



縦衝撃荷重を受ける丸棒の弾塑性波に関する研究

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-03-04 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 内藤, 正鄰, 臺丸谷, 政志, 浜田, 恒平, 劉, 凱欣 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/1087

縦衝撃荷重を受ける丸棒の弾塑性波に関する研究

内 藤 正 鄰・台丸谷 政 志
浜 田 恒 平・劉 凱 欣

A Research on Elastic-Plastic Waves of a Cylindrical Specimen Subjected to Longitudinal Impact Loading

Masachika NAITOH, Masashi DAIMARUYA, Kouhei HAMADA,
and Kaishin LIU

Abstract

In the present paper the elastic-plastic stress of the impact end of a cylindrical specimen subjected to longitudinal compression impact with a stress bar which remains elastic during the test is investigated experimentally and theoretically. The measured elastic response of the stress bar showed explicitly the elevation of dynamic stress and its relaxation at the impact end of the specimen.

The impact end stress of specimen was analyzed by using of the strain-rate dependent theory for plastic wave propagation, taking into account a rise time of impact and impact conditions. The extreme elevation of the dynamic stress was predicted in the case of a step impact, but it went down rapidly with the increasing of the rise time of an impact velocity. Taking these stresses as an incident pulse to the stress bar, the elastic response of the stress bar based on the Love theory for elastic waves almost agreed quantitatively with the experimental results as well as qualitatively.

Moreover, the existence of the plateau of uniform strain adjacent to the impact end of the specimen is confirmed theoretically and experimentally. Its appearance is governed by the strain-rate dependence of materials and the impact velocity at the impact end.

1. 結 言

金属棒における塑性波の伝播に関しては、Kármán, Duwez¹⁾以来、多くの研究がなされている。金属材料が衝撃荷重下で動的塑性変形を受ける場合に、ひずみ速度依存性があることが知られており、それは強度および動的降伏点の上昇要因になっている。^{2),3)} 動的降伏現象は材料のひずみ速度依存性および衝撃荷重速度から生ずる過渡的な現象である。^{4),5),6)} 動的応力とひずみ速度の関係は古くは Ludwick⁷⁾ や Prandtl⁸⁾ らによって対数則の形で示され、以後多くの研究が報告され、ひずみ速度を含む種々の構成式が提案されている。⁹⁾

Malvern¹⁰⁾ は動的応力と静的応力の差が塑性ひずみ速度に比例すると仮定して、ひずみ速度

依存性塑性波動理論を導いた。さらに Cristescu⁶⁾ らによって構成式中に瞬間塑性応答成分を含むかたちで理論が拡張されている。これらの理論に基づいて棒中の塑性波動に関する種々の研究が行われているが、ひずみ分布や各点のひずみ変動など変形についての研究が大半で、動的塑性変形を受ける棒の任意点の応力は測定が困難なため、応力変動について論じたものは少ないようである。西山、谷村¹¹⁾ らは塑性変形する試料棒と弾性変形する応力棒との衝突について衝撃端面条件を考慮して解析を行い、試料棒中を伝播する塑性波動を調べるとともに、衝撃端応力の変動について理論および実験の両面より検討を加えている。また、岸田¹²⁾ らは Stress-bar 法を用いて同様な実験を行い、瞬間塑性応答成分を含めて理論的な考察を行っている。しかし、衝撃荷重を受けて塑性変形する棒の応力変動、特に衝撃端応力については、十分な説明がなされていない。

一方、弾性波の伝播問題に関しては、弾性丸棒がその一端に縦衝撃を受ける問題に対する三次元弾性理論に基づく最初の厳密解は Skalak¹³⁾ によってなされた。その結果、厳密解には一次元弾性波動以外に無数の高次モードの波動が含まれるが、衝撃点から遠方の位置においては高次波動モードの影響は非常に小さく、横慣性効果が支配的になることが結論として得られている。実際、一次元縦波動理論に横慣性効果を考慮した Love の波動理論¹⁴⁾ は、比較的長い波長の弾性波動に対してかなりよい近似解を与えることが知られている。¹⁵⁾ さらに、著者らは Love 理論適用の妥当性とその範囲を示し、縦弾性波の伝播に及ぼす衝撃立ち上り時間の影響を定量的に明らかにした。¹⁶⁾

本研究では、圧縮縦衝撃を受けて塑性変形する丸棒の動的塑性変形挙動および衝撃端応力の挙動を明らかにする目的で、次の実験および理論解析を行った。実験は試料棒自身の自然落下を利用して、応力棒との衝突によって試料棒に縦衝撃を加える方法で行った。試料棒の衝撃端で生ずる動的応力の変動を弾性応力棒側で観測した結果は初期の立ち上り時に大きな応力上昇、それに続く応力緩和現象を明らかに示した。また、ひずみ速度依存性を調べるために試料棒の残留ひずみを測定した。その結果、Malvern 型構成式を用いたひずみ速度依存性理論においても、一般に漸近的なひずみプラトーの存在を予測することができるという著者らの先の理論結果^{17),18)} を検証した。次に、Malvern 型構成式を用いたひずみ速度依存性理論に基づいて試料棒の塑性波動の解析を行い、衝撃端応力に及ぼす衝撃立ち上り時間、立ち上り様式、衝撃速度および、ひずみ速度依存性を表わす材料定数など諸因子の相違による影響を調べた。また、試料棒の衝撃端応力が応力棒に入射するときの応力棒の弾性応答を横慣性効果を考慮した Love 理論に基づいてラプラス変換法を用いて解析した結果は、応力棒上で観測された測定波形と定量的にもよく一致した。

2. 試料棒の塑性波動解析

2.1 塑性波伝播理論

材料のひずみ速度依存性を考慮した Malvern 型の構成方程式を用いた一次元塑性波動理論の基礎式は次式のように与えられる。¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} \text{運動方程式: } \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \text{適合方程式: } \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{構成方程式: } E_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 σ は公称応力、 ε は公称ひずみ、 $v = \partial u / \partial t$ は粒子速度、 u は変位、 E_0 は縦弾性係数、 ρ は密度、 x は衝撃端からの距離、 t は時間である。ただし、 σ, ε は圧縮を負、 v は x の増す方向を正とする。また、 $g(\sigma, \varepsilon)$ は材料のひずみ速度依存性を表わす関数である。それは材料が弾性変形する場合に 0 で、材料が塑性変形する場合に次式のように仮定する。

$$g(\sigma, \varepsilon) = E_0 \cdot \dot{\varepsilon}_p = K \cdot \xi \quad (2)$$

ここで、 $\dot{\varepsilon}_p$ は塑性ひずみ速度、 $\xi = \sigma - f(\varepsilon)$ は過剰応力、 $f(\varepsilon)$ は静的応力—ひずみ関係、 K はひずみ速度依存性を表わす材料定数である。

