



測定誤差のある場合のR管理図,x-R管理図の特性

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-06-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 金塚, 高次 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/3220

測定誤差のある場合の R 管理図, \bar{x} - R 管理図の特性

金 塚 高 次

The Operating Characteristics of R Charts and \bar{x} - R Charts when Measurement Errors Exist

Takazi Kanazuka

Abstract

The important problem in using control charts is a power of detecting abnormal variation in the process, namely operating characteristics. In the previous paper, the influence of measurement errors on the power of \bar{x} charts was treated of by the present authr. In this paper, the influence of measurement errors on R charts and \bar{x} - R charts is explained in detail.

1. 緒 言

測定誤差およびサンプリング誤差が管理図の検出力にいかに関与するかを明らかにすることは管理図を使う上で重要なことである。前報¹⁾において、測定誤差が伴う場合の \bar{x} 管理図につき、工程平均のみが変化した場合、工程標準偏差のみが変化した場合、ならびにこれらとともに変化した場合の検出力を計算し、測定誤差が無視できない場合には管理図の検出力を考慮して試料の大きさを定める必要のあることを示した。しかし一般には、 \bar{x} 管理図は母平均の変化を発見しようとするものであるし、 R 管理図は母標準偏差の変化を発見しようとするものであって、この両者は併用されるのが普通である。測定誤差を考慮しない場合の R 管理図の検出力は Duncan²⁾, Scheffé³⁾ によって計算されており、また \bar{x} 管理図と R 管理図とが併用される場合の特性 (\bar{x} - R 管理図の特性) については伊東⁴⁾ の詳細な研究がある。

著者は測定誤差 (サンプリング誤差を含む) の存在する場合の管理図の特性をいろいろの場合について検討しているが、本報では R 管理図, \bar{x} - R 管理図の特性について報告する。

2. R 管理図の特性

R 管理図は母集団のバラッキを試料の最大値と最小値の差 R で測り、これを管理しようとする管理図であって、母標準偏差の変化のみに対して検出力を持っており、母平均の変化に対しては全く無関係である。

管理図としては正規母集団 $N(\mu, \sigma_p^2 + \sigma_M^2)$ から大きさ n の試料の範囲を打点するものと

する。ただし σ_P^2 工程のバラツキで、 σ_M^2 は測定誤差 (サンプリング誤差を含む) とする。いま工程のバラツキが変化して、 $N(\mu, \sigma_P^2 + \sigma_M^2)$ になったとすると、この新しい母集団から大きさ n の試料の範囲 R が 3 シグマ法の管理限界外に出る確率 (検出力) P は

$$P = P_r\{R \geq \text{UCL} | \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}\} + P_r\{R \leq \text{LCL} | \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}\} \quad (1)$$

ここで

$$\text{UCL} = E(R) + 3D(R) = (d_2 + 3d_3)\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} \equiv D_2\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} \quad (2)$$

$$\text{LCL} = E(R) - 3D(R) = (d_2 - 3d_3)\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} \equiv D_1\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} \quad (3)$$

$$d_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \{1 - \Phi(x_1)\}^n - \{\Phi(x_1)\}^n] dx_1 \quad (4)$$

$$d_3 = \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_n} [1 - \{\Phi(x_n)\}^n - \{1 - \Phi(x_1)\}^n + \{\Phi(x_n) - \Phi(x_1)\}^n] dx_1 dx_n - d_2^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

ただし

$$\Phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (6)$$

x_1 ; 大きさ n の試料中の最小値

x_n ; 大きさ n の試料中の最大値

よって

$$P = P_r \left\{ \frac{R}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} \geq \frac{D_2\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} \right\} + P_r \left\{ \frac{R}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} \leq \frac{D_1\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}} \right\} \quad (7)$$

で与えられる。いま工程のバラツキの変化の度合をあらわす係数として

$$\sigma'_P / \sigma_P = \kappa \quad (8)$$

を用いることとし

$$R / \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_M^2} = w \quad (9)$$

