錐状体まわりの超音速流(第1報) : Inverse Methodによる数値解

錐状体まわりの超音速流

(第1報 Inverse Method による数値解)

杉　山　　弘

Supersonic Flow past Conical Bodies

(Part 1. Numerical Solutions Using the Inverse Method)

Hiromu Sugiyama

Abstract

Numerical solutions are presented for supersonic flow past conical bodies which support elliptic conical shock waves. The adopted numerical method is the inverse method developed by Stocker and Mauger.

1. まえがき

一般に，超音速あるいは極超音速流中におかれた無限長の錐状体まわりに（有限長の錐状体の場合には錐状体先端付近に），錐状体頂点から引かれた半直線上で速度，圧力，密度，エントロピー等の諸物理量が一定となるような流れ，いわゆる錐状流 (conical flow) が現われる。ここで問題とするのは，迎え角をもたない楕円錐体や迎え角をもつ円錐体まわりの非軸対称錐状流である。この場合流れ場は回転流れとなり，物体表面近くには，未だ十分解明されていない vortical layer が現われる。

衝撃波形状を予め仮定し，その背後の流れの諸量と物体形状を求める，いわゆる inverse method で非軸対称錐状流を解析する場合，多くの数値計算は vortical layer に近づくと停止するようである[1]。Stocker and Mauger[2] は vortical layer 内でも計算が進行するような数値解析法を展開した。しかし，この方法は円錐の迎え角が大きくなると，求められる物体上に "hump" が現われるという謎を残している。

本報告は楕円錐衝撃波 (elliptic conical shock wave) を生じさせるような錐状体まわりの超音速流を Stocker and Mauger の方法を用いて数値的に解いたものである。しかし，数値計算の細部は Stocker and Mauger のものとかなり異なっている。

2. 基礎方程式

Stocker and Mauger[2] によって誘導され，そしてここで改善された錐状流の支配方程式は

次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{v^2+w^2}{2u} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho v}\left(1-\frac{\rho w}{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\right)\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{w^2 \cot\theta}{2u} - \frac{v}{2} - \frac{w}{2u\sigma}\frac{\partial p}{\partial \psi} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{vw\cot\theta}{2u} - \frac{w}{2} + \frac{v}{2u\sigma}\frac{\partial p}{\partial \psi} \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\rho}{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{v}\left(1-\frac{\rho w}{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \psi}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta}$$
$$= \frac{\rho v}{2u\sigma}\frac{\partial w}{\partial \psi} - \frac{\rho w}{2u\sigma}\frac{\partial v}{\partial \psi} - 1 - \frac{v\cot\theta}{2u} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial \eta} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{w}{2u\sin\theta} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{v}{2u} \tag{2.7}$$

ここに，u, v, w は球面座標 (r, θ, ϕ) における r, θ, ϕ 方向の速度成分，p は圧力，ρ は密度であり，速度は U_∞，密度は ρ_∞，圧力は $\rho_\infty U_\infty^2$ でそれぞれ無次元化されている。ただし添字 "∞" は衝撃波前方の一様流での値を表わす。また $a\,(=\sqrt{\gamma p/\rho}\,)$ は音速，γ は気体の比熱比，σ, ψ は一対の流れ関数である。η は

$$\eta = \log\{F(\psi)/\sigma\} \tag{2.8}$$

であり，$F(\psi)$ は後に決められる関数である。

3. 境界条件

衝撃波上の境界条件は Rankine-Hugoniot の関係式により与えられる。衝撃波の形状を

$$f(\theta, \phi) = 0 \tag{3.1}$$

とすれば，衝撃波直後の諸量は次のようになる。

$$u = \cos\theta \tag{3.2}$$

$$v = -\sin\theta\left\{1-(1-\varepsilon)\frac{f_\theta^2}{N^2}\right\} \tag{3.3}$$

$$w = (1-\varepsilon)\frac{f_\theta f_\phi}{N^2} \tag{3.4}$$

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1-\varepsilon)\frac{f_\theta^2 \sin^2\theta}{N^2} \tag{3.5}$$

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} \tag{3.6}$$

ここに

$$N^2 = f_\theta^2 + f_\varphi^2 \sin^{-2}\theta \tag{3.7}$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M_\infty^2}\frac{N^2}{f_\theta^2 \sin^2\theta} \tag{3.8}$$

衝撃波上で，流れ関数の一つ ψ を

$$\psi = \phi \tag{3.9}$$

とすれば，もう一つの流れ関数 σ は

$$\sigma = -\rho v \sin\theta \tag{3.10}$$

よって

$$F(\psi) = -(\rho v \sin\theta)_{at\ S.W.} \tag{3.11}$$

衝撃波の形状を楕円錐とすると

$$f(\theta, \phi) = \sin^2\theta - \frac{k_1}{1+k_2\cos 2\phi} \tag{3.12}$$

ここに

$$k_1 = \frac{2a^2b^2c}{a^2+b^2}, \qquad k_2 = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

