

連続時間スライディングモード制御のデジタル実装*

疋田 弘 光^{*1}, 高島 昭 彦^{*2}
花島 直 彦^{*1}, 山下 光 久^{*1}

Digital Implementation of Continuous-Time Sliding Mode Control

Hiromitsu HIKITA^{*3}, Akihiko TAKASHIMA,
Naohiko HANAJIMA and Mitsuhsa YAMASHITA^{*3} Department of Mechanical Systems Engineering, Muroran Institute of Technology,
27-1 Mizumoto-cho, Muroran-shi, Hokkaido, 050-8585 Japan

This paper deals with the case that an algorithm of continuous-time sliding mode control in which feedback gain coefficients are switched is digitally implemented in a digital computer. Since these coefficients are changed only at sampling instants, the system trajectory cannot be perfectly confined on a sliding hyperplane. As a result, the performance deterioration occurs. In this paper, the range is shown in which the switching control input guarantees to drive the state trajectory toward the sliding hyperplane and the switching control algorithm is modified to be effective in it. A control algorithm is also proposed to keep the system trajectory in the narrowest neighborhood of the sliding hyperplane after the trajectory moving outside the range. The same discussion is further done for output tracking systems using sliding mode control. Finally, a numerical example is given for demonstrating the validity of the theoretical results.

Key Words: Sliding Mode Control, VSS, Digital Implementation, Output Tracking Control, Servo-mechanism

1. はじめに

連続時間スライディングモード制御は比較的簡単な制御則でシステムのパラメータ変動や外乱などの不確実性に対してロバストな制御系を構成できる。近年、この制御法はいろいろな角度から研究されており、その研究成果もまとめられている^{(1)~(3)}。連続時間スライディングモード制御系では適当な切り換え制御則によりシステムの状態を状態空間に設定された超平面に拘束することでロバスト特性を得ている。そのため、制御入力の切り換えを無限小の時間間隔で行う必要がある。しかし、実際にはこれは不可能で、デジタルコンピュータを用いるなどして、有限サンプル時間周期でしか制御入力を更新できない。その結果、完全な拘束を達成できず、偏差やチャタリングを発生し、期待する特性からずれてくる。当然のことながら、従来からこのことは認識されていたが、いかに対処すべきかについては理論的に深く研究されてこなかった。

切り換え超平面近辺での切り換え制御則の連続化手法^{(3),(7)}の提案などがあるが、直感的な手法ではっきりとした理論的裏づけがなく、また設計パラメータの値を適切に決定する方法もなかった。本論文では、フィードバック係数切り換え型の連続時間スライディングモード制御をデジタル実装することによりどのような制約が生じ、制御則をどのように変更すればよいのか検討する。また得られた結果をスライディングモード制御を用いた追従制御系に拡張する。最後にシミュレーションでこれらの結果の有効性を確認する。

2. 切り換えフィードバック係数の表現

次の連続時間システムを考える。

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (b + \Delta b)u(t) + h(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R$ は入力を表す。 A , ΔA , b , Δb はそれぞれ適切なサイズの定数行列で、 ΔA , Δb , $h(t) \in R$ はシステムの不確実性を表し、適合条件を満足するとする。つまり、

$$\Delta A = b\alpha, \quad \Delta b = b\beta, \quad h(t) = b\gamma(t) \quad (2)$$

* 原稿受付 2003年2月17日。

^{*1} 正員, 室蘭工業大学工学部(☎050-8585 室蘭市水元町27-1)。^{*2} 正員, 室蘭工業大学大学院工学研究科。

E-mail: hikita@mondo.mech.muroran-it.ac.jp

を満たす $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \in R^{1 \times n}$, $\beta \in R$, $\gamma(t) \in R$ が存在する. また, これらは

$$|\alpha_i| \leq \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad |\beta| \leq \bar{\beta}, \quad |\gamma(t)| \leq \bar{\gamma} \quad (3)$$

を満たし, $\bar{\alpha}_i, i = 1, 2, \dots, n, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ は既知とする. $b + \Delta b = 0$ は 0 になったり, 符号を変えることはないとし, $\bar{\beta} < 1$ を仮定する.

スライディングモード制御によりシステムの状態を拘束する超平面を $\sigma(t) = 0$ とする. ただし,

$$\sigma(t) = g x(t) \quad (4)$$

である. ここで, $\sigma(t) \in R$ であり, $g \in R^{1 \times n}$ は $gb \neq 0$ で, かつ状態が完全に超平面に拘束されているときシステムが安定であるように選ばれているとする.

