最適制御系の極について

最適制御系の極について

疋田弘光

On Poles of Optimal Control Systems

Hiromitsu Hikita

Abstract

When a linear time invariant system is optimized with respct to a quaratic performance index, the optimal control can be expressed as a state variable feedback. Therefore, the relation between the performance index (weight matrix) and the structure of the closed loop optimal system is being studied from various points of view.

In this paper the author investigates how the poles of a closed loop optimal system are related to weight matrices and system coefficient matrices for a multi-input system, and a deriving method of a performance index which gives a prescribed pole assignment in a closed loop optimal system is also presented.

1. まえがき

最適制御問題において評価関数が2次形式である場合，最適制御は簡単な状態フィードバックで表わすことができる。その結果，従来から各行列（評価関数に現われるウェート行列，システムの係数行列）が最適閉ループ系の構造にどのように関係してくるか研究されてきた[1)~5)]。例えば，最適制御を施した閉ループ系の特性多項式と評価関数におけるウェートとの関係が周波数領域で論じられ，同一のフィードバックゲイン行列を導出するという意味で等価となる評価関数のもつ性質などが研究されている。

あるシステムに対し，異なった評価関数のもとで同一のフィードバックゲイン行列が導出されれば，当然得られる最適フィードバック系の極配置も同一となるが，システム構造自体もまったく同一になってしまう。しかし多入力系では閉ループ系の極配置が同一（極配置以外のシステム構造は異なる）になる異なったフィードバックゲイン行列が存在し得る。この考えを最適制御系に導入すれば，最適閉ループ系を極の観点から解析していくことができる。

本論文では，システムの係数行列及びウェート行列は最適閉ループ系の極配置にどのように関係してくるか多入力系について論じる。さらに，その結果を利用し，最適閉ループ系にあらかじめ指定された極配置を実現するウェートの導出法について述べる。その結果は O. A. Solheim[7] による方法を含み，かつ複素極の実現についてより広い能力をもつものである。

2. 最適閉ループ系の特性多項式

制御対象のシステムは可制御とし，その運動方程式を次式で示す。

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t) \tag{1-a}$$

ここで $x(t)$ は n 次元状態ベクトル，$u(t)$ は m 次元制御ベクトル，A 及び B はそれぞれ $n\times n$, $m\times n$ の定係数行列である。また，評価関数は2次形式で

$$J = \int_0^\infty \left\{x^T(t)\,Qx(t)+u^T(t)\,Ru(t)\right\} dt \tag{1-b}$$

とする。ここで状態に対するウェートQは $n\times n$ の半正定対称行列，入力に対するウェート R は $m\times m$ の正定対称行列である。また記号 T は行列（ベクトル）の転置を表わす。議論の簡単のため行列 R を $m\times m$ の単位行列とする。以下のことから明らかなようにこの仮定によって本論文の解析結果が一般性を失うことはない。R は正定対称行列であるから，$R=N^TN$ を満足する $m\times m$ 正則行列 N が存在する。従って新しい入力ベクトル $v(t)$ を導入し，$v(t)=Nu(t)$ とすることで評価関数における新しい入力 $v(t)$ に対するウェートは単位行列になる。ただし同時にシステム方程式も新しい入力 $v(t)$ で考えなければならないから，B は BN^{-1} で置き換えなければならない。

(1-b) 式を最小にする制御入力 $u(t)$ はよく知られているように状態フィードバック

$$u(t) = -B^TPx(t) \tag{2}$$

になる。ここで $n\times n$ 行列 P は次のリッカチの代数方程式を解いて得られる正定対称行列である。

$$A^TP+PA-PBB^TP+Q=0 \tag{3}$$

または，次式を解いて得られる[6]。

$$P = U_{21}\,U_{11}^{-1} \tag{4-a}$$

ただし，U_{11}, U_{21} は次式を満たす $n\times n$ 行列である。

$$\begin{bmatrix} A & -BB^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Lambda} & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda} \end{bmatrix} \tag{4-b}$$

$$\bar{\Lambda} = \mathrm{diag}\,(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n) \tag{4-c}$$

