凝固を伴う円管内乱流熱伝達

凝固を伴う円管内乱流熱伝達

戸倉郁夫*・関　信弘**・福迫尚一郎**

Turbulent Heat Transfer in a Tube with Solidification Layer on the Wall

Ikuo Tokura, Nobuhiro Seki and Shoichro Fukusako

Abstract

The solidification of fluids flowing through a tube is one of the most important problem for preventing accidents in a piping system caused by freezing.

In this report, an attempt was made to analyze the heat transfer of fully developed turbulent flow in a tube with solidifying layer on the wall by applying the method which was proposed by Zerkle and Sunderland[2] for Iaminar flow in a tube.

By using the previously proposed velocity profiles, the heat transfer rate was calculated for steady state when growth of solidefying layer was stopped. A comparison between the results of numerical calculation and the experimetal dsta for the case of flowing water showed that they were in satisfactory agreement for the heat transfer rate and the solidifying layer profiles.

1. 緒　　言

凝固または凍結現象は自然界では氷の形成や溶岩流の凝固などにみられ，工業的には金属の鋳造，食品の冷凍および凍結を利用した混合物の分離など多くの方面に利用されている。この現象はこのように好ましい工業的応用面をもつ反面，液体の凝固時の体積変化により液体輸送管や水道管の破壊を起こすなど多くの事故の原因ともなっている。それゆえ，これらの現象の理論的解明が工業上重要な問題となっているが，この目的の第一歩として，まず管内凝固の熱伝達に関する挙動を詳細に探求する必要があろう。

これまでにも円管内を流れる流体の凝固問題は Hirschberg[1], Zerkle と Sunderland[2] および Özisik と Mulligan[3] らによって解析され，その結果が報告されているが，それらはいずれも管内の流れが層流である場合について行なわれたものである。

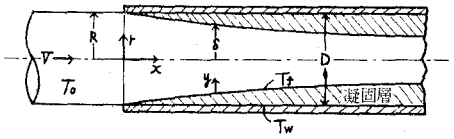
しかし，実際の管内の流れは乱流であることが多いと考えられるゆえ，筆者らは Zerkle らの用いた方法を，流れが十分に発達した乱流である場合に拡張することを試みた。管内の流れが乱流である場合には，乱流そのものの挙動がいまだ十分に解明されていないのでその理論

*　室蘭工業大学産業機械科
**　北海道大学工学部機械工学第二学科

的な解析は困難である。それゆえ，本研究ではまず従来より提案されている管内乱流速度分布を使用することにより，管内凝固が定常的であるときの熱伝達について述べるとともに，水を用いて行なった実験結果と比較検討した。

2. 理論的考察

流体は冷却部入口断面で完全に発達した速度分布および一様温度を有し，管軸方向にわたってもその速度分布が相似的に維持されるものと仮定する。この断面より下流では流体はステップ状の一様温度に保たれた管壁によって冷却され凝固層が管壁に形成されるものとする (図-1)。ここで凝固層の生長が完了し，凝固面の時間的移動がない定常状態について考える。



図—1　座標系

基礎方程式は連続の方程式およびエネルギー方程式で，これらは軸方向の熱伝導，粘性による発熱，ふく射および自然対流等を無視して境界層近似を行ない，境界条件とともに円筒座標で表わすとつぎのようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\cdot u)+\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v)=0 \quad \text{および} \quad 2\int_0^{\delta} u\cdot r\cdot dr = R^2V \tag{1}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\nu}{P_r}+\varepsilon_H\right)\frac{\partial T}{\partial r}\right] \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0,\ \ 0<r<R:\ \ T=T_0 \\ x\geqq 0,\ \ r=0:\ \ \partial T/\partial r=0 \quad \text{および} \quad r=\delta:\ \ T=T_f \end{array}\right\} \tag{3}$$

ここで無次元量

$$x^*=\frac{x}{D},\quad r^*=\frac{r}{R},\quad \delta^*=\frac{\delta}{R},\quad \theta=\frac{T-T_f}{T_0-T_f},\quad g(r^*)=\frac{1}{P_r}+\frac{\varepsilon_H}{\nu}$$

