

スライディングモード制御における保守性を緩和した切り換え制御*

足田 弘光^{*1}, 花島 直彦^{*2}, 山下 光久^{*2}

Switching Control Algorithm with Reduced Conservativeness in Sliding-Mode Control

Hiromitsu HIKITA^{*3}, Naohiko HANAJIMA and Mitsuhisa YAMASHITA^{*3}Department of Mechanical Systems Engineering, Muroran Institute of Technology,
27-1 Mizumoto-cho, Muroran-shi, Hokkaido, 050-8585 Japan

This paper presents a design method of a switching control algorithm in which the conservativeness is reduced in sliding-mode control. In a conventional sliding-mode control system, the control input is switched so that a certain function can remain a Lyapunov one in spite of the presence of system uncertainties. However, the switching gain with conservativeness is generally derived due to the simplicity of the control algorithm. In this case, higher gain is required than is necessary. This situation is not suitable since it causes chattering in system inputs and/or steady state errors in system outputs. In this paper, a condition realizing a Lyapunov function is newly derived. Based on this result, a novel switching control algorithm with reduced conservativeness is proposed. The algorithm is also expanded to an output-tracking control problem. Finally, simulation results are given to illustrate the effectiveness of the proposed switching control algorithm.

Key Words: Sliding-Mode Control, Switching Control Law, System Uncertainty, Robust Control, VSS, Controller, Nonlinear Control

はじめに

スライディングモード制御は比較的簡単な制御法でシステムの不確定性にロバストな制御系を実現できる。このすぐれた性質ゆえスライディングモード制御は多くの研究者の興味を引き、制御系の構成法、制御則、制御系の性質、各種制御問題への適用など広く研究されてきた^{(1)~(3)}。

スライディングモード制御はシステムの状態空間に安定な超平面を設定し、適当な制御則により状態軌跡をこの超平面へ向かわせ最終的にこの超平面に拘束することで状態軌跡を原点へ収束させる。これを実現するため、状態軌跡とこの超平面との一種の距離を評価する関数を考え、これが常にリヤプノフ関数となるように制御を切り換える。制御を切り換える方法はいくつかあるが、状態フィードバックの各ゲイン係数を切り換える方法^{(4),(5)}や unit vector approach^{(3),(6)}がよく利用されている。ところで切り換えるゲインの大き

さは対象としている関数がリヤプノフ関数となるように決めるが、従来の方法では一般的に保守的で過度に大きなゲインが設定されがちである。しかし、このことは理想的な連続時間スライディングモード制御では問題とはならない。たとえ制御入力が高大であっても無限小の時間間隔で制御入力を切り換えることができるので状態軌跡が超平面を交差して行き過ぎることなく、これを超平面に完全に拘束することが可能である。その結果、チャタリングも発生しない。ところが、実際に適用すると有限サンプリング周期でしか制御を切り換えることができずもはや超平面に完全に拘束することは不可能で、過大な切り換え入力は大きなチャタリングや定常的な誤差を引き起こす。有限サンプリング周期でしか制御を切り換えることができない場合、実際には切り換え超平面の近辺ではリヤプノフ関数を実現する切り換え入力の存在を保証できない^{(7),(8)}。したがって、この領域で従来の連続時間スライディングモード制御を単純に適用すると一層大きなチャタリングや定常的な誤差を引き起こすことにもつながる。