とおき

$$\sqrt{\frac{\sigma_P^2 + \sigma_M^2}{\sigma_P'^2 + \sigma_M^2}} = \sqrt{\frac{1 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}{\kappa^2 + (\sigma_M / \sigma_P)^2}} = \sqrt{m'} \quad (10)$$

とおくと

$$P = P_r\{w \geq D_2\sqrt{m'}\} + P_r\{w \leq D_1\sqrt{m'}\} \quad (11)$$

となる。ここで w の分布函数 $f_n(w)$ については、E. S. Pearson が

$$P_n(W) = \int_0^W f_n(w) dw \quad (12)$$

なる形で表を与えている⁵⁾。故にこの表を利用して

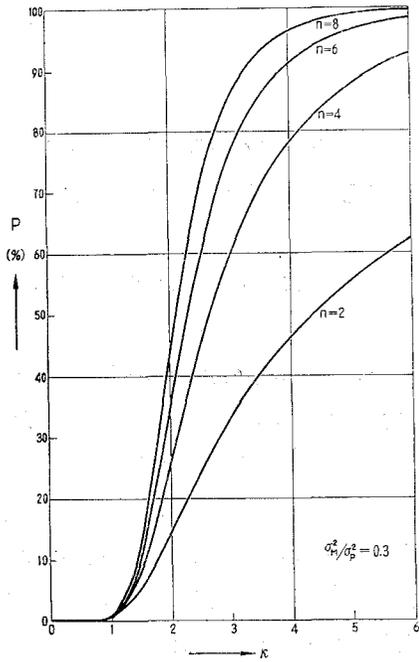


図-1 検出力曲線 (R 管理図, $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$)

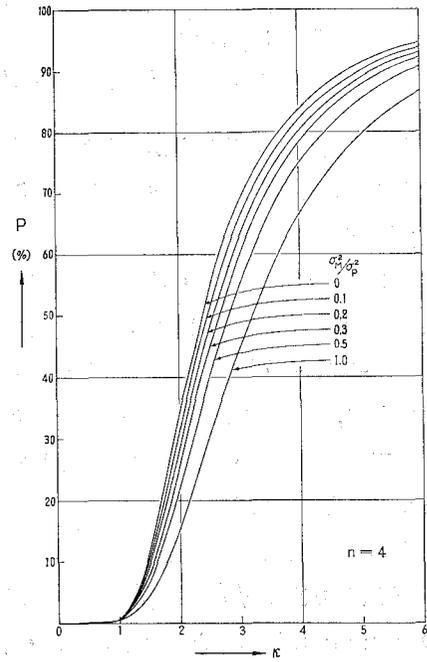


図-2 検出力曲線 (R 管理図, $n=4$)

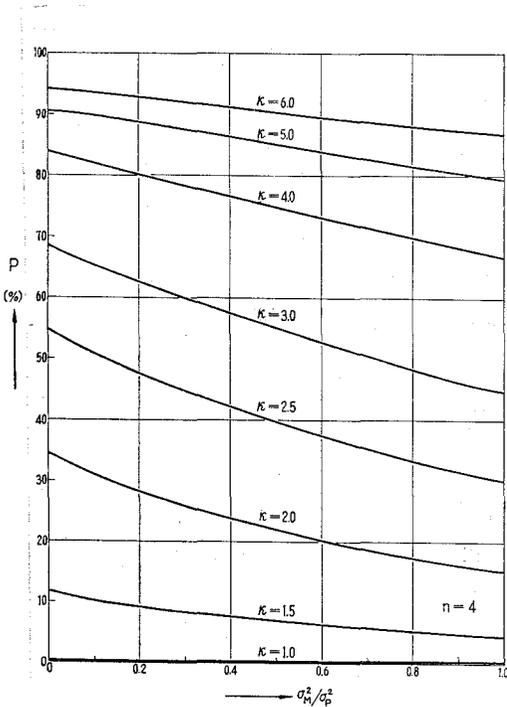


図-3 検出力に対する測定誤差の影響 ($n=4$)

