



## 入力にむだ時間をもつ系の分離制御について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-07-29 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 山下, 光久, 疋田, 弘光 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3721">http://hdl.handle.net/10258/3721</a>

# 入力にむだ時間をもつ系の分離制御について

山下光久・疋田弘光

## Decoupling of a Linear System with Dead Time

Mitsuhsa Yamashita and Hiromitsu Hikita

### Abstract

In this paper, we consider a method of decoupling of a linear time-invariant, discrete-time system with dead time.

$$S: \begin{aligned} x(N+1) &= Ax(N) + Bu(N-k) \\ y(N) &= Cx(N) \end{aligned}$$

The procedure is as follows. An expanded system ( $S'$ ) which is obtained by replacing the dead time with  $k$  delays is introduced. Using the states of  $S'$  and constructing an observer,  $x(N)$  and  $x(N+k)$  are estimated. If  $S$  can be decoupled by feeding back the states  $x(N+k)$ , the decoupling is realized by using the estimated states  $\hat{x}(N+k)$ .

We applied the method to a simple process system which has thermal interacts.

### 1. ま え が き

プロセス系の制御では、従来から主としてP I D調節計を組み込んだ単一ループの制御が利用されてきた。この制御方式では内部で複雑に干渉する系に対しても多数の独立したループから成り立っていると考え、相互の干渉を外乱と見なし本質的には、単一ループ制御の考えを用いている。現在、電子計算機の導入が進み、多数の調節計を中央管理するヒエラルキー(hierarchy)構造の思想も取り入れられてはいるが、依然、干渉を排除し系を分離化するための補償は、十分に行なわれていない。従って、プロセス系を何らかの手段により分離化し、分離された個々のループに対しP I D制御を用いれば、従来のP I D制御の特性が生かされる。

さて、これまで、むだ時間の存在しない線形時不変系に対して状態フィードバックによる分離可能条件は与えられており<sup>1)</sup>、さらに直接測定できない状態が存在する場合、系が可観測であれば状態推定器を用いて、これを推定することができる<sup>1)</sup>。

本研究では、これらの結果を上記の主旨からプロセス系に広く存在する入力むだ時間系に対して拡張し入力むだ時間系の分離化を実現する一方法を検討する。

また、得られた方法を簡単なプロセス系(タンク水温系)の制御に実際に適用しP I制御を

併用した場合と、単なるPI制御を行なった場合とを比較し分離化の有効性を確かめる。

## 2. システムの記述

観測および制御の対象となるのは

$$S: x(t) = Ax(t) + Bu(t-L) \quad (1-a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1-b)$$

で記述される入力にむだ時間をもつシステムである。ここで、 $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^m$ で、それぞれ状態、入力、出力変数である。また、 $A$ ,  $B$ ,  $C$ はそれぞれ $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times n$ の定数行列、 $L$ はむだ時間で正定数である。

この論文では制御系をサンプル値系で構成するため、システム(S)に対して離散時間系の表示を行ない、以後、これを使用する。対象の離散時間系表示は

$$S: x(N+1) = A_1 x(N) + B_1 u(N-k) \quad (2-a)$$

$$y(N) = Cx(N) \quad (2-b)$$

である。ここで、 $A_1 = \Phi(T) = \exp(AT) = (\phi_{ij})$  (3)

$$B_1 = (b_{ij}), \quad b_{ij} = \int_0^T \sum_{p=1}^n \phi_{ip}(\tau) b_{pj} d\tau \quad (4)$$

ただし、 $T$ はサンプリング周期、 $k$ は $L=kT$ を満足する整数である。

## 3. 拡張システム(S')

本論文で使用する拡張システム(S')は、システムSから次のようにして得られる。このS'の状態変数はSの動的挙動を完全に規定している。

拡張システムはSの状態変数 $x(N)$ の他に、各おくれ要素の値を状態として付加したものである。これら要素の出力 $x_2(N)$ ,  $x_3(N)$ , ...,  $x_{k+1}(N)$ は、システムSから直接観測できない変数ではあるが、システムへの入力 $u(N)$ を別に記憶しておくことで得ることができる値である。従って、以下ではこれらを直接測定できるものとして解析を進める。