制御入力を

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_s(t) \quad (5)$$

とする. ここで, $u_{eq}(t)$ はシステムに不確実性がないと仮定して $d\sigma(t)/dt = 0$ より求めた等価制御入力で

$$u_{eq}(t) = -f x(t), \quad f := (gb)^{-1} g A \quad (6)$$

である. $u_s(t)$ は切り換え制御入力で

$$u_s(t) = -k x(t) - \epsilon \operatorname{sgn} \sigma(t) \quad (7)$$

とし, $k = [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_n] \in R^{1 \times n}$ は切り換えフィードバック係数である. これは ϵ とともに $V(t) = \sigma^2(t)/2$ に対し, $dV(t)/dt = \sigma(t)\dot{\sigma}(t) < 0$ を保証するように切り換えればよく, これは次式となる.

$$\sigma \dot{\sigma} = (gb)(1 + \beta) \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i - \beta f_i}{1 + \beta} - k_i \right) x_i \sigma + \left(\frac{\gamma}{1 + \beta} \operatorname{sgn} \sigma - \epsilon \right) |\sigma| \right\} < 0 \quad (8)$$

一般性を失うことなく $gb > 0$ を仮定すると,

$$\begin{cases} k_i > \rho_i^+ := \max_{\alpha_i, \beta} \frac{\alpha_i - \beta f_i}{1 + \beta} & \text{if } x_i(t)\sigma(t) > 0 \\ k_i < \rho_i^- := \min_{\alpha_i, \beta} \frac{\alpha_i - \beta f_i}{1 + \beta} & \text{if } x_i(t)\sigma(t) < 0 \end{cases} \quad (9)$$

かつ

$$\epsilon > \rho_\epsilon := \max_{\beta, \gamma} \frac{\gamma(t)}{1 + \beta} = \frac{\bar{\gamma}}{1 - \bar{\beta}} \quad (10)$$

を満足するように $k_i, i = 1, 2, \dots, n$, および ϵ を選ばばよい.

以上は, 従来の切り換え制御則としてよく知られた結果であるが, 本論文では解析の便利のため式 (9), (10) を次のように表現する.

$$k_i = \left[\phi_i + \frac{\rho_i^+ - \rho_i^-}{2} \right] \operatorname{sgn}(x_i \sigma) + \frac{\rho_i^+ + \rho_i^-}{2} \quad (11)$$

$$\epsilon = \phi_\epsilon + \rho_\epsilon \quad (12)$$

ただし, $\phi_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon > 0$ でなければならない.

なお, 式 (11) における ρ_i^+, ρ_i^- は式 (9) で定義されているが, 式 (3) の範囲に値をとる α_i, β に関する $(\alpha_i - \beta f_i)/(1 + \beta)$ の最大, 最小は $(\alpha_i - \beta f_i)/(1 + \beta) = (\alpha_i + f_i)/(1 + \beta) - f_i$ であることに注意すると, 領域 $-\bar{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i, -\bar{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ の 4 つの角のいずれかで生じることが容易にわかる. したがって, $(\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}), (\bar{\alpha}_i, -\bar{\beta}), (-\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}), (-\bar{\alpha}_i, -\bar{\beta})$ の 4 組の値を代入することで ρ_i^+, ρ_i^- を直ちに見出せる.

3. デジタル実装

前章の切り換え制御則をデジタルコンピュータ内で実現する場合を考える. まず, これにより制御則にどのような制約が生じるのか検討する.

制御は時間周期 T ごとに更新され制御対象へ入力されるとする. したがって, 以下で示すように等価制御, 切り換え制御の導出で用いた条件 $d\sigma(t)/dt = 0, dV(t)/dt < 0$ が離散時間スライディングモード制御の条件^{(4)~(6)}と同様の条件で近似されることになる. 以下では, 時刻 t をサンプル時刻とすると次のサンプル時刻は $t + T$ である. 任意の時間信号 $w(t)$ に対し, 記号 $w_T(t)$ を $w_T(t) := w(t + T)$ と定義すると, 式 (1) より

$$x_T(t) = (I + (A + \Delta A)T)x(t) + (b + \Delta b)Tu(t) + h(t)T + O(T^2) \quad (13)$$

と書ける. ただし, $O(T^2)$ は T の 2 乗以上の次数の項であり, 以下では T を微小値として $O(T^2) = 0$ とする.