式系(1)の各式を組合せると、次式が得られる。

$$E_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \rho \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d\sigma}{dt} + g(\sigma, \varepsilon) \quad (3)$$

式(3)は変位 u に関する双曲型の偏微分方程式である。

2.2 特性曲線法

式(3)は準線型で解析的に解くことは困難であるが、適当な初期条件および境界条件のもとで特性曲線法によって数値的に解くことができる。式(3)は、次の特性曲線およびそれに沿う微分関係式を有する。

$$dx \pm C_0 dt = 0 \quad \text{に沿って, } d\sigma \pm \rho C_0 dv = -g(\sigma, \varepsilon) dt \quad (4)$$

$$dx = 0 \quad \text{に沿って, } E_0 d\varepsilon - d\sigma = g(\sigma, \varepsilon) dt \quad (5)$$

ここで、 $C_0 = E_0 / \rho$ は棒の縦弾性波伝播速度である。

図1に示されるように、特性曲線で囲まれた網目を十分細かく取るならば、代表的網目 $NWSE$ について式(4), (5)はつぎの差分式に書きなおされる。

$$\sigma_N - \sigma_W - \rho C_0(v_N - v_W) = -\frac{1}{2}(g_N + g_W) \Delta t \quad (6)$$

$$\sigma_E - \sigma_S - \rho C_0(v_E - v_S) = -\frac{1}{2}(g_E + g_S) \Delta t \quad (7)$$

$$\sigma_N - \sigma_E + \rho C_0(v_N - v_E) = -\frac{1}{2}(g_N + g_E) \Delta t \quad (8)$$

$$\sigma_W - \sigma_S + \rho C_0(v_W - v_S) = -\frac{1}{2}(g_W + g_S) \Delta t \quad (9)$$

$$E_0(\varepsilon_N - \varepsilon_S) - (\sigma_N - \sigma_S) = (g_N + g_S) \Delta t \quad (10)$$

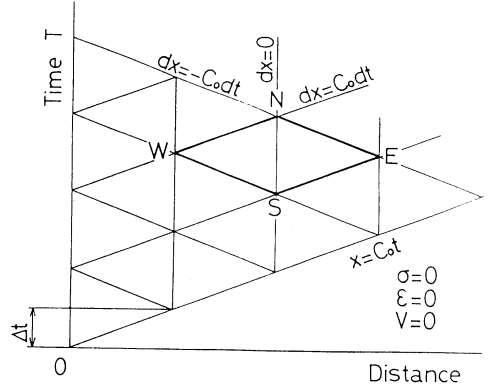


図1 特性曲線

ここで、 σ_N , v_N , ε_N , g_N は N 点における応力、ひずみ、粒子速度、関数 $g(\varepsilon, \sigma)$ であり、 Δt は差分計算の時間刻み幅である。式(6)~(10)を組み合わせることによって、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= \sigma_W + \sigma_E - \sigma_S - \frac{1}{2}(g_N - g_S) \Delta t \\ v_N &= v_W + \sigma_N - \sigma_S + \frac{1}{2\rho C_0}(g_W - g_E) \Delta t \\ E_0 \varepsilon_N &= E_0 \varepsilon_S + \sigma_N - \sigma_S + (g_N + g_S) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

このように任意点 N での未知量は W , S , E 点の既知の諸量により求められる。ただし、 g_N は未知量であるため、直接に求めることができないが、 $g_N = g(\sigma_N, \varepsilon_N)$ であり、 σ_N , ε_N はまた上式より g_N の関数であるから次式のように表わすことができる。

$$g_N = g(\sigma_N, \varepsilon_N) = g(g_N) \quad (12)$$

式(12)を解き、得られた g_N を式(11)に代入して、 σ_N , ε_N , v_N が定められる。なお、式(12)の初期値として $g_N = (g_W + g_E)/2$ を仮定して反復計算を行った。引張り応力を正にとるが、 σ , v , ε の符号を逆にとればそのまま圧縮に対しても成立する。

2.3 衝撃条件

2.3.1. 衝撃端 ($x=0$) における境界条件¹⁹⁾

図2に示すように試料棒と応力棒の衝撃を考える。試料棒の密度、弾性波の伝播速度、端面応力および断面積をそれぞれ ρ , C_0 , σ_0 および A_0 として、応力棒のそれらをそれぞれ ρ_a , C_a , σ_a および A_a とする。衝撃端の粒子速度を V_0 とし、 $V_i = V(t)$ の衝撃速度をもった応力棒に

よって矢印の方向に試料棒が圧縮される場合に、粒子速度の連続より、次式が成立する。

$$V_Q = V_t + \frac{\sigma_a}{\rho_a C_a} \quad (13)$$

また、応力に関して、 $\sigma_a A_a = \sigma_Q A_0$ の条件より、式(13)は

$$V_Q = V_t + \frac{C_a \gamma}{E_a} \cdot \sigma_Q$$

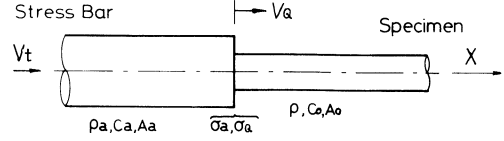


図2 試料棒と応力棒の衝突 (14)

と表される。ここで $\gamma = A_0/A_a$ は断面積比、 E_a は応力棒の縦弾性係数である。また時間 $t = 0$ において、試料棒の衝撃端の粒子速度を V_{Q0} 、端面応力を V_{Q0} とおけば、次式の関係が導かれる。

$$V_{Q0} = V_t(0) + \frac{C_a \gamma}{E_a} \sigma_{Q0} \quad (15)$$

また、ウゴニオの式

$$\sigma_{Q0} = -\rho C_0 V_t(0) \quad (16)$$

が成立するとすれば、式(15)、(16)より次式が得られる。

$$\sigma_{Q0} = -\Gamma \frac{E_0}{C_0} V_t(0), \quad \Gamma = \frac{C_0 E_a}{C_0 E_a + C_a E_0 \gamma} \quad (17)$$

2.3.2 波頭 ($x = c_0 t$) における境界条件

波頭未到達領域内の応力、ひずみ、粒子速度を0とする。すなわち

$$\sigma = \varepsilon = v = 0 \quad (18)$$

$x = c_0 t$ に沿っては、波頭的前方において、式(18)が成立しているので、ウゴニオの式が成立する。

$$\sigma = \rho C_0^2 \varepsilon = -\rho C_0 v \quad (19)$$

$x = c_0 t$ は、特性曲線の一つでもあるので式(5)が成立する。式(19)の両辺を微分して、式(5)へ代入すると、次式を得る。

$$2 d\sigma = -g(\sigma, \sigma/\rho C_0^2) dt \quad (20)$$

式(20)より、波頭 $x = c_0 t$ に沿う応力が求められ、式(19)よりひずみおよび粒子速度が求められる。

2.4 衝撃立ち上り時間と立ち上り様式

衝撃速度 V_t は、一般にステップ的に加えられると仮定されているが、実際には、衝突する試料棒および応力棒の端面の粗さあるいは片当りなどの原因で、衝撃端速度は衝撃速度 V_0 に達するまで、何らかの立ち上り時間を要する。それと、衝撃の初めから V_0 に達するまでの様式(立ち上り様式)も考慮しなければならない。見掛上、衝撃速度が図3に示したように指数関数状

