室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較

メタデータ	言語: jpn 出版者: 日本計算数理工学会 公開日: 2018-02-15 キーワード (Ja): キーワード (En): Hybrid Trefftz Finite Element Method, Trefftz Elements, PML, Multilayered Periodic Structures, Scattering Characteristics 作成者: 佐藤, 慎悟, 長谷川, 弘治 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/00009543

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

計算数理工学論文集 Vol. 7, No.2 (2008 年 3 月), 論文 No. 08-080317 JASCOME

多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PLANE SCATTERING OF MULTILAYERED PERIODIC STRUCTURES

佐藤 慎悟 [1)]，長谷川 弘治 [2)]

Shingo SATO and Koji HASEGAWA

1) 釧路工業高等専門学校電子工学科 (〒 084-0916 釧路市大楽毛西 2-32-1, E-mail: s-sato@elctro.kushiro-ct.ac.jp)
2) 室蘭工業大学電気電子工学科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)

Plane wave scattering characteristics from multilayered periodic structures are analyzed using hybrid Trefftz finite element method and conventional finite element method with PML. Employing Trefftz elements to homogeneous regions between each layer, we can have simultaneous equations with lower number of unknowns than the number of unknowns by conventional finite elements. Comparing computation time and number of unknowns by hybrid Trefftz finite element method with conventional finite element method with PML, we confirmed usefulness of hybrid Trefftz finite element method.

Key Words: Hybrid Trefftz Finite Element Method, Trefftz Elements, PML, Multilayered Periodic Structures, Scattering Characteristics

1. はじめに

近年，盛んにフォトニック結晶の研究・開発が行われ，同時に効率的なシミュレーション技術の要求も高まっている．フォトニック結晶の数値解析手法として，FDTD 法や有限要素法などが利用されている [(1)−(3)]．これらの手法は汎用性は高いが，取り扱う未知数が多いため，長い計算時間が必要となる．特に，FDTD 法はセル形状が矩形であるため，複雑な構造の解析には膨大な未知数が必要となるほか，CFL 条件を満足するために，時間刻みも小さくする必要があるので，計算時間は長くなる．有限要素法においては，任意形状の取扱いに優れているが，やはり，解析に必要な未知数は多い．また，両手法ともに領域分割型の解法であるため，解析対象の上下にある半無限領域には吸収境界条件を適用するなどの工夫が必要である．なかでも，完全整合層（Perfectly Matched Layer : PML)[(4)−(6)] は広く利用されている吸収境界の一つであるが，解析対象との距離を半波長から一波長程度離す必要があり，PML 層も分割するために要素数が増え，最終的に解く行列方程式の次元数が多くなる欠点がある．

著者らがこれまでに，周期構造の解析法として採用してきたハイブリッドトレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method : HTFEM)[(7)] は，補間関数に支配方程式を満足する関数を採用したトレフツ要素という特殊な有限要素で半無限領域を取り扱う [(8)]．トレフツ要素は通常の有限要素に比べて，積分の次元を一つ下げて汎関数の評価を行うため，また通常要素との接続境界を PML のように解析対象からある程度離す必要がないため，従来の有限要素解析よりも最終的に解く行列方程式の次元数を低減できる利点がある．文献 [(9)] では，多層周期構造を対象に，各層の間にある一様均質領域をトレフツ要素で分割する手法へ拡張しており，通常要素で分割する従来の手法よりも少ない次元数で解析できることを示している．しかしながら，比較した従来法は周期構造内は通常要素で分割されているが，周期構造の上下の開領域はトレフツ要素で分割されていた．このため，PML のような吸収境界を用いる従来の有限要素法との比較はされていなかった．そこで本論文では，多層周期構造の散乱特性解析において，ハイブリッドトレフツ有限要素法と PML を装荷した有限要素法で解析を行い，計算時間と最終的に解く行列方程式の次元数の比較を行い，ハイブリッドトレフツ有限要素法の有用性を検証した．

2007 年 12 月 21 日受付，2008 年 2 月 8 日受理

2. 問題の設定

Fig.1 に示すような，比誘電率 ϵ_d の誘電体中に，厚み h, 幅 w，表面抵抗 Z_s のストリップ格子が x 軸方向に p の間隔で無限個，y 軸方向に d_1 の間隔で N 層埋め込まれた多層周期構造に，入射角 θ_i で TE 波あるいは TM 波が入射する散乱問題を考える．ここに，1 層目と N 層目の格子はそれぞれ誘電体の上端，下端から距離 d_2 離れている．また ϵ_0，μ_0 はそれぞれ真空の誘電率である．ここで，格子は z 軸方向に一様な構造をしているため，2 次元平面で考えることができる．