であり，a, b は楕円の短径，長径の長さの 1/2 を表わす。

4. 数値計算法

未知数 $u, v, w, p, \rho, \phi, \theta$ に対し，解くべき方程式系は (2.1)~(2.7) である。これらの諸式は，鈍頭物体まわり，衝撃層内の流れの解析に使用された数値計算法[3]と同様に，衝撃波上から出発し物体方向に積分を進めて行く方法，いわゆる積分進行法によって数値的に解かれる。

ψ に関する数値微分は Lagrange の 5 点近似公式によって与えられた。

数値計算は，最初，きざみ幅の数値解（物体形状）に及ぼす影響を調べるために，きざみ幅を，$\Delta\phi=\pi/36$, $\pi/72$; $\Delta\eta=0.5$, 0.1, 0.2, と変えて行われた。しかし求まった値は 1% 以内の差違で同じであったので，実際の計算は主に $\Delta\phi=\pi/72$, $\Delta\eta=0.1$ で行われた。

使用された計算機は北海道大学大型計算機 FACOM 230-60 である。

5. 計算結果と考察

楕円の短径長径比 $a/b=0.95$, 0.8, 0.6, 0.4 の楕円錐衝撃波に対して得られた物体形状が Fig. 1 (a), (b), (c), (d) に示される。この場合一様流のマッハ数 $M_\infty=6$, 10, 気体の比熱比 $\gamma=1.4$ である。

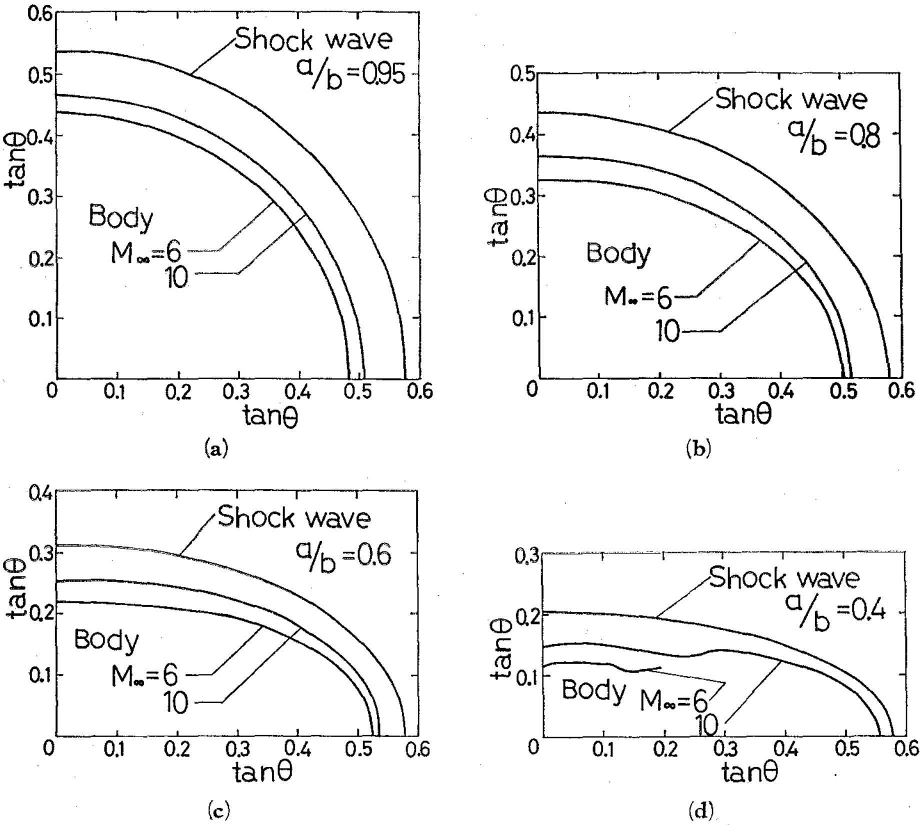

Fig. 1. Body shapes for given elliptic conical shock waves.