またはランプ状に立ち上る場合を仮定する。

$$(I) \quad V_t = V_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right) \right\} \quad (21)$$

$$(II) \quad V_t = \begin{cases} V_0 (t/t_0) & (0 \leq t \leq t_0) \\ V_0 & (t > t_0) \end{cases} \quad (22)$$

$t_0 = 0$ の場合には両者ともステップ型になる。

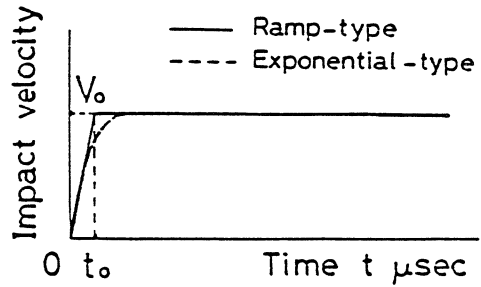


図3 衝撃速度と立上りの様式

2.5 材料特性

大多数の材料がひずみ速度依存性を示すことは、すでに実験的に知られている。Lindholm⁹⁾の実験では、低ひずみ速度域で応力とひずみ速度の対数が比例している。しかし、 $10^3 \sim 10^4 \text{ sec}^{-1}$ 以上の高ひずみ速度域では近似的に $\sigma \propto \dot{\epsilon}_p$ の関係が考えられるとの報告もあり、^{11),20)} 特に高ひずみ速度が予想される衝撃端近傍に注目することを考慮し、本研究では Malvern 型の応力とひずみ速度の比例関係を用いた。図4は鉛試料棒について、 $K=10^5$, 5×10^5 , 10^6 sec^{-1} と仮定した場合の式(2)の関係を図示したものである。鉛に関する Bodner,²¹⁾ 田中²²⁾らの実験結果は図4と類似の傾向を示している。また、式(2)より、 K は時間の逆数の次元をもつことがわかり、一般に $1/K$ は緩和時間を表すものである。つまり、 K を大きくすることは、ひずみ速度依存性効果を小さくすることに等しく、この極限の場合、式系(1)は Kármán 理論に相当する。本研究では、試料棒の残留ひずみ測定の結果より、鉛棒の K 値は $5 \times 10^5 \sim 10^6 \text{ sec}^{-1}$ と推定した。使用した市販の純鉛の静的応力-ひずみ関係は、実測値を最小二乗法により指数関数で近似したもので、降伏ひずみ ϵ_y 、降伏応力 σ_y は近似を行う際、便宜的に採用した値である。実測値および近似静的応力-ひずみ曲

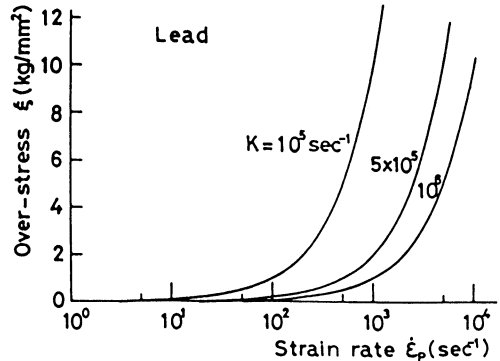


図4 各 K 値に対する過剰応力と塑性ひずみ速度の関係

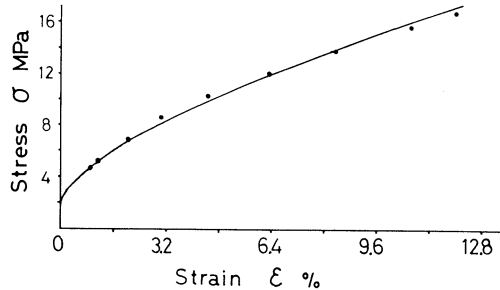


図5 鉛棒の応力-ひずみ関係

表1 応力-ひずみ関係式

$$\begin{aligned} \sigma \leq \sigma_y : \sigma &= f(\epsilon) = E_0 \cdot \epsilon \\ \sigma > \sigma_y : \sigma &= f(\epsilon) = F(\epsilon - \epsilon_y)^n + \sigma_y \end{aligned}$$

Young's modulus	$E_0 = 9.8 \text{ (GPa)}$
Yield strain	$\epsilon_y = 0.02 \text{ (\%)}$
Yield stress	$\sigma_y = 1.96 \text{ (MPa)}$
	$F = 61.8 \text{ (MPa)}$
	$n = 0.671$

線を図5, および表1に示す。ただし, ●印は実測値で, 実線は最小二乗法でもとめたものである。

応力棒は炭素鋼みがき丸棒 SGD41-D を使用した。その縦弾性係数は $E_a=122.1(\text{GPa})$, ポアソン比は $\nu=0.29$ である。

2.6 数値計算結果

図6(a), 図6(b)はともに $V_0=12.7 \text{ m/sec}$, $t_0=10 \mu\text{sec}$ の場合で, $K=5 \times 10^5 \text{ sec}^{-1}$ および $K=10^6 \text{ sec}^{-1}$ に関するランプ入力と指数関数入力で計算した鉛試料棒の端面応力の時間的変動を示す。数値計算の時間の刻み幅は $\Delta t=0.25 \mu\text{sec}$ とした。また, ひずみ分布計算結果は第5章に示す。

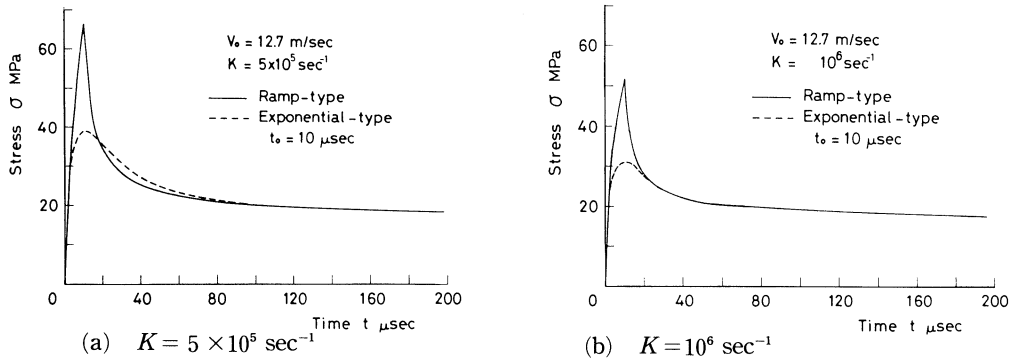


図6 鉛試料棒の衝撃端応力の時間的変動

3. 応力棒の弾性波動解析

3.1 弾性波動理論

棒の縦波動に関する Love の仮定は次式のように与えられる。

$$w = -\nu r \frac{\partial u_a}{\partial x} \quad (23)$$

ここで, u_a , w はそれぞれ棒の軸方向および半径方向の変位, x , r は軸および半径座標, ν はポアソン比である。式(23)の仮定および Hamilton の原理より, 横慣性を考慮した Love の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = (\nu k)^2 \frac{\partial^4 u_a}{\partial x^2 \partial t^2} + C_a^2 \frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} \quad (24)$$