切り換え制御アルゴリズムが単純であることはスライディングモード制御のすぐれた特徴の一つである

* 原稿受付 2006年9月11日。

^{*1} 正員, フェロー, 室蘭工業大学工学部(〒050-8585 室蘭市水元町27-1)。^{*2} 正員, 室蘭工業大学工学部。

E-mail: hikita@mondo.mech.muroran-it.ac.jp

が、このことは制御入力に保守的となる原因にもなっている。1入力系で考察すると、対象の関数がリヤプノフ関数となる十分条件を考え、各サンプリング時刻で2種のゲインのうちこの十分条件を満たすほうを選ぶ。この方法は単純ではあるがきわめて限定されたもので、当然のことながらこの十分条件を満たさない入力であっても保守性がより緩和された入力にリヤプノフ関数を実現できる可能性がある。本論文では、同じ関数に対しリヤプノフ関数となる条件を満たすようにもう少しきめ細かくゲインを切り換えることで従来の方法に比べ保守性を緩和できることを示し、そのゲインの切り換え法を明らかにする。論文の構成は、1章で制御系の基本構造について説明し、ついで2章で新しい切り換え制御則を1入力系について提案する。また、これにもとづき多入力系へ拡張した結果について述べる。3章では制御入力に従来の制御法と具体的にどう違うのか解析する。これらはレギュレータ問題について議論するが4章で目標値追従系にも簡単に拡張できることを示す。最後に5章でシミュレーション結果を与える。

1. 制御系の基本構造

次の状態方程式で表されるシステムを考える。

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + h(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ 、 $u(t) \in R^m$ 、 $h(t) \in R^n$ であり、 (A, B) は可制御対であるとする。 ΔA 、 ΔB 、 $h(t)$ はシステムの不確定部分を表しており、これらは次の仮定を満たすとする。

(i) 次を満たす $\alpha \in R^{m \times n}$ 、 $\beta \in R^{m \times m}$ 、 $\gamma(t) \in R^m$ が存在する。(適合条件)

$$\Delta A = B\alpha, \Delta B = B\beta, h(t) = B\gamma(t) \quad (2)$$

(ii) α 、 β 、 $\gamma(t)$ の各行列のすべての要素(以下、 ij 要素で代表する)に対して $|\alpha_{ij}| \leq \bar{\alpha}_{ij}$ 、 $|\beta_{ij}| \leq \bar{\beta}_{ij}$ 、 $|\gamma_i(t)| \leq \bar{\gamma}_i$ である $\bar{\alpha}_{ij}$ 、 $\bar{\beta}_{ij}$ 、 $\bar{\gamma}_i$ が存在し、これらは既知である。また、 $|\beta_{ij}| \leq \bar{\beta}_{ij}$ を満たすすべての β_{ij} の組み合わせに対して $\|\beta\| < 1$ である。

不確定部分が適合条件を満たしていることから適当な状態変数変換により式(1)は次の標準形(regular form)に変換可能である⁽³⁾。したがって、以下では制御系はこの形式で表現されているとする。

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (3a)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + B_2f(x, u, t) \quad (3b)$$

ここで、 $x_1 \in R^{n-m}$ 、 $x_2 \in R^m$ 、 $B_2 \in R^{m \times m}$ 、

$$f = \alpha x + \beta u + \gamma \quad (4)$$

である。

次の切り換え超平面の式を導入する。

$$\sigma(t) = Gx(t) = G_1x_1(t) + G_2x_2(t) \quad (5)$$

ここで、 $\sigma(t) \in R^m$ 、 $G \in R^{m \times n}$ である。また、 $|G_2| \neq 0$ である。

制御入力を文献(3)と同様に次の形式に選ぶ。

$$u(t) = u_l(t) + u_n(t) \quad (6)$$

$u_l(t)$ は線形制御入力、 $u_n(t)$ は切り換え制御入力を表し

$$u_l(t) = -(GB)^{-1}GAx(t) + (GB)^{-1}\Lambda\sigma(t) \quad (7a)$$

$$u_n(t) = -\rho(t)(GB)^{-1} \frac{P_2\sigma(t)}{\|P_2\sigma(t)\|} \quad (7b)$$

である。ここで、 $\| \cdot \|$ はユークリッドノルムを表す。もし、 $\sigma(t)$ がスカラーなら式(7b)は $u_n(t) = -\rho(t)(GB)^{-1}\text{sgn}(\sigma)$ と同じである。式(7a)の右辺第1項はシステムに不確定性がないとして求められる等価制御入力項であり、第2項は状態を切り換え超平面へ到達させるための線形入力項である。 $\Lambda \in R^{m \times m}$ は自由に設定してよい安定行列である。式(7b)の $P_2 \in R^{m \times m}$ は次のリヤプノフ方程式を満たす正定対称行列である。

$$P_2\Lambda + \Lambda^T P_2 = -I \quad (8)$$

$\rho(t)$ はスカラーであるが、この値の決め方については次章以降で検討する。

さて、式(3a)と式(5)より、

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}G_2^{-1}G_1)x_1 + A_{12}G_2^{-1}\sigma \quad (9)$$