このとき S'の状態変数および出力は

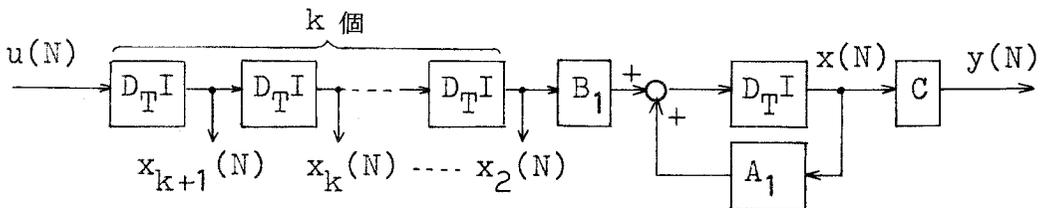


図-1 拡張システムの構造

$$X(N) = \begin{bmatrix} x(N) \\ x_2(N) \\ \vdots \\ x_{k+1}(N) \end{bmatrix} \quad Y(N) = \begin{bmatrix} y(N) \\ x_2(N) \\ \vdots \\ x_{k+1}(N) \end{bmatrix}$$

ただし、 $x_2(N), x_3(N), \dots, x_{k+1}(N)$  は  $u(N)$  と同じ実  $m$  ベクトルである。  
状態方程式および出力方程式は、次のように表わされる。

$$S': X(N+1) = \bar{A}X(N) + \bar{B}u(N) \quad (5-a)$$

$$Y(N) = \bar{C}X(N) \quad (5-b)$$

ただし

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

#### 4. 状態推定器 ( $\Sigma$ ) の構成

5. で述べる非干渉化のためにはシステムの状態  $x(N)$  を必要とする。従って、 $x(N)$  が直接測定できない系に対しては、その状態を推定する状態推定器が必要である。

拡張システム ( $S'$ ) を利用するとシステム ( $S$ ) の状態推定は  $S'$  における変数  $x_2(N)$  および出力  $y(N)$  を入力とする状態推定器 ( $\Sigma$ ) の構成に置き換えられる。このとき  $\Sigma$  は、むだ時間のない線形離散システムの状態観測器と同一である。

状態推定器の構成を

$$\Sigma: \hat{w}(N+1) = H\hat{w}(N) + G y(N) + TB_1 x_2(N) \quad (6)$$

$$\hat{x}(N) = M_1 \hat{w}(N) + M_2 y(N) \quad (7)$$

とする。ここで、 $\hat{x}(N) \in R^n$ ,  $\hat{w}(N) \in R^{n-m}$  で、それぞれ  $x(N)$  の推定値および推定器の状態変数である。また、 $H, G, T, M_1, M_2$  は、それぞれ適当な大きさの実数行列である。

このとき、 $\Sigma$  が次の条件 i) ~ iii) を満足すれば  $\hat{x}(N)$  は  $x(N)$  へ漸近する。

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} H^n \rightarrow 0$

ii)  $HT - TA_1 + GC = 0$

iii)  $W = \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}$  が正則

ここで  $W^{-1} = [M_1; M_2]$  である。

証明は線形離散システムのオブザーバの証明<sup>2)</sup>に準ずる。

## 5. 非干渉制御

### 5-1 非干渉化

システムSの非干渉化のために $x(N+k)$ がわかるとして、次のような状態フィードバックを考える。

$$u(N) = Lv(N) - Fx(N+k) \quad (8)$$

ここで、Fはフィードバックの係数行列であり、Lは入力uと新しい入力vとの間の線形変換の係数行列である。F、Lの大きさは、それぞれ、 $m \times n$ 、 $m \times m$ である。