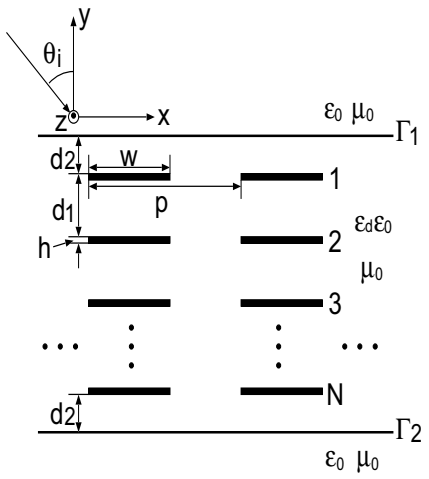


Fig. 1　Multilayered structure

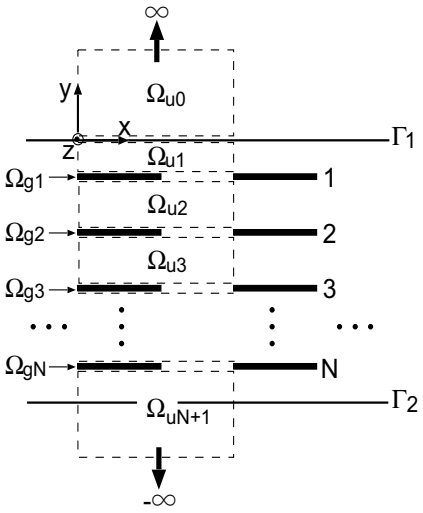


Fig. 2　Division of analyzed region for HTFEM

TE 波，TM 波入射における統一的な定式化を行うために，

$$\phi = \left\{ \begin{array}{l} E_z \\ H_z \end{array} \right. , \quad u = \left\{ \begin{array}{l} \mu \\ \epsilon \end{array} \right. , \quad v = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon & : \text{TE 波入射} \\ \mu & : \text{TM 波入射} \end{array} \right.$$

とする．ここに，E_z，H_z はそれぞれ電界，磁界の z 成分，ϵ は比誘電率，μ は比透磁率を表す．時間因子は $e^{j\omega t}$ とし，以下省略する．入射平面波 $\phi^{\rm in}$ は，

$$\phi^{\rm in} = \phi_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{1}$$

であり，誘導定理 [10] を用いて，境界 Γ_1 上に等価電磁流源として置き換える．ここに，$\vec{r}$ は位置ベクトル，$\vec{k}$ は波数ベクトルで，入射平面波の波長 λ を使って，

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \hat{x}k_x + \hat{y}k_y \\ &= \hat{x}k_0 \sin\theta_i - \hat{y}k_0 \cos\theta_i \qquad (2) \\ k_0 &= 2\pi/\lambda \qquad (3) \end{aligned}$$

と表せる．系の支配方程式は，

$$\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + k_0^2 v\phi = \frac{2}{u}\frac{\partial\phi^{\rm in}}{\partial y}\delta(y-y_0) \tag{4}$$

である．式 (4) の右辺の係数 2 は等価電流分と等価磁流分の和によるもので，$\delta(y-y_0)$ はデルタ関数，y_0 は境界 Γ_1 の y 座標である．また，電磁界 ϕ はフロケの定理より周期境界条件

$$\phi(x+p) = \phi(x)e^{-jk_x p} \tag{5}$$

を満足する．

3. 有限要素法による定式化

3.1. ハイブリッドトレフツ有限要素法

解析領域全体の汎関数 I_H は，

$$\begin{aligned} I_H &= \iint_\Omega \left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi^\dagger}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - k_0^2 v\phi^\dagger\phi\right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega}\frac{1}{u}\left[\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial y}\tilde{\phi} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{\phi}^\dagger\right] ds \\ &\quad - \int_{\Gamma_1}\frac{2}{u}\left[\frac{\partial\phi^{\rm in^\dagger}}{\partial y}\phi + \frac{\partial\phi^{\rm in}}{\partial y}\phi^\dagger\right] ds \end{aligned} \tag{6}$$