を得る。また、 $\dot{\sigma} = G\dot{x}$ は式(1)、(6)、(7)により

$$\dot{\sigma} = \Lambda\sigma - \rho \frac{P_2\sigma}{\|P_2\sigma\|} + GBf \quad (10)$$

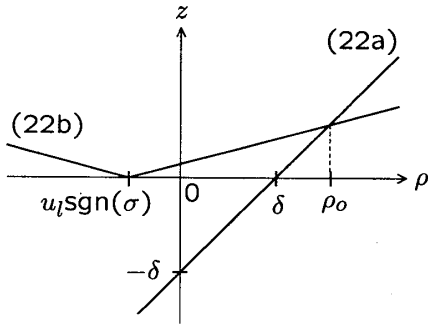
となる。なお

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

の関係があるので、式(3b)に(6)、(7)を適用して得られる式を(3b)'とすると、式(9)、(10)は式(11)の変換により式(3a)、(3b)'に一致する。

2. 切り換え制御則

以下の議論では簡単のため G は $GB = I_m$ を満たすように選ばれているとする。もしそうでなければ $(GB)^{-1}G$ を改めて G とすればよい。なお、これによ

Fig. 1 ρ_0 determined by (22)

り $\sigma = 0$ を満足する空間は変わらない. 不確実性が存在する条件下で切り換え制御則により状態を超平面へ拘束することを検討する.

$$V = \sigma^T P_2 \sigma \quad (12)$$

を定義する. すると次式が成り立つ.

$$\dot{V} = -\sigma^T \sigma - 2\rho \|P_2 \sigma\| + 2\sigma^T P_2 f \quad (13)$$

ところで適当な $\xi > 0$ が存在して

$$\dot{V} \leq -\sigma^T \sigma - 2\xi \|P_2 \sigma\| \quad (14)$$

なら V はリアプノフ関数であり, $V(0)$ から出発する $V(t)$ が t_f 時間内に 0 になるためには

$$\xi \geq \frac{1}{2\lambda_{max} \sqrt{\lambda_{min}} (e^{2\lambda_{max} t_f} - 1)} \sqrt{V(0)} \quad (15)$$

であればよい(付録1). ここで λ_{max} , λ_{min} は P_2 の最大固有値, 最小固有値である. したがって, ξ は $\sigma(t) \rightarrow 0$ の収束速度を決める設計パラメータになっている. さて, 式(14)を達成するには, 式(13), (14)より ρ は次を満足していればよい.

$$\rho - \xi - q^T(\alpha x + \beta u + \gamma) \geq 0 \quad (16)$$

ここで, $q = P_2 \sigma / \|P_2 \sigma\|$ であり f は式(4)の右辺で置き換えてある. したがって, u に式(6), (7b)を代入し, β に関する項とそれ以外の項にわけると次式を得る.

$$\rho - \xi - q^T(\alpha x + \gamma) \geq q^T \beta (u_i - \rho q_i) \quad (17)$$

結局, α , β , γ のすべての可能な変動に対して式(17)が成立する条件は, 左辺の起こりうる最小値が右辺の起こりうる最大値より大きければよいので, 次が成り立つことである.

$$\rho - \xi - |q|^T(\bar{\alpha}|x| + \bar{\gamma}) \geq |q|^T \bar{\beta} |u_i - \rho q_i| \quad (18)$$

ここで, $|x|$, $|q|$ はベクトル x , q の各成分がその絶対値で置き換えられたベクトルである. 記号の簡単化のため,

$$\delta = \xi + |q|^T(\bar{\alpha}|x| + \bar{\gamma}) \quad (19)$$

とおくと, ρ の値を次式を満たす範囲にとればよいことがわかる.

$$\rho - \delta \geq |q|^T \bar{\beta} |u_i - \rho q_i| \quad (20)$$

この範囲はどのようになるか, 次に1入力系, 多入力系にわけて考察する.