ここで, t は時間, k は極断面 2 次半径である。

第2章において, 応力棒と衝突する試料棒の端面応力を Malvern 理論に基づく特性曲線法で計算したが, その理論結果を直接に試料棒側で実験的に検証することは困難である。そこで,

試料棒の応力を弾性応力棒の衝撃端の入力として、Love 理論によって解析した応力棒の応答を実験値と比べ、試料棒の端面応力を間接的に検証する。

解析を容易にするため、図 6 (a), (b) に示した試料棒の端面応力の時間 t に対する分布曲線を m 本の直線で近似して応力棒に対する衝撃端入力とし、応力棒の衝撃端 $x = 0$ における境界条件を次式のように与える。

$$\begin{aligned} (\epsilon_a)_{x=0} &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\sigma_a}{E_a} \\ &= \Psi \sum_{i=1}^m (a_i + b_i) \{H(t - t_{i-1}) - H(t - t_i)\} \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\Psi = \gamma/E_a$ 、 a_i は第 i 番目の直線の傾き、 b_i は応力軸との切片、 t_i は時間区間、 $H(t)$ はステップ関数である。また応力棒の長さを l 、他端は自由端であるとすれば、

$$(\epsilon_a)_{x=l} = 0 \quad (26)$$

初期条件は

$$u_a(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \{u_a(x, 0)\} = 0 \quad (27)$$

とする。式(25), (26), (27)の境界条件、初期条件のもとに、運動方程式(24)をラプラス変換法によって解析する。

3.2 応力棒の応答

初期条件式(27)を考慮して、式(24), (25), (26)をそれぞれラプラス変換すれば、次式が得られる。

$$p^2 \bar{u}_a = \beta^2 p^2 \frac{d^2 \bar{u}_a}{dx^2} + C_a^2 \frac{d^2 \bar{u}_a}{dx^2} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{u}_a}{dx}\right)_{x=0} &= \Psi \sum_{i=1}^m \left[\{(a_i t_{i-1} + b_i) \frac{1}{p} + \frac{a_i}{p^2}\} e^{-pt_{i-1}} \right. \\ &\quad \left. - \{(a_i t_i + b_i) \frac{1}{p} + \frac{a_i}{p^2}\} e^{-pt_i} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left(\frac{d\bar{u}_a}{dx}\right)_{x=l} = 0 \quad (30)$$

ここで、 $\beta = \nu \cdot k$ 、 $t_0 = 0$ 、 $i = 1, 2, 3, \dots$ 。

$$\bar{u}_a(x, p) = \int_0^\infty u_a(x, t) e^{-pt} dt \quad (31)$$

式(28)を式(29), (30)の条件下で解けば、 u_a の像関数は次式のように得られる。

$$\bar{u}_a = \frac{-1}{\alpha p^2} \frac{\cosh\{\alpha(l-x)\}}{\sinh(\alpha l)} \cdot F(p) \quad (32)$$

ここで

$$\alpha = \sqrt{\frac{p^2}{(\beta p)^2 + C_a^2}}$$

$$F(p) = p^2 \cdot \left(\frac{d\bar{u}_a}{dx} \right)_{x=0}$$

$$= \Psi \sum_{i=1}^m [(D_i p + a_i) e^{-p t_{i-1}} - (F_i p + a_i) e^{-p t_i}] \quad (33)$$

ただし, $D_i = a_i t_{i-1} + b_i$, $F_i = a_i t_i + b_i$

式(32)は次式の特異点を有する。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & p = 0 \quad (4\text{位の極}) \\ \text{(ii)} \quad & p = \pm \frac{i n \pi C_a}{\sqrt{l^2 + (n \pi \beta)^2}} = \pm i \gamma_n \quad (1\text{位の極}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ただし, $n = 1, 2, 3, \dots$

Jordan の補助定理から式 (33) のラプラス逆変換
積分路は図7で示される閉路積分に置き換えられ,
式(24)で与えられる極の回りの留数計算に帰着する。

$$u_a(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} \bar{u}_a(x, p) e^{pt} dp$$

$$= Res\{\bar{u}_a(x, p)\}_{p=0}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} Res\{\bar{u}_a(x, p)\}_{p=\pm i \gamma_n} \quad (35)$$

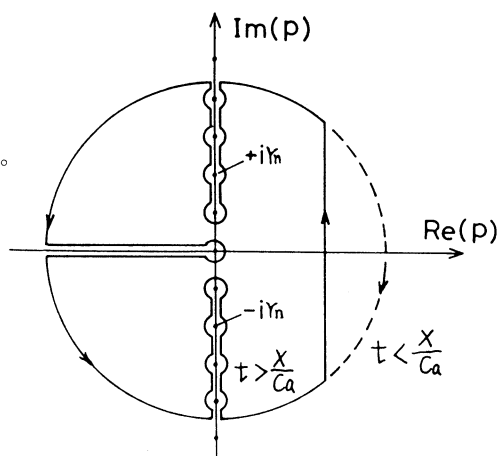


図7 反転積分路

(i) $p = 0$ (4位の極)における留数計算

$$Res\{u_a(x, p)\}_{p=0} = \frac{1}{3!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^3}{dp^3} \{p^4 \bar{u}_a(x, p) e^{pt}\}$$

$$= -\frac{\Psi}{3!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^3}{dp^3} \left\{ \frac{p^2 \cosh\{\alpha(l-x)\}}{\alpha \sinh(\alpha l)} \cdot e^{p t_{i-1}} \sum_{i=1}^m [(D_i p + a_i) e^{-p t_{i-1}} - (F_i p + a_i) e^{-p t_i}] \right\} \quad (36)$$

いま, 簡単のため, 式(36)の典型的な計算例を示し, 式(36)を推算する。

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^3}{dp^3} \left\{ \frac{p^2 \cosh \{\alpha(l-x)\}}{\alpha \sinh(\alpha l)} \cdot (bp+a) e^{pt} \right\} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^3}{dp^3} \left\{ \frac{(\beta^2 p^2 + c_a^2)(bp+a) \cosh \{\alpha(l-x)\}}{l[1 + (\alpha l)^2/3! + (\alpha l)^4/5! + \dots]} \cdot e^{pt} \right\} \\
 &= \frac{1}{l} \{ (b+at)[b\beta^2 + 3(l-x)^2 - l^2] + c_a^2 t^2 (3b+at) \}
 \end{aligned} \tag{37}$$