を導入し，さらに $\eta=r^*/\delta^*$ なる変数を使用し $\theta(x^*, r^*)$ を $\theta(x^*, \eta)$ へ変換すると，(2) 式はつぎのようになる。

$$\frac{u}{D}\frac{\partial\theta}{\partial x^*}+\frac{1}{R\delta^*}\left[v-\frac{u\cdot\eta}{2}\frac{d\delta^*}{dx^*}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{\nu}{R^2\delta^{*2}\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\eta g(\eta)\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right] \tag{4}$$

θ を，パラメータ $\xi=d\delta^*/dx^*$ を用いて摂動展開し，(4) 式に代入すれば ξ の零次に関する偏微分方程式およびその境界条件はつぎのようになる。

$$f(\eta)\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial x^*}=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\eta\cdot g(\eta)\frac{\partial\theta^{(0)}}{\partial\eta}\right] \tag{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^*=0,\ \ 0<\eta<1:\ \ \theta^{(0)}=1 \\ x^*\geqq 0,\ \ \eta=0:\ \ \partial\theta^{(0)}/\partial\theta=0 \quad \text{および} \quad \eta=1:\ \ \theta^{(0)}=0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

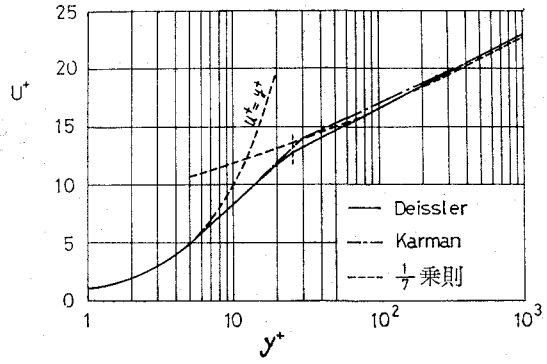
(5) 式は ξ に関する一次以上の項を無視して得られたものであるから，凝固層厚さの軸方向に関する変化が小さい場合に対する (4) 式の近似式とみることができる。

速度分布として，層流底層内においてもうず動粘性係数の影響を考慮している Deissler[4] の速度分布を用いると，係数 $f(\eta)$ および $g(\eta)$ はそれぞれつぎのようになる。

$$f(\eta)=0.049718\,Re_D^{7/8}\cdot u^+\cdot\eta,\qquad 0<\eta<1 \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} g(\eta)&=\frac{1}{P_r}+A\cdot u^+\cdot(1-\eta)\cdot\left[1-\exp\left\{-A\cdot u^+\cdot(1-\eta)\right\}\right], && \eta_L<\eta\\ &=\frac{1}{P_r}+0.0358\,Re_D^{7/8}\cdot\eta\cdot(1-\eta)-1, && \eta<\eta_L \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ここで $A=1.529\times10^{-3}\cdot Re_D^{7/8}$, $Re_D=DV/\nu$ であり，凝固面での剪断応力にはなめらかな円管に対する Blasius の実験式[5] を用い，$\varepsilon_H=\varepsilon_M$, $\delta^{*7/8}\fallingdotseq1$ と近似してある。なお $\eta_L<\eta$ および $\eta<\eta_L$ はそれぞれ $y^+<26$ および $26<y^+$ に対応する領域を表わす。図-2 に Deissler の速度分布を示す。また同図には比較のため，1/7 乗則速度分布および Kármán の速度分布も示してある。



図—2 速度分布

(5) 式は変数分離によって解くことができその結果を無次元熱伝達量 q^* について示せばつぎのようになる[6]。

$$q^*=\frac{q}{\pi R^2V\cdot\rho C_p(T_0-T_f)}=\frac{1}{P_r}\sum_{i=1}^{\infty}\left[-\frac{N_i}{\lambda_i^2}\left(\frac{d\phi_i}{d\eta}\right)_{\eta=1}\right]\cdot\left(1-\exp\left[-\frac{8\lambda_i^2}{Re_D}\cdot x^*\right]\right) \tag{9}$$

ここで

$$q=2\pi\int_0^x\left[-k_l\cdot\delta\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=\delta}\right]dx \tag{10}$$