である．ここに，$\Omega(0 \le x \le p,\ -\infty \le y \le \infty)$ は Fig.2 における $\Omega_{gi}(i = 1, 2, \cdots, N)$ と $\Omega_{ul}(l = 0, 1, \cdots, N+1)$ からなり，1 周期分の解析領域である．上添字 † はエルミート共役界 [11]，$\tilde{\phi}$ は領域の境界上の電磁界，$\int_{\Gamma_1} ds$ は入射平面波が置換された境界 Γ_1 上での積分を表す．

Fig.2 に示すように解析領域を領域分割すると，各領域の汎関数の総和と入射波源項の和によって解析領域全体の汎関数の計算ができる．不均質領域 $\Omega_{gi}(i = 1, 2, \cdots, N)$ は，通常の有限要素で要素分割し，汎関数

$$I_{gi} = \iint_{\Omega_{gi}}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi^\dagger}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - k_0^2 v\phi^\dagger\phi\right] d\Omega_{gi} \tag{7}$$

を評価する．解析対象の周期性から，電磁界はフロケモードを用いると，

$$\phi(x,y) = \phi_p e^{-jk_x x} \tag{8}$$

と表されるので，要素内の電磁界を

$$\phi_p = \{N_8\}^T\{\phi_p\} \tag{9}$$

と補間する．ここに，上添字 T は転置を表す．$\{N_8\}$ は 8 節点矩形要素に対応する形状関数ベクトルで，$\{\phi_p\}$ は各要素内の節点における電磁界の値からなるベクトルである．

ストリップ格子の厚みをゼロと近似する場合，領域 Ω_{gi} の厚みもゼロとなるため，I_{gi} の評価は行わず，ストリップ格子上の境界条件 [12]

$$\left.\begin{array}{l} [\vec{E}_T^+ + \vec{E}_T^-]/2 = Z_s\hat{n}\times[\vec{H}_T^+ - \vec{H}_T^-] \\ \vec{E}_T^+ = \vec{E}_T^- = \vec{E}_s \end{array}\right\} \tag{10}$$

をストリップ格子上面と下面の寄与分の和によって評価する．ここに，上添字 $+$，$-$ はそれぞれストリップ格子上面，下面での量，下添字 T は電磁界の接線成分からなるベクトル，下添字 s はストリップ格子上の量であることを表す．$\hat{n}$ は外向き単位法線ベクトルで，ストリップ格子上面の寄与分の計算

では $\hat{n}=\hat{y}$ となり，下面の寄与分の計算では $\hat{n}=-\hat{y}$ となる．ストリップ格子の厚みを考慮する場合，格子の比誘電率 ϵ_r は複素比誘電率となり，導電率 σ，自由空間の波数 k_0，格子の厚み h，特性インピーダンス $\eta_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ で規格化された格子の表面抵抗 $R=Z_s/\eta_0$ によって，

$$\epsilon_r = 1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = 1 - j\frac{1}{Rk_0h} \tag{11}$$

と表せる [13]．

一様均質領域 $\Omega_{ul}(l=0,1,\cdots,N+1)$ はそれぞれ 1 個のトレフツ要素で分割する．トレフツ要素では支配方程式を満足する関数で補間すること，補間関数に周期条件を課すということに注意すると，領域 Ω_{ul} に関する汎関数 I_{ul} は，

$$\begin{aligned} I_{ul} &= \int_{\partial\Omega_{ul}} \frac{1}{2u_i}\left(\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial y}\phi + \frac{\partial\phi}{\partial y}\phi^\dagger\right)dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_{ul}} \frac{1}{u_i}\left(\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial y}\tilde{\phi} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\tilde{\phi}^\dagger\right)dx \end{aligned} \tag{12}$$

となる．ここに，$\int_{\partial\Omega_{ul}} dx$ は隣接する領域との接続境界上での積分を表す．領域 Ω_{ul} 内の電磁界 ϕ を空間高調波展開すると，

$$\phi_l = \sum_{n=-M}^{M} [A_{n,l}e^{\kappa_{n,l}y} + B_{n,l}e^{-\kappa_{n,l}y}]e^{-\gamma_n x} \tag{13}$$