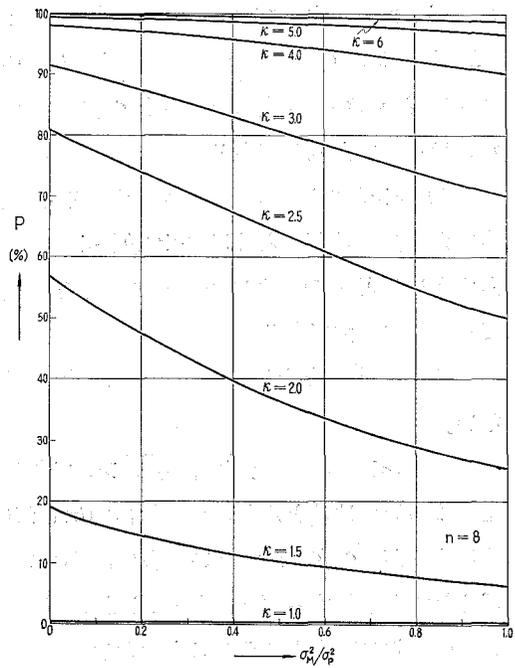


図-4 検出力に対する測定誤差の影響 ($n=8$)

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{D_2\sqrt{m'}}^{\infty} f_n(w) dw + \int_0^{D_1\sqrt{m'}} f_n(w) dw \\
 &= 1 - P_n(D_2\sqrt{m'}) + P_n(D_1\sqrt{m'}) \tag{13}
 \end{aligned}$$

から検出力を求めることができる。すなわち、いま測定誤差として σ_M^2/σ_P^2 を指定すると (10) からおのおのの κ に対する $\sqrt{m'}$ が求められ、 n を指定すると (13) からおのおのの κ に対する検出力 P が計算できる。

このような方法で $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$ のおのおのについて 3 シグマ限界の $n=2, 4, 5, 6, 8$ の R 管理図につき検出力を算出した。

図-1 に $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3, n=2, 4, 6, 8$ の検出力曲線、図-2 に $n=4, \sigma_M^2/\sigma_P^2=0\sim 1.0$ の場合の検出力曲線、図-3 に $n=4$ 、図-4 に $n=8$ の場合の検出力に対する測定誤差の影響を示した。

工程標準偏差 σ_P が変化したときの R 管理図の検出力に対する測定誤差の影響を考察するおつぎのとおりである。

1) 検出力は試料の大きさが $n=6$ 以下では $D_2\sqrt{m'}$ の値により定まり、試料の大きさが $n=7$ 以上では $D_1\sqrt{m'}$ の値により定まる。 n が一定ならば、測定誤差がない場合工程の変化が κ_0 の検出力と、測定誤差が σ_M^2/σ_P^2 の場合同じ検出力を与える κ は

$$\kappa^2 = \kappa_0^2 + (\kappa_0^2 - 1)(\sigma_M^2/\sigma_P^2) \tag{14}$$

の関係があり、よって $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0, \kappa^2=2.0$ と $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1, \kappa^2=2.1$ と $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.5, \kappa^2=2.5$ または、 $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0, \kappa^2=3.0$ と $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1, \kappa^2=3.2$ と $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.5, \kappa^2=4.0$ などは検出力が同じである。

2) $\kappa > 1$ では測定誤差が増大するといずれも検出力が減少するが、とくに $0 < \sigma_M^2/\sigma_P^2 < 1$ の範囲では n が大きいほど κ の小さい ($\kappa=1$ の近くを除く) ところでその影響が大である。

3) $\kappa=1$ のときは、測定誤差は検出力に影響しない。

4) $\kappa < 1$ 、 $n=6$ 以下では $\sqrt{m'} > 1$ であるから、測定誤差の影響はほとんどなく、検出力はしだいに 0 に接近するが、 σ_M^2/σ_P^2 が大きい場合は、小さい場合よりごくわずかに増加する傾向がある。しかし R 管理図の第 1 種の誤りの確率をこえることはない。