まず等価制御について検討する. $\Delta A = 0, \Delta b = 0, h(t) = 0$ と仮定する. $d\sigma(t)/dt = 0$ に対応して, ここでは,

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} \approx \frac{\sigma_T(t) - \sigma(t)}{T} = 0 \quad (14)$$

が成立しなければならない. これより離散時間制御系としての等価制御を求めると $u_{eq}(t) = -(gb)^{-1} g A x(t)$ を得る. これは, 式 (6) と同じであり, 等価制御については連続時間で導出された等価制御をサンプル周期 T ごとにそのまま適用してよいことがわかる.

次に切り換え制御則 $u_s(t)$ について考察する. 同様に,

$$\frac{dV(t)}{dt} \approx \frac{V_T(t) - V(t)}{T} < 0 \quad (15)$$

つまり,

$$V_T(t) - V(t) = \frac{1}{2}(\sigma_T(t) - \sigma(t))(\sigma_T(t) + \sigma(t)) < 0 \quad (16)$$

に式 (1), (2), (4)~(7), (13) を用いると,

$$0 < \{(1 + \beta)k - \alpha + \beta f\}x(t)\hat{\sigma}(t) - \gamma(t)\hat{\sigma}(t) + (1 + \beta)\epsilon|\hat{\sigma}(t)| < 2\hat{\sigma}^2(t) \quad (17)$$

を得る. ここで, $\hat{\sigma}(t) = \sigma(t)/(gbT)$ である. 式 (17) は不等式関係を 2 つ含んでいるが, 左側の不等式関係は式 (8) と等価である. ところが, デジタル実装により式 (17) の右側の不等式が新たに付加されることがわかる. つまり, 連続時間スライディングモードが実現される条件はそのまま必要で, さらに別の制約が課されることとなる. この制約はどのようなものか, 以下で検討を加える.

さて, $\phi_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon > 0$ であれば連続時間スライディングモード制御則 (11), (12) はすでに式 (17) の左側の不等式関係を満足しているので, これらを式 (17) に代入し, さらに右側の不等式関係を満足する条件を求めてみよう. 代入後, $1 + \beta > 0$ であることを考慮して整理すると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi_i |x_i \hat{\sigma}| + \phi_\epsilon |\hat{\sigma}| &< \frac{2\hat{\sigma}^2}{1 + \beta} - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\rho_i^+ - \rho_i^-}{2} \right. \\ &+ \left. \frac{\rho_i^+ + \rho_i^-}{2} \operatorname{sgn}(x_i \hat{\sigma}) \right\} |x_i \hat{\sigma}| + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i - \beta f_i}{1 + \beta} x_i \hat{\sigma} \\ &+ \frac{\gamma \hat{\sigma}}{1 + \beta} - \rho_\epsilon |\hat{\sigma}| \end{aligned} \quad (18)$$

を得る. ところで,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^+ - \rho_i^-}{2} + \frac{\rho_i^+ + \rho_i^-}{2} \operatorname{sgn}(x_i \hat{\sigma}) &= \begin{cases} \rho_i^+ & \text{if } x_i \hat{\sigma} > 0 \\ \rho_i^- & \text{if } x_i \hat{\sigma} < 0 \end{cases} \\ \frac{\alpha_i - \beta f_i}{1 + \beta} x_i \hat{\sigma} &\geq \begin{cases} \rho_i^- x_i \hat{\sigma} & \text{if } x_i \hat{\sigma} > 0 \\ \rho_i^+ x_i \hat{\sigma} & \text{if } x_i \hat{\sigma} < 0 \end{cases} \\ \frac{\gamma \hat{\sigma}}{1 + \beta} &\geq -\rho_\epsilon |\hat{\sigma}| \end{aligned}$$

が成立するので, $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n, \beta, \gamma$ のすべての変動に対して式 (18) が満たされるためには,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \phi_i |x_i \hat{\sigma}| + \phi_\epsilon |\hat{\sigma}| \\ < \frac{2\hat{\sigma}^2}{1 + \beta} - \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i \hat{\sigma}| - 2\rho_\epsilon |\hat{\sigma}| \end{aligned} \quad (19)$$

が成立していなければならない. つまり,

$$\sum_{i=1}^n \phi_i |x_i| + \phi_\epsilon$$

$$< \frac{2|\hat{\sigma}|}{1 + \beta} - \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i| - 2\rho_\epsilon \quad (20)$$

が成立する範囲で $\phi_i (> 0), i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon (> 0)$ を選ばなければ式 (17) の右側の不等式関係を保証できない. 結局, 連続時間スライディングモード制御では正の $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon$ であれば状態を超平面上に常に漸近させることが可能であったが, デジタル実装する場合, さらに $\phi_i (> 0), i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon (> 0)$ に式 (20) の制約が加わることになる.

