Heaviside演算子の変定数回路に対する応用

その他（別言語等）のタイトル	An Application of Heaviside Operators to Variable- constant Circuit Problem
著者	山上　孝, 三浦　五郎, 伊達　隆三
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	2
号	1
ページ	29-37
発行年	1955-12-20
URL	http://hdl.handle.net/10258/3055

Heaviside 演算子の変定数回路に対する応用

山上　孝　三浦五郎　伊達隆三

An Application of Heaviside Operators to Variable-constant Circuit Problem

Takashi Yamagami, Goro Miura and Ryuzo Date

Abstract

The paper treats a differential equation of a L, C series circuit of which L makes periodical variation with time. This equation has the following form.

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}(1+y)+C\right\}i=e\cos(t+\varphi)$$

$$y=z\cos 2(t+\varphi),\qquad |y|<1$$

Making Maclaurin Expansion in the neighbor of $y=0$ by the partial differentiation, and applying Heviside's Expansion Theorem to each term, a strict solution of the equation can be obtained as in the following formula.

$$i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\frac{\partial^n i}{\partial y^n}\right)_{y=0}\cos^n 2(t+\varphi)$$

The procedure for getting evaluation of $\left(\dfrac{\partial^n i}{\partial y^n}\right)_{y=0}$ is discussed in detail.

I　緒　　言

電気回路の解析にあたり，吾々は多くの定係数微分方程式に遭遇するが，実際にはそうでない場合も少くない。例えば回路が週期的に変化するもの，あるいは非線型のものなどはこれに属し，これ等の多くは Hill の微分方程式[1] に帰着せしめられるのである。本報は週期的変化の回路要素を有する一変定数回路の解析に資せんとするべく，凸極同期機が無負荷の長距離送電線に接続される場合に，惹起された不平衡故障の際に現われる微分方程式の，厳密解を取り扱つたものである。

この場合一般に数値計算を除いては厳密な解析的解は出し得ないのである。平衡故障を起した場合のこの問題については，すでに筆者の一人が幾多にわたり発表した。しかし不平衡故障の場合は本報告別頁にある如く，ある特定の近似のもとで Laplace 変換を行つた近似解を求

1　E. T. Whittaker & G. N. Watson : A Course of Modern Analysis,　P. 406

める方法以外には，本報告を除いては数学的取り扱いはまず不可能ではないかと考える。工学的見地より眺めて，結果が解析解であることはもちろんのことであり，実際の計算を行う場合を考え級数で表現した方が好都合である。

すなわち抵抗が r，インダクテブ・リアクタンスが $A+B\cos2(t+\varphi)$，キヤシテブ・リアクタンスが x_c のごとき直列共振回路に，正弦波交番電圧 $e_0\sin(t+\varphi)$ を印加した場合の，一般解は普通は求めることができない。（単位法を採用して $\omega=1$ とおく）キヤパシタンスが無い場合は近似的に解は求まる。[2,3] キヤパシタンスがある場合でも，その particular solution については二階の常微分方程式である故，無限級数の形として導出されることは明らかである。これについてはすでに別頁に発表した。[4]

しかるに筆者等はまず抵抗 r が零の，いわゆる非減衰共振回路の場合について，Heaviside 演算子法を巧みに応用することによつて，この一般解を一挙に導くことができた。ここに報告するのはその結果である。抵抗をも考慮した場合の式は一層複雑するため，いまだ結果を得て居らず検討中であるが，多分この場合も同一の演算により解き得るものと思惟する。

得た結果はただし，相当に複雑であつてこれより簡単な物理的解釈を得ることは到底困難である。しかしかような解析が未着手のまゝ今日まで放置されていたことより鑑み，一般解導出にともあれ光明を見たことは，今後の研究に資する処ありと考察し発表した次第である。

II　変定数微分方程式の取り扱い

既述のごとく変定数インダクタンスとキヤパシタンスならびに抵抗の直列回路について

$$ri+\frac{d}{dt}(A+B\cos2\theta)i+\int x_c i\,dt=e_0\sin\theta \tag{1}$$

$$\theta=t+\varphi$$

のごとき微分方程式が成立する。両辺を一度 t で微分してさらに

$$\frac{B}{A}=z,\qquad \frac{r}{A}=R,\qquad \frac{x_c}{A}=c,\qquad \frac{e_0}{A}=e \tag{2}$$