$$\kappa_{n,l} = j\sqrt{\gamma_n^2 + k_0^2 u_l v_l} \tag{14}$$

$$\gamma_n = j\left(k_x + \frac{2n\pi}{p}\right) \tag{15}$$

となる．ここに，M はモード数，$A_{n,l}$，$B_{n,l}$ は展開係数である．式 (14) の根号内が負になった場合，平方根の虚部は負とする．半無限領域 Ω_0，Ω_{N+1} に関する汎関数 I_{u0}，I_{uN+1} では，補間関数に放射条件を課すため，$A_{n,0}$，$B_{n,N+1}$，無限遠での積分は形式的に消去できる．トレフツ要素の境界上の電磁界 $\tilde{\phi_p}$ は 3 節点線要素に適合するように，

$$\tilde{\phi_p} = \{N_3\}^T\{\tilde{\phi_p}\} \tag{16}$$

と補間する．ここに，$\{N_3\}$ は 3 節点線要素に対応する形状関数ベクトルである．離散化した汎関数，最終的に解く行列方程式，電力評価式については，文献 [8],[9] で詳細に述べている．

3.2. PML を装荷した有限要素法

Fig.3 に示すように解析領域を，PML 領域 $\Omega_0(0\le x\le p,\ y_1\le y\le y_1+L)$，不均質領域 $\Omega_1(0\le x\le p,\ y_2\le y\le y_1)$，PML 領域 $\Omega_2(0\le x\le p,\ y_2-L\le y\le y_2)$ に領域分割する．ここで，L は PML 領域の厚みである．

異方性 PML[5] を考えると，材料定数は，

$$[u] = u\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$[v] = v\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \tag{18}$$

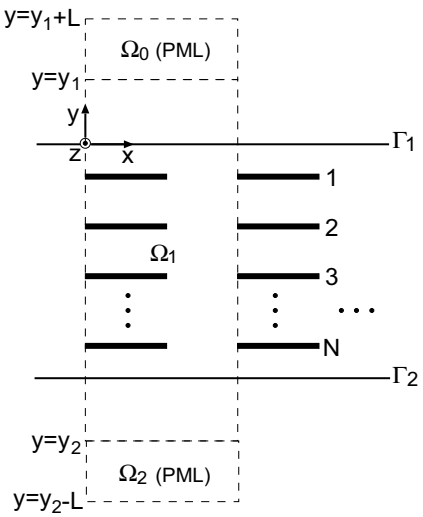


Fig. 3　Division of analyzed region for FEM with PML

$$s = \begin{cases} 1 - j\frac{-3(y-y_k)^2\ln|R_P|}{2k_0\sqrt{\epsilon}L^3} & : \text{in } \Omega_0 \text{ and } \Omega_2 \\ 1 & : \text{in } \Omega_1 \end{cases} \tag{19}$$

となる．ここに，$y_k(k=1,2)$ は PML 内側の端の y 座標，R_P は PML 終端の導体壁の反射係数で，平面波が垂直入射した場合の反射係数として，例えば 1.0×10^{-4} 程度の値とする [5]．式 (17)，(18) を用いると，解析領域全体の汎関数 I_P は，

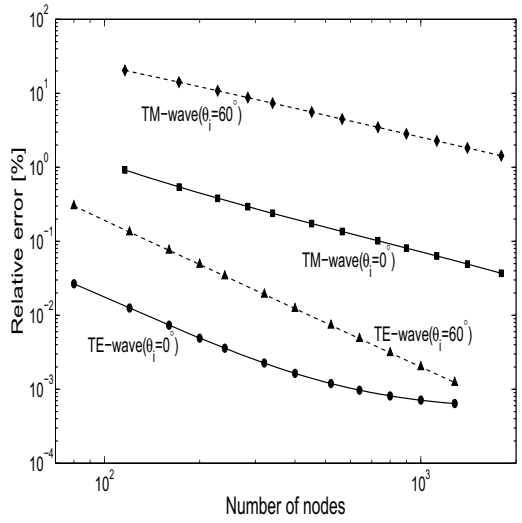
$$\begin{aligned} I_P &= \iint_\Omega \left[\frac{1}{u}\left(s\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{s}\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - k_0^2 v s\phi^\dagger\phi\right]d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_1}\frac{2}{u}\left[\frac{\partial\phi^{\text{in}^\dagger}}{\partial y}\phi + \frac{\partial\phi^{\text{in}}}{\partial y}\phi^\dagger\right]ds \end{aligned} \tag{20}$$