$\phi_i (> 0), i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon (> 0)$ は式 (20) を満足していればどのような値を選んでもよいが, 自由度が多く簡単には決められない. そこで, これらの値の決定についてももう少し見通しをよくするため, ϕ_0 を正とし

$$\phi_i = \frac{\rho_i^+ - \rho_i^-}{2} \phi_0, i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

$$\phi_\epsilon = \rho_\epsilon \phi_0 \quad (22)$$

としてみる. つまり, われわれが選ぶことのできるパラメータを唯一 ϕ_0 のみに制限し, $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon$ の値は式 (21), (22) のように ϕ_0 に比例的に決めることとする. 式 (21), (22) を式 (11), (12) へ代入すると,

$$k_i = \frac{\rho_i^+ - \rho_i^-}{2} (\phi_0 + 1) \operatorname{sgn}(x_i \hat{\sigma}) + \frac{\rho_i^+ + \rho_i^-}{2} \quad (23)$$

$$\epsilon = \rho_\epsilon (\phi_0 + 1) \quad (24)$$

となる. したがって, $(\rho_i^+ + \rho_i^-)/2$ は $(\alpha_i - \beta f_i)/2$ の最大値, 最小値の平均値, $(\rho_i^+ - \rho_i^-)/2$ はこの平均値からの変動幅を表しているので, 式 (23) は各 $k_i, i = 1, 2, \dots, n$ をこの平均値を中心に変動幅の $\pm(\phi_0 + 1)$ 倍で切り換えることを意味する. また, ϵ も ρ_ϵ の $(\phi_0 + 1)$ 倍の値にとっている. 式 (21), (22) を式 (20) に代入して整理すると,

$$0 < \phi_0 < \Phi := \frac{\frac{4|\hat{\sigma}|}{1 + \beta}}{\sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i| + 2\rho_\epsilon} - 2 \quad (25)$$

を得る. 結局, ϕ_0 は式 (25) の範囲の値を選ぶことができる. なお, 正の $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon$ は式 (20) の右边が正であれば存在し得るが, その場合式 (25) の右边も必ず正となり, 正の ϕ_0 が存在する. 逆に, 式 (25) の右边が正となり正の ϕ_0 が存在する場合, 式 (20) を満足する正の $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon$ も存在する. したがって, (21), (22) により $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n, \phi_\epsilon$ の存在条件自体が制約されるわけではないことに注意する.

4. 超平面近辺への状態の拘束

前章における ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ϕ_ϵ を使えば, 入力を時間間隔 T ごとに切り換えても状態を確実に超平面に近づけていける. しかし, 式 (20) の右辺 (同じことであるが, 式 (25) の右辺) は正である必要があった. ところが $|\hat{\sigma}(t)|$ の値が減少し

$$|\hat{\sigma}(t)| \leq \frac{1+\bar{\beta}}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i(t)| + (1+\bar{\beta})\rho_\epsilon \quad (26)$$

の領域に入るとこれは満たされない. つまり, 式 (26) の領域では $|\hat{\sigma}(t)|$ をより減少させることを保証する切り換え制御則は存在しない. したがって, $\hat{\sigma}(t)$ が式 (26) の領域に入ると適当な制御により, $\hat{\sigma}_T(t)$ をそのままこの領域にとどめておくことができれば, それが最良の制御といえる. この制御は次で与えられる.

$$u_s(t) = -\frac{1}{1+\bar{\beta}}\hat{\sigma}(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ + \rho_i^-) x_i(t) \quad (27)$$

証明は以下のように行える. $u(t)$ として式 (5), (6), (27) を用いれば

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_T(t) = & \frac{\bar{\beta}-\beta}{1+\bar{\beta}}\hat{\sigma}(t) + (1+\beta) \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\alpha_i - \beta f_i}{1+\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\rho_i^+ + \rho_i^-) \right\} x_i(t) + \gamma(t) \end{aligned} \quad (28)$$

を得る. $1+\beta > 0$, $(\bar{\beta}-\beta)/(1+\bar{\beta}) \geq 0$ より

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_T(t)| \leq & \frac{\bar{\beta}-\beta}{1+\bar{\beta}}|\hat{\sigma}(t)| + (1+\beta) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\alpha_i - \beta f_i}{1+\beta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\rho_i^+ + \rho_i^-) \right| |x_i(t)| + \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (29)$$

