

## 不連続な基礎上に在る梁および矩形板の曲げ

その他（別言語等） のタイトル	On the Bending of Beams and Rectangular Plates on Elastic Foundation with Discontinuous Property
著者	能町 純雄
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	2
号	1
ページ	133-146
発行年	1955-12-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3061">http://hdl.handle.net/10258/3061</a>

# 不連続な基礎上に在る梁および 矩形板の曲げ

能 町 純 雄

## On the Bending of Beams and Rectangular Plates on Elastic Foundation with Discontinious Property

Sumio Nomachi

### Abstract

The bending moment at any point of the beam is expressed by integrating the product of the load intensity and the abscissa at the same point in the influence line. From the same manner, using the deflection influence line or surface, namely, the Green's function for the beam or the plate, the actual deflection may be written in a form of the 2nd kind Fredholm's equation.

In this paper, after developing the above mentioned integral equation, the writer proposes a brief approximate formula for the bending of the rectangular plate on a discontinious elastic foundation.

### 要 旨

梁の任意の点の曲げモーメントは、荷重強度と、曲げモーメント影響線の縦距との積の積分で表わされる。これと同様の考え方から、梁又は矩形板の撓み影響線（又は面）、即ち任意の点に作用する単位点荷重による撓みの式を用いて、性質が一樣でない弾性基礎上の梁又は矩形板の撓みを、第2種 Fredholm 積分方程式を解くことに依つて決定することができる。

### I 普 通 の 梁

#### i) 基本微分方程式

梁の撓みの基本微分方程式は、次の如く与えられる。

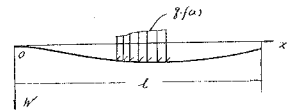
$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{g}{N} f(x) \quad (1)$$

上式中

$W$  = 沈下,  $g$  = 定数,  $f(x)$  = 梁の任意点の荷重強度,

$N = EI$  ( $E$  = 梁の弾性係数,  $I$  = 梁の断面二次モーメント)

計算の便上,  $W = (ql^4/N)y$ , ただし  $l$  = 径間長とすれば,  $y$  は dimension のない数で,



第 1 図

(1) 式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{f(x)}{l^4} \quad (2)$$

となる。

ii) 有限なフーリエ変換による一般解

$y''''$  ( $= \frac{d^4 y}{dx^4}$ ) の Green 積分は

$$\int_0^l (y'''' u - u'''' y) dx = [y''' u - y'' u' + y' u'' - y u''']_0^l$$

となる。上式中,  $u = \sin \frac{m\pi}{l} x$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) とおき, かつ  $S_m[y] = \int_0^l y \sin \frac{m\pi}{l} x dx$

なる記号を用いれば

$$S_m[y'''''] - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 S_m[y] = -\left(\frac{m\pi}{l}\right) \{(-1)^m y''_{x=l} - y''_{x=0}\} + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^3 \{(-1)^m y_{x=l} - y_{x=0}\}$$

を得る。上式左辺の  $y''''$  の代りに, (2) 式の右辺すなわち  $f(x)/l^4$  を代入して,  $S_m[y]$  の逆変換を作れば,  $y$  は, 次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt \\ &+ 2l \left\{ y''_{x=l} \sum_m \frac{(-1)^m}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi}{l} x - y''_{x=0} \sum_m \frac{1}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \\ &+ 2 \left\{ y_{x=l} \sum_m \frac{(-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{l} x - y_{x=0} \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

今単位荷重が  $x=t$  を中心点として幅  $2t_0$  内に一様に分布するものとすれば,

$$f(t') = \frac{1}{2t_0} \quad (t-t_0 < t' < t+t_0),$$

$$f(t') = 0 \quad (0 < t' < t-t_0, \quad t+t_0 < t' < l).$$

したがって

$$\begin{aligned} &\int_0^l f(t') \frac{\sin m\pi t'/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt' \\ &= \int_{t-t_0}^{t+t_0} \frac{\sin m\pi t'/l \cdot \sin m\pi x/l dt'}{2t_0(m\pi)^4} \\ &= \frac{l}{t_0} \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^5} = I \end{aligned}$$

故に

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} I = l \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4}.$$

