta_x$（茲に，M_0：基本直梁の x, y 点に於ける断面の捩り応力度の合力もーめんと）及び水平捩り反力 M_H が知られゝば，次式より求める事ができる。

$$M_x=M_0'+M_H\sin\theta_x \qquad (5)$$

又，M_N は，基本拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんと M_{N0} と水平捩り反力 M_H が知られゝば　$M_N=M_{N0}+M_H\cos\theta_x$　（6）

より求める事ができる。又，基本拱の鉛直方向の捩りもーめんと M_{V0} のみ作用するときは

$$M_N=-M_{V0}\sin\theta_x+M_H\cos\theta_x \qquad (7)$$

（4）式に於て，捩り剪断もーめんと M_Q の影響は，断面の捩り応力度の合力もーめんと M_x 及び，軸方向捩りもーめんと M_N の影響に比し，極めて小さいから繁雑を避けるため，無視しても差支えないと考え，$\int M_Q\frac{\partial M_Q}{\partial X}\frac{ds}{GJ'}$ の項を省略する。今，（4）式に於て，不静定捩り反力 $X=M_H$ とし，（5）式及び（7）式の M_x, M_N を M_H にて偏微分すれば，次式が得られる。

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_H}=-\sin\theta_x \quad (8) \qquad\qquad \frac{\partial M_N}{\partial M_H}=-\cos\theta_x \quad (9)$$

次に，（4）式に（5），（6）式を入れて，（8），（9）式を用い，$\delta=0$ と置けば，次式が得られる。

$$-\int(M_0'+M_H\sin\theta_x)\sin\theta_x\frac{ds}{EJ}-\int(M_{N0}+M_H\cos\theta_x)\cos\frac{ds}{EI}=0$$

$$-\int M_0'\sin\theta_x\frac{ds}{J}-\int M_H\sin^2\theta_x\frac{ds}{J}-\int M_{N0}\cos\theta_x\frac{ds}{I}-\int M_H\cos^2\theta_x\frac{ds}{I}=0$$

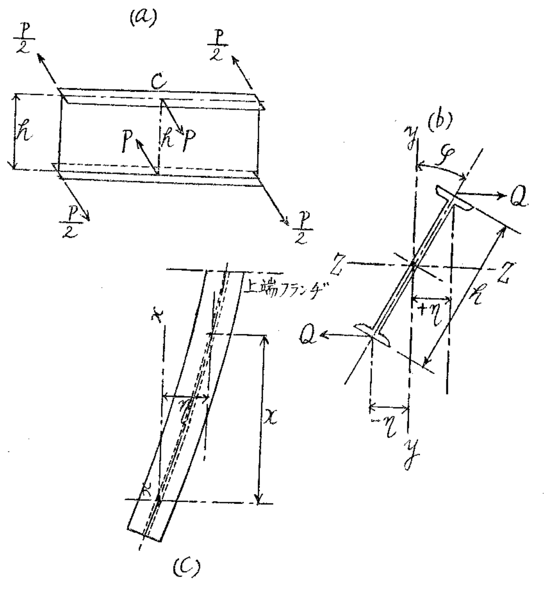
故に　$$-M_H\left\{\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{J}+\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{I}\right\}=\int M_0'\sin\theta_x\frac{ds}{J}+\int M_{N0}\cos\theta_x\frac{ds}{I}$$

故に　$$M_H=\frac{\int M_0'\sin\theta_x\frac{ds}{J}+\int M_{N0}\cos\theta_x\frac{ds}{I}}{\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{J}+\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{I}} \qquad (10)$$

茲に，
- M_H　：不静定水平捩り反力
- M_0'　：両端が捩りに対してのみ固定され，その他のもーめんとに対しては自由支承とせる定断面の拱に於て，軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんと，即ち $M_0\cos\theta_x$
- M_{N0}：仝上基本拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんと
- J　：拱の軸線に垂直なる断面の捩りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと

I　：拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと
θ_x　：拱の任意の点 x, y に於ける x 軸と拱軸線にの切線とのなす角
ds　：拱軸線に於ける線素
M_0　：両端を捩りに対してのみ固定し，他のもーめんとに対しては自由支承とせる定断面の直梁に於ける断面の捩り応力度の合力もーめんと。

以上の理論は，拱の断面 A が一定の場合にのみ成立する事は，直梁の場合[20]と同様である。又，断面の形が異つている場合，例えば，円形定断面の場合とI形定断面の場合では，その基本理論が全然異つて来る。即ち，円形断面の場合は縦応力度を考えなくても済むが，I形断面の場合は，縦応力度を同時に生ずるものとして取扱わなければならない事直梁の場合[21]と同様である。そこで鋼拱橋に於て広く用いられているI形断面について，理論の誘導を行う。今，捩りもーめんとの作用点 C の附近だけ取出して考えて見れば，第2図に於て，中心 C 点に捩りもーめんと $M=Ph$ が作用し，切つた両端の断面に於ては捩りもーめんとに対し固定されていると考える事が出来る。この場合，中心の断面は，対称という条件から平面の儘残る筈であるが，他の断面は，距離が増すにつれて，益々多く変形するであろう。此の不等変形の結果，材の縦繊維は歪む事になる。第2図(c)の平面図に於て，直線のまゝ残つて居る材軸を x 軸にとり，η を以て，上端フランヂの軸の横方向えの移動を表す。腹鈑を通る上下方向の断面軸が変形により捩れた角を φ とすれば，これは x と共に変化する。変形が小さいものと仮定すれば，η と φ との間には比例法則が成立ち，$\eta=\dfrac{h}{2}\varphi$ となる。次に，M を以て，断面 x に於ける外力捩りもーめんと，とすれば，一般に，これは，縦軸の函数である。又，$\mathfrak{M}'_b$ を以て，拱の上端或は下端のフランヂの曲げもーめんと，$\mathfrak{Q}_b'$ を以て，拱に於ける此の断面の上又は下端フランヂの剪断力とする。



第２図　捩りもーめんとに対し両端固定され，縦応力を同時に生ずると考えた場合の基本的Ｉ形梁の図

20. 21　F_R.Bleich : Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. 1924.
池部宗薫外5氏共訳：ブライヒ鉄骨構造. 1941.

更に，M_x を縦軸 x 点の断面の捩り応力度の合力もーめんととし，h を両フランヂの重心距離とする。J は，拱断面の捩り抵抗もーめんと，I_f は，フランヂの曲げを考える時の一つのフランヂの断面二次もーめんととする。全ての断面に於て成立つ釣合条件は

$$M_x+\mathfrak{D}_b' h+M=0 \tag{11}$$

捩りもーめんとMの作用点附近のある小区間について考えると，その曲率が緩やかなればなる程 M_x，$\mathfrak{D}_b'$ は，直梁の場合の M_0，$\mathfrak{D}_b$ に近づく事となり，極限に於ては，

$$M_0+\mathfrak{D}_b h+M=0 \tag{12}$$

が成立する。玆にM_0：両端を捩りに対してのみ固定し，他のもーめんとに対しては自由支承とせる定断面の直梁に於ける断面の捩り応力度の合力もーめんと，$\mathfrak{D}_b$：仝上基本直梁の断面の上又は下端フランヂの剪断力とする。今，M_0 及び $\mathfrak{D}_b$ を角 φ の函数として表せば次式が成立する。

$$M_0=GJ\theta \tag{13}$$

玆に，G：剪断弾性係数，　J：梁断面の捩り抵抗もーめんと，θ：捩れ角比，即ち，dx の間の φ の変化，$\theta=\frac{d\varphi}{dx}$ を (13) 式に代入し，

$$M_0=GJ\frac{d\varphi}{dx} \tag{14}$$

又，$\mathfrak{D}_b$ は，φ により，次の如く書く事ができる。

$$\mathfrak{D}_b=\frac{d\mathfrak{M}_b}{dx}=-EI_f\frac{d^3\eta}{dx^3}=-EI_f\frac{h}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3} \tag{15}$$

上の釣合条件式より，次の微分方程式を得る。

$$GJ\frac{d\varphi}{dx}-EI_f\frac{h^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}+M=0 \tag{16}$$

$\frac{2}{h^2}\frac{G}{E}\frac{J}{I_f}=\alpha^2$ 及び，$\frac{2}{EI_f h^2}=\beta$ として，(16) 式は次の如くなる。

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}-\alpha^2\frac{d\varphi}{dx}=\beta M \tag{17}$$

この (17) 式の積分により，角 φ の大さを知る。

$$\eta=\varphi\frac{h}{2},\qquad M_0=GJ\frac{d\varphi}{dx},\qquad \mathfrak{M}_b=-EI_f\frac{h}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2},\qquad \mathfrak{D}_b=-EJ\frac{h}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3} \qquad \cdots\cdots(18)$$

(17) の三次の微分方程式は，Timoschenko[22]氏によつて解かれている。即ち，その一般解は，三つの任意の係数を含み，$M=ux+v$ 即ち，M が x の一次の函数である場合は，次の如くなる。

$$\varphi=C_1\sinh\alpha x+C_2\cosh\alpha+C_3-\frac{Bu}{2\alpha^2}x^2-\frac{Bv}{\alpha^2}x \tag{19}$$

22　S. Timoschenko : Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z.f.M.u. Ph. 1910.

以上の基本理論より，I形定断面の拱が，任意の点 C に，外力捩りもーめんとを受ける場合，拱の $\mathfrak{M}_b'$ と直梁の $\mathfrak{M}_b$ との関係式及び，拱の $\mathfrak{D}_b'$ と直梁の $\mathfrak{D}_b$ との関係式は，次の如く表し得る。

$$\mathfrak{M}_b' = \mathfrak{M}_b + \mathfrak{M}_h = \mathfrak{M}_b - \left(\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\right)\frac{d(M_H\cdot\sin\theta_x)}{dx}$$

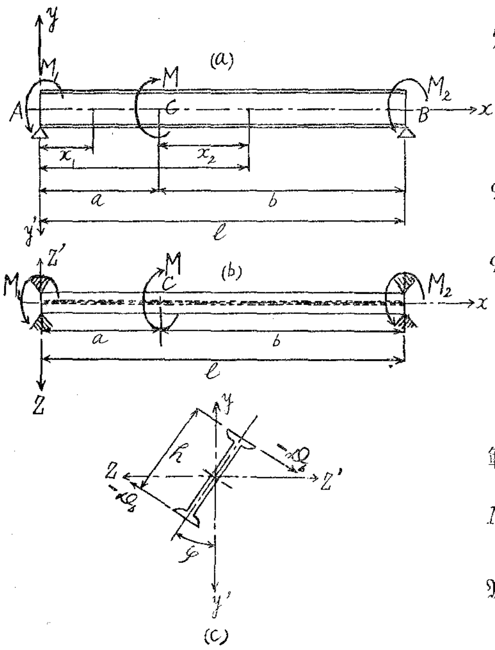
$$= \mathfrak{M}_b - \frac{EJ_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(M_H\frac{d\sin\theta_x}{dx} + \sin\theta\frac{dM_H}{dx}\right) \tag{20}$$

又，
$$\mathfrak{D}_b' = \mathfrak{D}_b + \frac{d\mathfrak{M}_h}{dx} = \mathfrak{D}_b - \frac{EI_f}{EJ}\frac{h}{2}\frac{d^2M_H\cdot\sin\theta_x}{dx^2}$$

$$= \mathfrak{D} - \frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(\frac{d^2M_H}{dx^2}\sin\theta + 2\frac{dM_H}{ds}\frac{d\sin\theta_x}{dx} + M_H\frac{d^2\sin\theta_x}{dx^2}\right) \tag{21}$$