となる．

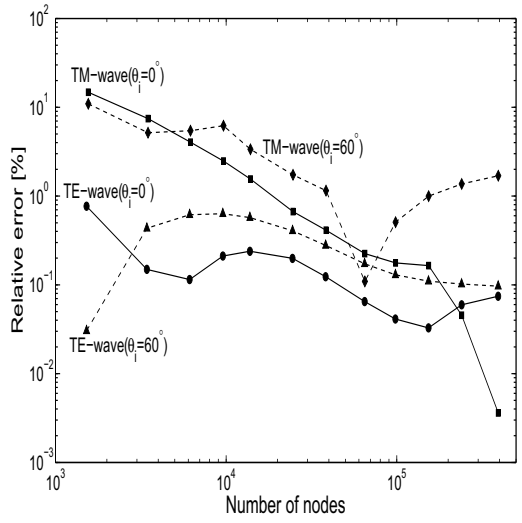
各領域を 8 節点矩形要素で要素分割し，要素内の電磁界は式 (9) と同様に補間する．ストリップ格子の厚みをゼロと近似する場合，ストリップ格子上に対応する節点において式 (10) を課す．最終的に解く行列方程式は，補間した電磁界を汎関数に適用し，電磁界のエルミート共役界に関して変分をとることで得られる．

4. 数値解析

Fig.1 において，$\epsilon_d=2.54$，$R=0.25$，$d_1=0.5p$，$d_2=0.25p$，$p=0.83\lambda$，$w=0.5p$，$h=0$，$N=4$ の 4 層導体ストリップ格子を考える．Fig.4(a)，(b) はそれぞれ吸収電力の収束性をハイブリッドトレフツ有限要素法 (HTFEM)，PML を装荷した有限要素法 (PML-FEM) で調べたものである．HTFEM では，解析領域の x 軸方向への分割数を D_x，空間高調波のモード数 $M=D_x$ として計算を行っている．ここでは，空間高調波のモード数を M，節点数を N とした場合の吸収電力 $P_a(M,N)$ の $P_{a\infty}=\lim_{M,N\to\infty}P_a(M,N)$ に対する相対誤差 $|\frac{P_a(M,N)}{P_{a\infty}}-1|$ を示している．この問題では解析解が存在しないため，真値としてモード数 M と節点数 N をともに無限大に補外した場合の補外値 $P_{a\infty}$ を使っている．