よつて (3) 式中

$$2l^2 y''_{x=l} = C_1, \quad 2l^2 y''_{x=0} = C_2$$

$$y_{x=l} = C_1, \quad y_{x=0} = C_2$$

とおけば、点荷重に対する  $y$  は、次のように表わされる。

$$y = \frac{2}{l} \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} + C_1 \sum_m \frac{(-1)^m \sin \frac{m\pi x}{l}}{(m\pi)^3} - C_2 \sum_m \frac{1}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi x}{l} + C_1' \frac{x}{l} + C_2' \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (4)$$

未知数  $C_1, C_2, C_1', C_2'$  は、境界条件によつて与えられ、一般的には、この値によつて変化するものである。各境界条件を満足するように  $C_1, \dots, C_2'$  を調整すれば、(4) 式は  $x=t$  に単位点荷重が作用する場合の撓みを表わし、所謂 Green の函数となる。これを一般に  $G(xt)$

で表わせば、分布状態が  $F(t)$  なる荷重に対しては

$$y = \int_0^l F(t)G(xt)dt \quad (5)$$

と書くことができる。

### iii) $G(xt)$ の値

#### a. 単純梁

この場合の境界条件は

$$y_{x=0}=0, \quad y_{x=l}=0, \quad y''_{x=0}=0, \quad y''_{x=l}=0$$

したがつて  $C_1=C_2=C_1'=C_2'=0$

故に

$$G(xt) = \frac{2}{l} \sum_m \frac{\sin m\pi l/l \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} = \frac{t(l-x)\{x(2l-x)-t^2\}}{6l^3}, \quad x \geq t$$

$$= \frac{x(l-t)\{t(2l-t)-x^2\}}{6l^3}, \quad x \leq t \quad (6)$$

#### b. 固定梁

この場合には

$$y_{x=0}=0, \quad y_{x=l}=0, \quad y'_{x=0}=0, \quad y'_{x=l}=0$$

したがつて計算の結果

$$G(xt) = -\frac{1}{6} \frac{t^2(l-x)^2(2lx+tl-3xl)}{l^7}, \quad x \geq t$$

$$G(xt) = -\frac{1}{6} \frac{x^2(l-t)^2(2tx+xl-3tl)}{l^7}, \quad x \leq t \quad (7)$$

c. 片持梁

$x=0$  に於て固定され、 $x=l$  に於て自由な片持梁に対しては

$$y_{x=0}=0, \quad y''_{x=l}=0, \quad y'_{x=0}=0, \quad y'''_{x=0}=0 .$$

故に、前と類似の計算によつて

$$\left. \begin{aligned} G(x_i) &= -\frac{x_i l (l-3x_i)}{6l^4}, & x \leq i, \\ G(x_i) &= -\frac{i x (x-3i)}{6l^4}, & i \geq x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を得る。

II 基礎係数が位置によつて変化する弾性基礎上の梁

i) 基本微分方程式

変域  $(0, l)$  において、 $x$  によつて変化する基礎係数を  $K\varphi_x$  で表わせば、この基礎上に在る梁の平衡の微分方程式は、次の様に書くことができる。

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{8}{N} f(x) - \frac{K}{N} \varphi_x W,$$

ただし  $\varphi_x$  は、この変域で、 $1/2$  以下の極を有するものとする。

前と同様に、 $W = \frac{ql^4}{N} y$  とおけば、上式は次のようになる。

$$\frac{dy^4}{dx^4} = \frac{f(x)}{l^4} = \frac{K}{N} \varphi_x y \quad (9)$$

ii) 積分方程式の誘導

微分方程式 (9) の右辺を  $F(i)/l^4$  で表わせば、公式 (5) から

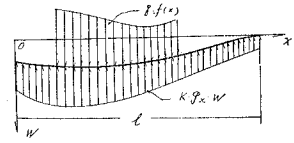
$$y = \int_0^l f(i) G(x_i) di - \frac{Kl^4}{N} \int_0^l \varphi_i y_i G(x_i) di \quad (10)$$

この式は、第二種 Fredholm の積分方程式で、 $G(x_i)$  は、境界条件に応じて (6), (7), (8) の如き函数で与えられ、基本領域に於て連続であるから  $\varphi_i$  が前記のような函数であれば、(10) 式は必ず解を有する。<sup>1</sup>

積分方程式 (10) において

$$f(i)=0, \quad \frac{K}{N} = \lambda, \quad y = \bar{y} \sqrt{\varphi(x)}, \quad l^4 G(x_i) = K(x_i)$$

とおけば、(10) 式は容易に次の如く変形される。



第 2 図

1 池田芳郎：積分方程式論 P.147

$$\bar{y} - \lambda \sqrt{\varphi(x)} \int_0^l \sqrt{\varphi(x)} K(xt) \bar{y}_t dt = 0$$