ところで,

$$\frac{\alpha_i - \beta f_i}{1+\beta} - \frac{1}{2}(\rho_i^+ + \rho_i^-) \quad (30)$$

は $(\alpha_i - \beta f_i)/(1+\beta)$ から $(\alpha_i - \beta f_i)/(1+\beta)$ の最大値, 最小値の平均を差し引いたものである. 平均値からの変動分を表す. したがって, その値は $\pm(1/2)(\rho_i^+ - \rho_i^-)$ 内におさまる. 故に,

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_T(t)| \leq & \frac{\bar{\beta}-\beta}{1+\bar{\beta}}|\hat{\sigma}(t)| \\ & + \frac{1+\beta}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i(t)| + \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (31)$$

$\hat{\sigma}(t)$ が式 (26) の領域に入っているとすると, 式 (31) の右辺に式 (26) を適用し, 次を得る.

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_T(t)| \leq & \frac{\bar{\beta}-\beta}{1+\bar{\beta}} \left\{ \frac{1+\bar{\beta}}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i(t)| \right. \\ & \left. + (1+\bar{\beta})\rho_\epsilon \right\} + \frac{1+\beta}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i(t)| + \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (32)$$

$\bar{\gamma} = (1-\bar{\beta})\{\bar{\gamma}/(1-\bar{\beta})\} = (1-\bar{\beta})\rho_\epsilon$ を代入し, 式 (32) を整理すると, さらに以下が成り立つ.

$$= \frac{1+\bar{\beta}}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i(t)| + (1-\beta)\rho_\epsilon \quad (33)$$

$$\leq \frac{1+\bar{\beta}}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i(t)| + (1+\bar{\beta})\rho_\epsilon \quad (34)$$

式 (34) は式 (26) の右辺と同一である. 結局, $\hat{\sigma}(t)$ が式 (26) の領域に入ると式 (27) を用いることで $\hat{\sigma}_T(t)$ を同じ領域にとどめておけることが明らかにされた.

さて, 式 (27) を書きなおすと,

$$u_s(t) = - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{g_i/(gbT)}{1+\bar{\beta}} + \frac{1}{2}(\rho_i^+ - \rho_i^-) \right\} x_i(t) \quad (35)$$

であるので, $\hat{\sigma}(t)$ が式 (26) を満たす領域で定数ゲイン状態フィードバック制御を施していることになる. ところで, スライディングモード制御によって生じるチャタリングを抑える直感的な方法の一つとして境界層内で線形制御を行う方法がある⁽⁷⁾. これは状態の拘束超平面の両サイドに薄い境界層を設け状態がこの中に入ると定数ゲイン状態フィードバック制御を行うものである. 本章の結果は, この制御の一種になっていると言える. つまり, 式 (26) が境界層を決め, この境界層の中で式 (35) の定数ゲイン状態フィードバック制御が行われている. 結局, チャタリングを避けるため過去に提案されている方法の中で境界層内で線形制御を行うスライディングモード制御は理論的にすぐれた方法であることが明確にされたとともに, 最適な境界層の幅とフィードバックゲインをシステムの不確かさとサンプリング周期にもとづいて決定する方法が与えられたことになる.

5. チャタリングについての検討

3章で与えられた切り換え制御則を用いれば $|\hat{\sigma}(t)|$ は着実に減少するが, あくまでも $|\hat{\sigma}(t)|$ が減少するのであって $\hat{\sigma}(t)$ の符号は変化しうる. したがって, $\hat{\sigma}(t)$ の値が正負に変化しながら, その絶対値が減少することはあり得る. その結果, 入力チャタリングし好ましくない場合がある. このように $\hat{\sigma}(t)$ の符号が変わるチャタリングを起こさないためには, 明らかにすべての t で $\hat{\sigma}_T(t)\hat{\sigma}(t) > 0$ が保証されるとよい. したがって, 式 (1), (2), (4)~(7), (13) を用いると,

$$\begin{aligned} 0 < & \{(1+\beta)k - \alpha + \beta f\} x(t)\hat{\sigma}(t) \\ & - \gamma(t)\hat{\sigma}(t) + (1+\beta)\epsilon|\hat{\sigma}(t)| < \hat{\sigma}^2(t) \end{aligned} \quad (36)$$

を得る. この条件式は式 (17) の右側不等式の右辺の $2\hat{\sigma}^2(t)$ を $\hat{\sigma}^2(t)$ で置き換えたものであり, 左辺の値とし