次に，両端を捩りに対し固定し，他のもーめんとに対しては，自由支承とせるI形定断面の直梁に於て，左の支点より a なる距離に捩りもーめんと M を有する場合の M_0，$\mathfrak{M}_b$，$\mathfrak{D}_b$ 等を求めれば，次の如くである。先づ第3図に於て，(19) 式に相当する式を作れば

$$\left.\begin{aligned} A\sim C:\ M=M_1,\quad & \varphi_1 = C_1\sinh\alpha x_1 + C_2\cosh\alpha x_2 + C_3 - \frac{\beta M_1}{\alpha^2}x_1 \\ C\sim B:\ M=-M_2,\quad & \varphi_2 = D_1\sinh\alpha x_2 + D_2\cosh\alpha x_2 + D_3 + \frac{\beta M_2}{\alpha^2}x_2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$



第 3 図　両端を捩りもーめんとに対し固定し，他のもーめんとに対しては自由支承とせるI形断面の直梁の図

定数 C 及び D を定め，$\dfrac{2}{h^2}\dfrac{G}{E}\dfrac{J}{I_f}=\alpha^2$ 及び $\dfrac{2}{EI_fh^2}=\beta$ の式を参照し，

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Ml}{(\alpha l)GJ}\left\{\frac{\sinh\alpha b}{\sinh\alpha l}\sinh\alpha x - (\alpha b)\frac{x}{l}\right\} \\ \varphi_2 &= \frac{Ml}{(\alpha l)GJ}\left\{\frac{\sinh\alpha a}{\sinh\alpha l}\sinh\alpha(l-x) - (\alpha a)\frac{l-x}{l}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

茲に，
$$\alpha l = \frac{l}{h}\sqrt{2\frac{G}{E}\frac{J}{I_f}} = 0.88\frac{l}{h}\sqrt{\frac{J}{I_f}} \tag{24}$$

範囲 $A\sim C$ に対し，$x\leqq a$

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= M\left\{\frac{\sinh\alpha b}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha x - \frac{b}{l}\right\} \\ \mathfrak{M}_b &= M\frac{l}{h}\frac{\sinh\alpha b}{(\alpha l)\sinh\alpha l}\sinh\alpha x \\ \mathfrak{D}_b &= \frac{M}{h}\frac{\sinh\alpha b}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha x \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

範囲 $C\sim B$ に対し，$x\geqq a$

$$M_0 = -M\left\{\frac{\sinh\alpha a}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha(l-x) - \frac{a}{l}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_b&=M\frac{l}{h}-\frac{\sinh\alpha a}{(\alpha l)\sinh\alpha l}\sinh\alpha(l-x)\\ \mathfrak{D}_b&=-\frac{M}{h}\frac{\sinh\alpha a}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha(l-x)\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

故に，２鉸固定拱がＩ形定断面の場合には，次の公式が得られる。

（５）式より，　$M_x=M_0'+M_H\sin\theta_x=M_0\cos\theta_x+M_H\sin\theta_x$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad x\leqq a\cdots\cdots M_x&=-M\left\{\frac{\sinh\alpha b}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha x-\frac{b}{l}\right\}\cos\theta_x+M_H\sin\theta_x\\ x\geqq a\cdots\cdots M_x&=-M\left\{\frac{\sinh\alpha a}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha(l-x)-\frac{a}{l}\right\}\cos\theta_x+M_H\sin\theta_x\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

又 (20) 式より　$\mathfrak{M}_b'=\mathfrak{M}_b-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(M_H\frac{d\sin\theta_x}{dx}+\sin\theta\frac{dM_H}{dx}\right)$

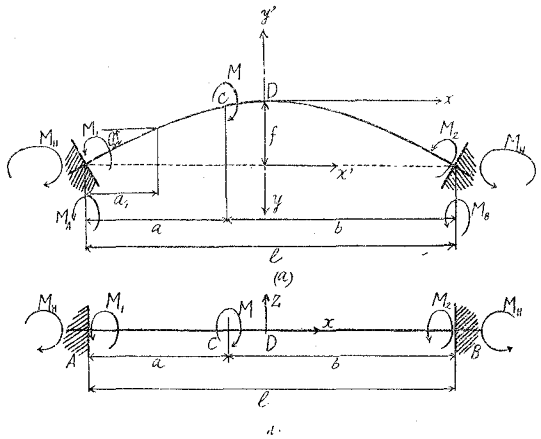
$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad x\leqq a\cdots\cdots\mathfrak{M}_b'&=M\frac{l}{h}\frac{\sinh\alpha b}{(\alpha l)\sinh\alpha l}\sinh\alpha x-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(M_H\frac{d\sin\theta_x}{dx}+\sin\theta\frac{dM_H}{dx}\right)\\ x\geqq a\cdots\cdots\mathfrak{M}_b'&=M\frac{l}{h}\frac{\sinh\alpha a}{(\alpha l)\sinh\alpha l}\sinh\alpha(l-x)-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(M_H\frac{d\sin\theta_x}{dx}+\sin\theta\frac{dM_H}{dx}\right)\end{aligned}\right\}$$

…………………………(28)

(21) 式より，　$\mathfrak{D}_b'=\mathfrak{D}-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(\frac{d^2M_H}{dx}\sin\theta+2\frac{dM_H}{ds}\frac{d\sin\theta_x}{dx}-M_H\frac{d^2\sin\theta_x}{dx^2}\right)$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad x\leqq a\cdots\mathfrak{D}_b'&=\frac{M}{h}\frac{\sinh\alpha b}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha x-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(\frac{d^2M_H}{dx^2}\sin\theta+2\frac{dM_H}{dx}\frac{d\sin\theta_x}{dx}-M_H\frac{d^2\sin\theta_x}{dx^2}\right)\\ \therefore\quad x\geqq a\cdots\mathfrak{D}_b'&=-\frac{M}{h}\frac{\sinh\alpha a}{\sinh\alpha l}\cosh\alpha(l-x)-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(\frac{d^2M_H}{dx^2}\sin\theta+2\frac{dM_H}{dx}\frac{d\sin\theta_x}{dx}-M_H\frac{d^2\sin\theta_x}{dx^2}\right)\end{aligned}\right\}$$

…………………………(29)

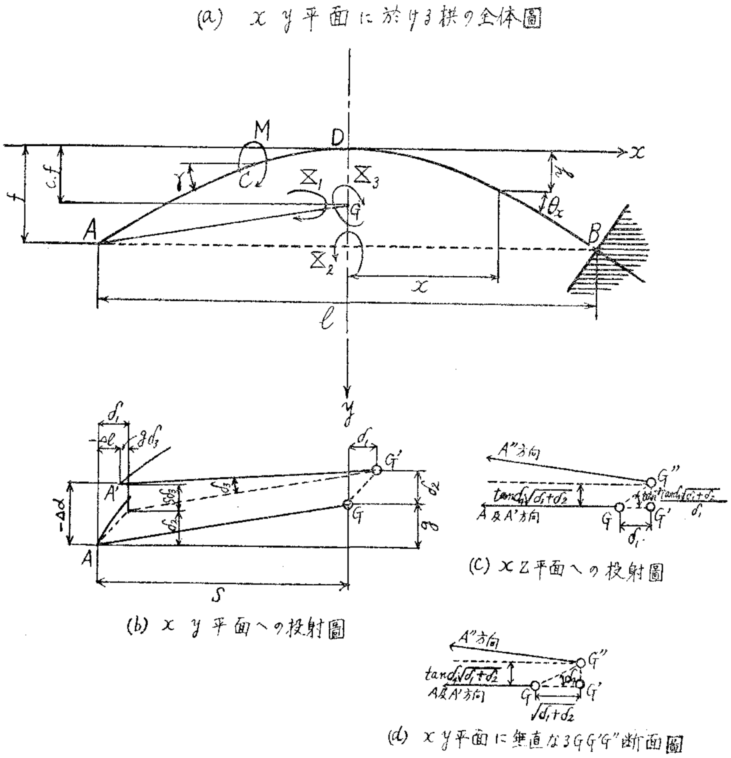


第４図　任意の点に捩りもーめんとをうける無鉸固定拱の図

2. 無鉸固定拱の解法

第４図は，軸面 x, y 内に作用する外力に対し，両端 A, B が固定せられているのみならず，捩れに対しても，両端が固定せられている四次不静定拱である。著者は，この拱を，平面的無鉸拱[23]に対し，無鉸固定拱と名付ける事とする。今，二鉸固定拱同様，任意の点に外力として捩りもーめんと M が作用した場合の解法を提案する。先づ，第５図の如く，B

23　大野博：桁橋及拱橋　1940.



第 5 図　一端固定，他端自由，自由端と弾性重心を剛桿を以て剛結された拱（但し，固定，剛結とは捩りもーめんとに対しても固定なる事を含む）の図

端は，捩れに対しても，他の何れのもーめんとに対しても固定，A 端自由なる基本拱について考える。今 A 端に剛体の桿 AG を剛結したものとし，外力として捩りもーめんと M が働く事により，A 端の B 端に対する水平，鉛直の相対移動及び回転と剛桿 AG の G 端に於ける変位との間には，次の関係がある。但し，夫々の変位は僅少なるものと仮定する。G は G'' に変位したと考え，G'' より x, y 平面への投射点を G' とする。

今，Δl : A の B に対する左方への水平移動即ち，支間 l の伸び，　$\Delta\alpha$: A の B に対する下方への鉛直移動即ち，沈下，　$\Delta\theta$: A の B に対する回転（時計の方向を正とする）δ_1 : G の右方への水平移動，　δ_2 : G の上方への鉛直移動，　δ_3 : G の時計の方向への廻転以上は x, y 平面への投射である。　δ_4 : G の変位 G'' 方向への回転即ち，角 $G'GG''$ とすれば，　$-\Delta l=\delta_1-g\delta_3$, $-\Delta\alpha=\delta_2+s$, $\Delta\theta=\delta_3$, $\Delta\varphi=\delta_4$　故に，$\delta_1=-\Delta l+g\Delta\theta$, $\delta_2=-\Delta\alpha-s\Delta\theta$, $\delta_3=\Delta\theta$, $\delta_4=\Delta\varphi$　即ち，両端が完全に固定されると云う事は，$\Delta l=0$, $\Delta\alpha=0$, $\Delta\theta=0$, $\Delta\varphi=0$　即ち，$\delta_1=0$, $\delta_2=0$, $\delta_3=0$, $\delta_4=0$なる事で，A 端自由なる突桁 ADB の A 端に剛

桿 AG を剛結し，G 点を固定した場合と力学的に同等である。第5図に於て，G 点に作用する不静定捩り反力を X_1，X_2，X_3 と仮定すれば，A，B 固定せられた場合に対し，Castigliano氏の理論を用い，次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial X_n}=\delta_n=0 \quad (n=1,2,3) \tag{30}$$

今，X_1：水平捩りもーめんと，X_2：鉛直捩りもーめんと，X_3：軸線の垂直面に於ける捩りもーめんと，とし，対称無鉸固定拱について，理論の誘導を行う。拱軸線の原点を拱頂 D にとり，θ_x は，x，y 点に於ける拱軸線の接線が x の正の方向と為す角とする。（左半分に於ては正，右半分に於いては負），任意の点に外力として，捩りもーめんと M が作用する場合，内部仕事 W は，（3）の場合同様，

$$W=\int\frac{M_x^2}{2EJ}ds+\int\frac{M_N^2}{2EI}ds+\int\frac{M_Q^2}{2GJ'}ds \tag{31}$$