ここで，記号 diag $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n)$ は対角要素が $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n$ である対角行列を表わす。また (4-b) 式から明らかなように

$$\bar{\Lambda} = U_{11}^{-1}(A-BB^TP)\,U_{11} \tag{5}$$

であるから $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n$ は最適制御を施した閉ループ系

$$\dot{x}(t)=(A-BB^TP)\,x(t) \tag{6}$$

の極である。

ここで次式を定義する。

$$\varDelta(s)=\det(sI-\bar{A}) \tag{7-a}$$

$$\bar{\varDelta}(s)=\det(sI+\bar{A}) \tag{7-b}$$

(4-b) 式から

$$\begin{aligned}\varDelta(s)\,\bar{\varDelta}(s)&=\det\begin{bmatrix}sI-A & BB^T\\ Q & sI+A^T\end{bmatrix}\\&=\det\left[\begin{bmatrix}I & 0\\ -Q(sI-A)^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A & BB^T\\ Q & sI+A^T\end{bmatrix}\right]\\&=\det(sI-A)\det(sI+A^T-Q(sI-A)^{-1}BB^T)\end{aligned} \tag{8}$$

ここで $B=b(b=n\times 1$ 行列) とすると，1 入力システムに対してよく知られた結果

$$\varDelta(s)\,\bar{\varDelta}(s)=\det(sI-A)\det(sI+A^T)-b^T\,\mathrm{adj}(sI+A^T)\,Q\,\mathrm{adj}(sI-A)\,b \tag{9}$$

が導びかれる。ここで記号 $\mathrm{adj}(sI-A)$ は $(sI-A)^{-1}=\mathrm{adj}(sI-A)/\det(sI-A)$ を満足する。

次に (8) 式においてウェート行列 Q を $Q=\gamma\gamma^T(\gamma=n\times 1)$ 行列とすると，

$$\varDelta(s)\,\bar{\varDelta}(s)=\det(sI-A)\det(sI+A^T)-\gamma^T\,\mathrm{adj}(sI-A)\,BB^T\mathrm{adj}(sI+A^T)\,\gamma \tag{10}$$

が成り立ち，この関係は以下の解析で用いられる。

3.　係数行列と最適閉ループ系の極

評価関数のウェート Q を $\gamma\gamma^T$ に制約すると，(9), (10) 式は

$$\gamma\longleftrightarrow b,\qquad BB^T\longleftrightarrow Q,\qquad A\longleftrightarrow -A^T \tag{11}$$

なる対応を同一視すれば等価である。その結果多入力システムに対し，ウェートが $\gamma\gamma^T$ なる制約の下で最適閉ループ系に同一の極配置を与えるシステムの係数行列について次のような解析ができる。

まず，次のように示される双対問題を導入する。

$$\dot{z}(t)=-A^Tz(t)+\gamma w(t) \tag{12-a}$$

$$J=\int_0^\infty\left\{z^T(t)\,BB^Tz(t)+w^T(t)\,w(t)\right\}dt \tag{12-b}$$

この双対問題に対し (1) を原問題と呼ぶ。システム (12-a) は 1 入力システムである。このことは原問題のシステム (1-a) の入力の数に関係しない。従って，この双対問題を解いて得られる最適閉ループ系は (10) 式を満足するから原問題においてウェートが $Q=\gamma\gamma^T$ であるときの最適閉ループ系の極は双対問題を考察することで知ることができる。

従って，過去１入力システム $(B=b)$ において同一のフィードバック係数（当然，最適閉ループ系も同一の極配置になる。）が導出される Q の性質について研究されてきたが，その結果を双対問題に適用すれば，多入力システムにおいてある γ に対し最適閉ループ系に同一の極配置を与える BB^T の性質を研究するのに利用できる。