式(8)を式(2-a)、(2-b)に代入すると

$$x(N+1) = [A_1 - B_1 F]x(N) + B_1 Lv(N-k) \quad (9-a)$$

$$y(N) = Cx(N) \quad (9-b)$$

システム(9-a, b)のパルス伝達関数行列を $G(z; F, L)$ とおくと

$$G(z; F, L) = z^{-k} C [zI - A_1 + B_1 F]^{-1} B_1 L \quad (10)$$

となる。もし、 $G(z; F, L)$ が対角行列で、すべての対角要素が0でないならばF、LはシステムSを非干渉化したことになる。

### 5-2 $x(N+k)$ の推定

式(8)で用いた $x(N+k)$ はシステムS'において次のように得られる。

式(5-a)から

$$x(N+1) = A_1 x(N) + B_1 x_2(N) \quad (11)$$

従って

$$x(N+2) = A_1 x(N+1) + B_1 x_2(N+1) \quad (12)$$

$$= [A_1]^2 x(N) + A_1 B_1 x_2(N) + B_1 x_3(N) \quad (13)$$

同様の操作を続けると

$$x(N+k) = [A_1]^k x(N) + [A_1]^{k-1} B_1 x_2(N) + \cdots + A_1 B_1 x_k(N) + B_1 x_{k+1}(N) \quad (14)$$

が得られる。

式(14)の $x_2(N)$ 、 $x_3(N)$ 、 $\cdots$ 、 $x_{k+1}(N)$ は、2.で述べたように入力u(N)を利用して知ることができ、また状態推定器から $x(N)$ の推定値 $\hat{x}(N)$ を得ることができる。

従って $x(N+k)$ の推定値 $\hat{x}(N+k)$ は

$$\hat{x}(N+k) = [A_1]^k \hat{x}(N) + [A_1]^{k-1} B_1 x_2(N) + \cdots + A_1 B_1 x_k(N) + B_1 x_{k+1}(N) \quad (15)$$

となる。また、 $\hat{x}(N+k)$ が $x(N+k)$ へ漸近するのは明らかである。

5-3 非干渉制御系の構成

以上から得られた非干渉制御系の構成を図-2に示す。

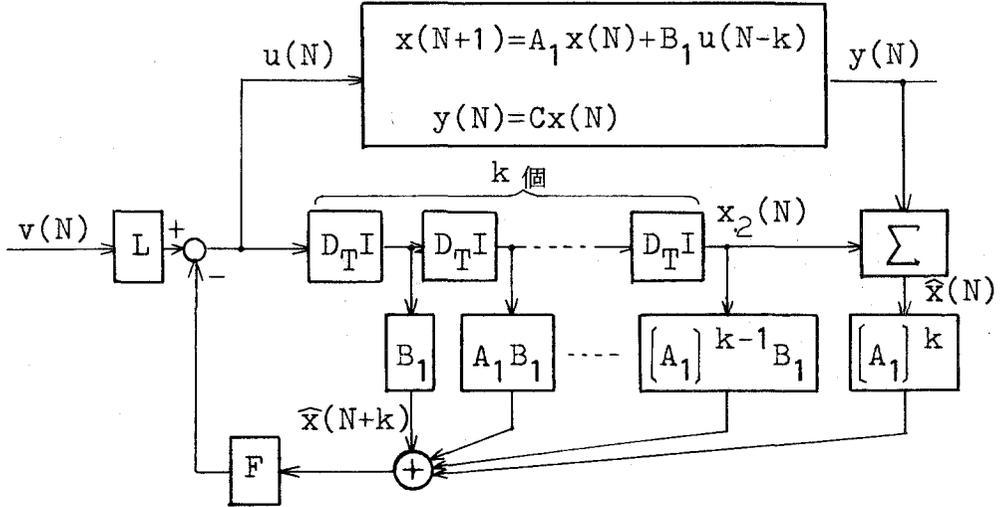


図-2 非干渉制御系の構成

6. タンク水温系への応用

制御対象をタンク水温系とし、以上で得られた制御方法を適用し非干渉系を構成する。さらにPI制御を付加した制御をDDCシステムで行なう。

6-1 タンク水温系および制御系の構成

タンク水温系および制御系の構成を図-3に示す。また、使用記号を次に示す。

- q : 流入流出流量
- $\theta_i$  : タンク ( i ) 内水温
- $\theta_0$  : 流入水温度
- $u_i$  : 入力 ( i )
- $y_i$  : 出力 ( i )