て許される領域が半分に制限されることを意味する。したがって、 k_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ϵ を同じく式 (11), (12) で表現すると、 ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ϕ_ϵ は式 (20) に対応した

$$\sum_{i=1}^n \phi_i |x_i| + \phi_\epsilon < \frac{|\hat{\sigma}|}{1+\beta} - \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i| - 2\rho_\epsilon \quad (37)$$

を満足しなければならない。 ϕ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ϕ_ϵ が式 (21), (22) の形で与えられるなら、 ϕ_0 の値の取り得る範囲は

$$0 < \phi_0 < \Psi := \frac{\frac{2|\hat{\sigma}|}{1+\beta}}{\sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i| + 2\rho_\epsilon} - 2 \quad (38)$$

となる。

ϕ_0 の値をこの範囲に取り、式 (23), (24) の切り換え制御によりチャタリングを避けつつ状態を拘束超平面に近づけていくと $\hat{\sigma}(t)$ が

$$|\hat{\sigma}(t)| \leq (1+\bar{\beta}) \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ - \rho_i^-) |x_i| + 2(1+\bar{\beta})\rho_\epsilon \quad (39)$$

に入ると、チャタリングを発生させずそれ以上拘束超平面に近づけることを保証する切り換え制御則は存在しない。したがって、この領域では前と同じく $\hat{\sigma}_T(t)$ をこの領域にとどめておけば最良で、そのための制御は次で与えられる。

$$u_s(t) = -\frac{1}{2(1+\bar{\beta})} \hat{\sigma}(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\rho_i^+ + \rho_i^-) x_i(t) \quad (40)$$

証明は前章と同様にできるので省略する。

6. 追従制御系

スライディングモード制御を適用して出力を目標値に追従させる方法は大きく分けて2種類ある。その1つは、目標値を生成する n 次のモデルを考え、このモデルの状態に制御対象の状態を追従させたり、目標値の n 階微分までの値を利用できると仮定し、制御対象の状態 (の線形変換) をこれに追従させる方法である^{(8)~(10)}。もう1つは、目標値のみを使いサーボ系を構成する方法である^{(11)~(14)}。この場合、モデルや目標値信号の高次微分を必要とせず現実的であるが、目標値信号の中に定常誤差なく追従させたいものがあるれば、その信号成分に対応した内部モデルをサーボ系の中に組み込んでおく必要がある。ここでは前者につい

て考察するが、後者に対しても容易に同様の展開が可能である。

制御対象が追従すべきモデルを次式で表す。

$$\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + b v(t) \quad (41)$$

ここで、 $x_d(t) \in R^n$ はモデルの状態ベクトル、 $v(t) \in R$ は入力を表す。 A_d は $n \times n$ の定数行列であるが、 $A - A_d$ は適合条件を満たすとする。つまり、

$$A - A_d = b\xi \quad (42)$$

を満足する $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n] \in R^{1 \times n}$ が存在する。追従誤差

$$e(t) = x(t) - x_d(t) \quad (43)$$

を定義すると、次の誤差システムが得られる。

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_d e(t) + b(\xi + \alpha)x \\ &\quad + b(1+\beta)u - b v + b\gamma \end{aligned} \quad (44)$$

この誤差システムに対して状態を拘束する超平面を

$$\sigma'(t) = g'e(t) + g'' \int_0^t e(\tau) d\tau = 0 \quad (45)$$

とする⁽¹⁵⁾。2項目の積分項はステップ関数目標値に対する定常誤差を0とするために導入されている。また、状態が超平面に拘束されたときシステムを安定とするため $g' \in R^{1 \times n}$, $g'' \in R^{1 \times n}$ は s の多項式

$$\sum_{i=0}^n (g'_i + g''_{i+1}) s^i = 0 \quad (46)$$

の根が安定となるように決められているとする。ただし、 $g'_0 = 0$, $g''_{n+1} = 0$ である。また、前と同様、 $g'b \neq 0$ とする。制御対象に不確実性がないとして $d\sigma'(t)/dt = 0$ より等価制御入力 $u_{eq}(t)$ を求めると、

$$u_{eq}(t) = -f'z(t) \quad (47)$$

ここで、 f' はフィードバックゲイン行列で $f' = [(g'b)^{-1}(g'A_d + g'') \ \xi \ -1] \in R^{1 \times (2n+1)}$ である。また、 $z(t) = [e^T(t) \ x^T(t) \ v(t)]^T \in R^{(2n+1)}$ である。