5) $\kappa < 1, n=7$ 以上で LCL がある場合は、 $\kappa=0$

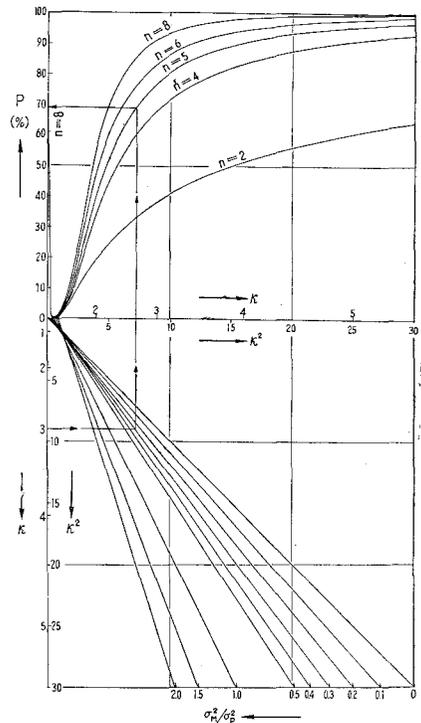


図-5 R 管理図用検出力計算図表

で $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0$ のとき $P=1$ となるが、測定誤差が存在すると著しく検出力を低下させ、 κ が 0 に近く n が小さい ($n \geq 7$) ほどその影響は大である。

6) (14) 式より、 κ_0^2 と κ^2 との関係を各 σ_M^2/σ_P^2 につき直線で表わせるので 図-5 のような測定誤差がある場合の R 管理図用検出力計算図表を作成した。図-5 の曲線群は $n=2, 4, 5, 6, 8$ の $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0$ (測定誤差がない場合) の R 管理図の検出力曲線を描いたものである。図の使い方は、例えば 3 シグマ法の R 管理図において、 $n=5$ 、 $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$ 、 $\kappa=3.0$ の場合の検出力は、図の矢印をたどって $P=69.1\%$ を得る。

3. \bar{x} -R 管理図の特性

\bar{x} 管理図と R 管理図は前述のように、単独に用いられることはきわめてまれであって、この両者は併用されるのが常である。このとき \bar{x} -R 管理図は測定誤差がある場合、工程の変化に対してどのような特性を示すかを考えてみる。

工程の変化とは、工程平均の変化と工程標準偏差の変化を意味し、これらは同時に起こり得るものであって、 \bar{x} -R 管理図はこの母集団の異常を発見するものであるとすると、“ \bar{x} 管理図と R 管理図が共に正常ならば、母集団に異常がない”ということを除いてはいずれも異常と判定されるのであるから、 \bar{x} -R 管理図の検出力 P は、工程の母集団に異常を生じた場合に、“ \bar{x} 、R 管理図が共に正常”ということが起る確率を 1 から引けばよいことになる。このとき \bar{x} の分布と R の分布は独立であるから、いずれの管理図によっても発見されない確率は、それら個々の管理図によって発見されない確率すなわち第 2 種の過誤の確率の積で表わされる。よっていまある測定誤差の場合の \bar{x} および R 管理図の検出力を $P_{\bar{x}}$ 、 P_R とすると、その測定誤差の場合の \bar{x} -R 管理図の検出力 P は、

$$P = 1 - (1 - P_{\bar{x}})(1 - P_R) = P_{\bar{x}} + P_R - P_{\bar{x}} \cdot P_R \quad (15)$$

となり、この式で容易に \bar{x} -R 管理図の検出力が算出できる。

一例として、 $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1$ なる場合、工程が変化し、工程平均が $1\sigma_P$ だけ大きくなり ($\delta=1$)、工程標準偏差が 2 倍になった ($\kappa=2$) としよう。この変化に対して $n=5$ の \bar{x} -R 管理図の検出力はどのくらいであるかを求めてみると、前報¹⁾ に示した計算結果から $P_{\bar{x}}=0.3304$ 、前章の計算結果から $P_R=0.3725$ 、それ故 (15) 式から

$$P = 0.3304 + 0.3725 - 0.3304 \times 0.3725 = 0.5798$$

となる。

このようにして $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0$ のおのおのについて δ と κ をいろいろ変えて 3 シグマ法の $n=4, 5$ の \bar{x} -R 管理図の検出力を計算した。表-1 に $n=4$ 、 $\sigma_M^2/\sigma_P^2=0.2$ の場合の例を示す。