玆に，E：弾性係数，G；剪断弾性係数，J：拱の軸線に垂直なる断面の捩りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと，I：拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと，J'：拱の x 軸に垂直なる断面の捩り剪断もーめんとに対する抵抗慣性もーめんと，M_x：拱の任意点に於ける軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんと，M_N：拱の軸曲面に沿う軸方向捩りもーめんと，M_Q：拱の x 軸に垂直なる断面の捩り剪断もーめんと，ds：線素

そこで
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial X_1}&=\int M_x\frac{\partial M}{\partial X_1}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M_N}{\partial X_1}\frac{ds}{EI}+\int M_Q\frac{\partial M_Q}{\partial X_1}\frac{ds}{GJ'}=0\\
\frac{\partial W}{\partial X_2}&=\int M_x\frac{\partial M}{\partial X_2}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M}{\partial X_2}\frac{ds}{EI}+\int M_Q\frac{\partial M}{\partial X_2}\frac{ds}{GJ'}=0\\
\frac{\partial W}{\partial X_3}&=\int M_x\frac{\partial M}{\partial X_3}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M}{\partial X_3}\frac{ds}{EI}+\int M_Q\frac{\partial M}{\partial X_3}\frac{ds}{GJ'}=0
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

これらの不静定量を求めるには，捩り剪断もーめんとの影響は，断面の捩り応力度の合力もーめんとの影響，軸方向捩りもーめんとの影響に比し，極めて小さく，繁雑を避けるため，無視しても差支えないものと考える。

故に，
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial X_1}&=\int M_x\frac{\partial M_x}{\partial X_1}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M_N}{\partial X_1}\frac{ds}{EI}=0\\
\frac{\partial W}{\partial X_2}&=\int M_x\frac{\partial M_x}{\partial X_2}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M_N}{\partial X_2}\frac{ds}{EI}=0\\
\frac{\partial W}{\partial X_3}&=\int M_x\frac{\partial M_x}{\partial X_3}\frac{ds}{EJ}+\int M_N\frac{\partial M_N}{\partial X_3}\frac{ds}{EI}=0
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

今，不静定捩り反力 X_1，X_2，X_3 が求まつた場合，任意の点 x，y の軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんと M_x は，次式により与えられる。

$$M_x=M_0'+X_1\sin\theta_x+X_2\cos\theta_x+X_3\cos(\theta_x\sim\gamma) \qquad (34)$$

玆に，　γ：捩りもーめんとの作用点に於ける拱軸線の接線が x の正の方向となす角とする。

(34) 式に於て，θ_x と γ は，何れも正，負の場合あり，拱の左半分に於ては正であり，右半分に於ては負になる。M_0' は，一端が捩りに対してのみならず，他のもーめんとに対しても固定され，他端が自由なる定断面の基本拱に於て，軸線に垂直なる断面の捩り応力度の合力もーめんとであり，

$$M_0'=M_0\cos\theta_x \qquad (35)$$

玆に，　M_0：仝上基本拱の任意の点に於ける x 軸に垂直なる面内にある捩り応力度の合力もーめんと，である。又，任意の点の軸方向捩りもーめんと M_N は

$$M_N=M_{N_0}-X_1\cos\theta_x-X_2\sin\theta_x \qquad (36)$$

玆に，　M_{N_0}：仝上基本拱の任意の点に於ける軸方向捩りもーめんとであり，鉛直方向の捩りもーめんと M_{V_0} のみ作用するときは，　$M_{N_0}=-M_{V_0}\sin\theta \qquad (37)$

(33) 式に於て，
$$\frac{\partial M_x}{\partial X_1}=\sin\theta_x,\quad \frac{\partial M_x}{\partial X_2}=\cos\theta_x,\quad \frac{\partial M_x}{\partial X_3}=\cos(\gamma\sim\theta_x)$$
$$\frac{\partial M_N}{\partial X_1}=-\cos\theta_x,\quad \frac{\partial M_N}{\partial X_2}=-\sin\theta_x,\quad \frac{\partial M_N}{\partial X_3}=0$$

故に，
$$\frac{\partial W}{\partial X_1}=\int_A^B\{M_0'+X_1\sin\theta_x+X_2\cos\theta_x+X_3\cos(\gamma\sim\theta_x)\}\sin\theta_x\frac{ds}{EJ}$$
$$+\int_A^B(-M_{N_0}+X_1\cos\theta_x+X_2\sin\theta_x)\cos\theta_x\frac{ds}{EJ}=0 \qquad (38)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_2}=\int_A^B\{M_0'+X\sin\theta_x+X_2\cos\theta_x+X_3\cos(\gamma\sim\theta_x)\}\cos\theta_x\frac{ds}{EJ}$$
$$+\int_A^B(-M_{N_0}+X_1\cos\theta_x+X_2\sin\theta_x)\sin\theta_x\frac{ds}{EJ}=0 \qquad (39)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_3}=\int_A^B\{M_0'+X_1\sin\theta_x+X_2\cos\theta_x+X_3\cos(\gamma\sim\theta_x)\}\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{EJ}$$
$$+\int_A^B(M_{N_0}-X_1\cos\theta_x-X_2\sin\theta_x)(0)\frac{ds}{EI}$$
$$=\int_A^B\{M_0'+X_1\sin\theta_x+X_2\cos\theta_x+X_3\cos(\gamma\sim\theta_x)\}\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{EJ}=0 \qquad (40)$$

(38) 式より，

$$\int M_0'\sin\theta_x\frac{ds}{J}+X_1\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{J}+X_2\int\sin\theta_x\cos\theta_x\frac{ds}{J}+X_3\int\sin\theta_x\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}$$
$$-\int M_{N_0}\cos\theta_x\frac{ds}{I}+X_1\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{I}+X_2\int\sin\theta_x\cos\theta_x\frac{ds}{I}=0 \qquad (41)$$

(39) 式より，

$$\int M_0'\cos\theta_x\frac{ds}{J}+X_1\int\sin\theta_x\cos\theta_x\frac{ds}{J}+X_2\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{J}+X_3\int\cos\theta_x\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}$$

$$-\int M_{N_0}\sin\theta_x\frac{ds}{J}+X_1\int\sin\theta_x\cos\theta_x\frac{ds}{I}+X_2\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{I}=0 \qquad (42)$$

(40) 式より，

$$\int M_0'\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}+X_1\int\sin\theta_x\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}+X_2\int\cos\theta_x\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}$$

$$+X_3\int\cos^2(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}=0 \qquad (43)$$

然るに，対称拱なる場合は， $\int\sin\theta_x\cos\theta_x\frac{ds}{J}=0,\quad \int\sin\theta_x\cos\theta_x\frac{ds}{I}=0,$

$$\int\sin\theta_x\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}=0,\quad \int\cos\theta_x\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}=0$$

故に (41) 式より，

$$X_1=-\frac{\int M_0'\sin\theta_x\frac{ds}{J}-\int M_{N_0}\cos\theta_x\frac{ds}{I}}{\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{J}+\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{I}} \qquad (44)$$

(42) 式より

$$X_2=-\frac{\int M_0'\cos\theta_x\frac{ds}{J}-\int M_{N_0}\sin\theta_x\frac{ds}{I}}{\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{I}+\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{J}} \qquad (45)$$

(43) 式より，

$$X_3=-\frac{\int M_0'\cos(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}}{\int\cos^2(\gamma\sim\theta_x)\frac{ds}{J}} \qquad (46)$$

但し，弾性重心の位置

$$c.f=\frac{\int y\frac{ds}{J}}{\int\frac{ds}{J}} \qquad (47)$$

(44), (45), (46), (47) 式等に於ける記号は，既に説明した通りであるが，弾性重心の位置については，特に，第5図参照の事。以上の理論は，拱の断面が一定の場合にのみ成立する事は，直梁の場合と同様であるが，断面の形によつても，これから述べんとする理論に著しき違いが出て来る。例えば，円形定断面とI形定断面の場合を比べて見れば次の如くである。即ち円形断面の場合は，縦応力度を考えなくても済むが，I形断面の場合は，縦応力度を同時に生ずるものとして取扱はなければならない事，直梁の場合と同様である。そこで，鋼拱橋に広く

用いられるＩ形断面の場合について，公式の誘導を行う。既に述べた二鉸固定拱の場合同様，$\mathfrak{M}_b$；基本梁の任意の点 x, y に於ける断面フランヂの上端又は下端の曲げもーめんと，$\mathfrak{D}_b$：基本梁の任意の点 x，y に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力，　$\mathfrak{M}_d$：基本梁の任意の点 x，y に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による捩りもーめんと，$\mathfrak{M}_b'$：第５図の如き拱の任意の点 x, y に於ける断面フランヂの上端又は下端の曲げもーめんと，$\mathfrak{D}_b'$：第５図の如き拱の任意の点 x，y に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力，$\mathfrak{M}_d'$：第５図の如き拱の任意の点 x，y に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による捩りもーめんと，とすれば，

$$\mathfrak{M}_b'=\mathfrak{M}_b+\mathfrak{M}_{X_1}+\mathfrak{M}_{X_2} \tag{48}$$

而して

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_{X_1}&=-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d(X_1\sin\theta_x)}{dx}\\ \mathfrak{M}_{X_2}&=-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d(X_2\cos\theta_x)}{dx}\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

故に（48）式より，

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_b'&=\mathfrak{M}_b-\left\{\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d(X_1\sin\theta_x)}{dx}+\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d(X_2\cos\theta_x)}{dx}\right\}\\ &=\mathfrak{M}_b-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(X_1\frac{d\sin\theta_x}{dx}+\sin\theta_x\frac{dX_1}{dx}+X_2\frac{d\cos\theta_x}{dx}+\cos\theta_x\frac{dX_2}{dx}\right)\end{aligned} \tag{50}$$

又，

$$\mathfrak{D}_b'=\mathfrak{D}_b+\frac{d(\mathfrak{M}_{X_1}+\mathfrak{M}_{X_2})}{dx} \tag{51}$$

（51）式に（49）式を代入し，

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_b'&=\mathfrak{D}_b-\left\{\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d^2(X_1\sin\theta_x)}{dx^2}+\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d^2(X_2\cos\theta_x)}{dx^2}\right\}\\ &=\mathfrak{D}_b-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(\frac{d^2X_1}{dx^2}\sin\theta_x+2\frac{dX_1}{dx}\frac{d\sin\theta_x}{dx}+X_1\frac{d^2\sin\theta_x}{dx^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{d^2X_2}{dx^2}\cos\theta_x+2\frac{dX_2}{dx}\frac{d\cos\theta_x}{dx}+X_2\frac{d^2\cos\theta_x}{dx^2}\right)\end{aligned} \tag{52}$$