式(36)を式(37)と比較して、次式を得る。

$$\begin{aligned}
 Res\{u_a(x, p)\}_{p=0} &= -\frac{\Psi}{6l} \sum_{i=1}^m \{ [D_i + a_i(t-t_{i-1})] \cdot [6\beta^2 + 3(l-x)^2 - l^2] \\
 &\quad + C_a^2(t-t_{i-1})^2 [3D_i + a_i(t-t_{i-1})] \} H(t-t_{i-1}) \\
 &\quad + \frac{\Psi}{6l} \sum_{i=1}^m \{ [F_i + a_i(t-t_i)] \cdot [6\beta^2 + 3(l-x)^2 - l^2] \\
 &\quad + C_a^2(t-t_i)^2 [3F_i + a_i(t-t_i)] \} H(t-t_i)
 \end{aligned} \tag{38}$$

(ii) $p = \pm i\gamma_n$ (1位の極)における留数

式(32)より、 $u_a(x, p)$ を次式の様におく。

$$\bar{u}_a(x, p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \tag{39}$$

ただし、

$$F_1(p) = -\frac{\Psi}{\alpha p^2} [\cosh \{\alpha(l-x)\}] \cdot \sum_{i=1}^m [(D_i p + a_i) e^{-pt_{i-1}} - (F_i p + a_i) e^{-pt_i}]$$

$$F_2(p) = \sinh(\alpha l)$$

求める留数は L' Hospitalの定理より

$$\begin{aligned}
 Res\{\bar{u}_a(x, p)\}_{p=\pm i\gamma_n} &= \lim_{p \rightarrow \pm i\gamma_n} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{pt} \\
 &= -\Psi \lim_{p \rightarrow \pm i\gamma_n} \left[\frac{[\cosh \{\alpha(l-x)\}] e^{pt}}{\alpha p^2 l \frac{d\alpha}{dp} \cosh(\alpha l)} \sum_{i=1}^m [(D_i p + a_i) e^{-pt_{i-1}} \right. \\
 &\quad \left. - (F_i p + a_i) e^{-pt_i}] \right]
 \end{aligned} \tag{40}$$

ここでも、式(40)の典型的な型式の計算を行い、式(40)を推算する。

$$\eta_2 = \lim_{p \rightarrow \pm i\gamma_n} \left[\frac{(bp+a) \cosh \{\alpha(l-x)\}}{\alpha \cdot p^3 \cdot l \cdot \frac{d\alpha}{dp} \cosh(\alpha l)} \cdot e^{pt} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b \times \frac{i n \pi C_a}{\sqrt{l^2 + (\beta \pi n)^2}} \cdot \cos\left(\frac{l-x}{l} n \pi\right)}{-\frac{n^2 \pi^2 C_a^2}{l^2 + (\beta \pi n)^2} \cdot \left(\pm \frac{i n \pi}{l}\right)} \times \frac{\exp\left[\frac{i n \pi C_a}{\sqrt{l^2 + (\beta \pi n)^2}}\right]}{\frac{l[l^2 + (n \pi \beta)^2]^{\frac{3}{2}}}{C_a l^3}} \\
 &= -\frac{2l^3}{\pi^3 C_a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos\left(\frac{x}{l} n \pi\right)}{n^3 U_n} \left[a_i \sin\left(\frac{n \pi C_a t}{U_n}\right) + \frac{b n \pi C_a}{U_n} \cos\left(\frac{n \pi C_a t}{U_n}\right) \right] \right\} \quad (41)
 \end{aligned}$$

ただし, $U_n = \sqrt{l^2 + (n \pi \beta)^2}$

η_2 の式(40)と比較すると

$$\begin{aligned}
 Res\{u_a(x, p)\}_{p=\pm i r_n} &= \frac{2l^3}{\pi^3 C_a} \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos\left(\frac{x}{l} n \pi\right)}{n^3 U_n} \left(a_i \sin \phi_{i1} + \frac{D_i n \pi C_a}{U_n} \cos \phi_{i1} \right) \right. \\
 &\quad \left. H(t-t_{i-1}) - \left(a_i \sin \phi_{i2} + \frac{F_i n \pi C_a}{U_n} \cos \phi_{i2} \right) H(t-t_i) \right] \quad (42)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\phi_{i1} = \frac{n \pi C_a (t-t_{i-1})}{U_n}, \quad \phi_{i2} = \frac{n \pi C_a (t-t_i)}{U_n}$$

式(38)と式(42)を式(35)に代入すると, 変位 u_a は次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
 u_a(x, t) &= \Psi \sum_{i=1}^m \left[-\frac{1}{6l} \{ [D_i + a_i(t-t_{i-1})] \cdot [6\beta^2 + 3(l-x)^2 - l^2] + C_a^2(t-t_{i-1})^2 \right. \\
 &\quad \left. [3D_i + a_i(t-t_{i-1})] + \frac{2l^3}{\pi^3 C_a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos\left(\frac{x}{l} n \pi\right)}{n^2 U_n} \cdot (a_i \sin \phi_{i1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{D_i n \pi C_a}{U_n} \cos \phi_{i1}) \right] \right] H(t-t_{i-1}) + \Psi \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{6l} \{ [F_i + a_i(t-t_i)] \cdot [6\beta^2 \right. \\
 &\quad \left. + 3(l-x)^2 - l^2] + C_a^2(t-t_i)^2 [3F_i + a_i(t-t_i)] - \frac{2l^3}{\pi^3 C_a} \sum_{n=1}^{\infty} \right. \\
 &\quad \left. \left[\frac{\cos\left(\frac{x}{l} n \pi\right)}{n^2 U_n} (a_i \sin \phi_{i2} + \frac{F_i n \pi C_a}{U_n} \cos \phi_{i2}) \right] \right] H(t-t_i) \quad (43)
 \end{aligned}$$

したがって, 式(43)よりひずみ波に関する解が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_a(x, t) &= \frac{\partial u_a}{\partial x} \\
 &= \Psi \sum_{i=1}^m \left[\left[\frac{l-x}{l} \{ a_i(t-t_{i-1}) + D_i \} - \frac{2l^2}{\pi^2 C_a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right)}{n^2 U_n} \right] \times (a_i \sin \phi_{i1} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{n\pi C_a D_i}{U_i} \cos \phi_{i1}] H(t-t_{i-1}) - \left[\frac{l-x}{l} \{a_i(t-t_i) + F_i\} - \frac{2l^2}{\pi^2 C_a} \sum_{n=1}^{\infty} \right. \\
 & \left. \frac{\sin(\frac{n\pi x}{l})}{n^2 U_n} \times (a_i \sin \phi_{i2} + \frac{n\pi C_a F_i}{U_n} \cos \phi_{i2}) \right] H(t-t_i) \Big] \\
 & (n, i = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \tag{44}$$