さて、切り換え制御入力 $u_s(t)$ を

$$u_s(t) = -k'z(t) - \epsilon \operatorname{sgn}\sigma'(t) \quad (48)$$

とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma' \dot{\sigma}' &= (g'b)(1+\beta) \left\{ \sum_{i=1}^{2n+1} \left(\frac{\alpha'_i - \beta f'_i}{1+\beta} - k'_i \right) z_i \sigma' \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\gamma}{1+\beta} \operatorname{sgn}\sigma' - \epsilon \right) |\sigma'| \right\} < 0 \end{aligned} \quad (49)$$

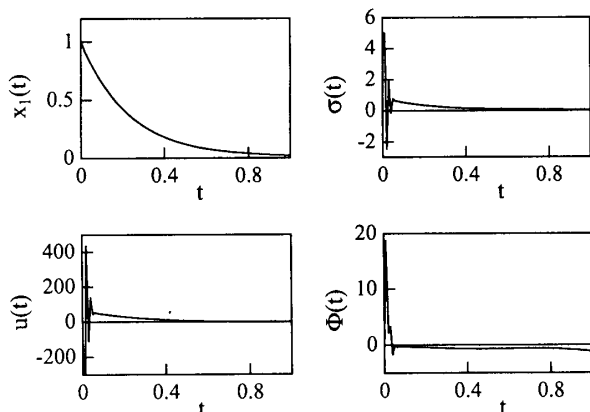


Fig. 1 Case of the proposed control (Chattering-free is not taken into account)

ここで、 $\alpha'_i = 0$, $\alpha'_{n+i} = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, また、 $\alpha'_{2n+1} = 0$ である。この式は、式(8)で $\alpha_i \rightarrow \alpha'_i$, $f_i \rightarrow f'_i$, $k_i \rightarrow k'_i$, $x(t) \rightarrow z(t)$, $\sigma(t) \rightarrow \sigma'(t)$, $n \rightarrow 2n+1$ と置き換えたものに等しい。したがって、詳細は省略するが、式(8)にもとづいて展開された2章～5章の議論を追従制御系に対しそのまま適用でき、デジタル実装に適した制御則も直ちに求まることがわかる。ただし、 $\hat{\sigma}(t)$ は同じく $\hat{\sigma}'(t) = \sigma'(t)/(bg'T)$ に置き換える必要がある。

7. シミュレーション

システム(1)において

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

であるとする。 $[a(2,1) \ a(2,2)] = [-50 \ 10]$ に $\pm 35\%$ 未満の変動、 $b(2) = 1$ に $\pm 25\%$ 未満の変動が生じ得るとする。したがって、 $\bar{\alpha}_i, i = 1, 2$, $\bar{\beta}$ をこれらのパラメータの絶対値の35%, 25%増しの値に設定する。また、変動幅 $\bar{\gamma} = 5$ 未満の外乱が存在するとする。以下では、実際の変動および外乱を $\alpha = [15 \ -3]$, $\beta = 0.2$, $\gamma(t) = 2 \sin(2\pi t) + 2$, 初期値を $x = [1 \ 0]^T$ としてシミュレーションを行った。なお、サンプル周期は0.01秒である。図1では切り換え制御則に式(7), (23), (24)を用い、 ϕ_0 は式(25)を満たす値として 0.8Φ を用いている。また、式(26)の領域では切り換え制御則に式(27)を用いている。 $\sigma(t)$ は振動しながらその絶対値は減少し、 Φ が負になった段階で制御則が切り換っている。図2では ϕ_0 は式(38)を満たす値として 0.8Ψ を用いている。また、式(39)の領域では切り換え制御則に式(40)を用いている。この場合、切り換え制御則は $\sigma(t)$ にチャタリングを生じないものを使っているが、実際 $\sigma(t)$ の応答曲線はそのようになっている。

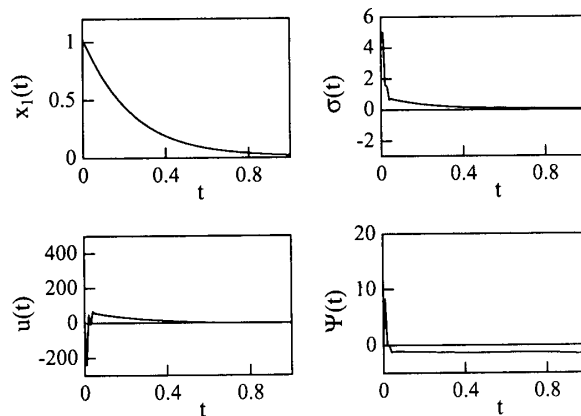


Fig. 2 Case of the proposed control (Chattering-free is taken into account)