いま rank $[\gamma, A^T\gamma, \cdots, (A^T)^{n-1}\gamma]=n$ と仮定する。つまり，システム (1-a) は生じうるどのような状態も γ によって重みづけられていることになり，得られる最適閉ループ系は安定なシステムとなる。ペア (A^T, γ) をペア $(\tilde{A}^T, \tilde{\gamma})$ に変換する。この変換は (12-a) 式において $z(t)=Vy(\mathrm{t})$ と変数変換して得られる。

$$\tilde{A}^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\gamma}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\tilde{A}^T=V^{-1}A^TV, \quad \tilde{\gamma}=V^{-1}\gamma \tag{14}$$

$$\det(sI-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\alpha_{n-2}s^{n-2}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0 \tag{15}$$

また，

$$\tilde{B}=V^TB$$

この変換によって BB^T は $\tilde{B}\tilde{B}^T$ に変換され $D=\tilde{B}\tilde{B}^T$ とおき，その ij エレメントを d_{ij} とすれば，次が成り立つ。

（i） $i+j=$ 奇数である d_{ij} はいかなる値であっても最適閉ループ系の極に関係しない。これは次のようにして証明できる。システムの係数行列が (13) に変換された双対問題で考察する。双対問題のリッカチ方程式は

$$-\tilde{A}\tilde{P}-\tilde{P}\tilde{A}^T-\tilde{P}\,\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}^T\,\tilde{P}+D=0 \tag{16}$$

である。また，$\tilde{P}$ の列で $\tilde{\gamma}^T$ の零空間に含まれる部分の変化は双対システムにおけるフィードバックゲインになんら影響しない。その結果，この変化は原問題に対する最適閉ループ系の極に影響を与えないことになる。

$\tilde{P}$ で任意の値をとれる部分は，その部分が γ^T の零空間に含まれていなければならないことと，$\tilde{P}$ は対称でなければならないことを考慮して次の $(n-1)\times(n-1)$ 細胞行列 $\tilde{P}_0$ である。

$$\tilde{P}=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tilde{P}_0 & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{17}$$

この $\widetilde{P}$ を (16) 式に代入し，$\widetilde{P}_0$ の任意性を考慮すれば D の $i+j=$ 奇数を満たす ij エレメントは任意の値をとり得ることが分る。

(ii) 上の結果から分るように適当な入力行列 $\widetilde{B}$ に対し同一の極配置を与える $n\times l$ の入力行列 $\widetilde{B}_{eq}$ が存在する。ただし，l は $n/2$ 以上の任意の整数である。従って問題 (1) において $\widetilde{B}_{eq}$ はウェート $Q=\gamma\gamma^T$ に対して最適閉ループ系に同一の極配置を与える入力行列のクラスを形成する。ここで同一のクラスに属する各 $\widetilde{B}_{eq}$ に対して得られるフィードバックゲインは一般に異なることは明らかである。

(iii) 同じく (i) の結果を利用すると各 D に対しこの D に対応した最適閉ループ系の極と同一の極を与える対角行列 $\bar{D}$ が存在することが分り，

$$\bar{D} = \mathrm{diag}(\bar{d}_{11}, \bar{d}_{22} \cdots, \bar{d}_{nn}) \tag{18}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & d_{22}-2d_{13} & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & d_{33}-2(d_{24}-d_{15}) & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \tag{19}$$

で与えられる。ここで $\bar{d}_{kk}$ の一般形は

$$\bar{d}_{kk} = d_{kk}-2\{d_{k-1,\,k+1}-d_{k-2,\,k+2}+\cdots+(-1)^{k-1}d_{1,\,2k-1}\} \tag{20}$$

それ故，ある γ に対し最適閉ループ系が同一の極配置となる $\widetilde{B}$ のクラスに $n\times n$ 対角行列が存在し，それは

$$\mathrm{diag}(\sqrt{\bar{d}_{11}},\ \sqrt{\bar{d}_{22}},\ \cdots \sqrt{\bar{d}_{nn}}) \tag{21}$$