図8は以上の結果を用いて、図6に示した試料棒端面応力をそれぞれ6本の直線で近似して、得られた応力棒の5 d (衝撃端から棒直径の5倍の長さ) のところのひずみ応答である。また、それぞれの直線のデータを表2に示す。図6に示した応力波形を $\sigma = \gamma \sum_{i=1}^6 (a_i t + b_i) \times \{H(t-t_{i-1}) - H(t-t_i)\}$ の形で近似しており、 a_i の単位は $\text{MPa}/\mu\text{sec}$ 、 b_i の単位は MPa である。

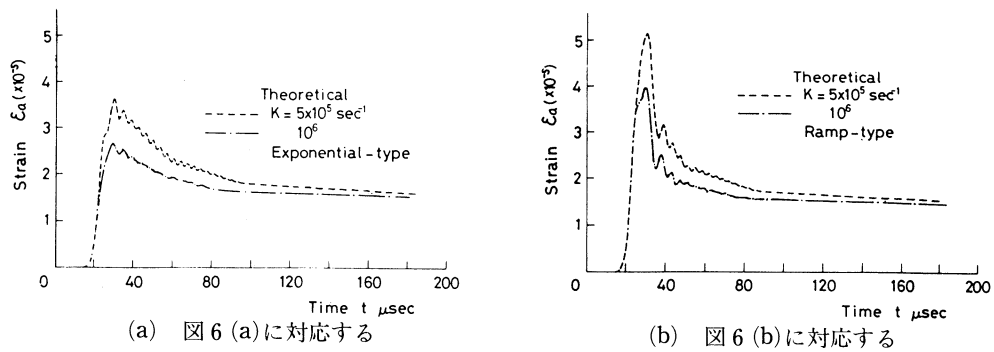


図8 衝撃端からの距離 $x = 5d$ (d : 棒直径) 位置における応力棒の応答

表2 試料棒の衝撃端応力の直線近似

(I) Exponential-type impact

K	i	1	2	3	4	5	6
5×10^5	t_i	1	8	13	40	75	200
	a_i	1.6	0.337	0	-0.459	-0.016	-0.00274
	b_i	0	1.26	3.96	4.56	3.36	2.37
10^6	t_i	4	8	13	36	69	200
	a_i	0.43	0.32	0	-0.0296	-0.012	-0.0013
	b_i	0	0.44	3	3.38	2.76	2.01

(II) Ramp-type impact

K	i	1	2	3	4	5	6
5×10^5	t_i	6	10	14	30	65	600
	a_i	0.854	0.4	-0.66	-0.08	-0.018	-0.0025
	b_i	0	2.74	13.2	5.2	3.35	2.33
10^6	t_i	4	10	13	25	58	200
	a_i	0.80	0.353	-0.680	-0.733	-0.015	-0.0013
	b_i	0	1.79	12.1	4.23	2.76	1.99

4. 実験

4.1 実験装置と測定系

実験は試料棒自身の自然落下を利用して、弾性変形する応力棒との衝突によって、試料棒に塑性変形を起すに十分な圧縮縦衝撃を加える方法で行った。実験装置および測定系の概略を図9に示す。装置自体は単純で、先ず錘重によって応力棒を試料棒落下の鉛直線上に据える。次に試料棒を最大高さ約8.2 mの位置から自然落下させ、応力棒との衝突によって試料棒が塑性変形を生ずるように、また応力棒は弾性変形内に留まるように縦衝撃を行う。試料棒は市販の純鉛を直径8.35 mm、長さ300 mmの丸棒に作製したものである。また、残留ひずみを測定するための標点の間隔は、衝撃端から150 mmまでは10 mm、150 mmから300 mmまでは20 mmとした。なお、これらの標点は曲げの影響を妨ぐために軸対称に両面に打ってある。一方、炭素鋼SGD 41-Dの応力棒は直径 $d=20$ mm、長さ $l=1,000$ mmで、その測定位置による応力波形の相違を観測できるように、衝撃端から直径の1倍と5倍の位置にひずみゲージがそれぞれ4枚ずつ軸対称に接着されている。これらによって検出されたひずみ波形はブリッジ回路、直流増幅器を経てトランジェントメモリに記憶され、シンクロスコープに写し出される。

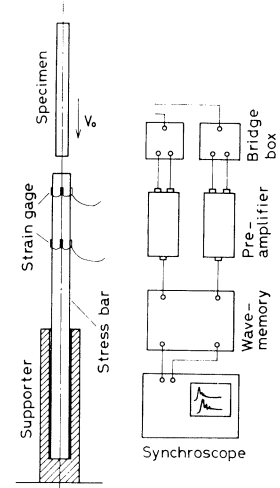


図9 実験装置と測定系

4.2 測定波形

試料棒の衝撃端における応力変動を、応力棒側のひずみ変動として測定をした代表例を図10～12に示す。図10に示した測定例において、同じ測定結果を(a), (b), (c)の順に掃引時間を50, 20, 10 $\mu\text{sec/div}$ として初期の波形部分を拡大してある。縦軸は応力棒のひずみ値で、(a)～(c)ともスケールは同じである。衝撃速度 $V_0=12.7$ m/secの場合で、各図とも上側のビームが測定位置1 d で測定された波形で、下側のビームが5 d での波形である。試料棒の衝撃端応力の上昇およびそれに続く応力緩和が明らかに見られる。衝撃の瞬間からおおよそ10 μsec までの間に急

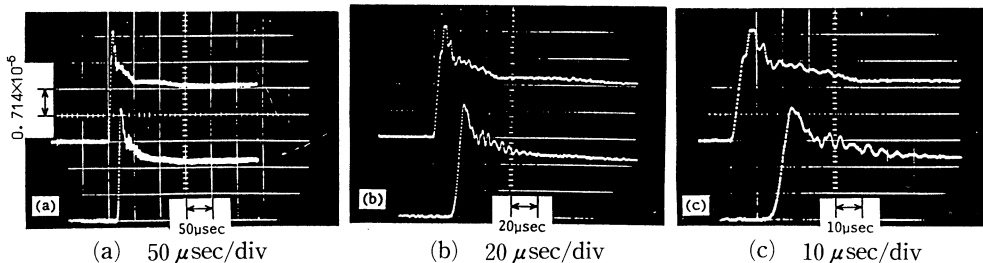


図10 衝撃端応力変動の測定例 (I) $V_0=12.7$ m/sec

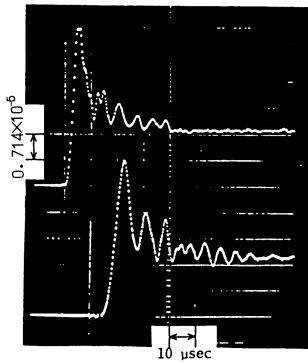


図 11 衝撃端応力変動の測定例
(II) $V_0 = 12.7 \text{ m/sec}$

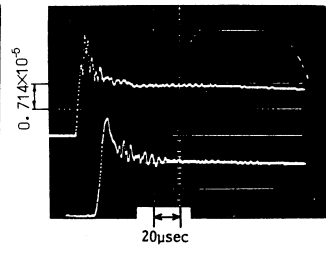
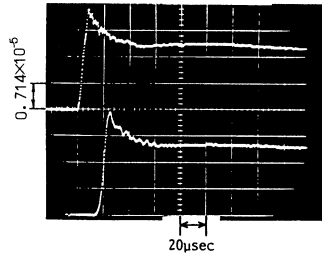