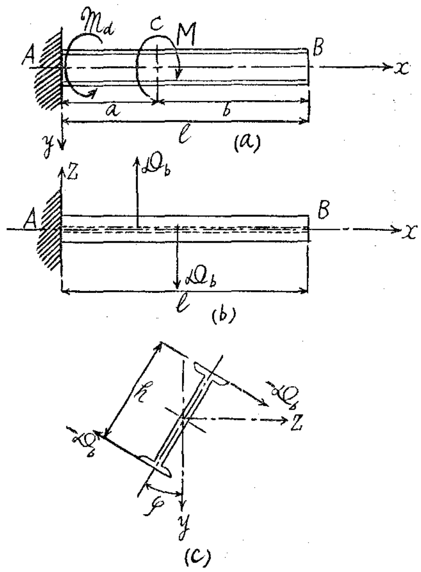
又，

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_d'&=-h\mathfrak{D}_b'=-h\left[\mathfrak{D}_b-\left\{\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d^2(X_1\sin\theta_x)}{dx^2}+\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\frac{d^2(X_2\cos\theta_x)}{dx^2}\right\}\right]\\ &=-h\left\{\mathfrak{D}_b-\frac{EI_f}{GJ}\frac{h}{2}\left(\frac{d^2X_1}{dx^2}\sin\theta_x+2\frac{dX_1}{dx}\frac{d\sin\theta_x}{dx}+X_1\frac{d^2\sin\theta_x}{dx^2}\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{d^2X_2}{dx^2}\cos\theta_x+2\frac{dX^2}{dx}\frac{d\cos\theta_x}{dx}+X_2\frac{d^2\cos\theta_x}{dx^2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{53}$$

$$\mathfrak{M}_d=-h\mathfrak{D}_b \tag{54}$$

次に，第６図の如く，一端が捩れに対してのみならず，その他のもーめんとに対しても固定され，他端が全く自由なるＩ形定断面の片持直梁が，固定端より，a なる距離に，外力捩りもー

めんとMを受ける場合,[24] 任意の点の断面捩り応力度の合力も一めんと, M_0, 任意の点の断面フランヂの上端或は下端の曲げも一めんと $\mathfrak{M}_b$, 任意の点に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力 $\mathfrak{D}_b$, 任意の点に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による捩りも一めんと $\mathfrak{M}_d$ 等を求め, (34) 及び, (50), (51), (52), (53), (54) 式などに代入すれば, M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$ などを算出する事ができる。



第 6 図　捩りその他のも一めんとに対し一端固定, 他端自由なる I 形断面の直梁の図

第6図に於て, 断面の捩れ角を φ とすると, 単位長さ当りの捩れ角は, $\dfrac{d\varphi}{dx}=\theta$ となる。

外から加はる捩りも一めんと, M とし, この捩れの為に生ずる剪断応力と釣合う捩り応力度の合力も一めんと, $M_0=C\theta$　　(55)

玆に, C : 捩り剛性係数にして,

$$C=GJ \tag{56}$$

G : 剪断弾性係数,　J : 梁断面の捩りも一めんとに対する抵抗慣性も一めんと,　$\mathfrak{M}_d$: 上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による捩りも一めんと, とすると, $\mathfrak{M}_d=\mathfrak{D}_b h$ (57)

玆に, $\mathfrak{D}_b$: 此の断面の上又は下端フランヂの剪断力,　h : 両フランヂの各図心間の距離,

η : 上端フランヂの軸の横方向への移動とすると $\eta=\dfrac{h\varphi}{2}$　　(58)

之を微分すると,
$$\frac{d^3\eta}{dx^3}=\frac{h}{2}\frac{d^3\varphi}{dx^3}=\frac{h}{2}\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{59}$$

第6図に於て, 面 xz の一フランヂの曲げ剛性係数を D とすれば, η は上方を正とすれば

$$\mathfrak{D}_b=\frac{d\mathfrak{M}_b}{dx}=D\frac{d^3\eta}{dx^3}=\frac{Dh}{2}\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{60}$$

$\mathfrak{M}_b$: 上端又は下端のフランヂの曲げも一めんと

$$\mathfrak{M}_d=-\mathfrak{D}_b h=-\frac{Dh^2}{2}\frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{61}$$

故に, 全捩りも一めんとは,

$$M=M_0+\mathfrak{M}_d=C\theta-\frac{Dh^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} \tag{62}$$

24　S. Timoschenko : Strength of Materials. 1930.
片山健次郎氏他1名共訳 : テイモシエンコ　材料力学. 1942.

(62) 式の一般解は,

$$\theta=\frac{M}{C}\left(1-\frac{\cosh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}\right) \tag{63}$$

(但し $a>x$ とす)

玆に, $n^2=\frac{Dh^2}{2C}$ 故に, $n=h\sqrt{\frac{D}{2C}}$ (64)

固定端断面では, $\mathfrak{D}_b=\frac{M}{h}$ (65)

$x=a$では $\theta=\frac{M}{C}\left(1-\frac{1}{\cosh\frac{a}{n}}\right)$ (66)

(60) 式を積分し,

$$\left.\begin{aligned} &a>x\cdots\cdots\mathfrak{M}_b=\frac{Dh}{2}\,\frac{M}{nC}\,\frac{\sinh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}=\frac{n}{h}M\frac{\sinh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}\\ &x=a\cdots\cdots\mathfrak{M}_b=0\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

又, $\theta=\frac{d\varphi}{dx}$ なる故 (61) を積分し, 積分常数を $x=0$ に於て, $\varphi=0$ なるやうに定め

$$\varphi=\frac{M}{C}\left(x+\frac{n\sinh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}-n\tanh\frac{a}{n}\right) \tag{68}$$

(60) 式と (67) 式より, フランヂの曲げによる剪断力 $\mathfrak{D}_b$ は, 次の如くなる。

$$\mathfrak{D}_b=\frac{d\mathfrak{M}_b}{dx}=\frac{n}{h}M\frac{\cosh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}\left(-\frac{1}{n}\right)$$

故に,

$$\left.\begin{aligned} &a>x\cdots\cdots\mathfrak{D}_b=-\frac{M}{h}\,\frac{\cosh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}\\ &x=a\cdots\cdots\mathfrak{D}_b=-\frac{M}{h}\,\frac{1}{\cosh\frac{a}{n}}\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

(61) 式より,

$$\mathfrak{M}_a=-\mathfrak{D}_b h=M\frac{\cosh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}$$

$$\left.\begin{aligned} a>x\cdots\cdots\mathfrak{M}_d&=M\frac{\cosh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}} \\ x=a\cdots\cdots\mathfrak{M}_d&=M\frac{1}{\cosh\frac{a}{n}} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

又，(63) 式又は，(66) 式を (55) 式に代入し，

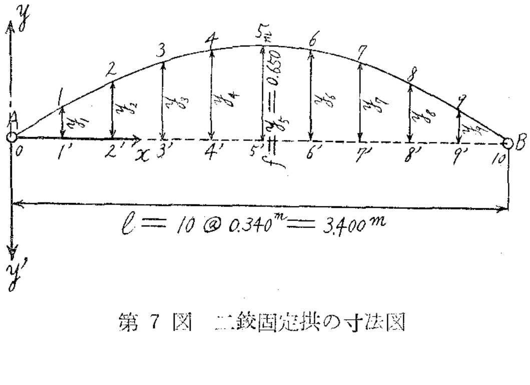
$$\left.\begin{aligned} a>x\cdots\cdots M_0&=M\left(1-\frac{\cosh\frac{a-x}{n}}{\cosh\frac{a}{n}}\right) \\ x=a\cdots\cdots M_0&=M\left(1-\frac{1}{\cosh\frac{a}{n}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

以上の式は，第 6 図を参照すれば分る通り，第 5 図とは，原点の取り方が異つているから，(67), (69), (70), (71) 式などを，(34), (50), (51), (52), (53) 式に代入する際，記号に注意を必要とする。計算で求める場合は，別々に計算し，加算或は減算すれば容易に結果が得られる。以上の如く，第5図に示したような，一端が，捩れのみならず，他のもーめんとにに対しても全く固定せられ，他端は，弾性重心 G に剛桿を以て剛結せられた拱が，任意の点に，外力捩りもーめんと，M を受ける場合に，M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$ 等を求める解法を示したがこれによつて計算し更に，反対の一端を捩れ及びその他のもーめんとに対して，全く固定し，他端を弾性重心 G に剛桿を以て剛結し，外力捩りもーめんと M が働く場合の，M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$ 等を，対称の理により計算し，二つの場合の数値を，代数的に，加え合せれば，両端が，捩れに対してのみならず，その他のもーめんとにも固定された無鉸固定拱が，外力捩りもーめんとを受けた場合の，任意の点に於ける，各種捩り応力を完全に求める事ができる。

Ⅲ　捩りもーめんとを受ける拱の計算例

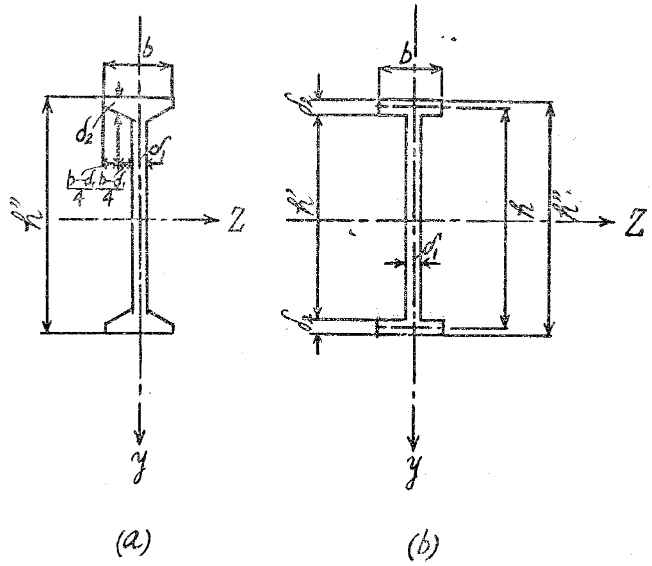
1. 二　鉸　固　定　拱

（1）拱の諸数値，第7図は，両端が捩れに対しては固定され，軸面内に於ける外力に対しては，鉸端であるとする。即ち，二次不静定の二鉸固定拱である。拱の形は，抛物線にして，材質は鋼よりなり，断面は，第8図の如く，I形の定値とする。その諸数値を示せば，次の如



第 7 図　二鉸固定拱の寸法図

くである。I形鋼 600mm×190mm×132.94kg/m,
$b=190\text{mm}$, $\delta_1=13\text{mm}$,
$\delta_2=25\text{mm}$, $h=57.5\text{cm}$,
$h'=55.0\text{cm}$, $h''=60.0\text{cm}$,
$f=0.650\text{m}$, $l=3.400\text{m}$
$J=$ 全断面の捩りに対する抵抗慣性もーめんと
$=\frac{1}{3}(h'\delta_1^3+2b\delta_2^3)$
$=238.1\text{cm}^4$
$=0.0000023\,81\text{m}^4$
$I_y=y$ 軸に関する断面の慣性もーめんと$=2538\text{cm}^4$
$=0.00002538\text{m}^4$



第 8 図　I形断面の詳細図

$I_Z=z$ 軸に関する断面の慣性もーめんと$=98172\text{cm}^4=0.00098172\text{m}^4$
$A=$断面積$=169.4\text{cm}^2=0.01694\text{m}^4$,　　1 米当りの重量 $w=132.94\text{kg/m}$
$I_f=$ フランヂの曲げを考える時の一つのフランヂの断面二次もーめんと

$$=\frac{\delta_2 b^3}{12}=1430\text{cm}^4=0.0000143\text{m}^4,\qquad \frac{J}{I_f}=0.1666,\qquad \sqrt{\frac{J}{I_f}}=0.4083$$

$$\frac{l}{h}=5.91,\qquad \alpha l=0.88\frac{l}{h}\sqrt{\frac{J}{I_f}}\doteqdot 2,0$$

第　1　表

点	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x(m)$	0	0.340	0.680	1.020	1.360	1.700	2.040	2.380	2.720	3.060	3.400
$y(m)$	0	0.234	0.416	0.546	0.624	0.650	0.624	0.546	0.416	0.234	0