これに対応する微分方程式は、(9)式から

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + \lambda \varphi_x \bar{y} = 0$$

となり、弾性安定要覧 68 頁 1, 4, 8 の所論と一致する。

### iii) 単純梁に関する二、三の問題

a. 基礎係数が  $0 < x < l$  間に於て一定な場合

この場合は、 $\varphi_x = 1$  であるから、微分方程式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{K}{N} y = \frac{f(x)}{l^4} \quad (a)$$

となり、積分方程式は、(10)と(6)式から、次のようになる。

$$y = L_x - \frac{2Kl^3}{N} \int_0^l y_t \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt \quad (b)$$

ただし

$$L_x = 2l^3 \int_0^l f(t) \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt$$

この積分方程式(a)を解くにあたって次の公式を掲げておく『与えられた核をいくつかの直交核に分つことができる場合は、夫々の核に対する解の核を見出し、それを集めたものが全部の解の核である。』<sup>2</sup>

方程式(a)中の核

$$\sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} \quad \left( = \sum_m k_m(xt) \right)$$

において、各要素の間に

$$\int_0^l \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x_1/l}{(m\pi)^4} \frac{\sin i\pi x_1/l' \cdot \sin i\pi x/l}{(i\pi)^4} dx_1 = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ \frac{l}{2(m\pi)^8}, & i = m \end{cases}$$

の関係があるから、夫々の要素は、互に直交する。

したがって、任意の第  $m$  番目について解の核を求め、その  $\sum_m$  を作れば、積分方程式の解の核  $D(xt;\lambda)/D(\lambda)$  は求められ、 $y$  は

$$y = L_x - \int_0^l L_x \frac{D(xt;\lambda)}{D(\lambda)} dt, \quad \left( \lambda = \frac{2K}{lN} \right) \quad (11)$$

で表わされる。

<sup>2</sup> 池田芳那：積分方程式論 P.105

<sup>3</sup> 日高孝二：応用積分方程式論 P.62

また  $\lambda k_m(xt)$  に関する Fredholm の与えた解の核<sup>4</sup> は

$$\frac{D(xt;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\lambda k_m(xt) + \lambda^2 d_1(xt) + \lambda^3 d_2(xt) + \dots + \lambda^{n+1} d_n(xt) + \dots}{1 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \dots + \lambda^n d_n + \dots} \quad (12)$$

上式中,  $d_1(xt), d_2(xt), \dots, d_n(xt), \dots$  及び  $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$  は, 次に示す漸化式によつて定義される。すなわち

$$\left. \begin{aligned} d_0(xt) &= k_m(xt) , \\ d_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} \int_0^t d_n(xt) dt , \\ d_n &= k_m(xt) d_n + \int_0^t k_m(xt_1) d_{n-1}(t_1 t) dt_1 . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

故に  $k_m(xt) = \frac{\sin m\pi/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4}$

をこれらの式に適用すれば

$$\left. \begin{aligned} d_0(xt) &= \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} , \\ d_1 &= -\frac{l}{2} \frac{1}{(m\pi)^4} , \\ d_1(xt) &= 0 , \\ d_2 &= 0 , \\ d_2(xt) &= 0 , \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

すなわち  $d_0(xt)$  と  $d_1$  だけを残し, その他はすべて零となるから, この場合の解の核は, 次の様に与えられる。

$$\frac{D(xt;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\lambda k_m(xt)}{1 + \lambda d_1} = \frac{2l^3 K}{N} \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4 + Kl^4/N} , \quad (d)$$

故に, これを  $m (=1, 2, 3, \dots)$  について加え合せて, 公式 (11) に代入すれば

$$y = L_x - \int_0^t L_t \frac{2lK}{N} \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4 + Kl^4/N} dt \quad (e)$$

しかるに

$$L_x = \frac{2}{l} \sum_m \frac{\sin m\pi x}{l} \left\{ \frac{S_m[f(x)]}{(m\pi)^4} - \frac{Kl^4}{N} \frac{S_m[f(x)]}{(m^4\pi^4 + Kl^4/N)(m\pi)^4} \right\} .$$

したがつて

$$y = \frac{2}{l} \sum_m \frac{S_m[f(x)]}{(m\pi)^4 + Kl^4/N} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (f)$$