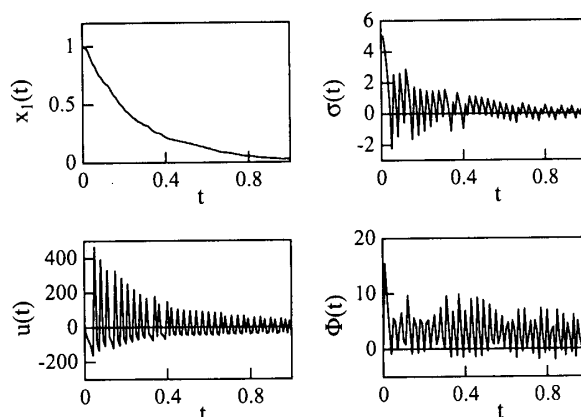


Fig. 3 Case of the conventional control (ϕ_0 is fixed to be 3)

比較のため、 $\phi_0 = 3$ に固定し従来の切り換え制御則を用いた場合を図3に載せた。 Φ が負になっても状態の超平面への漸近を保証しない入力加わり、その結果チャタリングが発生していることがわかる。

8. おわりに

本論文ではフィードバック係数切り換え型の連続時間スライディングモード制御のデジタル実装について検討し以下の結果を得た。

- (1) 連続時間スライディングモード制御を有限サンプル時間間隔で適用し状態を拘束超平面に漸近させるためには、さらに満足しなければならない制約があることを明らかにし、それを考慮した制御則を与えた。
- (2) 状態の拘束超平面への漸近を保証できる限界とその中に閉じこめておく最適な制御則を与えた。この限界と制御則はサンプル周期とシステムの不確定性にもとづいて決められる。
- (3) 状態を拘束超平面へ漸近させる過程でチャタリン

グが生じないために課せられる制約とこれを考慮した制御則を与えた。

(4) これらの議論を追従制御系に発展させ、同じように制約が生じること、これを考慮して制御則が導かれることを示した。

(5) シミュレーションにより本論文で得られた結果の有効性を確認した。

本論文では線形系を扱ったが、非線形系についても同様の結果を導くことが今後の課題である。

文 献

- (1) Utkin, V. I., *Sliding modes in control optimization*, Berlin: Springer-Verlag, (1992).
- (2) 野波健蔵, 田 宏奇, スライディングモード制御, コロナ社, (1994).
- (3) Edwards, C. and Spurgeon, S. K., *Sliding mode control-Theory and applications*, London: Taylor & Francis, (1998).
- (4) Sarpturk, S. Z., Istefanopulos, Y. and Kaynak, O., On the stability of discrete-time sliding mode control systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-32-10** (1987), 930-932.
- (5) Kotta, U., Comment on "On the stability of discrete-time sliding mode control systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-34-9** (1989), 1021-1022.
- (6) 古田勝久, 森貞雅博, 離散系のスライディングモードコントロール, 計測自動制御学会論文集, **25-5** (1989), 66-70.
- (7) Slotine, J. J. and Sastry, S. S., Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators, *Int. J. Control*, **38-2** (1983), 465-492.
- (8) Zinober A. S. I., El-Ghezawi, O. M. E. and Billings, S. A., Multivariable variable-structure adaptive model-following control systems, *IEE Proceedings*, **129-Pt.D-1** (1982), 6-12.
- (9) Slotine, J. J. and Coetsee, J. A., Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems, *Int. J. Control*, **43-6** (1983), 1631-1651.
- (10) Chen, C.-L. and Xu, R.-L., Tracking Control of Robot Manipulator Using Sliding Mode Controller with Performance Robustness, *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **121-1** (1999), 64-70.
- (11) Hikita, H., Servomechanisms based on sliding mode control, *Int. J. Control*, **48-2** (1988), 435-447.
- (12) Chern, T. L. and Wu, Y. L., Design of integral variable structure controller and application to electrohydraulic velocity servosystems, *IEE Proceedings*, **138-Pt.D-2** (1991), 161-166.
- (13) Hikita, H., Hanajima, N., Yamashita, M. and Nagano, K., On sliding-mode servocontrollers for left-invertible MIMO nonlinear systems, *Proc. 35th IEEE conference on decision and control*, (1996), 4022-4025.
- (14) Wang, J.-D., Lee, T.-L. and Juang, Y.-T., New methods to design an integral variable structure controller, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-41-1** (1996), 140-143.
- (15) たとえば, 文献(2)の152ページ.