図-3に示すように制御対象は定容量のタンク3個で構成されている。各タンクを図の左側から、それぞれ、タンクI、タンクII、タンクIIIとする。操作量 $u_1$ 、 $u_2$ は、それぞれタンクI、タンクIIIに与えられる。また出力 $y_1$ 、 $y_2$ は $\theta_1$ 、 $\theta_3$ の変換後の値である。

この制御対象において、出力 $y_2$ は入力 $u_2$ の他に $u_1$ の影響を受けている(干渉系を構成している)。また、タンクIIの温度 $x_2$ は観測できない変数であり推定すべき値であるとしている。

プロセスの入出力データはA/D、D/A変換器を介して計算機へ送受される。また、テレタ

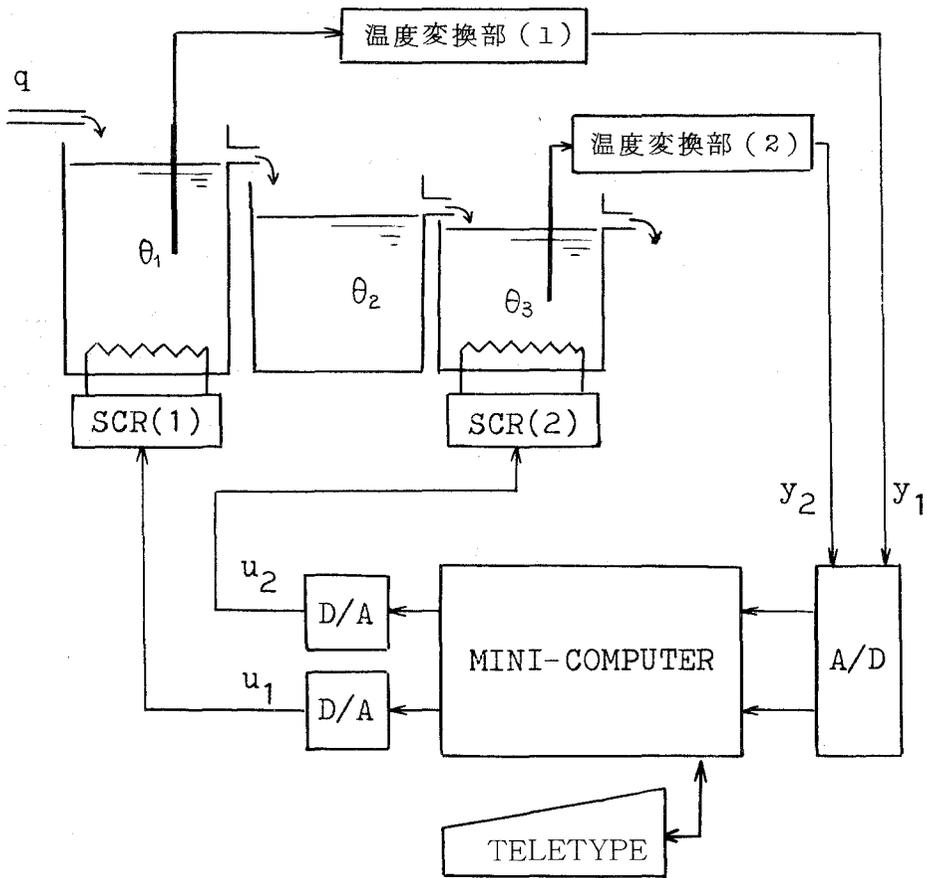


図-3 タンク水温系および制御系の構成

イブライタは制御卓として用いられている。これらのデータを用いて計算機は制御動作に対する処理を行なう。

6-2 タンク水温系の状態方程式

状態変数を、 $x_1 = \theta_1 - \theta_0$ ,  $x_2 = \theta_2 - \theta_0$ ,  $x_3 = \theta_3 - \theta_0$  とし入力  $u_1$ ,  $u_2$  にそれぞれ  $L_1$ ,  $L_2$  のむだ時間をもつ系としてタンク水温系を考えると系の状態方程式および出力方程式は