4 日高孝二：応用積分方程式論 P.62

この結果は

$$y = \sum_m A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

とおき、係数  $A_m$  を、この式が微分方程式

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{K}{N} y = \frac{f(x)}{l^4}$$

を満足する様に定めることによつて得られる解と全く同一である。

b. 弾性支点が中央に在る場合

この場合は、不連続な基礎の特殊な場合であるが、点支点を微小巾なる弾性支点によつて支えられるものと仮定する。しかる時は  $t=l/2$  に対して  $\varphi_x=1$ 、其の他の点に対しては  $\varphi_x=0$  となり、かつ  $G(x,t)$  は公式 (6) により

$$G(x,t) = \frac{t(l-x)\{x(2l-x)-t^2\}}{6l^5}, \quad x \geq t$$

$$G(x,t) = \frac{x(l-t)\{t(2l-t)-x^2\}}{6l^5}, \quad x \leq t$$

で与えられる。したがつて積分方程式 (10) は次のようになる。

$$y = L_x - \frac{K\varepsilon}{N} y_{x=l/2} G\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (a)$$

上式中

$$G(x - l/2) = \frac{l}{48} (3l^2 x - 4x^3), \quad x \leq \frac{l}{2}$$

$$G(x - l/2) = \frac{l}{48} (3l^2(l-x) - 4(l-x)^3), \quad x \geq \frac{l}{2}$$

$y_{x=l/2}$  の値を求めるために、(a) 式において  $x=l/2$  とおけば

$$y_{x=l/2} = - \frac{L_{x=l/2}}{1 + \frac{K\varepsilon}{N} G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)}$$

故に

$$y = L_x - \frac{K\varepsilon}{N} \frac{L_{x=l/2} G\left(x - \frac{l}{2}\right)}{1 + \frac{K\varepsilon}{N} G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)}, \quad (b)$$

上式中  $K\varepsilon \rightarrow \infty$  とおけば、中央が剛支点の場合の式となる。すなわち

$$y = L_x - L_{x=l/2} G\left(x - \frac{l}{2}\right) / G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)$$

滿載等分布に対しては

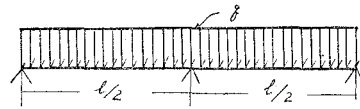
$$L_x = \frac{1}{24} \left\{ \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right\} \quad (c)$$



となるから、このような荷重を受け、両端および中央部の三剛支点によつて単純に支えられた二連々続梁の  $y\left(=-\frac{N}{ql^4}W\right)$  は

$$y = \frac{1}{384} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{16x^3}{l^3}\right) \quad \left(x \leq \frac{l}{2}\right)$$

で表わされる。この結果は、普通の方法によつて求めたものと全く同じであることは言を要しない。



第 3 図

## II 矩形型不連続領域を有する弾性基礎にある矩形板

### i) 性質一様な弾性基礎にある矩形板の単位点荷重による撓み

基礎係数が  $K_1$  (定数) なる基礎にある第 4 図の如き矩形板に荷重  $qf(xy)$  が作用した場合の  $\xi\left(=-\frac{N}{qb^4}W\right)$  は、次のように興えられる。

$$\xi = \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi x/a \cdot \sin n\pi y/b}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + \lambda^4} \left[ \frac{4}{ab} \frac{1}{b^4} S_m S_n [f(xy)] \right. \\ \left. + \frac{4m\pi}{a^2 b} \left\{ (-1)^m S_n [(M_x)_{x=a}] - S_n [(M_x)_{x=0}] \right\} \right. \\ \left. - \frac{4\pi^3}{ab} \left( \frac{m^3}{a^3} + (2-\nu) \frac{mn^2}{ab^2} \right) \left\{ (-1)^m S_n [\xi_{ay}] - S_n [\xi_{0y}] \right\} \right. \\ \left. + \frac{4n\pi}{ab^2} \left\{ (-1)^n S_m [(M_y)_{y=b}] - S_m [(M_y)_{y=0}] \right\} \right. \\ \left. - \frac{4\pi^3}{ab} \left( \frac{n^3}{b^3} + (2-\nu) \frac{m^2 n}{a^2 b} \right) \left\{ (-1)^n S_m [\xi_{xb}] - S_m [\xi_{x0}] \right\} \right. \\ \left. - \frac{8mn\pi^2(1-\nu)}{ab} \left\{ (-1)^{m+n} \xi_{ab} - (-1)^m \xi_{a0} - (-1)^n \xi_{0b} + \xi_{00} \right\} \right], \quad (11)$$