図-6に $n=4, \kappa=2, \sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$ の場合の $\bar{x}, R, \bar{x}-R$ 管理図について工程平均の変化 δ と検出力 P との関係, 図-7に $n=4, \kappa=2, \sigma_M^2/\sigma_P^2=0\sim 1.0$ の場合の δ と P との関係, 図-8に $n=4, \delta=0.5, \kappa=0.5\sim 6.0$ の場合の σ_M^2/σ_P^2 と P との関係, 図-9に $n=4, \delta=2.0, \kappa=0.5\sim 6.0$ の場合の σ_M^2/σ_P^2 と P との関係, 図-10に $n=4, \kappa=0.5, \delta=1.0\sim 3.0$ の場合の σ_M^2/σ_P^2 と p との関係, 図-11に $n=4, \kappa=2.0, \delta=0\sim 4.0$ の場合の σ_M^2/σ_P^2 と P との関係を示す。

3シグマ法の $\bar{x}-R$ 管理図の検出力に対する測定誤差の影響を要約すれば, つぎのとおりである。

- 1) 測定誤差がある場合でも \bar{x}, R 管理図を単独に用いたときより検出力が大となる。

表-1 $\bar{x}-R$ 管理図の検出力 ($n=4, \sigma_M^2/\sigma_P^2=0.2$)

δ	κ				
	2	3	4	5	6
0	0.3630	0.7306	0.8842	0.9450	0.9711
0.5	0.3928	0.7404	0.8871	0.9459	0.9715
1.0	0.4783	0.7673	0.8951	0.9487	0.9725
1.5	0.6036	0.8065	0.9073	0.9529	0.9742
2.0	0.7401	0.8512	0.9220	0.9582	0.9763
2.5	0.8560	0.8944	0.9377	0.9642	0.9789
3.0	0.9337	0.9312	0.9527	0.9704	0.9816
3.5	0.9750	0.9589	0.9659	0.9763	0.9843
4.0	0.9924	0.9776	0.9766	0.9818	0.9870
4.5	0.9981	0.9889	0.9848	0.9864	0.9895
5.0	0.9996	0.9950	0.9907	0.9902	0.9917
5.5	0.9999	0.9979	0.9946	0.9932	0.9937
6.0	1.0000	0.9993	0.9970	0.9955	0.9953

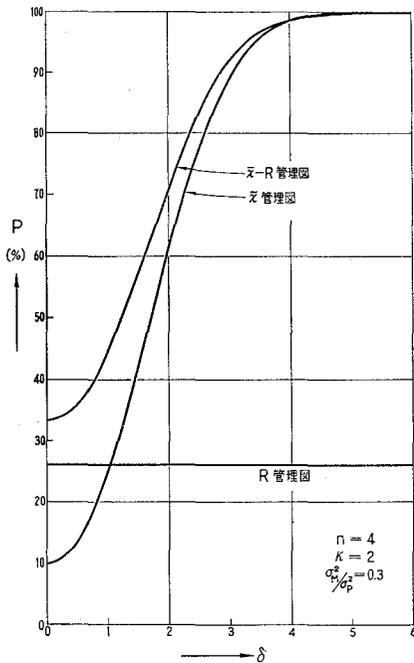


図-6 $\bar{x}, R, \bar{x}-R$ 管理図の検出力 ($n=4, \kappa=2, \sigma_M^2/\sigma_P^2=0.3$)