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.091 & 0.0 & 0.0 \\ 0.571 & -0.571 & 0.0 \\ 0.0 & 0.314 & -0.314 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.584 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.218 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t-0.599) \\ u_2(t-0.320) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0.0507 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0507 \end{bmatrix} x(t) \quad (17)$$

となる。ここで各係数値は各タンクのスレップ応答から最少2乗法を用いて求められた。

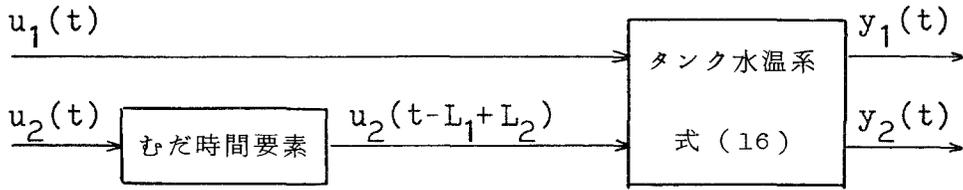


図-4 むだ時間要素の付加

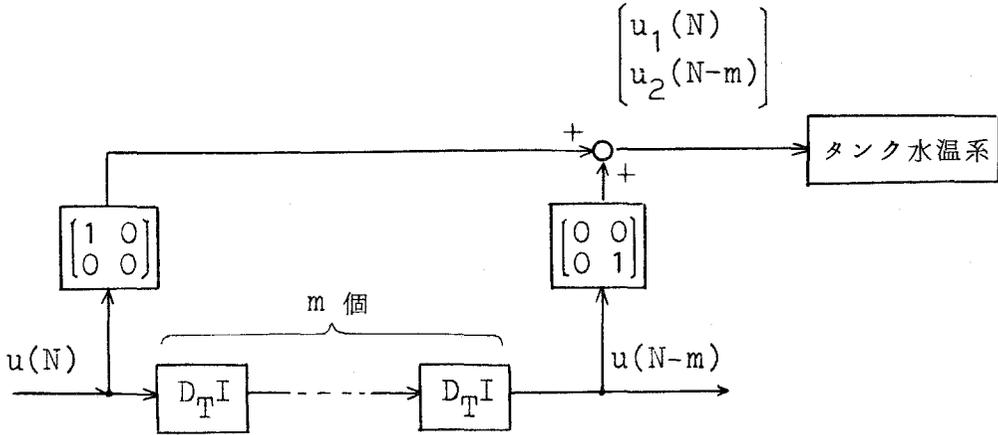


図-5 むだ時間要素の付加

式(16)における各むだ時間 $L_1, L_2$ の値は異なっている。従って、式(1-a)の型にするため $u_2$ に $(L_1 - L_2)$ のおくれをもつむだ時間要素を付加する。(図-4参照)

離散時間システム表示に対する上記の操作は、 $E = \lfloor mT - (L_1 - L_2) \rfloor$ が最小となる整数 $m$ を求め、拡張システム $S'$ の状態変数を図-5に示すように利用すれば得られる。

流入水流量( $q$ )を $2 \text{ l/min}$ 、サンプリング周期( $T$ )を $3 \text{ 秒}$ とし、さらに図-5で示した操作を行なうと制御対象の離散時間表示は式(18)、(19)となる。

$$x(N+1) = \begin{bmatrix} 0.995 & 0.0 & 0.0 \\ 0.028 & 0.972 & 0.0 \\ 0.2 \times 10^{-3} & 0.015 & 0.984 \end{bmatrix} x(N) + \begin{bmatrix} 0.029 & 0.0 \\ 0.069 & 0.0 \\ 0.2 \times 10^{-5} & 0.105 \end{bmatrix} u(N-11) \quad (18)$$

$$y(N) = \begin{bmatrix} 0.0507 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0507 \end{bmatrix} x(N) \quad (19)$$

### 6-3 制御系の構成

式(18)で表示された系に対して行列 $F, L$ が

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ -b_{131}/b_{132} & l_{22} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} (a_{131} - b_{132}f_{21})/b_{131} & (a_{132} - b_{132}f_{22})/b_{131} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}$$