ただし  $\lambda^4 = \frac{K_1}{N}$ ,  $N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $E$  = 板の弾性係数,

$\nu$  = 板のポアソン比,  $h$  = 板の厚さ。

荷重が第 4 図に示すような面積  $4x_1 y_1$  内に一様に分布される場合は

$$f(xy) = \frac{1}{4x_1 y_1} \begin{cases} s-x_1 < x < s+x_1 \\ t-y_1 < y < t+y_1 \end{cases},$$

$$f(xy) = 0 \quad \text{その他の部分,}$$

したがつて

$$S_m S_n [f(xy)] = \int_{s-x_1}^{s+x_1} \int_{t-y_1}^{t+y_1} \frac{1}{4x_1 y_1} \sin \frac{m\pi}{a} s \cdot \sin \frac{n\pi}{b} t \, ds \, dt$$

故に (s;) 点に於る単位点荷重に対しては

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ y_1 \rightarrow 0}} S_m S_n [f(xy)] = \sin \frac{m\pi}{a} s \cdot \sin \frac{n\pi}{b} i$$

又々中の未知数  $S_n[(M_x)_{x=a}]$ ,  $S_n[(M_x)_{x=0}]$ ,  $S_m[(M_y)_{y=b}]$ ,  $S_m[(M_y)_{y=0}]$ ,  $S_n[\zeta_{ay}]$ ,  $S_m[\zeta_{oy}]$ ,  $S_m[\zeta_{xb}]$ ,  $S_m[\zeta_{xo}]$ ,  $\zeta_{ab}$ ,  $\zeta_{ao}$ ,  $\zeta_{o'}$ ,  $\zeta_{oo}$  は、境界条件を適用することによつて (s;) の函数で与えられ、単位点荷重に対する撓み  $\zeta$  は次の様に書くことができる。

$$\zeta = G(s; ixy).$$

この式が、弾性基礎上矩形板に対する Green 函数である。よつて荷重  $F(xy)$  に対する撓みは、一般に

$$\zeta = \int_0^a \int_0^b F(s; i) G(s; ixy) ds di \tag{15}$$

で表わされる。

ii) 矩形型不連続基礎上に在る矩形板

第5図に示す如く、矩形領域

$$x_0 - x_1 < x < x_0 + x_1, \quad y_0 - y_1 < y < y_0 + y_1$$

の部分の基礎係数を  $K_1 + K_2$ , その他の基礎係数を  $K_1$  とすれば、この場合の基本微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{K_1}{N} W \\ &= \frac{q}{N} f(xy) - \frac{K_2}{N} W, \end{aligned}$$

あるいは

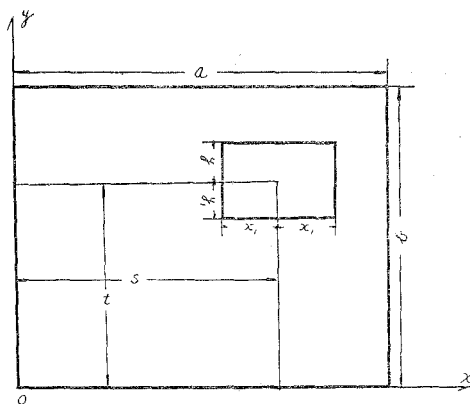
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} + \frac{K_1}{N} \zeta \\ &= \frac{1}{b^4} f(xy) - \frac{K_2}{N} \zeta, \end{aligned} \tag{16}$$

ただし

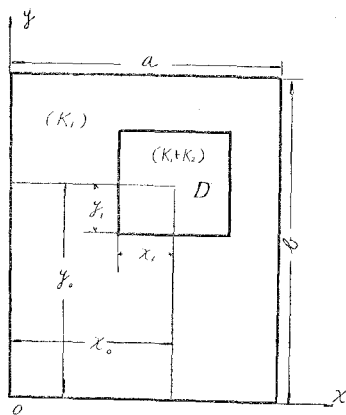
$$W = \frac{qb^4}{N} \zeta, \quad K_2 \text{ は第5図の } D \text{ 内のみに存在する不連続な値.}$$