第　2　表

格　点	x	y	$\frac{8fx}{l^2}$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$
0	0	0	0	0.7650	37°25′	0.6076	0.7942	1.3072	1.2591
1	0.340	0.234	0.153	0.6120	31°28′	0.5220	0.8529	1.6340	1.1724
2	0.680	0.416	0.306	0.4590	24°39′	0.4171	0.9089	2.1792	1.1003
3	1.020	0.546	0.459	0.3060	17°01′	0.2926	0.9562	3.2675	1.0458
4	1.360	0.624	0.612	0.1530	8°42′	0.1513	0.9885	6.5350	1.0116
5	1.700	0.650	0.765	0	0°	0	1.0000	∞	1.0000

抛物線の一般式,

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{4f}{l^2}x(l-x)=0.765x-0.2248x^2 \\ \tan\theta&=\frac{dy}{dx}=\frac{4f}{l}-\frac{8fx}{l^2} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

（2）不静定水平捩り反もーめんと M_H

(10) 式より

$$M_H=\frac{\int M_0'\sin\theta_x\frac{ds}{J}+\int M_{N0}\cos\theta_x\frac{ds}{I}}{\int\sin^2\theta_x\frac{ds}{J}+\int\cos^2\theta_x\frac{ds}{I}}$$

$ds\cos\theta=dx$ なる故

$$M_H=-\frac{\int M_0'\frac{\sin\theta_x}{J\cos\theta_x}dx+\int M_{N0}\frac{dx}{I}}{\int\frac{\sin^2\theta_x}{J\cos\theta_x}dx+\int\frac{\cos\theta}{I}dx}=-\frac{\int M_0'\frac{\tan\theta_x}{J}dx+\int M_{N0}\frac{dx}{I}}{\int\frac{\tan\theta_x\sin\theta_x}{J}dx+\int\frac{\cos\theta_x}{I}dx} \tag{73}$$

軸方向捩りもーめんとの影響を微小として無視すれば,

$$M_H=-\frac{\int_0^l M_0'\frac{\tan\theta_x}{J}dx}{\int_0^l\frac{\tan\theta_x\sin\theta_x}{J}dx+\int_0^l\frac{\cos\theta_x}{I_y}dx} \tag{74}$$

第 8 表

M_H 数値表（係数 M）

点	分子 $=\int_0^l M_0'\frac{\tan\theta_x}{J}dx$ (kg/m²)	分母 $=\int_0^l\frac{\tan\theta_x\sin\theta_x}{J}dx+\int_0^l\frac{\cos\theta_x}{I_y}dx$ (1/m³)	☆☆ (kg−m)
0	− 10,553.00	+ 367,854.00	+ 0.028700
1	− 8,185.00	+ 367,854.00	+ 0.022250
2	− 2,504.00	+ 367,854.00	+ 0.006810
3	+ 3,421.00	+ 367,854.00	− 0.009302
4	+ 7,763.10	+ 367,854.00	− 0.021100
5	+ 9,320.20	+ 367,854.00	− 0.025340

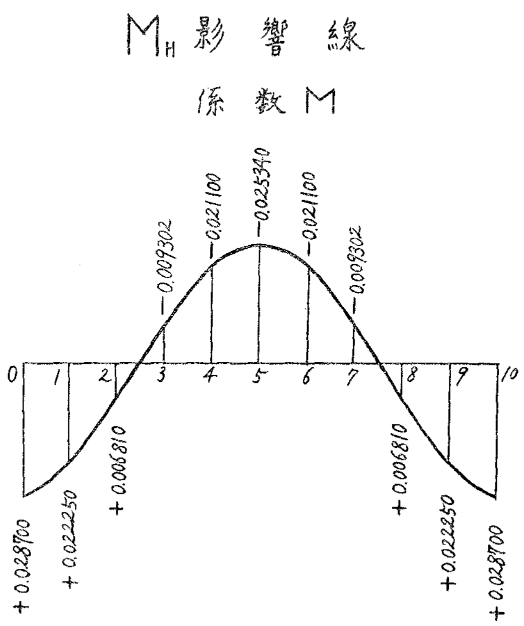
$$☆☆\cdots\cdots M_H=-\frac{\int_0^l M_0'\frac{\tan\theta_x}{J}dx}{\int_0^l\frac{\tan\theta_x\sin\theta_x}{J}dx+\int_0^l\frac{\cos\theta_x}{I_y}dx}$$

図に示せば，第9図の如くである。

（3）任意の点の断面捩り応力度の合力もーめんと M_x，任意の点の断面フランヂの上端或は下端の曲げもーめんと $\mathfrak{M}_b'$，任意の点に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力 $\mathfrak{D}_b'$,

計算により，M_x　$\mathfrak{M}_b'$　$\mathfrak{D}_b'$ を求めると第4表，第5表，第6表が得られる。

以上の結果を，図に示せば，第10図，第11図，第12図の如くなる。



第9図　二鉸固定拱の不静定捩り反もーめんと M_H の影響線図

第 4 表

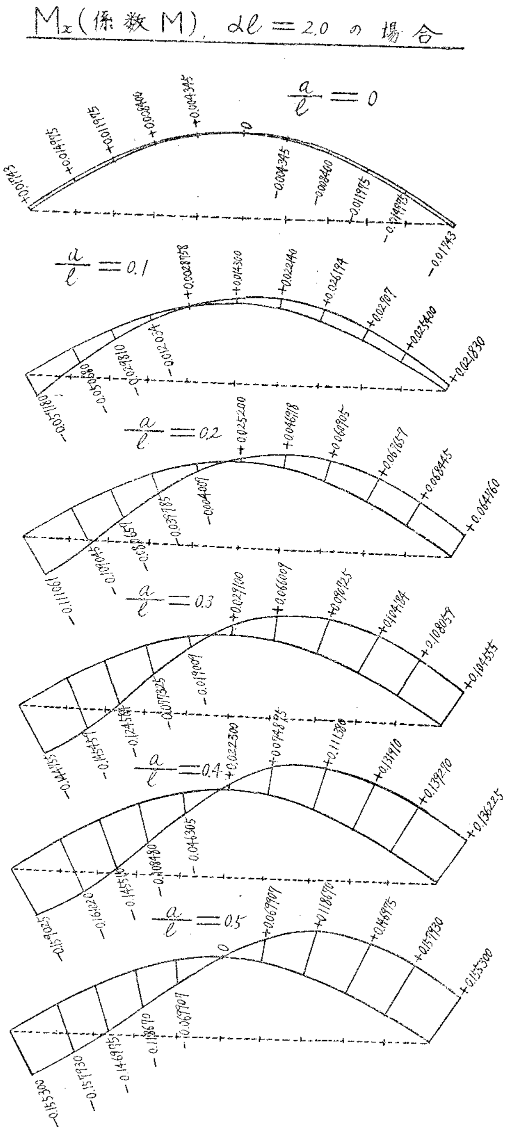
	$M_x=M_0'+M_H\sin\theta_x$, $\alpha l=2.0$							
	係数 M							
	$\frac{x}{l}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\frac{a}{l}$	0	+0.017430	+0.014975	+0.011975	+0.008400	+0.004345	0	−0.004345
	0.1	−0.057180	−0.050680	−0.029810	−0.012034	+0.0028758	+0.014300	+0.022140
	0.2	−0.111061	−0.109045	−0.080657	−0.039785	−0.004009	+0.025200	+0.046918
	0.3	−0.144755	−0.145459	−0.124584	−0.077325	−0.019009	+0.029100	+0.066009
	0.4	−0.159025	−0.161020	−0.145510	−0.108480	−0.046305	+0.022300	+0.074895
	0.5	−0.155300	−0.157930	−0.146975	−0.118670	−0.069907	0	+0.069907
	0.6	−0.136225	−0.139270	−0.131910	−0.111380	−0.074895	−0.022300	+0.046305
	0.7	−0.104555	−0.108059	−0.104184	−0.090725	−0.066009	−0.029100	+0.019009
	0.8	−0.064761	−0.068445	−0.067657	−0.060905	−0.046918	−0.025200	+0.004009
	0.9	−0.021830	−0.025400	−0.027070	−0.026194	−0.022140	−0.014300	−0.0028758
	1.0	+0.017430	+0.014975	+0.011975	+0.008400	+0.004345	0	−0.004345

第 5 表

	$\mathfrak{M}_b'=\mathfrak{M}_b-\left(\frac{EJ}{GJ_d}\cdot\frac{h}{2}\right)\frac{d(M_H\cdot\sin\theta_x)}{dx}$							
	係数 $M\frac{l}{h}$, $\alpha l=2.0$, $\frac{l}{h}=5.91$							
	$\frac{x}{l}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\frac{a}{l}$	0	−0.005470	−0.006080	−0.007330	−0.008500	−0.009360	−0.009682	−0.009360
	0.1	−0.004235	+0.064986	+0.054313	+0.044000	+0.034150	+0.025088	+0.017350
	0.2	−0.0013020	+0.054857	+0.1206625	+0.101183	+0.082278	+0.064301	+0.047508
	0.3	+0.001775	+0.0471125	+0.100476	+0.162507	+0.133937	+0.106342	+0.080037
	0.4	+0.004025	+0.040215	+0.083110	+0.132960	+0.189640	+0.151024	+0.114490
	0.5	+0.004835	+0.033186	+0.067022	+0.106210	+0.150520	+0.198950	+0.150520
	0.6	+0.004025	+0.025715	+0.051120	+0.080760	+0.114490	+0.151025	+0.189640
	0.7	+0.001775	+0.0170625	+0.035186	+0.056207	+0.080037	+0.106342	+0.133937
	0.8	−0.0013020	+0.008282	+0.0194425	+0.032503	+0.047508	+0.064301	+0.082278
	0.9	−0.004235	+0.0000610	+0.004673	+0.010320	+0.017350	+0.025088	+0.034150
	1.0	−0.005470	−0.006080	−0.007330	−0.008500	−0.009360	−0.009682	−0.009360

0.7	0.8	0.9	1.0
−0.008400	−0.011975	−0.014975	−0.017430
+0.026194	+0.027070	+0.025400	+0.021830
+0.060905	+0.067657	+0.068445	+0.064761
+0.090725	+0.104184	+0.108059	+0.104555
+0.111380	+0.131910	+0.139270	+0.136225
+0.118670	+0.146975	+0.157930	+0.155300
+0.108480	+0.145510	+0.161020	+0.159025
+0.077325	+0.124584	+0.145459	+0.144755
+0.039785	+0.080657	+0.109045	+0.111061
+0.012034	+0.029310	+0.050680	+0.057180
−0.008400	−0.011975	−0.014975	−0.017430

0.7	0.8	0.9	1.0
−0.008500	−0.007330	−0.006030	−0.005470
+0.010320	+0.004673	+0.0000610	−0.004235
+0.032503	+0.0194425	+0.008282	−0.0013020
+0.056207	+0.035186	+0.0170625	+0.001775
+0.080760	+0.051120	+0.025715	+0.004025
+0.106210	+0.067022	+0.033186	+0.004835
+0.132960	+0.083110	+0.040215	+0.004025
+0.162507	+0.100476	+0.0471125	+0.001775
+0.101183	+0.1206625	+0.054857	−0.0013020
+0.044000	+0.054313	+0.064986	−0.004235
+0.008500	−0.007330	−0.006030	−0.005470