2.1 1入力系 ($m = 1$) の場合 $\bar{\beta}$ はスカラーであり, また $q = \sigma/|\sigma| = \text{sgn}(\sigma)$ となる. したがって, 式(20)の右辺は $|q|^T \bar{\beta} |u_i - \rho q_i| = \bar{\beta} |u_i - \rho \text{sgn}(\sigma)| = \bar{\beta} |u_i \text{sgn}(\sigma) - \rho|$ であるので, 式(20)は次式となる.

$$\rho - \delta \geq \bar{\beta} |u_i \text{sgn}(\sigma) - \rho| \quad (21)$$

いま, 式(21)の両辺をそれぞれ

$$z = \rho - \delta \quad (22a)$$

$$z = \bar{\beta} |u_i \text{sgn}(\sigma) - \rho| \quad (22b)$$

とおき, 横軸を ρ , 縦軸を z として式(22a), (22b)を図示すると, 図1のようなになる. ただし, この図は $u_i \text{sgn}(\sigma) < \delta$ の場合である. 式(22a), (22b)の交点の ρ 座標を ρ_0 とすると $\rho \geq \rho_0$ であれば式(21)が成立し目的が達成される. $u_i \text{sgn}(\sigma) > \delta$ の場合も同様に考察でき, まとめると以下のように ρ を選ばればよいことがわかる.

$$u_i \text{sgn}(\sigma) < \delta \text{ なら } \rho \geq \rho_0 = \frac{-\bar{\beta} u_i \text{sgn}(\sigma) + \delta}{1 - \bar{\beta}} \quad (23a)$$

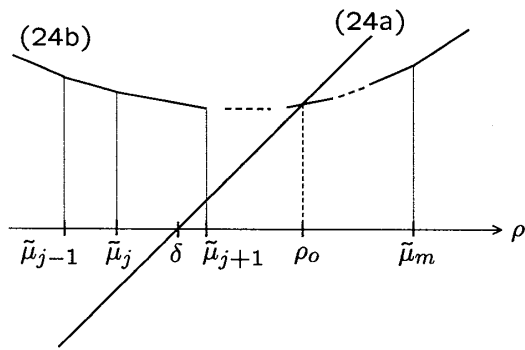
$$u_i \text{sgn}(\sigma) > \delta \text{ なら } \rho \geq \rho_0 = \frac{\bar{\beta} u_i \text{sgn}(\sigma) + \delta}{1 + \bar{\beta}} \quad (23b)$$

2.2 多入力系の場合 前節と同様に, 式(20)に対し

$$z = \rho - \delta \quad (24a)$$

$$z = |q|^T \bar{\beta} |u_i - \rho q_i| = \sum_{i=1}^m \zeta_i |u_i - \rho q_i| \quad (24b)$$

を導入する. ここで, $\bar{\beta}_i$ を $\bar{\beta}$ の第 i 列とすると, $\zeta_i = |q|^T \bar{\beta}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ であり, ζ_i はスカラーで非負である. 式(24b)の右辺の第 i 項を取り出し $z = \zeta_i |u_i - \rho q_i|$ を考えると, これは $\rho = u_i/q_i$ に折れ点をもつ図1と同様の形をした折れ線を表している. ここで, 折れ点の ρ 座標を $\mu_i \triangleq u_i/q_i$ と定義する. 式(24b)はこのような折れ線を $i = 1$ から m まで m 本

Fig. 2 ρ_0 determined by (24)

足し合わせたものであるので、図2のようになる。ただし、折れ点は ρ 座標が μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ の位置で生じるが、これらの大小関係は問題によって異なる。したがって、図では μ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ の値の小さいものから順に改めて $\tilde{\mu}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ と表示しなおしている。また、 ζ_i , u_i , q_i も μ_i と同様に $\tilde{\mu}_i$ に対応して改めて $\tilde{\zeta}_i$, \tilde{u}_i , \tilde{q}_i と表す。なお、 $\tilde{\mu}_0 = -\infty$, $\tilde{\mu}_{m+1} = \infty$ とする。