上式は、 $K_1$  (定数) なる弾性基礎上に在る矩形板が荷重  $qf(xy) - \frac{K_2 b^4}{N} \zeta$  を受ける場合の

$$\tag{141}$$



第 4 図



第 5 図

基本微分方程式と見做すことができる。したがって (15) 式の  $F(st)$  はこの場合

$$qf(xy) - \frac{K_2 b^4}{N}$$

$$\zeta = \int_0^a \int_0^b \left\{ f(st) - \frac{K_2 b^4}{N} \zeta \right\} G(stxy) ds dt, \quad (17)$$

便宜上

$$\int_0^a \int_0^b f(st) G(stxy) ds dt = L_{xy}$$

とおけば、上式は次のように書き換えられる。

$$\zeta = -\frac{K_2 b^4}{N\pi^4} \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} \int_{y_0-y_1}^{y_0+y_1} \zeta_{st} G(stxy) ds dt + L_{xy}. \quad (18)$$

これは二次元函数に拡張された Fredholm の第二種積分方程式で、四辺が単純に支持される場合は

$$G(stxy) = \sum_m \sum_n \frac{4}{ab} \frac{a^4}{b^4} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} s \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} t \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y}{\pi^4 \{ (m^2 + \alpha_n^2)^2 + c^4 \}}, \quad (19)$$

ただし

$$\alpha_n = \frac{a}{b} n, \quad c^4 = \frac{a^4}{\pi^4} \frac{K}{N}$$

となるが、それ以外の境界条件に対しては、簡単な形で与えられない。

### iii) 特殊な場合に対する近似公式

積分方程式 (18) は、一般に厳密に解くことは極めて困難である。しかし第 5 図に示す不連続基礎の部分  $D$  の面積が小さく、かつ荷重はこの部分を含んで分布され、この部分の  $\zeta$  が一様であると考えられる場合は、これを近似的に解くことができる。すなわち矩形領域  $x_0-x_1 < x < x_0+x_1$ ,  $y_0-y_1 < y < y_0+y_1$  内に於る  $\zeta$ ,  $L_{xy}$ ,  $H_{xy}$

ただし

$$H_{xy} = \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} \int_{y_0-y_1}^{y_0+y_1} G(stxy) ds dt$$

の値は、夫々点  $(x_0, y_0)$  に於る  $\zeta$ ,  $L_{xy}$ ,  $H_{xy}$  の値すなわち  $\bar{L}$ ,  $\bar{H}$  に等しいものと仮定すれば (18) 式より近似的に、次の関係が成立する。

$$\bar{\zeta} = -\lambda^4 \bar{\zeta} \bar{H} + \bar{L}, \quad \text{ただし } \lambda^4 = \frac{a^4 K_2}{N\pi^4}$$

したがって

$$\bar{\zeta} = \frac{\bar{L}}{1 + \lambda^4 \bar{H}}. \quad (20)$$

この値を (18) 式に代入して、 $\zeta$  の近似値

$$(142)$$

$$\zeta = -\frac{\lambda^4 \bar{L}}{1 + \lambda^4 N} H_{xy} + L_{xy} \quad (21)$$

を得る。

この式は、前記のような仮定を本とし誘導した一近似式ではあるが、これによつて基礎の不連続の状態の板の曲におよぼす影響の大体を知ることができる。

iv) 数値計算例

a. 中央部の正方形部分の基礎係数が他の部分と異なる場合

第6図のごとく、中央部における正方形部分  $a/4 \cdot a/4$ 、および其の他の部分の基礎係数を夫々  $K_1 + K_2$  および  $K_1$  とし、かつ

$$a = 400 \text{ cm}, \quad K_1 = 10 \text{ kg/cm}^2$$

とする。荷重は、基礎係数  $K_1 + K_2$  なる部分面積  $a^2/16$  内に一様に分布されるものと仮定すれば、この場合  $H_{xy} = L_{xy}$  で、境界の四辺及び四隅が完全に自由な場合に対する  $H_{xy}$  の値は、次表に示す通りである。

これらの結果を用いれば

$$C_1^4 \bar{L} = 0.0378 K_2, \quad C_1^4 \bar{H} = 0.0378 K_2$$

したがつて公式 (21) から、次の関係を得る。

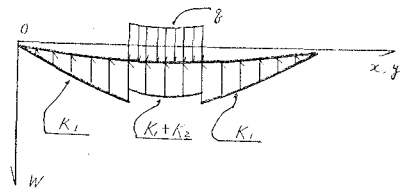
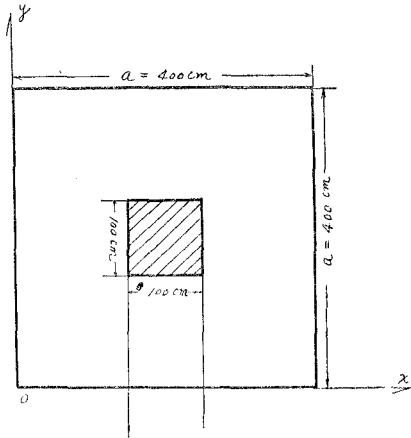
$$\zeta = H_{xy} - \frac{0.0378 K_2}{1 + 0.0378 K_2} H_{xy} .$$