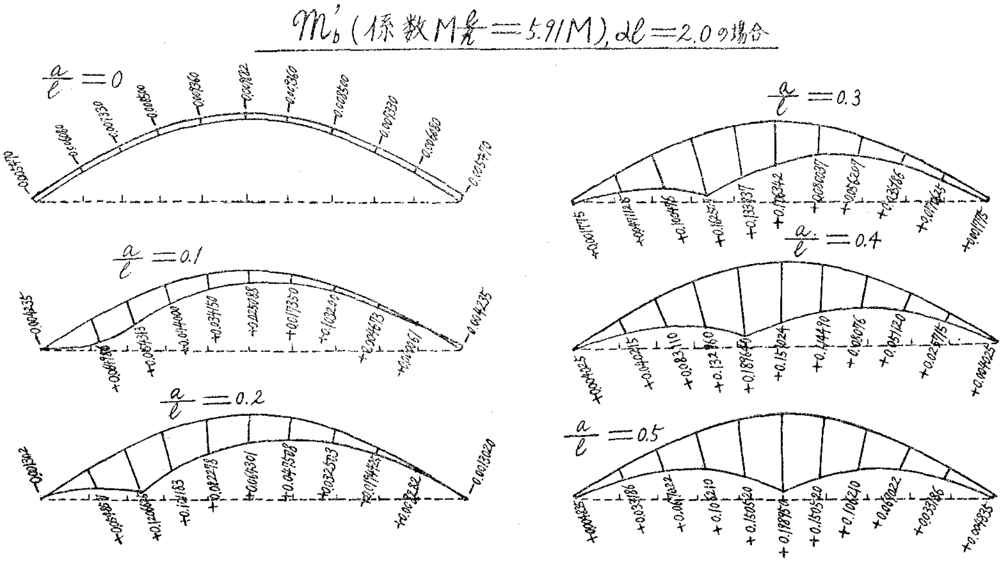
第10図　二鉸固定拱に於ける断面捩り応力度の合力もーめんとM_xの分布図

第 6 表

$$\mathfrak{D}_b' = \mathfrak{D}_b - \left(\frac{EJ}{GJ_d}\,\frac{h}{2}\right)\frac{d^2(M_H\cdot\sin\theta_x)}{dx^2}$$

係数　$M\frac{l}{h}$,　　$l=3.40\text{m}$,　　$\alpha l=2.0$

a/l \ x/l	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	+1.000000 +0.006100	+0.009300	+0.012100	+0.010150	+0.005910	0	—0.005910
0.1	+0.797715	+0.819235 —0.180340	—0.146295	—0.122375	—0.105333	—0.094020	—0.036360
0.2	+0.638085	+0.6547875	+0.697895 —0.302205	—0.2526075	—0.213760	—0.183965	—0.161552
0.3	+0.505375	+0.517355	+0.5504875	+0.617557 —0.381949	—0.330125	—0.280725	—0.242375
0.4	+0.404300	+0.411134	+0.435225	+0.480470	+0.547331 —0.452485	—0.382368	—0.327900
0.5	+0.318390	+0.322215	+0.339330	+0.374710	+0.428000	+0.500000 —0.500000	—0.428000
0.6	+0.246300	+0.249016	+0.261210	+0.287548	+0.327900	+0.382368	+0.452485 —0.547331
0.7	+0.184075	+0.186395	+0.1961775	+0.214520	+0.242375	+0.280725	+0.330125
0.8	+0.123691	+0.1269425	+0.134012	+0.1451925	+0.161552	+0.183965	+0.213760
0.9	+0.067310	+0.071030	+0.076460	+0.080335	+0.036360	+0.094020	+0.105333
1.0	+0.006100	+0.009300	+0.012100	+0.010150	+0.005910	0	—0.005910



第11図　二鉸固定拱に於ける断面フランヂの上端或は下端の曲げもーめんと$\mathfrak{M}_b'$の分布図

. 0.7	0.8	0.9	1.0
−0.010150	−0.012100	−0.009300	−0.006100
−0.030335	−0.076460	−0.071030	−0.067310
−0.1451925	−0.134012	−0.1269425	−0.123691
−0.214520	−0.1961775	−0.186395	−0.184075
−0.287548	−0.261210	−0.249016	−0.246300
−0.374710	−0.339330	−0.322215	−0.318390
−0.480470	−0.435225	−0.411134	−0.404300
+0.381949 −0.617557	−0.5504875	−0.517355	−0.505375
+0.2526075	+0.302205 −0.697895	−0.6547875	−0.638035
+0.122375	+0.146295	+0.180340 −0.819235	−0.797715
−0.010150	−0.012100	−0.009300	−0.006100 −1.000000

2 無鉸固定拱

（1） 拱の諸数値

第13図は，両端が捩れに対して固定されている他，軸面内に於ける外力に対しても固定された四次不静定の無鉸固定拱である。拱の形は抛物線にして，材質は鋼よりなり断面は，二鉸固定拱の場合同様第8図の如く，I形の定値とする。

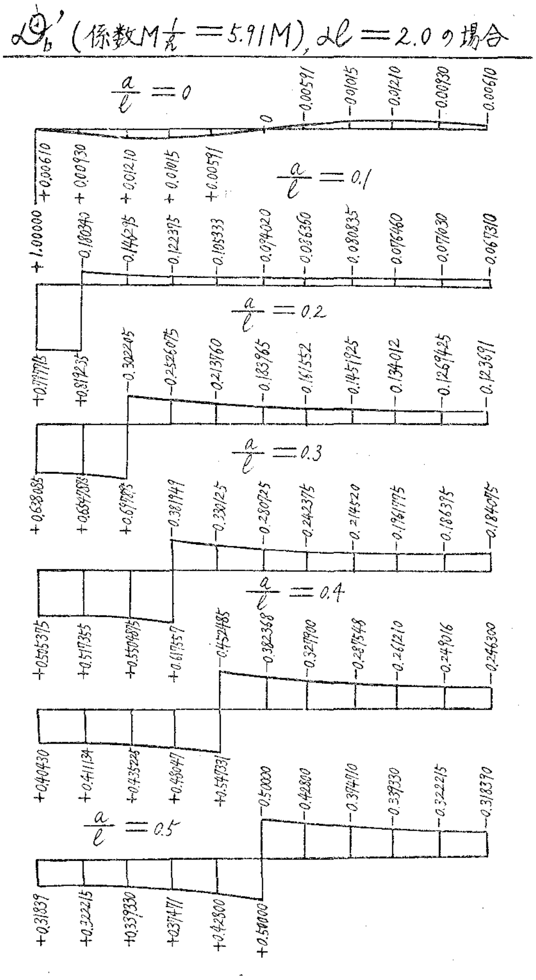
抛物線一般式

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)=0.765x-0.2248x^2$$

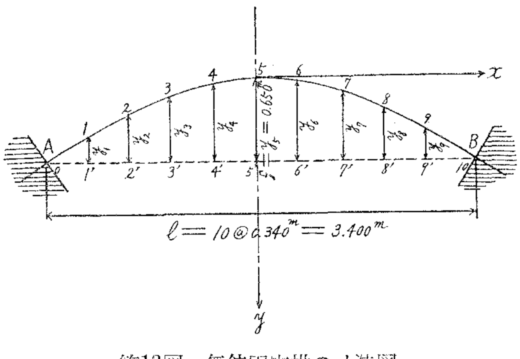
$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{4f}{l}-\frac{8fx}{l^2}$$

二鉸固定拱の場合に，諸数値は全く同一とし，　$f=0.650\text{m}$,　$l=3.400\text{m}$,

$\alpha l=\dfrac{l}{n}=2.0$　とする。



第12図　二鉸固定拱に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力$\mathfrak{Q}_b'$の分布図



第13図　無鉸固定拱の寸法図

原点を頂点Dにとれば

第　7　表

格　点	x(m)	y(m)	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	γ	$\sin^2\theta$	$\cos^2\theta$	$\tan\theta$
0	−1.700	0.650	37°25′	0.6076	0.7942	37°25′	0.36900	0.6307	0.76502
1	−1.360	0.624	31°28′	0.5220	0.8529	31°28′	0.27250	0.7276	0.61200
2	−1.020	0.546	24°39′	0.4171	0.9089	24°39′	0.17400	0.8260	0.45889
3	−0.680	0.416	17°01′	0.2926	0.9562	17°01′	0.08570	0.9145	0.30605
4	−0.340	0.234	8°42′	0.1513	0.9885	8°42′	0.02296	0.9770	0.15302
5	0	0	0°	0	1.0000	0°	0	1.0000	0
6	+0.340	0.234	−8°42′	−0.1513	0.9885	−8°42′	0.02292	0.9770	−0.15302
7	+0.680	0.416	−17°01′	−0.2926	0.9562	−17°01′	0.08570	0.9145	−0.30605
8	+1.020	0.546	−24°39′	−0.4171	0.9089	−24°39′	0.17400	0.8260	−0.45889
9	+1.360	0.624	−31°28′	−0.5220	0.8529	−31°28′	0.27250	0.7276	−0.61200
10	+1.700	0.650	−37°25′	−0.6076	0.7942	−37°25′	0.36900	0.6307	−0.76502

$b=19.0\text{cm}$,　$\delta_2=2.5\text{cm}$,　$\delta_1=1.3\text{cm}$,　$h=57.5\text{cm}$,　$h'=55.0\text{cm}$,　$h''=60.0\text{cm}$

$J=0.000002381\text{m}^4$,　$I_y=0.00002538\text{m}^4$,　$I_Z=0.00098172\text{m}^4$,　A=0.016[illegible]4m⁴,

$w=132.94\text{kg/m}$,　$I_f=0.0000143\text{m}^4$,　$\dfrac{J}{I_f}=0.1666$,　$\sqrt{\dfrac{J}{I_f}}=0.4083$,　$\dfrac{l}{h}=5.91$

$$\therefore \alpha l=0.88\frac{l}{h}\sqrt{\frac{J}{I_f}}\fallingdotseq 2.0$$

(2)　不静定量，即ち，水平振り反もーめんと X_1，鉛直振りもーめんと X_2，軸線に垂直な面に於ける振り反もーめんとX_3（第5図参照）B端固定，A端自由なる拱に於て，A端に剛体の桿AGを剛結する場合のX_1，X_2，X_3，は（44），（45），（46）式に於て，軸方向振りもーめんとの影響は小なる故無視し，$ds\cos\theta=dx$ を用いれば次式が得られる。

$$X_1=-\frac{\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}M_0'\frac{\sin\theta_x}{J\cos\theta_x}dx}{\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\sin^2\theta_x}{J\cos\theta_x}dx-\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\cos\theta_x}{I_y}dx}=-\frac{\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}M_0'\frac{\tan\theta_x}{J}dx}{\displaystyle\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\tan\theta_x\sin\theta_x}{J}dx+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\cos\theta_x}{I_y}dx}\quad\cdots\cdots(75)$$

$$X_2=-\frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_0'\frac{1}{J}dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\tan\theta_x\sin\theta_x}{I_y}dx+\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\cos\theta_x}{J}dx} \tag{76}$$

$$X_3=-\frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_0'\frac{\cos(\theta_x\sim r)}{J\cos\theta_x}dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\frac{\cos^2(\theta_x\sim\gamma)}{J\cos\theta_x}dx} \tag{77}$$

X_1, X_2, X_3, を計算すれば，第8表が得られ，影響線図を書けば，第14図の如くなる。

(3) 任意の点の断面振り応力度の合力もーめんとM_x, 任意の点の断面フランヂの上端或は下端の曲げもーめんと$\mathfrak{M}'_b$, 任意の点に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力$\mathfrak{D}'_b$, 任意の点に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による振りもーめんと$\mathfrak{M}'_d$ ((34), (50), (52), (53)式，参照） B 端固定 A端自由にして，AG が剛結されてる場合について計算すれば，第9表，第10表，第11表，第12表，の如くなる。