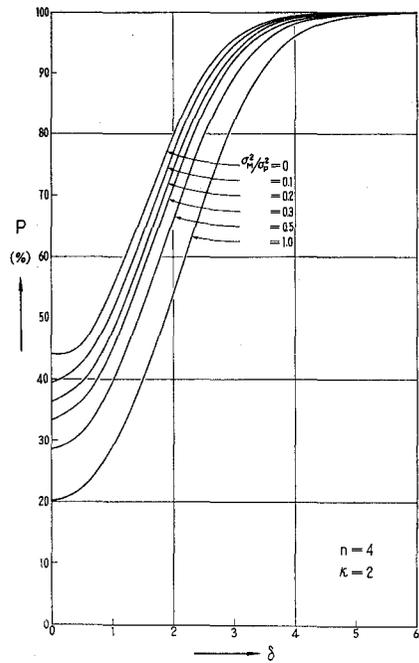


図-7 $\bar{x}-R$ 管理図検出力曲線 ($n=4, \kappa=2$)

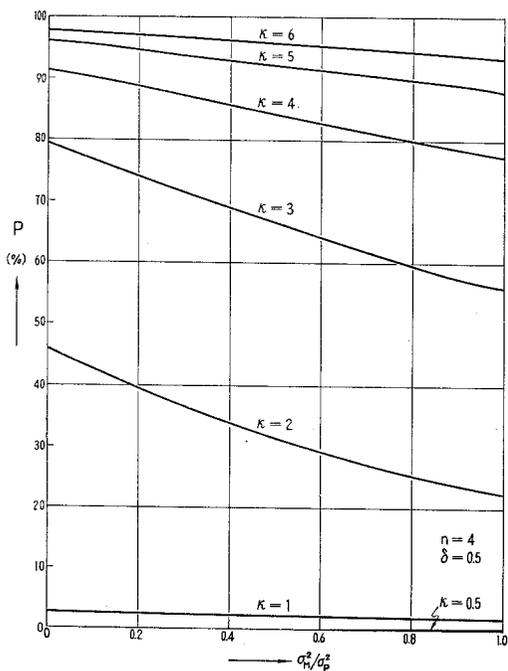


図-8 検出力に対する測定誤差の影響
($n=4, \delta=0.5$)

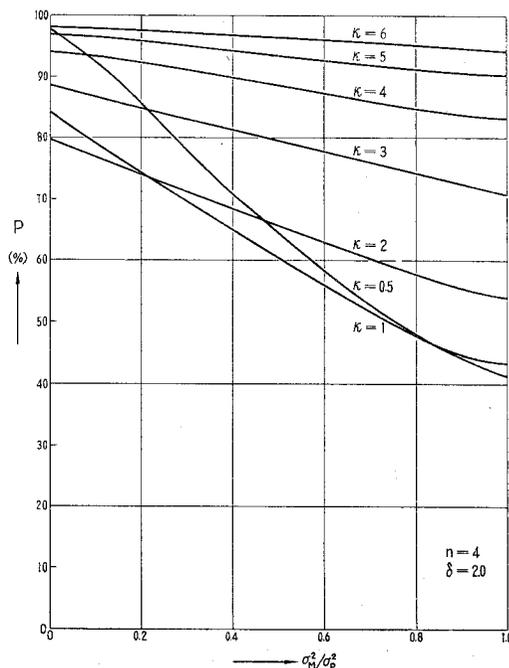


図-9 検出力に対する測定誤差の影響
($n=4, \delta=2.0$)

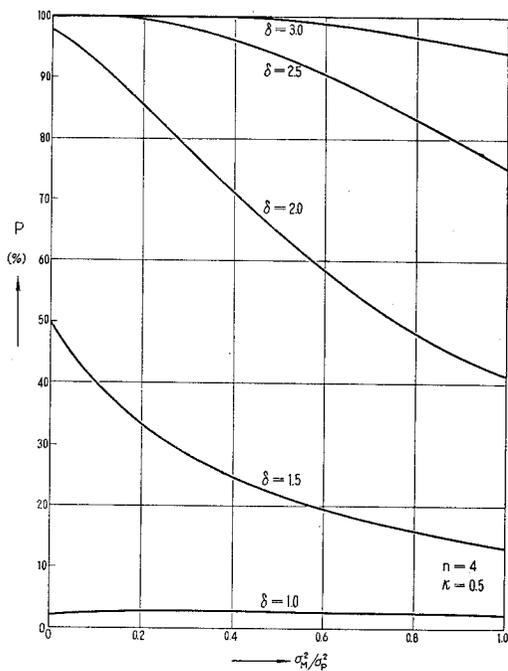


図-10 検出力に対する測定誤差の影響
($n=4, \kappa=0.5$)