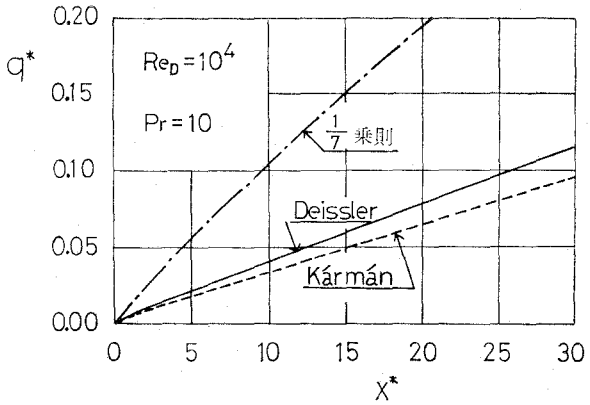
表—1 固有値および係数 ($P_r=10$, $Re_D=10^4$ の場合)

i	λ_i^2	N_i	$-\frac{N_i}{\lambda_i^2}\left(\frac{d\phi_i}{d\eta}\right)_{\eta=1}$	i	λ_i^2	N_i	$-\frac{N_i}{\lambda_i^2}\left(\frac{d\phi_i}{d\eta}\right)_{\eta=1}$
1	4.91	49.0390	9.97516	6	1886.41	3.5637	0.001889
2	176.19	2.9335	0.016649	7	2542.27	3.4078	0.001340
3	461.33	2.1728	0.004709	8	3322.05	3.3303	0.001002
4	851.10	2.4467	0.002874	9	6197.71	5.4763	0.000883
5	1328.54	3.0351	0.002284	10	7308.10	4.9290	0.000674

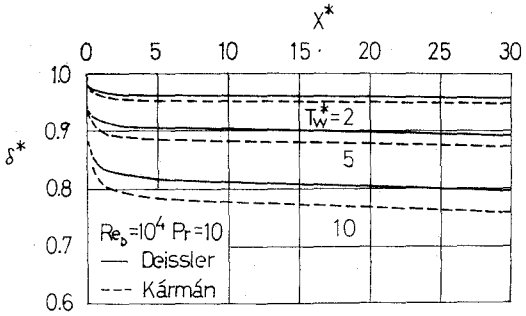
であり，λ_i は固有値，N_i は境界条件および固有関数 ϕ_i の直交性より決定される定数である。

表-1 に $P_r=10$，$Re_D=10^4$ の場合の最初の 10 個の固有値および係数の値を示す。

図-3 は無次元熱伝達量 q^* と無次元距離 x^* の関係を示したものである。同図には比較のため 1/7 乗則速度分布および Kármán の速度分布を用いた場合の計算結果も示してある。1/7 乗則速度分布を使用した結果は他の場合に比較して熱伝達量がかなり大きく現われる。これは乱流粘性の影響を壁面のごく近傍まで考えるため（実際には層流底層が存在する）と考えられる。また理論値はさまざまな近似をしているために，熱伝達量は凝固層厚さに関係なく一定となる結果が得られた。



図—3　無次元熱伝達量



図—4　凝固層のプロフィル

凝固層内に対し定常温度分布を仮定すると，流体との境界面での熱量釣り合い式より

$$\delta^* = \exp\left[T_w^* \Big/ \left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_{\eta=1}\right] \tag{11}$$