図 12 衝撃端応力変動の測定例
(III) $V_0 = 12.7 \text{ m/sec}$

激に上昇しており、この間、試料棒の衝撃端が弾性挙動をするとすれば、波形の最大値近傍が試料棒端の動的降伏応力に対応すると考えられる。したがって、最大値に達した後約 $80 \mu\text{sec}$ にかけて減少して一定値になっているが、この間を動的降伏の遅れ時間とみなせば、動的遅れ時間に関する Johnson⁴⁾, Compbell⁵⁾ らの実験結果ともほぼ一致する。また、ひずみ波が最大に達してからほぼ一定となるまでに、波形上に小さな振動が見られるが、この振動は縦衝撃を受けた応力棒の主として横慣性と 2 次以上の高次の波動モードによる影響であると判定できる。¹⁶⁾

図 11 は図 10 と同じ実験条件より得られた別の測定結果で、掃引時間は図 10 (c) と同じ $10 \mu\text{sec/div}$ である。波動の最大値は図 10 の場合の約 1.4 倍に達しており、波形も図 10 の場合と多少異なっている。また図 12 も同じ実験条件より得られた測定結果であるが、図 10, 11 の場合と多少異なる波形を示している。これらの原因は第 2 章に論議された衝突状態、つまり立ち上り時間および立ち上り様式の相違によるためと考えられる。その要因は、衝突面のあらさと衝撃の瞬間の当り方の相違と推察される。

4.3 残留ひずみの測定

本研究では、試料棒を応力棒に衝撃させて、その端面応力を応力棒の応答を通じて測定すると同時に、試料棒の残留ひずみも測定した。図 13 に 2 本の試料棒の残留ひずみの測定結果をそれぞれ○、●印で同時に示してある。著者らの先の報告¹⁷⁾¹⁸⁾で理論的に予測したように、衝撃端付近にひずみプラトーの形成が明らかに認められる。

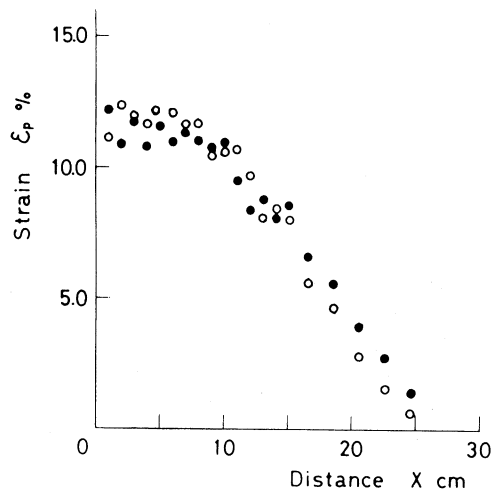


図 13 残留ひずみ分布

られる。

5. 考 察

5.1 試料棒端面応力に及ぼす諸因子

試料棒の端面応力には、衝撃の立ち上がり時間 t_0 、立ち上り様式、ひずみ速度依存性を表わす材料定数 K 、衝撃速度 V_0 などが大きく影響している。図 14 はステップ状 ($t_0 = 0$) およびランプ状衝撃の各立ち上がり時間について理論的に予測される試料棒の端面応力の時間変動を示したものである。理想的なステップ衝撃に比べ、立ち上がり時間がある場合には最大応力が著しく減少している。また K 値によっても大きな相違が生じ、 K 値が大きい場合は立ち上がり時間の影響も大きく現われている。これに対して、応力緩和時間は立ち上がり時間にほとんど影響を受けず、 K 値に依存することがわかる。

次に、本研究に使用した鉛棒の K 値を推定するために、図 13 に示した衝撃実験より得られた鉛棒の残留ひずみ分布の実験結果と、3 種類の K 値に対する理論結果との比較を図 15 に示す。理論曲線は、応力棒側の観測より、図中右上に示すような衝撃条件から得られた結果である。 $K = 5 \times 10^5, 10^6 \text{ sec}^{-1}$ の理論値は実験値とよく一致している。したがって、応力緩和時間およびひずみ分布からみても、Malvern 型構成式を仮定するかぎり、実験に用いた鉛棒については、 $K = 5 \times 10^5 \sim 10^6 \text{ sec}^{-1}$ と推定される。

図 16 は指数関数状およびランプ状衝撃立ち上がりによる衝撃端応力の相違を立ち上がり時間 $t_0 = 10 \mu\text{sec}$ の場合について比較したものである。試料棒と応力棒の衝突状態が指数関数状あるいはランプ状立ち上り衝撃で近似されるか