さて、 $\tilde{\mu}_i < \delta$ を満足する最大の $\tilde{\mu}_i$ が左から j 番目の折れ点 $\tilde{\mu}_j$ であると仮定する。また、もし $\tilde{\mu}_i < \delta$ を満足する $\tilde{\mu}_i$ が存在しなければ $j = 0$ として $\tilde{\mu}_j = \tilde{\mu}_0$ とする。すると、図2から明らかなように、式(24a), (24b) の交点 ρ_0 に対し $\rho_0 > \tilde{\mu}_j$ が成立する。結局、 ρ_0 は $\rho \geq \tilde{\mu}_j$ の領域で見出すことができる。

この領域で ρ_0 を次のようにして求めることができる。 k を $j \leq k \leq m$ の範囲にある整数とする。 ρ 座標の区間 $[\tilde{\mu}_k, \tilde{\mu}_{k+1}]$ にある式(24b)の直線は次式である。

$$z = - \sum_{i=1}^k \tilde{\zeta}_i (\tilde{u}_i \text{sgn}(\tilde{q}_i) - |\tilde{q}_i| \rho) + \sum_{i=k+1}^m \tilde{\zeta}_i (\tilde{u}_i \text{sgn}(\tilde{q}_i) - |\tilde{q}_i| \rho) = \left[- \sum_{i=1}^k \tilde{\zeta}_i \tilde{u}_i \text{sgn}(\tilde{q}_i) + \sum_{i=k+1}^m \tilde{\zeta}_i \tilde{u}_i \text{sgn}(\tilde{q}_i) \right] + \left[\sum_{i=1}^k \tilde{\zeta}_i |\tilde{q}_i| - \sum_{i=k+1}^m \tilde{\zeta}_i |\tilde{q}_i| \right] \rho \quad (25)$$

$$= \Phi_k + \Psi_k \rho \quad (26)$$

Φ_k , Ψ_k は式(25)の各[-]部を表している。式(26)の直線と式(24a)との交点の ρ 座標 ρ_{0k} は次のように求まる。

$$\rho_{0k} = \frac{\delta + \Phi_k}{1 - \Psi_k} \quad (27)$$

もし

$$\tilde{\mu}_k \leq \rho_{0k} \leq \tilde{\mu}_{k+1} \quad (28)$$

を満足していれば、式(24a)の直線が式(24b)を構成する線分と交差し $\rho_0 = \rho_{0k}$ であることがわかる。したがって、 $k = j$ から始め、 $k = j+1 \rightarrow k = j+2 \rightarrow \dots \rightarrow k = m$ と計算を進めれば必ずどこかでこの関係が満足され唯一の ρ_0 が見出される(付録2)。なお、 Φ_{i+1} は Φ_i の第 $i+1$ 項目の前の符号を+から-へ変えるだけで求まる。また、同様に Ψ_{i+1} は Ψ_i の第 $i+1$ 項目の前の符号を-から+へ変えることで求まるので ρ_{0k} , $k = j+1, j+2, \dots, m$ は次々と簡単に計算できる。

3. 従来型との比較

従来 of unit vector approach^{(3),(6)} で得られる ρ_0 (これを ρ_u と表す) とどの程度異なるか検討してみる。 ρ_u は一つの式で計算され、1入力系の場合、

$$\rho_u = \frac{\tilde{\beta}|u_l| + \delta}{1 - \tilde{\beta}} \quad (29)$$

である。これと式(23a)を比較すると違いは

$$\rho_u - \rho_0 = \frac{\tilde{\beta}}{1 - \tilde{\beta}} \{ |u_l| + u_l \text{sgn}(\sigma) \} \quad (30)$$

となる。右辺は $\text{sgn}(\sigma)$ の値によって異なる値となるが、 $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(u_l)$ なら $\rho_u - \rho_0 = \frac{2\tilde{\beta}|u_l|}{1 - \tilde{\beta}}$ の違いがある。 $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(u_l)$ の場合は $\rho_u = \rho_0$ となる。また、式(23b)と比較すると違いは

$$\rho_u - \rho_0 = \frac{\tilde{\beta}}{(1 - \tilde{\beta})(1 + \tilde{\beta})} \{ (1 + \tilde{\beta})|u_l| - (1 - \tilde{\beta})u_l \text{sgn}(\sigma) + 2\delta \} \quad (31)$$