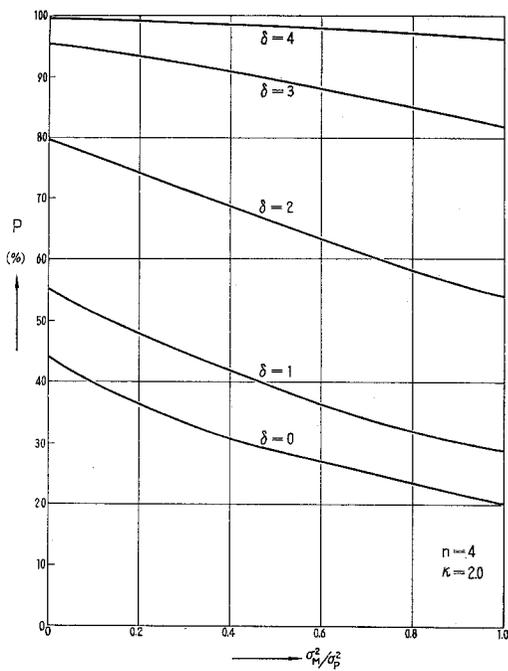


図-11 検出力に対する測定誤差の影響
($n=4, \kappa=2.0$)

2) $\kappa > 1$ では測定誤差が増大すると検出力は減少するが, n, κ, δ が十分大きいとその影響は小さくなる。

3) $\delta = 0, \kappa = 1$ では測定誤差は検出力に影響しない。

4) $\kappa < 1, n = 6$ 以下では $-3 < \delta\sqrt{n} < 3$ の範囲内で測定誤差が増大すると, わずかではあるが検出力が増加する場合がある。

5) $\kappa < 1, n = 7$ 以上で R 管理図に LCL がある場合には, $\kappa = 0, \sigma_M^2/\sigma_P^2 = 0$ のとき $P = 1$ となるが, 測定誤差が存在すると検出力を低下させる (δ が十分大きい場合を除く)。

6) 測定誤差が $0 < \sigma_M^2/\sigma_P^2 < 1$ の範囲では, 4) の場合を除き, κ が小さく, $\pm\delta\sqrt{n} = 3 \sim 5$ のとき測定誤差が検出力を減少させる効果が大である。

7) 測定誤差が大となって検出力が減少したとき, n を大にすれば検出力を回復することが可能である。

4. 結 言

以上 R 管理図, $\bar{x}-R$ 管理図について測定誤差のある場合の工程の変化に対する検出力を計算し, 検出力曲線を作成し, 若干の考察を試みた。いずれにしても, 測定誤差が大となって検出力が減少した場合には, 試料の大きさ n を大にするか, 或いは測定誤差を減少させるかすると検出力を回復することが可能であり, そのいずれにするかは, 管理図の検出力を考慮して経済的; 技術的見地から決定すべきであろう。

終りに, 御懇切な御指導を賜った東京工業大学資源化学研究所水野滋教授, ならびに有益な御助言を賜った本学数学教室吉田正夫教授に深く感謝の意を表す。

(昭和 38 年 11 月 13 日 第 13 回品質管理大会講演)

文 献

- 1) 金塚高次: 室工大研報, 4, 527 (1963).
- 2) Duncan, A. J.: Quality Control and Industrial Statistics, p. 392 (Richard D. Irwin, Inc., 1959).
- 3) Sheffé, H.: Industrial Quality Control, May, 13 (1949).
- 4) 伊東静男: 品質管理, 6, 450 (1955).
- 5) Pearson, E. S.: Biometrika, 32, 301 (1941).