ただし $L = (l_{ij}), F = (f_{ij}), A_1 = (a_{1ij}), B_1 = (b_{1ij})$

のとき、 $G(z; F, L)$ は対角行列となる。

さらに、 $f_{21}=a_{131}/b_{132}$ ,  $f_{22}=a_{132}/b_{131}$ とすると

$$G(z; F, L) = z^{-k} \begin{bmatrix} \frac{k_1 l_{11} b_{111}}{z - (a_{111} - b_{111} f_{11})} & 0 \\ 0 & \frac{k_2 l_{22} b_{132}}{z - (a_{133} - b_{132} f_{23})} \end{bmatrix}$$

となる。この非干渉化されたシステムに対し、各ループ毎にP I制御を行なうため次式で表わされる差分形P I制御式<sup>3)</sup>を用いた。

$$v_i(N) = (K_p)_i e_i(N) + \sum (K_I)_i e_i(N) \tag{20}$$

ただし、 $e_i(N) = r_i(N) - y_i(N)$ で、 $(K_p)_i$ ,  $(K_I)_i$ ,  $r_i$ ,  $e_i$ はそれぞれ*i*番目の制御ループにおける比例ゲイン、積分項ゲイン、目標値および制御誤差である。

タンク水温系に対する制御系の全体の構成を図-6に示す。

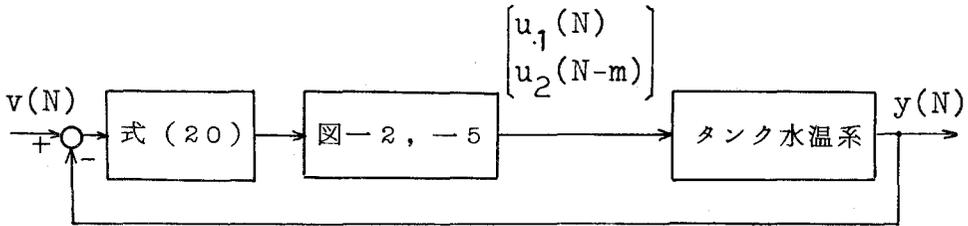


図-6 制御系の構成

6-4 実験結果

状態観測器 ( $\Sigma$ ) の各行列を

$$H=0.95 \quad G=[1.839, -0.969] \quad T=[1.425, 1.0, -1.425]$$

とし、分離化のための行列 $L, F$ を

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.2 \times 10^{-4} & 1.0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.2 \times 10^{-2} & 0.145 & 0.0 \end{bmatrix}$$

と定めたときの結果を述べる。

6-4-1 非干渉制御に関して

図-2で示した非干渉制御系の動作を確認するため、タンクIの入力 $v_1$ に正および負のステップ変化を与えた結果を、それぞれ図-7、図-8に示す。

両図においてタンクIIの水温 $x_2$ (実測値)と状態推定器の推定値 $\hat{x}_2$ は良く一致している。また、タンクIIIの水温 $x_3$ に対しても $v_1$ の変化による干渉は、ほぼ除かれており提案した非干渉制御系がタンク水温系に対し適用できることを示している。