のごとくおく。z はインダクタンス不変化分に対する変化分振幅の割合を表わすもので，電気回路においてはこの値は1より小さい。

$$|z|<1 \tag{3}$$

$\dfrac{d}{dt}=p$ のごとく書き表わせば（1）式は

2　三浦五郎：25回連大　5—27　（昭26年5月）

3　三浦五郎，秋山稠：東京支部連大　5—20　（昭26年11月）

4　三浦五郎，山上孝：Laplace 変換による一変定数回路の解析，本研究報告　2，P. 15（1955）

$$\{p^2(1+z\cos 2\theta)+pR+c\}i=e\cos\theta \tag{4}$$

となる。また $R=0$ とする時は

$$\{p^2(1+z\cos 2\theta)+c\}i=e\cos\theta \tag{5}$$

である。（4）または（5）式を普通の形に表わすには p^2 などを小括弧の右に持ち来らせばよく

$$p^2 z\cos 2\theta=z\cos 2\theta\cdot p^2-4z\sin 2\theta\cdot p-4z\cos 2\theta$$

となることに注意して書き表せば（4）式は

$$[(1+z\cos 2\theta)p^2+(R-4z\sin 2\theta)p+(c-4z\cos 2\theta)]i=e\cos\theta$$

すなわち

$$\left\{p^2+\frac{R-4z\sin 2\theta}{1+z\cos 2\theta}p+\frac{c-4z\cos 2\theta}{1+z\cos 2\theta}\right\}i=\frac{e\cos\theta}{1+z\cos 2\theta} \tag{6}$$

となる。各係数は θ についてそれぞれ次のごとく Fourier 級数に展開できる。[5]

$$\frac{1}{1+z\cos 2\theta}=\frac{2}{\sqrt{1-z^2}}\left[\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}b^{\nu}\cos 2\nu\theta\right]$$

$$\frac{\sin 2\theta}{1+z\cos 2\theta}=\frac{2}{1+\sqrt{1-z^2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}b^{\nu-1}\sin 2\nu\theta$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+z\cos 2\theta}=\frac{2}{\sqrt{1-z^2}\,(1+\sqrt{1-z^2}\,)}\left[-\frac{z}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}b^{\nu-1}\cos 2\nu\theta\right]$$

$$b=\frac{\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}}$$

（3）式より $|z|<1$ である。

（6）式より明らかなごとくもし $R=4z\sin 2\theta$ という条件が仮りにあれば，該式は Hill の微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\theta_0+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\theta_\nu\cos 2\nu t\right)x=0$$

の $\theta_0=0$ の場合に相当する。即ち（6）式は Hill の微分方程式の一般的な形となつている。

さてこの様に複雑な恰好にしたのでは到底解けないから，（6）式ではなく（5）式をその儘解こうとするのである。すなわちいま

$$y=z\cos 2\theta \tag{7}$$

とおいて（5）式を

5　Bromwich : An Introduction to Theory of Infinite Series, P. 186

$$\{p^2(1+y)+c\}i=e\cos\theta \tag{8}$$

とする。もちろん y は t の函数であつて $p^2y \neq yp^2$ なることは明らかである。

（3）式より判る通り $|y|<1$ であり，上式を y で偏微分した場合の導函数は一価連続であることより，（8）式の i を $y=0$ の近傍において Maclaurin 展開でができるはずである。

$$i=i_0+\frac{i_0'}{1!}y+\frac{i_0''}{2!}y^2+\frac{i_0'''}{3!}y^3+\cdots\cdots\cdots\infty \tag{9}$$