$K_2$  については、常に  $K_2 \geq -K_1$  なることを要する。何となれば  $K_2 = -K_1$  は、基礎が中央部分に欠除していることを表わし、 $K_2 < -K_1$  は実際的の意味を有しないからである。

又  $K_2 \rightarrow \infty$  は、その部分の基礎が全く剛であることを意味している。

$H_{xy}$  の値 (cm)

$x/a \backslash y/a$	0/3	1/8	2/3	3/3	4/8
0/3	-0.00231	-0.00212	-0.00174	-0.00166	-0.00166
1/8	-0.00212	0.00096	0.00123	0.00307	0.00394
2/3	-0.00174	0.00123	0.00557	0.01099	0.01374
3/3	-0.00166	0.00307	0.01099	0.02253	0.02893
4/8	-0.00166	0.00394	0.01374	0.02893	0.03784



第 6 図

上式から、基礎が正方形の全領域に一樣、すなわち  $K_2=0$  に対する撓み、及び曲げモーメントを夫々  $W_0, M_{x_0}$  とすれば、任意の  $K_2$  に対する、中央点の撓みおよび  $x$  方向の曲げモーメント  $W, M_x$  は近似的に次のごとく興えられる。

$$W = W_0 \frac{0.0378K_2W_0}{1+0.0378K_2^2} = \frac{W_0}{1+0.0378K_2}$$

$$M_x = M_{x_0} \frac{0.0378K_2M_{x_0}}{1+0.0378K_2^2} = \frac{M_{x_0}}{1+0.0378K_2}$$

この場合の、 $W_0, M_{x_0}$  の最大は、中央面分に基礎が欠除している場合、すなわち  $K_2=-K_1$  のときに起り、各値は

$$W = 1.6W_0, \quad M_x = 1.6M_{x_0}$$

したがって基礎が一樣な場合にくらべ約60%大きくなる。又  $K_2 \rightarrow \infty$  に対しては、 $W=0, M=0$ 、すなわち荷重直下の基礎が剛ならば、板の曲げは生じない。

b. 一隅の小部分の基礎係数が他の部分と異なる場合

第7図に示す  $OABC$  の部分の基礎係数を  $K_1+K_2$ 、それ以外では  $K_1$  とし荷重は斜線のごとく帯状に分布されるものと仮定する。公式(21)中の  $L_{xy}$  は、基礎係数  $K_1$ 、荷重  $qf(xy)$  および境界条件によって左右されるものであるが、この場合は  $K_1$  と  $qf(xy)$  とは定数で、且つ四隅共完全に自由であるから、 $L_{xy}$  は  $y$  方向には変化しないものと仮定することができる。したがって  $L_{xy}$  (単に  $L$  と書く) は近似的に次の方程式を満足する。

$$\frac{d^4L}{dx^4} + \frac{K_1}{N}L = \frac{f(x)}{a^4}$$

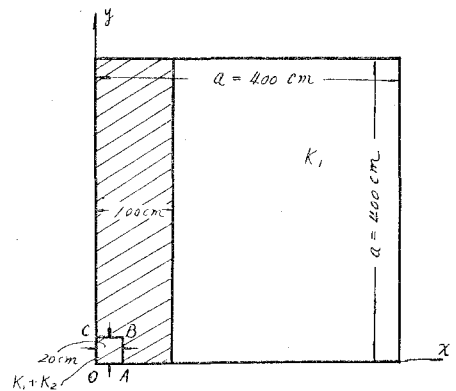
辺長： $a=400\text{cm}$ 、板の厚さ： $h=30\text{cm}$ 、 $E=210,000\text{kg/cm}^2$ 、 $K_1=12\text{kg/cm}^2$

面積  $OABC=20 \times 20\text{cm}^2$  なる正方形板に対し、上式を根拠として計算した曲げモーメントは次の通りである。ただし  $q=1$  とする。