得られた物体形状は，$a/b=0.95$ の場合には，与えられた衝撃波形とほぼ相似な形となるが，$a/b=0.8$, 0.6 の場合には，与えられた衝撃波形より扁平な形となる。この傾向は Von Dyke[4] の数値計算結果と同様である。$a/b=0.4$ の場合には，計算は途中で停止し，満足すべき物体形状は得られなかった。この原因として，(1) vortical singularity 近傍における数値計算の精度の悪さ，(2) vortical singularity の $\phi=0°$ 以外での出現等が考えられるが，目下検討中である。

Fig. 1 (a), (b), (c) で示された物体の表面圧力分布が Fig. 2 (a), (b) に示される。圧力係数 C_p の値は

$$C_p=\frac{p_b-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} \tag{5.1}$$

より算出された。ここに p_b は物体表面の圧力である。

物体形状に及ぼす比熱比 γ と一様流のマッハ数 M_∞ の影響が Fig. 3, 4 に示される。Briggs[5] の計算結果と同様の傾向，すなわち γ が小さく，M_∞ が大きくなると衝撃波と物体との間の層は薄くなるという傾向を示す。

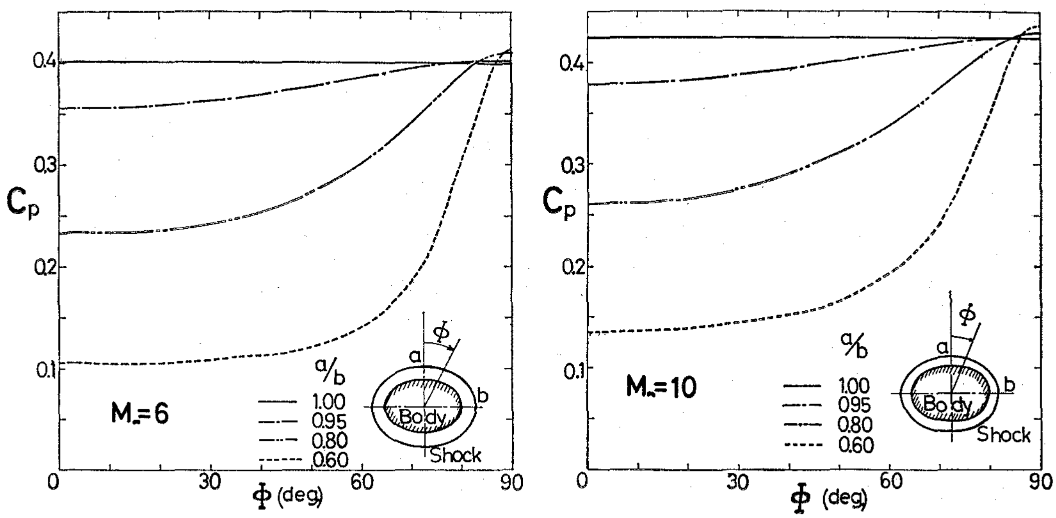

Fig. 2. Pressure coefficients on bodies given by elliptic conical shock waves.

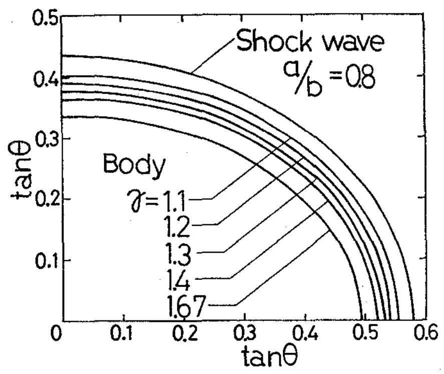

Fig. 3. The effect of changing γ on body shape.

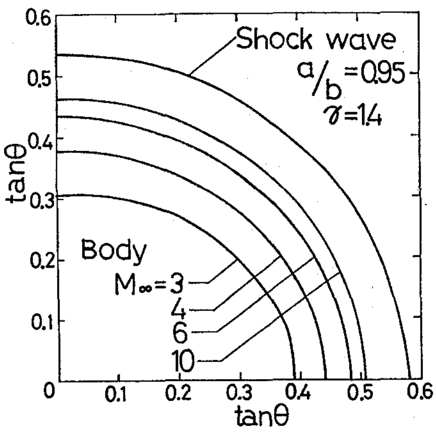

Fig. 4. The effect of Mach number variation on body shape.

6. む す び

楕円錐衝撃波を生じさせるような錐状体まわりの超音速流が，Stocker and Mauger によって展開された inverse method を用いて，数値的に解かれた。

ここで採用された数値解析法と結果に対する詳細な検討は，次報においてなされるであろう。

終わりに，本研究に対し終始激励をいただいた本学機械工学科奥田教海教授，図面作成に

協力を得た平川恵司，高橋敏則，久保田浩文の三君に謝意を表する。

(昭和 49 年 5 月 20 日受理)

文　献

1) Hayes, W. D. and Probstein, R. F.: Hypersonic Flow Theory, Vol. 1, p. 526 (Academic Press, New York and London, 1966).
2) Stocker, P. M. and Mauger, F. E.: J. Fluid Mech. 13, 383 (1962).
3) 本田　睦・杉山　弘：日本航空宇宙学会第 3 回年会講演会講演集, p. 59 (1972).
4) Van Dyke, M. D.: Hypersonic Flow (Eds. Collar, A. R. and Tinkler, J.), p. 239 (Butterworth, London, 1960).
5) Briggs, B. R.: NASA TN D-24 (1959).