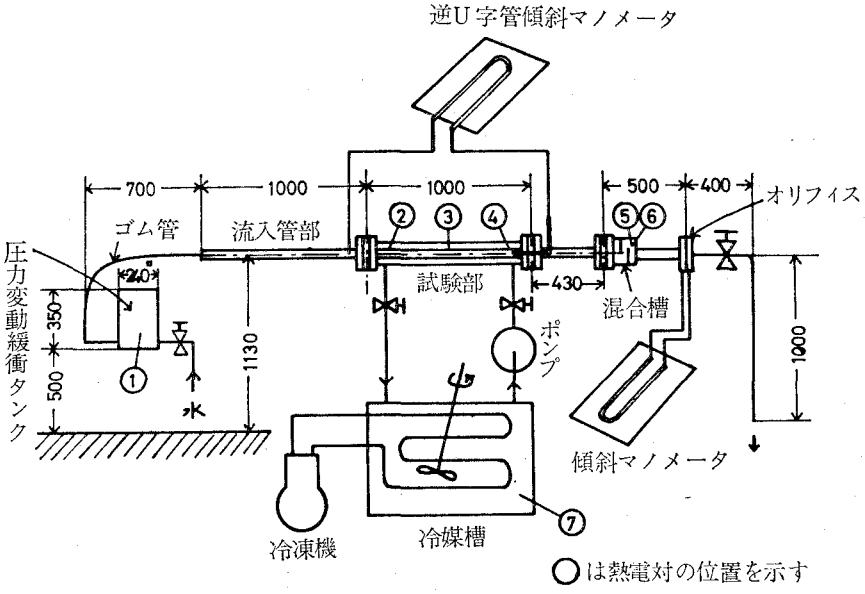
となる。ここで

$$T_w^* = \frac{k_s(T_f - T_w)}{k_l(T_0 - T_f)} \tag{12}$$

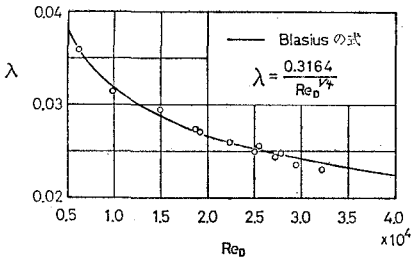
である[6]。図-4 は管軸から凝固層表面までの無次元距離 δ^* と管軸方向の無次元距離 x^* の関係を示したものである。これによれば T_w^* が大なる程，すなわち管壁温度が低く，流体の流入温度が低い程凝固層厚さが大きくなっていることがわかる。また凝固層厚さは入口付近で急激に増加し，x^* の大きな位置ではそれほど変化しないことがわかる。

3.　実験的考察

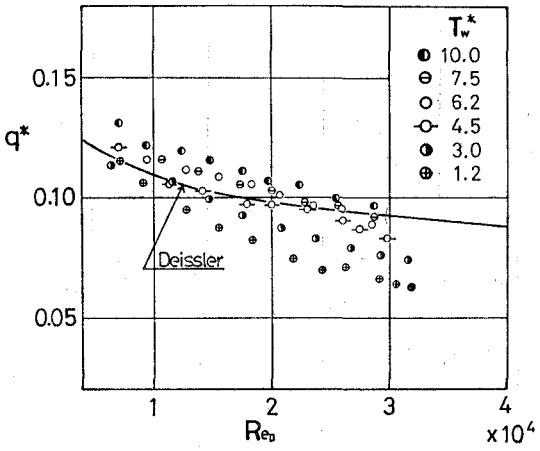
前節の解析結果を検討するため，流体として水を用いて実験を行なった。実験装置の概略図を 図-5 に示す。試験部は長さ 1 m，内径 35 mm，肉厚 1.5 mm の銅管と 2.5 インチ鋼管よりなる二重円管であり，その環状部分を冷媒（塩化カルシウム水溶液）が流れる構造となってい



図—5 実験装置概要



図—6 管摩擦係数

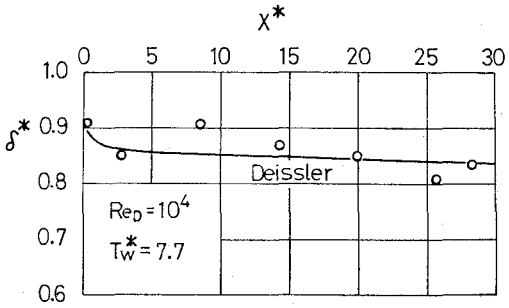


図—7 無次元熱伝達量

る。壁温 T_w は熱電対②, ③, ④ の温度の平均値を用い, 伝達熱量は① と ⑤⑥ との温度差および水の流量より求めた。圧力降下は試験部入口上流にもうけた静圧孔と試験部出口部に下流側から挿入した静圧管の圧力差より求めた。定常状態は圧力降下の値が一定となることにより確めた。なお, 氷層の厚さは, 銅管内壁に形成された氷層を抜き取って輪切りにして内径を測定することにより求めた。図-6 は本実験装置の管摩擦係数とレイノルズ数との関係を示したものであり, 流れは発達した乱流となっていることがわかる。