更に，A端固定，B端自由，BGを剛結せる場合の M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$ は B端固定, A端自由AGが剛結されてる場合の反対対称となり，又符号も逆となることが容易に分るから，この両者を加え合せて，両端固定なる場合の値を求める事ができる。両端固定なる場合の M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$, の分布図を求めれば，第15図，第16図，第17図，第18図の如くなる。

第 8 表

点	X₁ 分子 (kg/m²)	分母 $\left(\frac{1}{m^3}\right)$	$X_1=-\frac{分子}{分母}$ (kg-m)
0	40, 130.00	367, 854.00	—0.1091
1	99, 130.00	367, 854.00	—0.2694
2	137, 760.00	367, 854.00	—0.3745
3	157, 500.00	367, 854.00	—0.4280
4	160, 173.00	367, 854.00	—0.4353
5	148, 780.00	367, 854.00	—0.4045
6	126, 805, 00	367, 854.00	—0.3447
7	98, 262.00	367, 854.00	—0.2670
8	66, 483.00	367, 854.00	—0.1807
9	33, 733.00	367, 854.00	—0.0917
10	0	367, 854.00	0

第 9 表

$M_x = M_0' + X_1\sin\theta_x + X_2\cos\theta_x + X_3\cos(\theta_x - \gamma)$								
B 端 固 定　A 端 自 由　AGが剛結されている場合								
点	$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{l}=-0.50$	−0.40	−0.30	−0.20	−0.10	0	+0.10
0	−0.50	+0.41430	+0.46033	+0.49681	+0.51845	+0.51895	+0.49365	+0.44099
1	−0.40	−0.42560	+0.16855	+0.22350	+0.26968	+0.29945	+0.30985	+0.29505
2	−0.30	−0.59970	−0.58205	+0.00185	+0.06435	+0.11479	+0.14830	+0.15971
3	−0.20	−0.70330	−0.68880	−0.66310	−0.110950	−0.046910	+0.00220	+0.03131
4	−0.10	−0.73470	−0.72640	−0.70740	−0.67390	−0.18092	−0.12110	−0.03018
5	0	−0.70550	−0.70490	−0.69495	−0.67180	−0.63376	−0.22680	−0.17624
6	+0.10	−0.63000	−0.63730	−0.63685	−0.62590	−0.60130	−0.56200	−0.26030
7	+0.20	−0.50365	−0.52105	−0.52825	−0.52745	−0.51615	−0.49220	−0.45735
8	+0.30	−0.36730	−0.33190	−0.39320	−0.39937	−0.39326	−0.38780	−0.36864
9	+0.40	−0.19467	−0.20503	−0.21449	−0.22114	−0.22415	−0.22230	−0.21512
10	+0.50	0	0	0	0	0	0	0

第 10 表

$\mathfrak{M}_b' = \mathfrak{M}_b - \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{d(X_1\sin\theta_x)}{dx} + \frac{EI_f}{GJ} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{d(X_2\cos\theta_x)}{dx} \right\}$								
係数　$\frac{n}{h}M = 5.91M_s$　　$2l = \frac{l}{n} = 2.0$								
B 端 固 定　A 端 自 由　AGが剛結されている場合								
点	$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{l}=-0.50$	−0.40	−0.30	−0.20	−0.10	0	+0.10
0	−0.50	+0.015678	+0.040998	+0.072993	+0.10972	+0.150315	+0.192890	+0.235625
1	−0.40	+0.03655	+0.04289	+0.05050	+0.1420135	+0.183909	+0.233750	+0.279941
2	−0.30	+0.04847	+0.05712	+0.07577	+0.132975	+0.192328	+0.249800	+0.300922
3	−0.20	+0.05170	+0.05162	+0.03332	+0.105640	+0.174675	+0.239775	+0.296730
4	−0.10	+0.04815	+0.05826	+0.03056	+0.105510	+0.129030	+0.202350	+0.266820
5	0	+0.03965	+0.04910	+0.07054	+0.094280	+0.117650	+0.136500	+0.210350
6	+0.10	+0.02809	+0.03671	+0.05526	+0.076700	+0.098475	+0.116250	+0.126325
7	+0.20	+0.01772	+0.02422	+0.03915	+0.056480	+0.074730	+0.090100	+0.099470
8	+0.30	+0.00711	+0.01183	+0.02252	+0.035120	+0.048320	+0.060980	+0.068930
9	+0.40	+0.00185	+0.00398	+0.009545	+0.016520	+0.023851	+0.030940	+0.035889
10	+0.50	0	0	0	0	0	0	0

係数 M			
$\alpha l = \frac{l}{n} = 2.0$			
+0.20	+0.30	+0.40	+0.50
+0.36236	+0.26270	+0.14611	+0.01652
+0.25577	+0.19400	+0.11223	+0.01263
+0.14745	+0.11155	+0.0541	+0.02313
+0.03705	+0.01960	+0.02030	−0.03340
−0.06250	−0.05930	−0.09935	−0.15130
−0.14910	−0.14675	−0.16920	−0.21390
−0.22210	−0.21025	−0.22433	−0.26250
−0.26395	−0.23950	−0.24360	−0.27315
−0.34228	−0.24362	−0.23155	−0.24875
−0.20360	−0.18944	−0.15754	−0.15832
0	0	0	0

+0.20	+0.30	+0.40	+0.50
+0.277655	+0.319347	+0.361647	+0.408922
+0.3127865	+0.360220	+0.397760	+0.441950
+0.344175	+0.381870	+0.416980	+0.464280
+0.344210	+0.383930	+0.418980	+0.463050
+0.321040	+0.364840	+0.403340	+0.448650
+0.272520	+0.323510	+0.367850	+0.417150
+0.199400	+0.260630	+0.312970	+0.367270
+0.101720	+0.174390	+0.236780	+0.297330
+0.071880	+0.070080	+0.144105	+0.213130
+0.037800	+0.037395	+0.034940	+0.111360
0	0	0	0

第 8 表 続 き

X_2			
点	分子 (kg/m^2)	分母 $\left(\frac{1}{m^3}\right)$	$X_2 = -\frac{分子}{分母}$ $(kg-m)$
0	52,420.00	1,343,134.00	− 0.03903
1	149,060.00	1,343,134.00	− 0.11095
2	234,390.00	1,343,134.00	− 0.17440
3	305,080.00	1,343,134.00	− 0.22710
4	356,730.00	1,343,134.00	− 0.26550
5	384,750.00	1,343,134.00	− 0.28640
6	384,150.00	1,343,134.00	− 0.28590
7	340,000.00	1,343,134.00	− 0.25310
8	278,035.00	1,343,134.00	− 0.20680
9	162,805.00	1,343,134.00	− 0.12120
10	0	1,343,134.00	0

X_3			
点	分子 (kg/m^2)	分母 $\left(\frac{1}{m^3}\right)$	$X_3 = -\frac{分子}{分母}$ $(kg-m)$
0	66,010.00	919,168.00	− 0.07180
1	178,770.00	1,022,650.00	− 0.17475
2	270,280.00	1,127,875.00	− 0.23940
3	337,560.00	1,203,410.00	− 0.28050
4	376,450.00	1,272,800.00	− 0.29550
5	384,420.00	1,314,220.00	− 0.29240
6	360,070.00	1,289,850.00	− 0.27920
7	305,650.00	1,222,570.00	− 0.25000
8	224,805.00	1,128,070.00	− 0.19920
9	121,141.00	1,022,570.00	− 0.11835
10	0	918,980.00	0

第 11 表

$$\mathfrak{D}_b' = \mathfrak{D}_b - \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_1 \sin\theta_x)}{dx^2} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_2 \cos\theta_x)}{dx^2} \right\}$$

B 端 固 定 A 端 自 由 AGが剛結されている場合

係数 $M\frac{1}{h}$, $\alpha l = \frac{l}{n} = 2.0$

点	$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{l}=-0.50$	−0.40	−0.30	−0.20	−0.10	0	+0.10
0	−0.50	−0.29065	−0.309675	−0.340760	−0.366360	−0.395225	−0.429350	−0.476125
1	−0.40	−0.06340	−0.427740 −0.097650	−0.472065	−0.489402	−0.494215	−0.494170	−0.503285
2	−0.30	−0.03650	−0.136500	−0.592225 −0.192525	−0.597310	−0.585385	−0.558890	−0.535125
3	−0.20	−0.09920	−0.158100	−0.225100	−0.705430 −0.225750	−0.678300	−0.627340	−0.581760
4	−0.10	−0.10110	−0.162550	−0.236250	−0.242100	−0.766272 −0.206200	−0.699720	−0.633260
5	0	−0.09450	−0.154450	−0.225900	−0.235550	−0.211100	−0.789500 −0.141500	−0.705100
6	+0.10	−0.03650	−0.135850	−0.199800	−0.216075	−0.197750	−0.139250	−0.795563 −0.056250
7	+0.20	−0.06500	−0.107150	−0.161300	−0.177900	−0.168100	−0.123700	−0.058100
8	+0.30	−0.04720	−0.077050	−0.116450	−0.131500	−0.129300	−0.100300	−0.054500
9	+0.40	−0.02130	−0.038475	−0.062700	−0.071530	−0.072100	−0.060190	−0.034300
10	+0.50	0	0	0	0	0	0	0

第 12 表

$$\mathfrak{M}_d' = \mathfrak{D}_b' = -\mathfrak{D}_b + \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_1 \sin\theta_x)}{dx^2} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_2 \cos\theta_x)}{dx^2} \right\}$$