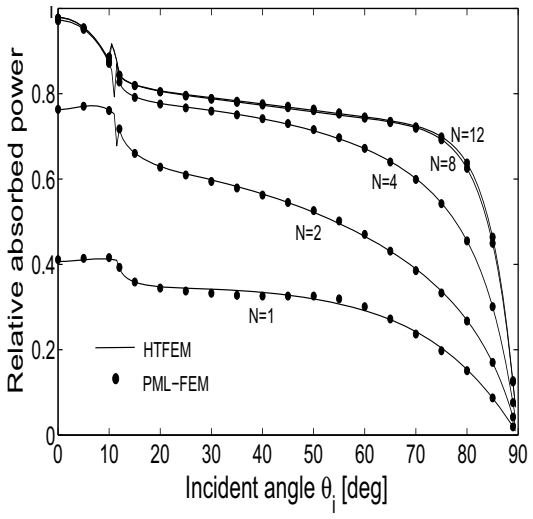


(a) HTFEM

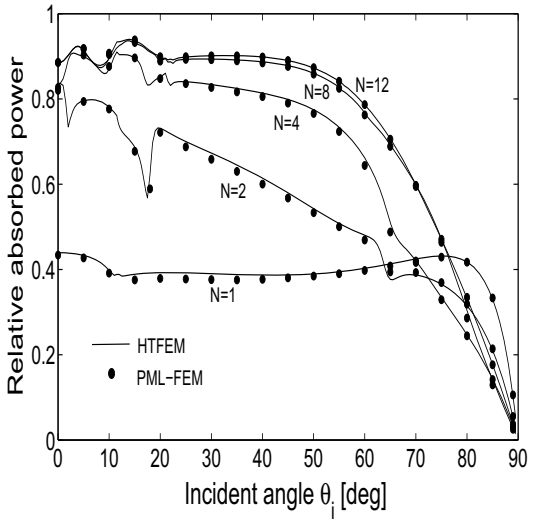


(b) PML-FEM

Fig. 4　Convergence of relative absorbed power



(a) TE-wave

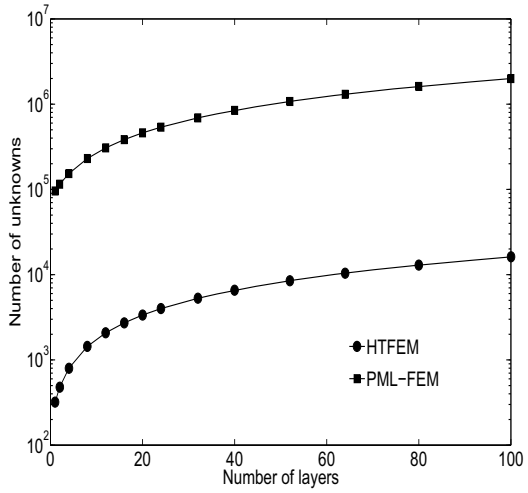


(b) TM-wave

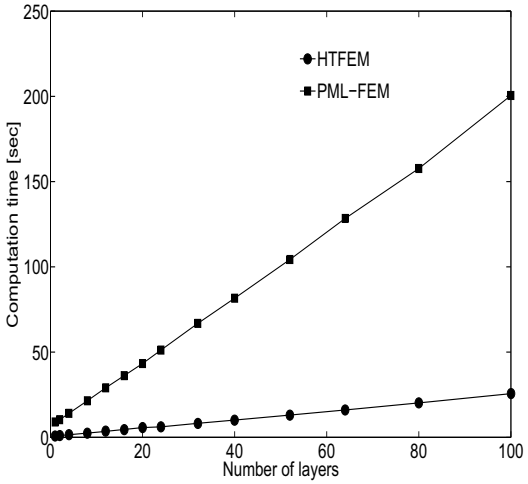
Fig. 5　Dependence of relative absorbed powers on incident angle and number of layers

TE 波，TM 波入射ともに，節点数の増加に対して相対誤差は指数関数減衰していることがわかる．TE 波入射に比べて，TM 波入射は収束が遅い．$\theta_i = 0°$ の TE 波入射が最も収束が速く，$\theta_i = 60°$ の TM 波入射が最も収束が遅い．PML-FEM では，Fig.3 に示す境界 $\Gamma_k (k = 1, 2)$ から y_k までの距離をそれぞれ p だけ離し，式 (19) の $R_P = 0.0001$，PML の厚み $L = p$，解析領域の x 軸方向への分割数を D_x，PML 領域 Ω_0，Ω_2 の y 軸方向への分割数を D_x，領域 Ω_1 の y 軸方向への分割数を $6D_x$ としている．ここでは，節点数を N とした場合の吸収電力 $P_a(N)$ の $P_{a\infty} = \lim_{N\to\infty} P_a(N)$ に対する相対誤差 $|\frac{P_a(N)}{P_{a\infty}} - 1|$ を示している．$P_{a\infty}$ は節点数 N を無限大に補外した場合の補外値である．HTFEM の場合と同様に TE 波入射に比べて TM 波入射の収束は遅く，$\theta_i = 0°$ の場合に比べて $\theta_i = 60°$ の場合は収束が遅い．両手法ともに，TE 波入射に比べて TM 波入射の場合は収束が遅いが，これは他のいくつかの手法でも同様である．例えば，フーリエ級数展開法では TE 波よりも TM 波の級数展開の収束が遅いことが知られており [14]，両手法でも類似したことが起きていると推測される．

Fig.1 において，$\epsilon_d = 2.54$，$R = 0.25$，$d_1 = 0.5p$，$d_2 = 0.25p$，$p = 0.83\lambda$，$w = 0.65p$，$h = 0$ の N 層導体ストリップ格子を考える．解析の妥当性を調べるために，Fig.5 に示す吸収電力の入射角と層数の依存性を調べた．HTFEM では，解析領域の x 軸方向へ 80 分割し，空間高調波のモード数 M を 80 とした．PML-FEM では，境界 $\Gamma_k (k = 1, 2)$ から y_k までの距離，PML の厚み L をともに p とし，解析領域の x 軸方向へ 80 分割，PML 領域 Ω_0，Ω_2 をともに y 軸方向へ 80 分割，領域 Ω_1 を y 軸方向へ $80(N + 2)$ 分割した．HTFEM による計算結果 (実線) は PML-FEM による計算結果 (●) と概ね一致している．これらの計算結果は積分方程式法による