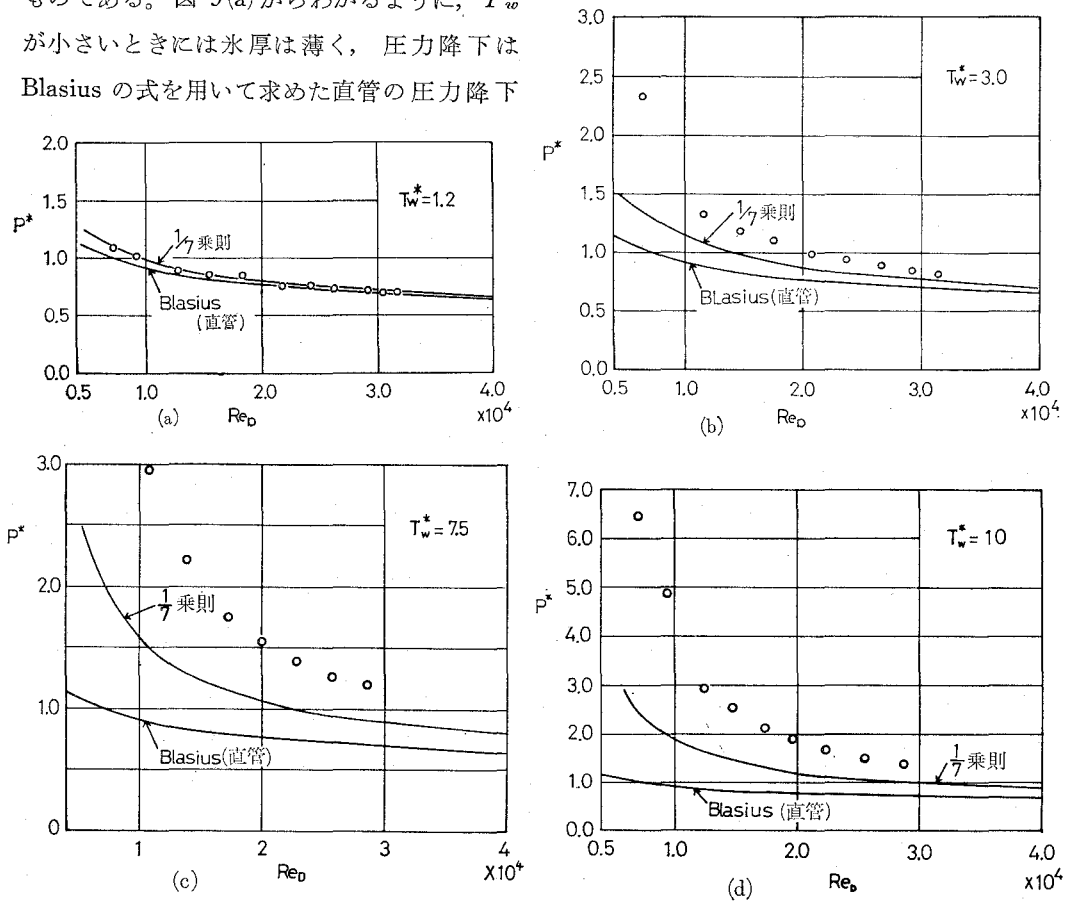
図-7 は伝達熱量の実験値を示したもので T_w^* が大なる程 q^* が大なる傾向にあり, 氷層の形成は熱伝達に影響を与えている。これは, 氷厚が大なる場合ほど流路が流れ方向に狭まって流れが加速されるため速度分布が偏平になり, 凝固面上での温度勾配が大となるために伝達熱

量が大となるものと考えられる。ここで水の物性値は試験部入口と出口の混合平均温度の算術平均 T_m における値をとるが，水の熱伝導率のみは膜温度 $(T_m+T_f)/2$ における値を用いてある。なお，氷の熱伝導率は Jakob と Erk の実験値[7] を用いた。本実験では，水のプラントル数はほぼ一定であって約 9.5 であった。



図—8　氷層のプロフィル

図-8 は δ^* の実測値を示したものである。x^* が 3 および 27 付近での δ^* の実測値が理論値よりも小さいのは，装置の構造上その部分で冷媒が淀みを生じ冷媒側の熱伝達が大きくなるので氷層が厚く生長するためと考えられる。図-9 (a)～(d) は圧力降下 $P^*=(P_0-P)/(\rho V^2/2)$ (P_0 は試験部入口の静圧) の測定値を示したものである。図-9 (a) からわかるように，T^*_w が小さいときには氷厚は薄く，圧力降下は Blasius の式を用いて求めた直管の圧力降下