で与えられる。これは各クラスを比較する際の代表と考えることができる。

(iv) (4) 式から最適フィードバックゲインを導出する際，固有値を $\Delta(s)\bar{\Delta}(s)$ から求めるなら，D を対角形に簡単化したものをその計算に利用することができる。いま，

$$\tilde{\gamma}^T \mathrm{adj}(sI-\widetilde{A}) = [1, s, s^2, \cdots, s^{n-1}] \tag{22-a}$$

$$\mathrm{adj}(sI+\widetilde{A}^T)\tilde{\gamma} = [(-1)^{n+1},\ (-1)^{n+2}s,\ (-1)^{n+3}s^2, \cdots (-1)^{2n}s^{n-1}]^T \tag{22-b}$$

が成り立つから $\Delta(s)\bar{\Delta}(s)$ の第2項は

$$\begin{aligned} &\gamma^T \mathrm{adj}(sI-A)BB^T\mathrm{adj}(sI+A^T)\gamma \\ &= \tilde{\gamma}^T\mathrm{adj}(sI-\widetilde{A})\widetilde{B}\widetilde{B}^T\mathrm{adj}(sI+\widetilde{A}^T)\tilde{\gamma} \\ &= (-1)^{n+1}\bar{d}_{11}+(-1)^{n+2}\bar{d}_{22}s^2+(-1)^{n+3}\bar{d}_{33}s^4+\cdots+(-1)^{2n}\bar{d}_{nn}s^{2(n-1)} \end{aligned} \tag{23}$$

例題： システム方程式及び評価関数

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$J=\int_0^\infty (x_2^2+u_1^2+u_2^2)\,dt$$

に対し，$\tilde{B}_{eq}$ として

$$\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5\\ 3\end{bmatrix},\ \cdots$$

などはみな最適閉ループ系に同一の極配置を与える。ここで $[5,3]^T$ の場合は1入力システムとなる。

4. 重み行列と最適閉ループ系の極

この節では最適閉ループ系にあらかじめ定められた極配置を与えるウェート Q を導出する方法について論じる。これは最適制御問題として適当な評価関数が与えられたとき，そのウェート Q に対し，閉ループ系の極配置はどのようになり，さらに Q において極配置に関与する部分はどのようになるか明らかにする研究の端緒となる。

適当な極配置を与える Q 導出法は O. A Solheim[7] によって提出されており，複素極を実現する Q の導出法も考察されているが，あらかじめ指定できる複素極にはある制約がある。それは大まかに言えば次のように説明できる。希望の極配置を実現するため，各極に対し行列 Q に1自由度を与えその自由度を適当に固定することで希望の位置に極をシフトすることができる。しかし複素極を実現する場合（複素共役な極も同時に実現しなければならないが）複素極には実数部と虚数部の2自由度が存在するにもかかわらず Q には1自由度しか与えていない。これが Solheim の手法の制約となっている。

ここでは前節で解析した結果を利用し，実数極に対しては Solheim の手法を含み，かつ複素極については一層広い複素領域で実現できるようにウェート Q に2自由度を与える方法について考察する。

実数極に対しては次のように Q を決める。まずシステム方程式を対角形に変換し，その対角形の係数行列を $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$ とする。いま λ_i を $\bar{\lambda}_i$ にシフトするには，Q を $Q=\gamma\gamma^T$ と仮定し，さらに $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)^T$ で γ_i を残し他の γ_j; $j=1\sim n$, $j\neq i$ を0とする。すると(10)式から

$$\begin{aligned}\Delta(s)\bar{\Delta}(s)&=(s^2-\lambda_1^2)(s^2-\lambda_2^2)\cdots(s^2-\lambda_{i-1}^2)(s^2-\lambda_{i+1}^2)\cdots(s^2-\lambda_n^2)\\&\quad\times\left\{(s^2-\lambda_i^2)-\gamma_i^2\sum_{j=1}^m b_{ij}^2\right\}\end{aligned}\tag{24}$$