となる。 $\text{sgn}(\sigma)$ の値によって右辺は異なる値になるが $\tilde{\beta} \neq 0$ である限り一般に $\rho_u \neq \rho_0$ である。本論文で提案した ρ_0 は $u_l \text{sgn}(\sigma) < \delta$ かつ $\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(u_l)$ の場合のみ従来 of ρ_u と一致する。 ρ_u は常に式(29)で計算されるのに対し、本方法ではより細かく場合わけされて ρ_0 が決められ、その結果上の差だけ保守性が緩和されていることが理解できよう。

多入力系に対してはより複雑な議論が必要で統一的な解析はむずかしいが、やはり従来 of ρ_u が常に一つの式で計算されるのに対し、細かい場合わけに対応した ρ_0 が求まるので1入力系の場合と同様保守性が緩和される。

4. 目標値追従系への適用

3節ではシステムの状態を0へ収束させるレギュレータ問題を扱ったがここでは希望する目標信号に追

従させる問題⁽⁹⁾について検討する. システムの状態が追従すべき信号を出力する理想モデルを次とする.

$$\dot{\omega}(t) = A_m \omega(t) + B_m r(t) \quad (32)$$

ここで, $\omega \in R^n$, $r \in R^m$ である. また, A_m, B_m は $\text{Span}\{A_m - A, B_m\} \in \text{Span}B$ を満たしていなければならない. $\text{Span}\{-\}$ は列空間を表す. 追従誤差 $e \in R^n$ を次のように定義する.

$$e(t) = x(t) - \omega(t) \quad (33)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & A_m e(t) - (A_m - A)x(t) + Bu(t) \\ & - B_m r(t) + Bf(t) \end{aligned} \quad (34)$$

式 (34) に対して状態変数 $e(t)$ の空間に先と同様に次の切り換え超平面の式を定義する.

$$\sigma(t) = Ge(t) \quad (35)$$

制御入力 $u(t)$ を先と同様に式 (6) とすると,

$$\begin{aligned} u_l(t) = & -(GB)^{-1}GA_m e(t) + (GB)^{-1}\Lambda\sigma(t) \\ & + (GB)^{-1}G(A_m - A)x(t) \\ & + (GB)^{-1}GB_m r(t) \end{aligned} \quad (36a)$$

$$u_n(t) = -\rho(t)(GB)^{-1} \frac{P_2\sigma(t)}{\|P_2\sigma(t)\|} \quad (36b)$$

となり, σ に関しては式 (10) とまったく同じ式が成り立つ. ただし, σ は式 (35), f は式 (4) である. したがって, ρ_0 は先と同様に求めることができる. ただし, u_l が式 (36a) であるので, e (つまり, x_m), r の影響を受ける. 結局, ρ_0 は追従モデルの入力, 状態に依存して変わることになるが基本的にはレギュレータの場合と同じ議論が成立することがわかる.

5. シミュレーション

次のシステムを考える.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 250 \end{bmatrix} u(t) + h(t) \\ y(t) = & [1 \ 0]x(t) \end{aligned}$$

不確実性は A の (2, 2) 要素に $\pm 50\%$ 内の変動, B の (2, 1) 要素に $\pm 30\%$ 内の変動, $h(t)$ として ± 50 内のステップ外乱が存在しうるとする ($|\alpha| \leq 0.04$, $|\beta| \leq 0.3$, $|\gamma| \leq 0.2$ に対応する). $x(0) = [0.5 \ 0]^T$ として, 図 3 から図 7 にこのシステムに対し提案した制御法を適用した場合と従来の unit vector approach の場合の