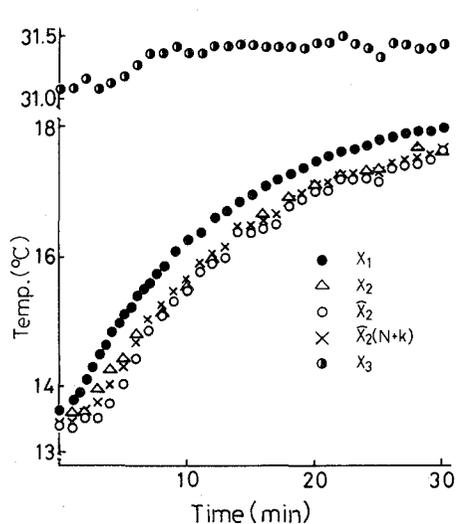


図-7 非干渉制御系のステップ応答

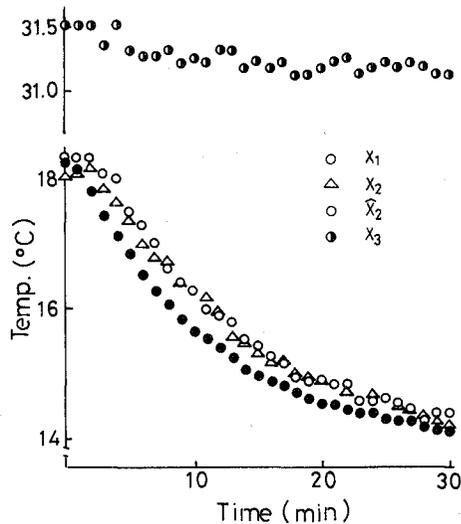


図-8 非干渉制御系のステップ応答

6-4-2 PI制御との併用に関して

タンク水温系にPI制御を行なった場合(図-9)と、PI制御および分離制御を行なった場合(図-10)の比較を行なう。

両制御におけるPI制御定数はCHR (Chien, Hromes, Reswch)の目標値変化に対する決

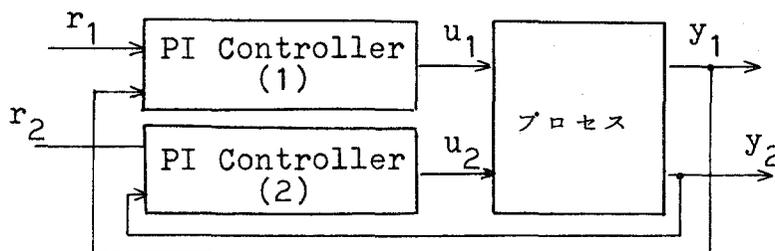


図-9 PI制御系

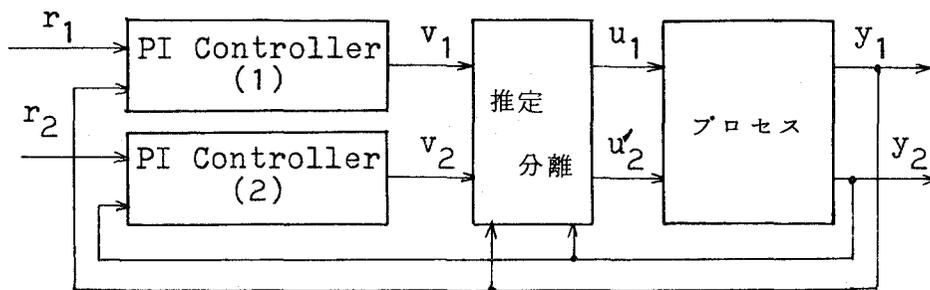


図-10 PI + 分離制御系

	$K_p$	$K_I$
Control Loop 1 (Tank I)	1.5983	0.0074
Control Loop 2 (Tank II)	0.8811	0.0137

表一 1 P I 制御定数

定方法（ただし、20%行きすぎ）を用いた。このときの制御定数を表一1に示す。

タンク I の目標値  $r_1$  をステップ状に変化させたときのタンク I の応答を図-11に、タンク III の応答を図-12に示す。また、制御器内部の状態を図-13に示す。

図-12において、P I 制御のみの場合タンク III の温度は目標値  $r_1$  の変化の影響を受けている。これに対し、分離制御を行なうことにより、その影響が除かれており分離化の有効性を示している。このことは、図-13において P I 制御のみの場合、P I 制御器 2 が  $r_1$  の変化に対する  $y_2$  の干渉を外乱として処理しているのに対し、分離制御を行なった場合は分離制御部で干渉を取り除き ( $u_2$  の減少)、P I 制御器にその影響を与えていない ( $v_2$  は一定) ことを示している事からも明らかである。