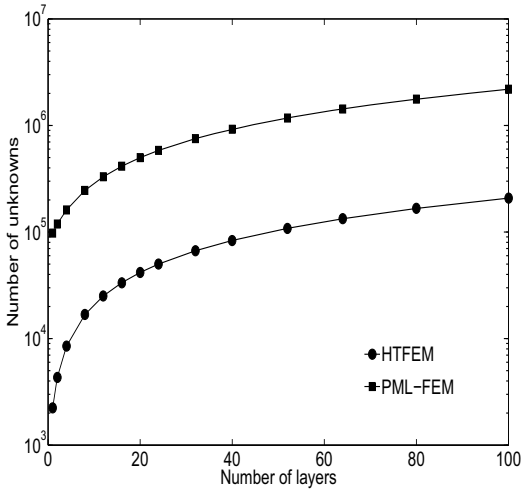


(a) Number of nodes

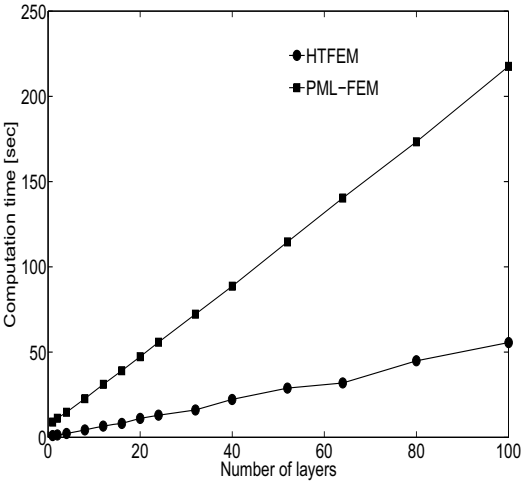


(b) Computation time

Fig. 6　Dependence of number of layers on number of nodes and computation time for $h = 0$



(a) Number of nodes



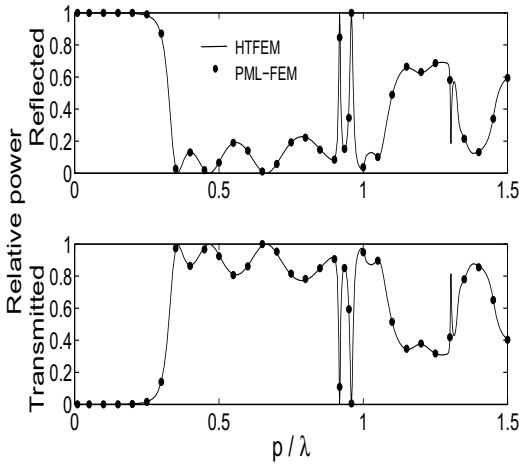
(b) Computation time

Fig. 7　Dependence of number of layers on number of nodes and computation time for $h = 0.01p$

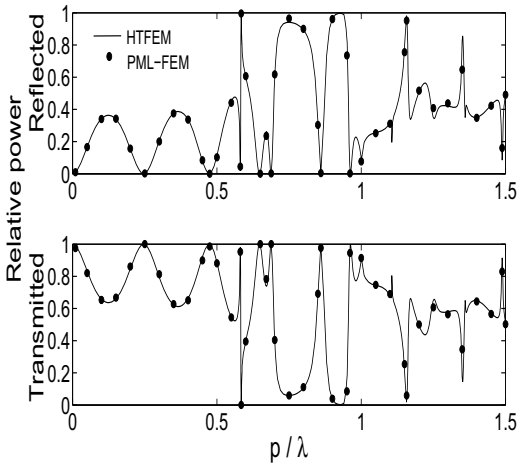
計算結果 [15] と一致することを確認している．Fig.4 で示したように，HTFEM に比べて PML-FEM では入射角 60° の TM 波入射の収束が遅く，精度が悪く見えるが，Fig.5 においては両手法の計算結果は概ね一致している．入射角 60° の TM 波入射における両手法の計算結果の絶対誤差は悪くとも 1.8 %程度であるため，Fig.5 のグラフ上では概ね一致して見える．このため，相対誤差の計算における補外値の精度の違いが，この相違の原因であると考えられる．

Fig.6，Fig.7 は，Fig.5 の解析を行った N 層導体ストリップ格子の層数を 1〜100 層まで変化させたときの，解析に必要な節点数と入射角 $\theta_i = 0°$ の吸収電力の計算にかかる時間を，それぞれ $h = 0$，$h = 0.01p$ で調べたものである．分割数等のパラメータは Fig.5 の解析と同様に設定し，$h = 0.01p$ の場合は格子領域を厚み方向に 8 分割した．HTFEM はトレフツ要素を用いるため，PML-FEM に比べて大幅に節点数が少なく，計算時間も短いことがわかる．層数の増加に対して両手法の計算時間に大きな違いが現れることから，HTFEM は特に層数が多い多層周期構造の解析に有効な手法であることがわかる．なお，計算にはメモリが 8GB，CPU が Pentium D 3.0GHz の計算機を使用した．