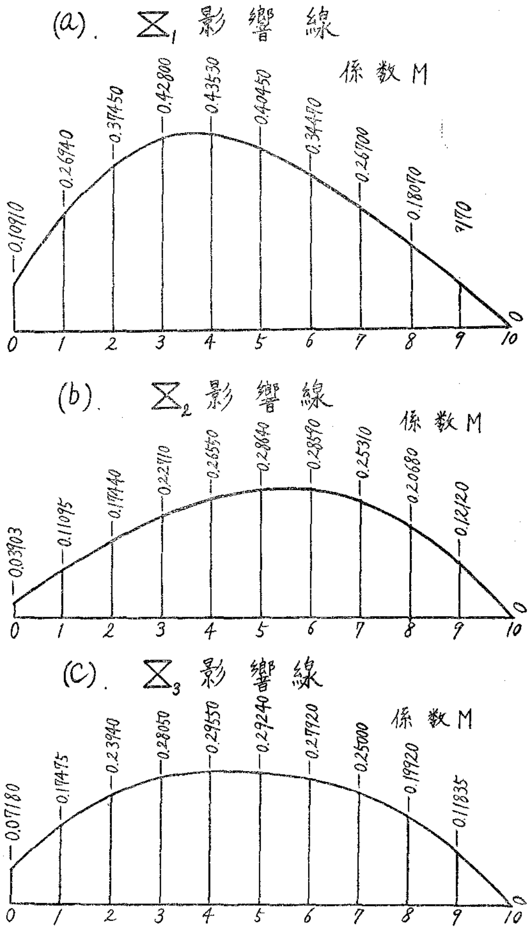
B 端 固 定 A 端 自 由 AGが剛結されている場合

係数 M, $\alpha l = \frac{l}{n} = 2.0$

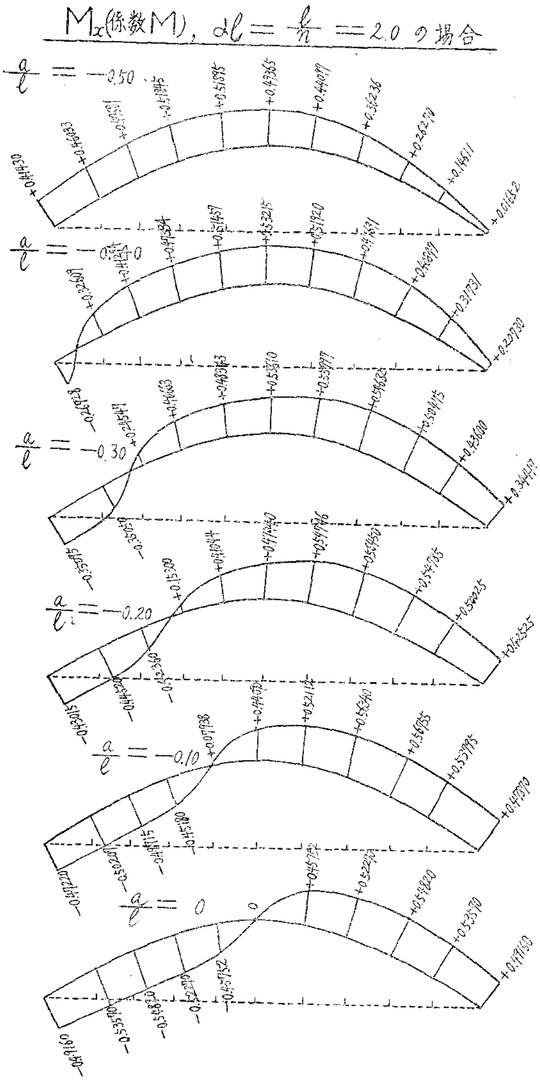
点	$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{l}=-0.50$	−0.40	−0.30	−0.20	−0.10	0	+0.10
0	−0.50	+0.290650	+0.309675	+0.340760	+0.366260	+0.395225	+0.429350	+0.476125
1	−0.40	+0.063400	+0.427740 +0.097650	+0.472065	+0.489402	+0.494215	+0.494170	+0.503285
2	−0.30	+0.036500	+0.136500	+0.592225 +0.192525	+0.597310	+0.585385	+0.558890	+0.535125
3	−0.20	+0.099200	+0.158100	+0.225100	+0.705430 +0.225750	+0.678300	+0.627340	+0.581760
4	−0.10	+0.101100	+0.162550	+0.236250	+0.242100	+0.766272 +0.206200	+0.699720	+0.633260
5	0	+0.094500	+0.154450	+0.225900	+0.235550	+0.211100	+0.789500 +0.141500	+0.705100
6	+0.10	+0.036500	+0.135850	+0.199300	+0.216075	+0.197750	+0.139250	+0.795563 +0.056250
7	+0.20	+0.065000	+0.107150	+0.161300	+0.177900	+0.168100	+0.123700	+0.058100
8	+0.30	+0.047200	+0.077050	+0.116450	+0.131500	+0.129300	+0.100300	+0.054500
9	+0.40	+0.021300	+0.038475	+0.062700	+0.071530	+0.072100	+0.060190	+0.034300
10	+0.50	0	0	0	0	0	0	0

+0.20	+0.30	+0.40	+0.50
—0.546160	—0.646960	—0.793975	—0.977750
—0.540520	—0.618800	—0.771780	—0.945400
—0.542830	—0.601415	—0.751540	—0.922500
—0.567980	—0.605900	—0.747440	—0.914200
—0.600147	—0.620150	—0.743640	—0.912100
—0.651550	—0.654400	—0.761450	—0.923500
—0.727425	—0.710590	—0.788210	—0.934582
—0.815725 +0.010900	—0.780075	—0.827910	—0.930250
—0.005500	—0.876740 +0.035750	—0.886510	—0.951540
—0.007530	+0.014300	—0.951990 +0.021925	—0.973552
0	0	0	—1.000000 0

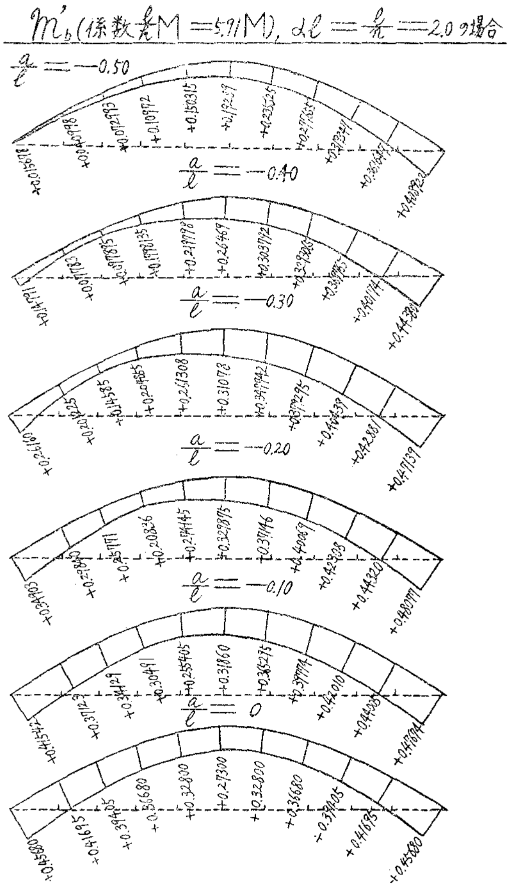
+0.20	+0.30	+0.40	+0.50
+0.546160	+0.946960	+0.793975	+0.977750
+0.540520	+0.618800	+0.771780	+0.945400
+0.542830	+0.601415	+0.751540	+0.922500
+0.567980	+0.605900	+0.747440	+0.914200
+0.600147	+0.620150	+0.743640	+0.912100
+0.651550	+0.654400	+0.761450	+0.923500
+0.727425	+0.710590	+0.788210	+0.934582
+0.815725 —0.010900	+0.780075	+0.827910	+0.930250
+0.005500	+0.876740 —0.035750	+0.886510	+0.951540
+0.007530	—0.014300	+0.951990 —0.021925	+0.973552
0	0	0	0



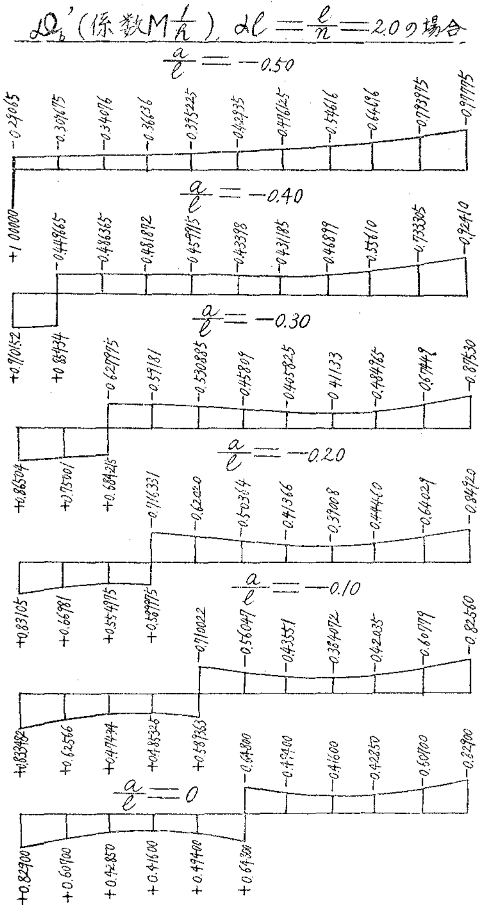
第14図　一端固定，他端自由にして自由端を弾性重心に剛桿にて剛結せる拱（但し，固定，剛結とは捩りもーめんとに対しても固定なる事を含む）の不静定捩り反もーめんと X_1，X_2，X_3，の影響線図



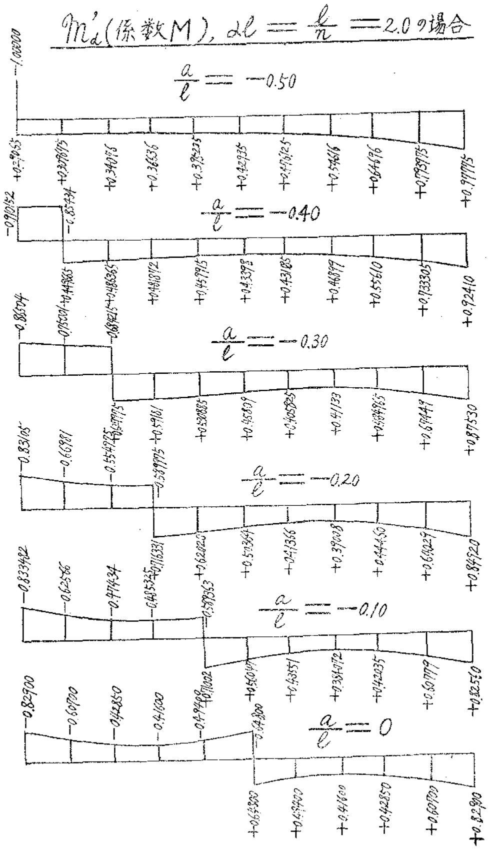
第15図　無鉸固定拱に於ける断面振り応力度の合力もーめんと M_x の分布図



第16図　無鉸固定拱に於ける断面フランヂの上端或は下端の曲げもーめんと $\mathfrak{M}_b'$ の分布図



第17図　無鉸固定拱に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力 $\mathfrak{D}_b'$ の分布図



第18図　無鉸固定拱に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による捩りもーめんと $\mathfrak{M}_d'$ の分布図

Ⅳ 結　　言

二鉸固定拱の水平捩り反もーめんと M_H の影響線は，左右対称になるのに比べ，一端固定他端自由にして，自由端と弾性重心とを剛桿にて剛結せる場合の不静定捩り反もーめんと X_1, X_2, X_3, は左右対称とはならず，両端固定の場合を求めるには，更に，反対の一端を固定にし，他端を自由とし，自由端と弾性重心とを剛桿にて剛結せる場合の X_1, X_2, X_3, を求め，両者を加算しなければならない。捩り応力度合力もーめんと M_ω, 断面フランヂの上端或は下端の曲げもーめんと $\mathfrak{M}_b'$, 断面の上又は下端フランヂの剪断力 $\mathfrak{D}_b'$, 断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による捩りもーめんと $\mathfrak{M}_d'$, 等を求める場合も同様である。計算

結果より見ると，不静定捩り反もーめんとが，M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$ 等に及ぼす影響は，無視出来ないものがある。二鉸固定拱の場合は，左程でもないが，無鉸固定拱の場合は，極めてその影響が大きかつた。この無鉸固定拱の不静定量，X_1，X_2，X_3 などの影響線は，近藤繁人氏の立体曲り梁の計算[25]で得た不静定値の影響線とその曲線の形が似かよつている事は間接的ではあるが参考になると思う。又，二鉸固定拱や無鉸固定拱の M_x, $\mathfrak{M}_b'$, $\mathfrak{D}_b'$, $\mathfrak{M}_d'$ に関する曲線はその曲線の形が，Unold氏の行つたI形断面環状梁の研究結果[26]と，稍々似かよつた点もあるので，これ又，間接的には参考になると思う。更に，これらの不静定捩り反もーめんとの本質を知るため，抛物線拱及び，その他の曲線拱についても，$\frac{f}{l}$ を種々に変えて，二鉸固定拱，無鉸固定拱，各々の場合の M_H 及び X_1，X_2，X_3 の影響線を求め，その変化の模様を研究する事は捩りもーめんとを受ける拱橋の今後の研究に極めて役立つものと思う。

（昭和30年5月27日受付）

25　近藤繁人：　立体曲り梁の解法．土木学会第10回年次学術講演会，発表資料　1954.

26　池部宗薫他5氏共訳：ブライヒ鉄骨構造，　1941.