$x/a$	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
$M_x$	-905	1801	-1683	-1925	-590	-976	-435

また計算の結果

$$\lambda^4(L_{xy})_{\substack{y=10\text{cm} \\ x=10\text{cm}}} = \lambda^4L = 0.125K_2$$



第 7 図

次に  $H_{xy}$  については,  $H_{xy} \frac{a^4}{N}$  の値が次表の通り求められる。

$x/a \backslash y/a$	0	1/8	1/4	1/2	3/4	7/8	1
0	0.00531	0.00351	0.00201	0.00042	0.00003	-0.00016	-0.00021
1/2	0.00003	0.00001	0.00000	-0.00001	0.00000	0.00000	0.00000

したがって上表から,  $x=y=10\text{cm}$  の  $H_x$  の値を求め

$$\lambda^4 \bar{H} = K_2 \times 0.00514$$

これと (21) 式より

$$\zeta = L_{xy} - \frac{0.125K_2}{1+0.00514K_2} H_{xy} .$$

$K_2$  の任意の値に対する撓みと曲げモーメントが上式から計算される。上式中  $K_2$  の値は,  $K_1$  が  $12\text{kg/cm}^3$  であるから, 前と同じ理由で  $K_2 < -12\text{kg/cm}^3$  でなくてはならない。

次に  $K_1$  は常に  $12\text{kg/cm}^3$  とし

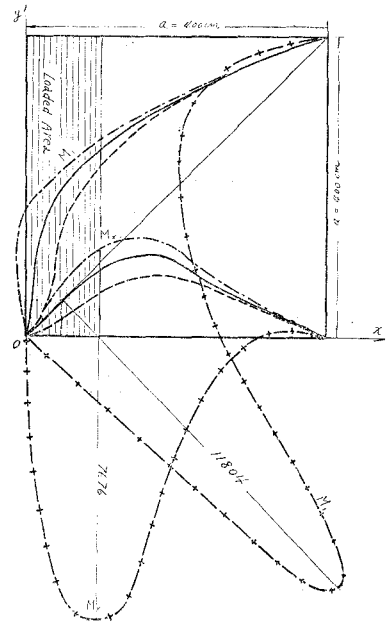
$$K_2 = -12, 0, +12, \infty \text{ (kg/cm}^3\text{)}$$

なる三つの場合について, 断面  $y=0$ , および  $y=200\text{cm}$  における  $x$  方向の曲げモーメント  $M_x$  ならびに対角線断面における, 主曲げモーメント  $M_1$  を計算すれば, 下表および第8図に示す通りである。ただし  $q=1$  とする。

位 置		$M_1$ の 値 (kg·cm/cm)			
$x/a$	$y/a$	$K_2 = -12\text{kg/cm}^3$	$K_2 = 0$	$K_2 = 12\text{kg/cm}^3$	$K_2 = +\infty$
$\frac{1}{8}$	0	-1740	-905	-171	11804
$\frac{1}{4}$	0	-2360	-1801	-1307	7704
$\frac{1}{2}$	0	-2054	-1925	-1803	189
$\frac{3}{4}$	0	-978	-976	-975	999
$\frac{7}{8}$	0	-416	-435	-450	702
位 置		$M_x$ の 値 (kg·cm/cm)			
$x/a$	$y/a$	$K_2 = -12\text{kg/cm}^3$	$K_2 = 0$	$K_2 = 12\text{kg/cm}^3$	$K_2 = +\infty$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-1390	-905	-476	6482
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2424	-1801	-1252	7676
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2263	-1925	-1626	3226
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	-1041	-976	-919	20
$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	-423	-435	+445	-237

-----	$K_1 = 12\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3}$	$K_2 = -12\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3}$
-----	"	$K_2 = 0$
-----	"	$K_2 = +12$
- + - + - + -	"	$K_2 = +\infty$

第8図 1隅が不連続な弾性基礎に在る矩形板に、その同じ側に覆帯荷重を受けた場合の  $M_x$  および  $M_y$  線図



上記の結果により、 $K_2 = \infty$  すなわち一隅の基礎が剛なる程その近傍の曲げモーメントは、大きくなり危険な状態になることがわかる。この計算は、一近似方法に過ぎないが、これによつて融雪季に起り勝ちな不連続基礎の上の舗装板の応力状態の大体を知ることが出来るであろう。

(昭和 30 年 5 月 31 日受理)