最後に，HTFEM，PML-FEM においてエネルギー保存則の誤差の違いを調べるために，完全導体ストリップ格子の解析を行った．Fig.8 は，$\epsilon_d = 3.4$，$R = 0$，$d_1 = 0.25p$，$d_2 = 0.125p$，$w = 0.25p$，$h = 0$ の 4 層完全導体ストリップ格子に $\theta_i = 0°$ の (a)TE 波，(b)TM 波が入射された場合の周波数依存性を調べたものである．HTFEM による計算結果 (実線) と PML-FEM による計算結果 (●) は良く一致している．エネルギー保存則は，HTFEM で 10^{-13}〜10^{-11}%，PML-FEM で 10^{-4}〜10^{0} % 程度の範囲の誤差で満足されていた．



(a) TE-wave



(b) TM-wave

Fig.8　Dependence of relative reflected and transmitted powers on frequency

5. むすび

多層周期構造による平面波散乱特性解析法として，ハイブリッドトレフツ有限要素法とPMLを装荷した従来の有限要素法の比較を行い，ハイブリッドトレフツ有限要素法の有用性の検証を行った．具体的な数値解析から，ハイブリッドトレフツ有限要素法はPMLを装荷した従来の有限要素法に比べて，解析に必要な節点数が大幅に少なく，計算時間が短いことを示した．また，ハイブリッドトレフツ有限要素法は，層数が多い多層周期構造の解析に有効な手法であることを確認した．

参考文献

(1) 迫田和彰：フォトニック結晶入門，(2004)，森北出版.

(2) 加納昌利，平山浩一：混合補間型三角柱要素を用いたフォトニック結晶バンド構造の有限要素法解析，電磁界理論研究会資料，**EMT-04-46**(2004)，pp. 7–12.

(3) 盛田雄貴，辻寧英，平山浩一：完全PBGを有する磁性フォトニック結晶導波路に関する検討，信学技報，**107**(2007)，pp. 137–141.

(4) Z. S. Sack, D. M. Kingsland, R. Lee, J. Lee：A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition, IEEE Trans. Antennas Propagat., **43**(1995), pp. 1460–1463.

(5) A. C. Polycarpou and C. A. Balanis：An optimizes anisotopic PML for the Analysis of microwave circuits, IEEE Microwave Guided Wave Lett., **8**(1998), pp. 30–32.

(6) J. Jin：The Finite Element Method in Electromagnetics, (2002)，Wiley-Interscience.

(7) Qing- Hua Qin：The Trefftz Finite and Boundary Element Method, (2000)，WIT Press.

(8) 佐藤慎悟，長谷川弘治：ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく回折格子の散乱特性解析法，境界要素法論文集，**21**(2004)，pp. 53–58.

(9) 佐藤慎悟，長谷川弘治：多層格子による平面波散乱特性のハイブリッド・トレフツ有限要素法解析，計算数理工学論文集，**5**(2005)，pp. 113–118.

(10) R. F. Harrington：Time Harmonic Electromagnetic Fields, (1961)，McGraw-Hill.

(11) L. Cairo and T. Kahan：Variational Techniques in Electromagnetism, (1965)，Gordon and Breach.

(12) T. L. Zinenko, A. I.Nosich, Y.Okuno：Plane wave scattering and absorption by resistive-strip and dielectric-strip periodic gratings，IEEE Trans. Antennas Propagat., **46**(1998)，pp. 1498–1505.

(13) 若林秀昭，山北次郎，松本恵治，浅居正充：平板格子における抵抗境界条件の有効性，電子情報通信学会論文誌，**J80-C-I**(1997)，pp. 387–396.

(14) L. Li：Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures，J.Opt.Soc.Am.A.，**13**(1996), pp. 1870–1876.

(15) T. L. Zinenko, A. Matsushima, and Y. Okuno：Scattering and absorption of electromagnetic plane wave by a multilayered resistive strip grating embedded in a dielectric slab，IEICE Trans. Electron.，**E82–C**(1999), pp. 2255–2264.