ただし i_0 は（8）式で，$y=0$ とおいて求めた電流演算子解であり

$$(p^2+c)i_0=e\cos\theta$$

$$i_0=\frac{e}{p^2+c}\cos\theta$$

i_0' は（8）式を y で偏微分した結果に $y=0$ とおいて，得られた i に上の i_0 を代入し演算子解を行つたもので

$$p^2i+\left\{p^2(1+y)+c\right\}\frac{\partial i}{\partial y}=0$$

$$p^2i_0+(p^2+c)i_0'=0$$

$$i_0'=\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{p^2}{p^2+c}i_0=\frac{(-1)1!p^2}{(p^2+c)^2}e\cos\theta$$

i_0'' は同様 y で2度偏微分した結果に，$y=0$ および i_0' を代入して求まり

$$p^2\frac{\partial i}{\partial y}+p^2\frac{\partial i}{\partial y}+\left\{p^2(1+y)+c\right\}\frac{\partial^2 i}{\partial y^2}=0$$

$$2p^2i_0'+(p^2+c)i_0''=0$$

$$i_0''=\left(\frac{\partial^2 i}{\partial y^2}\right)_{y=0}=-\frac{2p^2}{p^2+c}i_0'=\frac{(-1)^2 2!p^4}{(p^2+c)^3}e\cos\theta$$

同様に

$$i_0'''=\left(\frac{\partial^3 i}{\partial y^3}\right)_{y=0}=\frac{(-1)^3 3!p^6}{(p^2+c)^4}e\cos\theta$$

一般に

$$i_0^{(n)}=\left(\frac{\partial^n i}{\partial y^n}\right)_{y=0}=\frac{(-1)^n n!p^{2n}}{(p^2+c)^{n+1}}e\cos\theta \tag{10}$$

である。

（10）式の一般解を得れば，その集合である（9）式が表現され解が得られる訳である。以下（10）式の演算解を導出せんとするが，見る通りかなり複雑な過程であり到底簡潔な結果ではないが，ともあれ変定数インダクタンス回路の非減衰共振回路の過渡電流はかくも複雑となるのである。初期条件は $i=0$ にて電流及び電荷が無いすなわち $i=0$, $q=\dfrac{di}{dt}=0$　である

が，これは Heaviside 演算子の解中に自動的に含まれるため，何等の考慮の必要はない。

Ⅲ 変定数回路の演算子解

(10) 式の演算子解は次の様にして解き得る。

$$\theta = t + \varphi$$

$$c = \lambda^2$$

とおけば

$$i_0^{(n)} = \frac{(-1)^n n! p^{2n}}{(p^2+\lambda^2)^{n+1}} \cdot e \frac{p^2\cos\varphi - p\sin\varphi}{p^2+1}$$

$$= \frac{(-1)^n n!\, e(p^{2n+2}\cos\varphi - p^{2n+1}\sin\varphi)}{(p+j\lambda)^{n+1}(p-j\lambda)^{n+1}(p+j)(p-j)} \tag{11}$$

(11) 式は $j\lambda$ 及び $-j\lambda$ のそれぞれ $n+1$ 重根と j および $-j$ の単根を有している。さて2種の重根を有する場合の展開定理は公式集より次のごとく与えられる。[6]

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \frac{M(p)}{(p-p_1)^r(p-p_2)^s N_1(p)}$$

$$= \frac{1}{(-p_1)^r(-p_2)^s} \cdot \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{n=3}^{m} \frac{1}{(p_n-p_1)^r(p_n-p_2)^s} \cdot \frac{M(p_n)}{p_n N_1'(p_n)} \varepsilon^{p_n t}$$

$$+ \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{\partial^{r-1}}{\partial p^{r-1}}\left\{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(p-p_2)^s} \cdot \frac{M(p)}{N_1(p)} \varepsilon^{pt}\right\}\right]_{p=p_1}$$

$$+ \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{\partial^{s-1}}{\partial p^{s-1}}\left\{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(p-p_1)^r} \cdot \frac{M(p)}{N_1(p)} \varepsilon^{pt}\right\}\right]_{p=p_2} \tag{12}$$