$\bar{\lambda}_i$ を実現するためには次の等号が成り立つ必要がある。

$$s^2-\lambda_i^2-\gamma_i^2\sum_{j=1}^m b_{ij}^2=s^2-\bar{\lambda}_i^2\tag{25}$$

従って

$$\gamma_i = \pm\sqrt{\frac{\bar{\lambda}_i^2-\lambda_i^2}{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^2}} \tag{26}$$

ここで b_{ij} は行列 B の ij エレメントである。$\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^2$ はシステムの可制御性から決して0になることはない。

(26) のウェートの下で最適閉ループ系を求めると λ_i が $\bar{\lambda}_i$ に変化した系が求まる。この系に対し，他の極をシフトするウェートを同じ方法で求めることができる。この手続きを各極に対し順次繰り返し，各極に対して求まったウェートをシステムを対角形に変換する際の手続きを考慮してたし合わすことで最適閉ループ系の全極が希望の位置となるウェートが最終的に求められる。

複素極を実現する場合はシステム方程式の係数行列 A^T を次のように変換する。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_{i-1} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} & & \\ & 0 & & & \lambda_{i+2} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{27}$$

α_0, α_1 は $s^2+\alpha_1 s+\alpha_0=(s-\lambda_i)(s-\lambda_{i+1})$ とし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は原システムの極であり λ_i, λ_{i+1} を複素共役な極にシフトしたいとする。そこで，実数極を移動する際，1極ごとにウェートを求めたのと同様に，この場合，複素共役な極にシフトする λ_i, λ_{i+1} の部分を考察の対象とする。

ウェートは $Q=\gamma\gamma^T$ とし $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)^T$ において γ_i, γ_{i+1} を残し他のエレメントを0とする。簡単のため $i=1$ とすると，

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = V^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} V \tag{28-a}$$

$$\tilde{\gamma} = V^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満足する V は

$$V = \begin{bmatrix} \alpha_1\gamma_1+\gamma_2 & \gamma_1 \\ -\alpha_0\gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

であるから，BB^T の kj エレメントの部分（ただし，$k=1, 2$；$j=1, 2$）のみを取り出した 2×2 行列を F とすると，2×2 行列 $D=V^TFV$ の各エレメントは γ_1, γ_2 の2次形式になり，

$$d_{11} = (f_{11}\alpha_1^2+f_{22}\alpha_0^2-2f_{12}\alpha_0\alpha_1)\gamma_1^2+2(f_{11}\alpha_1-f_{12}\alpha_0)\gamma_1\gamma_2+f_{11}\gamma_2^2 \tag{29-a}$$

$$d_{22}=f_{11}\gamma_1^2+2f_{12}\gamma_1\gamma_2+f_{22}\gamma_2^2 \tag{29-b}$$

である。ここで f_{kj} は行列 F の kj エレメントを意味し，$f_{12}=f_{21}$ である。この場合 $d_{11}=\bar{d}_{11}$, $d_{22}=\bar{d}_{22}$ であるから，前節の (23) 式を利用すれば

$$\begin{aligned}\Delta(s)\bar{\Delta}(s) &= (s^2-\lambda_3^2)(s^2-\lambda_4^2)\cdots(s^2-\lambda_{n-1}^2)(s^2-\lambda_n^2)\\ &\quad\times\{(s^2-\lambda_1^2)(s^2-\lambda_2^2)-d_{22}s^2+d_{11}\}\end{aligned} \tag{30}$$