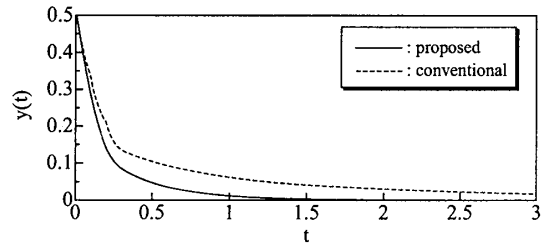


Fig. 3 Case of $\alpha = 0$, $\beta = 0$ and $\gamma = 0$

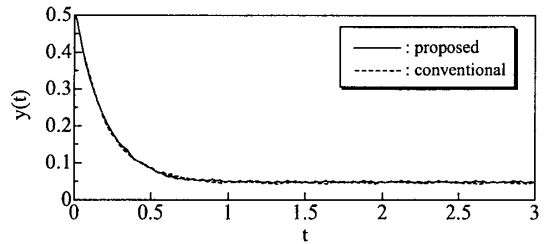


Fig. 4 Case of $\alpha = 0.04$, $\beta = 0.3$ and $\gamma = 0.2$

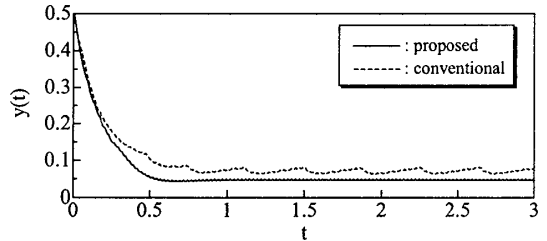
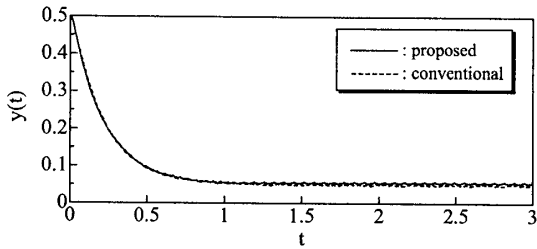
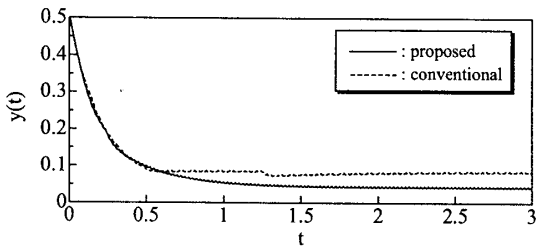


Fig. 5 Case of $\alpha = 0.04$, $\beta = -0.3$ and $\gamma = 0.2$

シミュレーション結果を示す. 不確定要素 α, β, γ の上限値の 1.2 倍を $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ として求めた ρ_0 および ρ_u を ρ として用いた. また, $G = [5 \ 1]$, $\Lambda = -10$, $\xi = 50$ としている. なお, サンプリング周期は 5msec である. シミュレーションは $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ の場合と α, β, γ の値がそれぞれ $\alpha = 0.04$ or -0.04 , $\beta = 0.3$ or -0.3 , $\gamma = 0.2$ or -0.2 のいずれかの値をとるすべての組み合わせに対して行っているが, $\gamma = -0.2$ の場合 $\gamma = 0.2$ の場合と定常状態において $y(t)$ が負の値に落ち着くことを除けばほぼ同じ傾向を示したのでここでは割愛している.

図からわかるように, 不確定要素の値によっては提案した制御法と従来の unit vector approach でほぼ同じ応答となる場合もあるが, いくつかのケースで従来の unit vector approach より良好な応答が得られている. 3章で検討したように状況によって提案した制御法が従来の unit vector approach と一致することもあり, その場合応答は特に改善されないが, 提案した制御法が有効に働く場合, 著しく応答が改善されていることがわかる.

Fig. 6 Case of $\alpha = -0.04$, $\beta = 0.3$ and $\gamma = 0.2$ Fig. 7 Case of $\alpha = -0.04$, $\beta = -0.3$ and $\gamma = 0.2$

おわりに

スライディングモード制御の切り換え制御入力は一
般に保守的になりがちである。有限サンプリング周期
でしか制御を切り換えることができない現実の制御
では、これが制御性能の悪化を招くことに着目し、保
守性を緩和する新たな切り換え制御則を提案した。そ
の際、考えているリヤプノフ関数の候補がリヤプノフ
関数となる条件を詳細に検討し、切り換えをよりきめ
細かく行うことで保守性を緩和できることを明らかに
した。シミュレーション結果でもその効果が示されて
いる。モデル追従型のスライディングモード目標値追
従系に対しても拡張できることを示したが、サーボ型
のスライディングモード目標値追従系^{(10),(11)}に対
しても容易に拡張できる。なお、ここでは unit vector
approach について検討したが、状態フィードバックの
各ゲイン係数を切り換える方法にも同様な議論が可能
である。