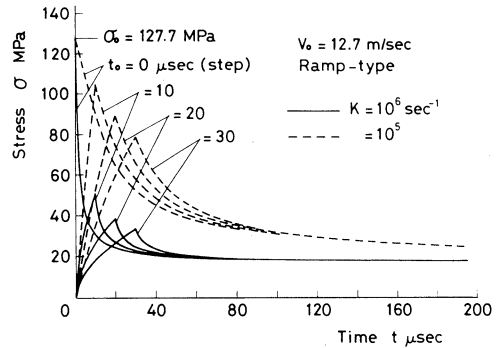


図 14 衝撃端応力変動の衝撃立ち上がり時間による影響

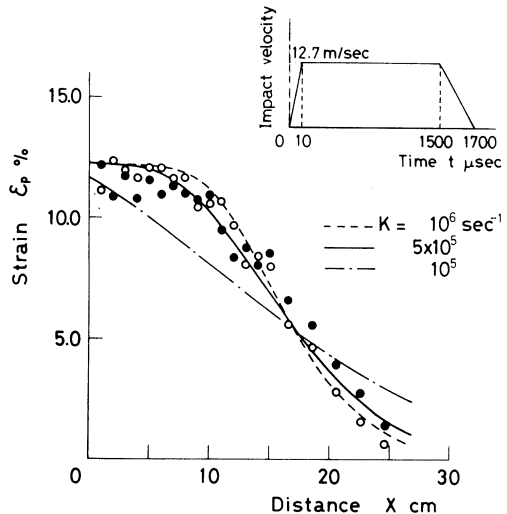


図 15 残留ひずみ分布に関する実験値と理論値の比較

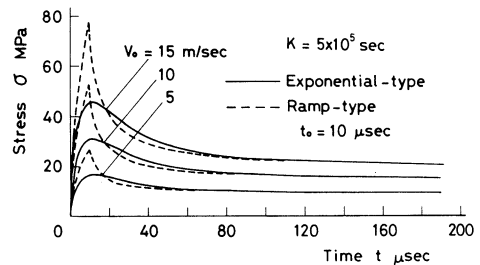


図 16 衝撃条件 (I) (II) による衝撃端応力の相違

の微妙な違いによっても衝撃端応力の変動が大きく影響されることがわかる。また、衝撃速度 V_0 が高いほど応力上昇の割合も高くなっている。

5.2 衝撃端応力に関する理論値と実験値の比較

図 17 は、図 10 の 5 d の位置での測定波形と、立ち上り時間 $t_0=10\ \mu\text{sec}$ の指数関数状立ち上り衝撃を仮定した場合の理論波形との比較である。図 18 は、図 11 の 5 d の位置での測定波形と立ち上り時間 $t_0=10\ \mu\text{sec}$ のランプ状立ち上り衝撃を仮定した場合の理論波形との比較である。いずれも振動部分を含めて定量的にもよく一致していることがわかる。

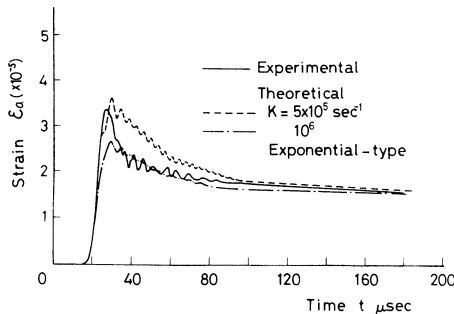


図 17 測定波形 (I) と衝撃条件 (II) の理論波形との比較

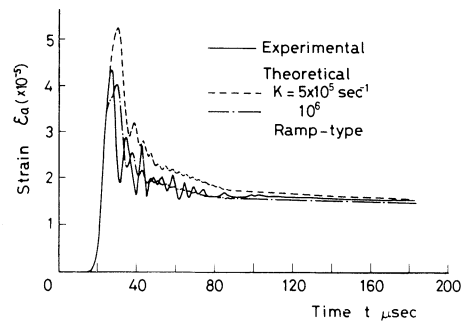


図 18 測定波形 (II) と衝撃条件 (II) の理論波形との比較

6. 結 言

本研究では、圧縮縦衝撃を受けて塑性変形する試料棒の衝撃端応力の変動と残留ひずみ分布に関する実験測定を行った。弾性変形する応力棒と弾塑性変形する試料棒の衝撃モデルで、Malvern のひずみ速度依存性理論を用いて、立ち上り時間および立ち上り様式を考慮して、理論解析を行った。また、その端面応力の計算値を応力棒の衝撃端の入力として、Love 理論によって弾性波動解析を行い、応力棒の応答を計算した。以上より次の結論を得た。

(1) 塑性変形する試料棒と弾性応力棒との衝撃実験によって測定された試料棒の衝撃端応力は初期立ち上り時に大きく上昇し、それに続いて応力緩和の現象を示した。

(2) Malvern 型構成式を用いた試料棒の塑性波動解析の結果、試料棒の衝撃端応力の上昇は衝撃立ち上り時間、立ち上り様式、材料のひずみ速度依存性の大きさおよび衝撃速度に著しく依存する。これに対して応力緩和時間は主として K 値に依存する。

(3) 試料棒のひずみ分布のプラトーの存在を確認したが、その出現には K 値が大きく影響する。 $K=10^5\ \text{sec}^{-1}$ 程度で、ひずみプラトーは出現しなくなる。ひずみ分布に関する、 $K=5\times$

$10^5 \sim 10^6 \text{ sec}^{-1}$ と仮定した場合の理論結果は実験結果によく一致した。

(4) 試料棒の衝撃端応力を入力としたときの応力棒の弾性応答を横慣性効果を考慮して解析した。その結果、応力棒上で観測された測定波形と計算結果は定量的にもよく一致した。

(昭和 59 年 5 月 17 日 受理)

参 考 文 献

- 1) Th. von karman, and P. W. Duwez ; J. Appl phys, 21, 987 (1950).
- 2) 作井, 他 3 名 ; 金属会誌, 30, 493 (1966).
- 3) 中川 ; 日本機械学会論文集, 25-151, 115 (昭和 34).
- 4) Johnson, J. E., Wood, D. S., and Clark D. S. ; Proc. ASMT, 53, 755 (1953).
- 5) Campbell, J. D ; J. Mach., Phys. solids, 3, 755 (1954).
- 6) Cristescu, N ; Dynamic Plasticity, North-Holland Pub., Amsterdam, (1967).
- 7) Ludwick , P., Phys. Zeit., 10, 411 (1909).
- 8) Prandtl , L., ZAMM, 8, 85 (1928)
- 9) 例えば, Hauser, F. E., Simmon, J. A., and Doran, J. E. ; Response of Metals to High Volocity Deformation, Interscience Pub., New York, 93 (1961). ;
Lindholm, U. S. ; J. Mech, Phys. solids, 12, 417 (1964). ;
谷村, 中垣 ; 材料, 29-317, 137 (昭 45).
- 10) Malvern, L. E. ; J. Appl. Mech., 18, 203 (1951).
- 11) 西山, 谷村 ; 日本機械学会論文集, 36, 1247 (昭 45).
- 12) 岸田, 他 2 名 ; 航空宇宙学会誌, 27-305, 314 (1979).
- 13) Skalak, R ; Trans, Am, Soc, Mech. Engrs., J. Appl. Mech., 24, 59 (1957).
- 14) A. E. H. Love ; On the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Dover Publications, New York, 283(1944).
- 15) Groff, K. F. ; Wave Motion in Elastic Solids, Clarendor Press, Oxford, 547 (1975).
- 16) 内藤, 台丸谷 ; 日本機械学会論文集, 50-453 (昭 59).
- 17) 内藤 台丸谷, 岸本 ; 材料, 31-350, 1069 (1982).
- 18) Daimaruya, M., and Naitoh, M.; Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 50, 678 (1983).
- 19) 内藤, 台丸谷 ; 材料, 33-370, 801 (1984).
- 20) Dharan, C. H., and Hauser, F. H. ; Experi. Mech., 10, 370 (1970).
- 21) Bodner, S. R., and kolsky, H. ; Proc. 3rd U. S. Nat. congr. Appl. Mech., 495 (1958).
- 22) 田中 ; 機誌, 169, 48 (1966).