$\{-\}$ の部分を α_0, α_1 で表わせば

$$\{-\}=s^4+(2\alpha_0-\alpha_1-d_{22})s^2+\alpha_0^2+d_{11} \tag{31}$$

従って希望の複素共役な極が

$$\{-\}=s^4+\beta_2 s^2+\beta_0 \tag{32}$$

を満足するなら

$$d_{11}=\beta_0-\alpha_2^2 \tag{33-a}$$

$$d_{22}=\alpha_1^2-2\alpha_0-\beta_2 \tag{33-b}$$

が成り立たねばならない。d_{11}, d_{22} はそれぞれ，γ_1, γ_2 の正値もしくは半正値2次形式になるから，正値の場合 (33) 式は γ_1, γ_2 平面において原点に中心をもつ楕円となる。また半正値の場合もそれに対応した適当な2次曲線となる。結局 (33-a), (33-b) で表わされる2つの曲線の交点座標が複素極を実現する重み γ_1, γ_2 である。2つの曲線が交点をもたない場合は本方法でその複素極を実現する Q は求まらない。その場合は Q に2以上の自由度を与えて解析しなければならない。その1つの方法として λ_i, λ_{i+1} を独立に実数極をシフトする方法で移動し α_0, α_1 を適当に変化させてから本方法を適用することもできる。

ウェート Q を変えることによって最適閉ループ系の極を任意にシフトすることはできないことは明らかであるが，本方法はどの程度の範囲をおおうことができるか示されていない。これは今後に残された問題である。

例題： 原システムの極を $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 最適閉ループ系においてこれらを $\bar{\lambda}_1=-2+j$ $\bar{\lambda}_2=-2-j$ にシフトするウェートを求める。ただし $F=I_2$ (単位行列) とする。すると

$$V=\begin{bmatrix}2\gamma_1+\gamma_2 & \gamma_1\\ -\gamma_1 & \gamma_2\end{bmatrix}$$

従って

$$d_{11}=(2\gamma_1+\gamma_2)^2+\gamma_1^2=24$$

$$d_{22}=\gamma_1^2+\gamma_2^2=6$$

この2式は楕円と，円を表わしている。それらの交点を求めると結局，γ_1, γ_2 は

$$\begin{cases} \gamma_1 = \pm 2.39 \\ \gamma_2 = \mp 0.52 \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} \gamma_1 = \pm 1.33 \\ \gamma_2 = \pm 2.06 \end{cases}$$

5. あとがき

評価関数とシステムの係数行列が最適閉ループ系の構造に対しどのような関係にあるか論じた。まず第1にウェート Q を $\gamma\gamma^T$ に制約し，最適閉ループ系に同一の極配置を与えるシステムの入力行列について解析した。一般の Q に対しては，Q の半正定対称性から $Q=\sum_{i=1}^{p}\gamma_i\gamma_i^T$ (ここで γ_i は $n\times1$ 行列，$p=\mathrm{rank}\,Q$) と表わすことができるから，各 i についてここでの解析を適用することができる。

第2に最適閉ループ系にあらかじめ定められた極配置を実現する Q の導出について述べた。本論文では導出の1方法を示したが，同一の極配置を与える Q のクラスを明らかにすることは今後に残された。しかし，閉ループ系にある極配置を与えるフィードバックゲインの redundancy について解析された結果[8]をリッカチの代数方程式に適用し，その redundancy をウェート Q の redundancy として導出することによって同一の極配置を与える Q のクラスが明らかにされよう。これについては別の機会に発表する。

(昭和49年5月20日受理)

文　献

1) R. E. Kalman: Trans. ASME, **86 D**, 51 (1964).
2) 畑中，他： 日本機械学会講演論文集，No. 191 (1968).
3) 竹田，他： 第7回 SICE 学術講演会予稿集 (1968).
4) 早勢 実： 計測自動制御学会論文集，8, 103 (1972).
5) 疋田，他： 第6回 計測自動制御学会北海道地区研究集会講演論文集 (1973).
6) S. A. Marshall, et al: Proc. IEE, **117**, 1705 (1970).
7) O. A. Solheim: Int. J. Control, **15**, 143 (1972).
8) 疋田，他： 計測自動制御学会論文集投稿予定.