付録 1

以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d(\sqrt{V})^2}{dt} = 2\sqrt{V} \frac{d\sqrt{V}}{dt} \\ \sigma^T \sigma &= (P_2^{\frac{1}{2}} \sigma)^T P_2^{-1} (P_2^{\frac{1}{2}} \sigma) \geq \frac{1}{\lambda_{\max}} V \\ \|P_2 \sigma\| &= \sqrt{(P_2^{\frac{1}{2}} \sigma)^T P_2 (P_2^{\frac{1}{2}} \sigma)} \geq \sqrt{\lambda_{\min}} \sqrt{V} \end{aligned}$$

これらを式(14)に代入して整理すると、

$$\frac{d\sqrt{V}}{dt} \leq -\frac{1}{2\lambda_{\max}} \sqrt{V} - \xi \sqrt{\lambda_{\min}}$$

となる。したがって、初期値 $V(0)$ に対して次が得ら
れる。

$$\begin{aligned} \sqrt{V} &\leq e^{-\frac{1}{2\lambda_{\max}} t} \sqrt{V(0)} \\ &\quad - 2\xi \lambda_{\max} \sqrt{\lambda_{\min}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2\lambda_{\max}} t}\right) \end{aligned}$$

$t = t_f$ 時間内に $V = 0$ を達成することを保証するた
めには $t = t_f$ で上式の右辺 ≤ 0 であればよいので、これ
より ξ は式(15)を満足していればよいことがわかる。

付録 2

式(24b)は下に凸の関数であり、また $\rho \rightarrow \infty$ にお
ける勾配は下に示すように1より小さい。したがって、
勾配1である式(24a)の直線との交点は1つしか存在
せず ρ_0 は唯一である。ここで、 $\rho \rightarrow \infty$ で勾配が1よ
り小さいことは次のように示すことができる。式(24b)
より $\rho \rightarrow \infty$ での勾配は $|q^T \bar{\beta} q|$ である。 $\|q\| = 1$ で
あるので

$$|q^T \bar{\beta} q| \leq \max_{\|q\|=1} q^T \bar{\beta} q = \|\bar{\beta}\| \leq \|\beta\| < 1$$

が成立する。なお、上式の最後の不等号は本論文の仮
定(ii)による。

文 献

- (1) Utkin, V. I., *Sliding modes in control optimization*, Berlin: Springer-Verlag, (1992).
- (2) Nonami, K and Den, K, *Sliding Mode Control*, Tokyo: CORONA PUBLISHING CO., LTD., (1994)(in Japanese).
- (3) Edwards, C. and Spurgeon, S. K., *Sliding mode control-Theory and applications*, London: Taylor & Francis, (1998).
- (4) Utkin, V. I., Variable Structure Systems with Sliding Modes, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.22, No.2(1977), pp.212-222.
- (5) Slotine, J. J., Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators, *International Journal of Control*, Vol.38, No.2(1983), pp.465-492.
- (6) Cunha, J. P. V. S. et. al., Output-Feedback Model-Reference Sliding Mode Control of Uncertain Multivariable Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.48, No.12(2003), pp.2245-2250.
- (7) Hikita, H. et. al., Discrete-Time Sliding Mode Control for Linear Systems with Uncertainties, *Transactions of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*, Vol.15, No.1(2002), pp.50-52(in Japanese).
- (8) Hikita, H. et. al., Discrete Implementation of Continuous-Time Sliding Mode Control, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.687(2003), pp.2943-2949(in Japanese).

- (9) Zinober, A. S. I. et. al., Multivariable Variable-Structure Adaptive Model-Following Control Systems, *IEE Proceedings*, Vol.129, Pt.D, No.1(1982), pp.6-12.
- (10) Hikita, H., Servomechanisms Based on Sliding Mode Control, *International Journal of Control*, Vol.48, No.2(1988), pp.435-447.
- (11) Wang, J.-D. et. al., New Methods to Design an Integral Variable Structure Controller, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.41, No.1(1996), pp.140-143.
-