図—9　圧力降下とレイノルズ数の関係

の値に近い値を示している。T_w^* が大なるほど直管の場合からの偏差は大となり，氷層の形成は圧力降下に大きな影響を与えることがわかる (図-9 (b)～(d))。

4. 結　　言

凝固層を伴う円管内乱流流れの熱伝達の解析と実験を行なった。解析を行なうにあたり，速度分布については直管の速度分布を仮定し，エネルギー方程式を η なる変数を用いて熱伝導型偏微分方程式に変換して変数分離によって解いた。本解析結果による無次元熱伝達量 q^* および管軸から凝固層表面までの無次元距離 δ^* の傾向は実験結果とほぼ一致している。また実験より，氷層の形成は圧力降下に大きな影響を与えることがわかった。解析値は種々の近似を行なっているために，定常状態の場合凝固層厚さは熱伝達に影響を与えない結果となった。しかし実験結果は T_w^* (したがって間接的に凝固層厚さ) が熱伝達に影響をおよぼすことを示しているから，解析方法を再検討し，仮定や近似のより少ない解析を行なうことが今後の課題となろう。

終わりに，実験装置の製作に際し多大の御援助を頂いた北大工学部技官沢田亀久雄氏，および本研究の詳細にわたって多くの御検討を頂いた北海道大学工学部機械工学第二学科伝熱工学研究室の皆様に深く感謝の意を表します。また本報告の数値計算は北海道大学大型計算機センター FACOM 230-60 によった。同センターの各位に謝位を表します。

記　　号

D:	円管直径	[m]
P:	圧　　力	[kg/m^2]
P_r:	プラントル数 ($P_r=\nu/a$)	[−]
R:	円管半径	[m]
Re_D:	レイノルズ数 ($Re_D=DV/\nu$)	[−]
T:	流体の温度	[°C]
T_0:	流体の流入温度	[°C]
T_f:	凝固温度	[°C]
T_w:	管壁温度	[°C]
T_w^*:	(12) 式で定義される無次元パラメータ	[−]
V:	冷却部入口の流体の平均流速	[m/s]
a:	流体の温度伝導率	[m^2/s]
k_l:	流体の熱伝導率	[kcal/mh°C]
k_s:	凝固層の熱伝導率	[kcal/mh°C]
q^*:	(9) 式で定義される無次元熱伝達量	[−]
r:	半径方向の座標	[m]
u:	管軸方向速度成分	[m/s]
u^+:	無次元速度 ($u^+=u/\sqrt{\tau_w/\rho}$)	[−]
v:	半径方向速度成分	[m/s]
x:	管軸方向の座標	[m]
x^*:	無次元座標 ($x^*=x/D$)	[−]
y:	凝固面から半径方向に測った座標	[m]
y^+;	無次元座標 ($y^+=y\cdot\sqrt{\tau_w/\rho}/\nu$)	[−]

δ: 管軸から凝固層表面までの距離 [m]

δ^*: 無次元距離 [−]

ε_H: うず温度伝導率 [m^2/s]

ε_M: うず動粘性係数 [m^2/s]

η: 無次元座標 ($\eta=r^*/\delta^*$) [−]

θ: 無次元温度 ($\theta=(T-T_f)/(T_0-T_f)$) [−]

$\theta^{(0)}$: θ の第零摂動近似解 [−]

λ_k: 固 有 値 [−]

ν: 流体の動粘性係数 [m^2/s]

ρ: 流体の密度 [$kg\cdot s^2/m^4$]

τ_w: 壁面での剪断応力 [kg/m^2]

ϕ_k: 固有関数 [−]

(昭和49年5月20日受理)

文 献

1) H. G. Hirschberg: Kaltetechnik, **14**, 314–321 (1962).
2) R. D. Zerkle and J. E. Sundeland: J. Heat Transfer, **90**, 183–190 (1968).
3) M. N. Özisik and J. C. Mulligan: J. Heat Transfer, **91**, 385–390 (1969).
4) R. G. Deissler: NACA. Rept. **1210** (1955).
5) たとえば H. Schlichting: Boundary Layer Theory. 4th Ed. 506 (McGraw-Hill, 1960).
6) 関・福迫・戸倉: 機械学会北海道支部講演論文集 (昭45) p. 180.
7) N. E. Dorsey: Properties of Ordinary Water Substance. (Reinhold Publishing Co. 1940).