6-5 実験結果の検討

A. 本方法を用いた非干渉化が実験においても確認された。また、P I 制御との併用においても、その有

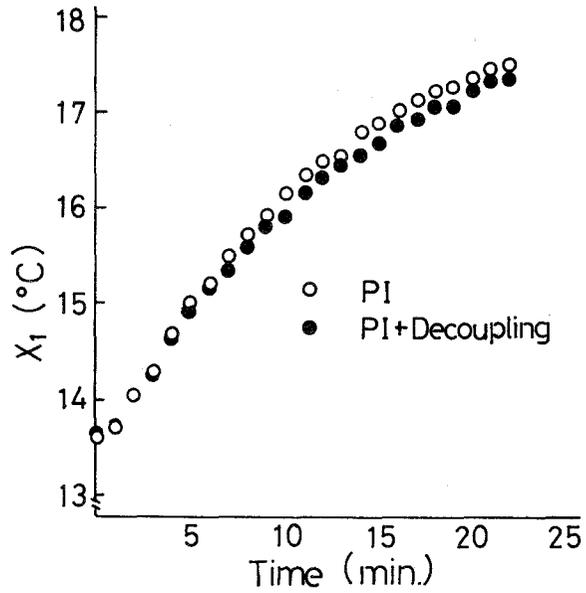


図-11 目標値変化に対する  $x_1$  の応答

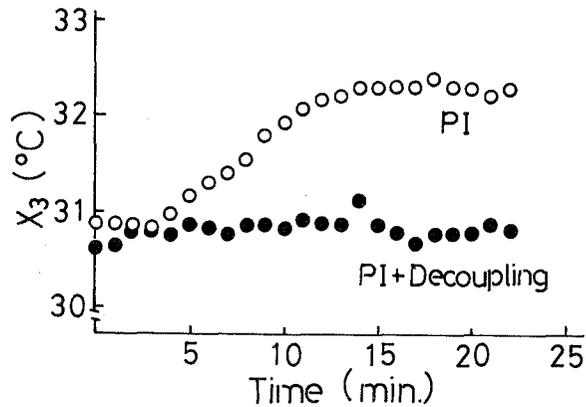


図-12 目標値変化に対する  $x_3$  の応答

効性を得た。

B. 状態推定器および分離化のための行列L, F内に自由パラメータが存在するが, この実験において推定器に対しては雑音を含む信号でも安定でかつ速く推定値を出力するように, また, 分離化行列に対してはパルス伝達関数が簡単な形になるように設定した。

C. 外乱に対しては特に述べていないが, 分離化に対してあまり大きな影響を与えないものと考えられる。しかし, 今後, 検討する予定である。

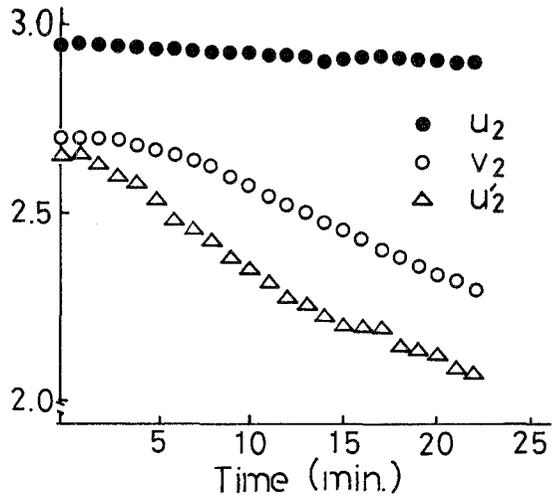


図-13 目標値変化に対する制御器の内部状態

### 7. あ と が き

本論文は, まず入力にむだ時間をもつ系に対する状態推定器および分離制御系の構成を示した。さらに, きわめて簡単なプロセス系ではあるがタンク水温系を制御対象として選びPI制御式を含むDDCシステムを構成し実験を行なった。その結果, 動的な意味で分離化が実現され, またPI制御との併用においても分離化の有効性を得た。

より複雑に干渉する実プロセスに対しても分離化法を適用し, PID調節計を併用することにより, 従来のPID制御に比べ, より良い制御性が得られるものと考えられる。

最後に本研究を進めるにあたり熱心なご討論をして戴いた久保田譲助教授, ならびに, 本実験に御協力戴いた成田忠雄技官および卒業研究生に深く謝意を表します。

(昭和55年5月24日受理)

### 参 考 文 献

- 1) 伊藤, 木村, 細江: 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会
- 2) 西村, 長田: 計測自動制御学会論文集, 9-6, 665 (1973)
- 3) 山下, 保志: デジタルプロセス制御, コロナ社