ただし p_n ($n=3, 4, \cdots\cdots, m$) は $N_1(p)=0$ の根。

(12) 式によつて (11) 式を展開すれば

$$\begin{cases} M(p) = (-1)^n n! e(p^{2n+2}\cos\varphi - p^{2n+1}\sin\varphi) \\ M(0) = 0 \\ M(j) = -n! e\varepsilon^{j\varphi} \\ M(-j) = [M(j)]^* \\ N_1(p) = p^2+1 \\ N_1'(j) = 2j, \quad N_1'(-j) = -2j \end{cases}$$

を用いて次のごとくなる。

$$i_0^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} n! e}{(1-\lambda^2)^{n+1}} \cdot \frac{\varepsilon^{j\varphi}\varepsilon^{jt}}{2} + Conj$$

$$+ (-1)^n e\left[\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left\{\frac{p^{2n+2}\cos\varphi - p^{2n}\sin\varphi}{(p+j\lambda)^{n+1}} \cdot \frac{\varepsilon^{pt}}{(p+j)(p-j)}\right\}\right]_{p=j\lambda} + Conj$$

---

6 電気工学ハンドブック，P. 186

ただし $M(p)^*$ は $M(p)$ の共軛値を表わし, $Conj$ とはその直前の項の共軛値を表わすことにする。

さて Leibnitz の定理より函数の積の高次導函数は

$$(uv)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r u^{(r)}v^{(n-r)} \tag{13}$$

であるから, これを用いて $i_0{}^{(n)}$ の p に関する n 次導函数 $\frac{\partial^n}{\partial p^n}\Big[\qquad\Big]$を展開する。

$$i_0{}^{(n)}=\frac{n!e}{(\lambda^2-1)^{n+1}}\cos(t+\varphi)$$

$$+(-1)^n e\Big[\sum_{q=0}^{n}{}_nC_q\Big\{\frac{p^{2n+1}\cos-p^{2n}\sin\varphi}{(p+j\lambda)^{n+1}(p+j)(p-j)}\Big\}^{(q)}\cdot(\varepsilon^{pt})^{(n-q)}\Big]_{p=j\lambda}+Conj$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

ここで

$$(\varepsilon^{pt})^{(n-q)}=\frac{\partial^{n-q}}{\partial p^{n-q}}\varepsilon^{pt}=t^{n-q}\varepsilon^{pt}$$

であり, 一方中括弧の内部の q 次導函数（仮にこれを F としよう）については, 前同様 (13) 式の応用により分離する。一般に

$$\frac{d^r x^n}{dx^r}={}_nP_r x^{n-r}\qquad(x>0)$$

であるから

$$F=\Big\{\frac{p^{2n+1}\cos\varphi-p^{2n}\sin\varphi}{(p+j\lambda)^{n+1}(p+j)(p-j)}\Big\}^{(q)}$$

$$=\sum_{r=0}^{q}{}_qC_r\Big\{p^{2n+1}\cos\varphi-p^{2n}\sin\varphi\Big\}^{(q-r)}\Big\{\frac{1}{(p+j\lambda)^{n+1}(p+j)(p-j)}\Big\}^{(r)}$$

$$=\sum_{r=0}^{q}{}_qC_r\Big\{{}_{2n+1}P_{q-r}p^{2n-q+r+1}\cos\varphi-{}_{2n}P_{q-r}p^{2n-q+r}\sin\varphi\Big\}\cdot$$

$$\sum_{s=0}^{r}{}_rC_s\Big\{\frac{1}{(p+j\lambda)^{n+1}}\Big\}^{(r-s)}\Big\{\frac{1}{2j}\Big(\frac{1}{p-j}-\frac{1}{p+j}\Big)\Big\}^{(s)}$$

ここでも一般に

$$\frac{d^r x^{-n}}{dx^r}=\frac{d^r}{dx^r}\Big(\frac{1}{x^n}\Big)=(-1)^r{}_{n+r-1}P_r x^{-(n+r)}\qquad(x>0)$$

および

$$\frac{d^r}{dx^r}\Big(\frac{1}{x+a}\Big)=\frac{(-1)^r r!}{(x+a)^{r+1}}$$

であることを利用して展開すれば

$$F=\sum_{r=0}^{q}\sum_{s=0}^{r}{}_qC_r\cdot{}_rC_s\cdot{}_{n+r-s}P_{r-s}\cdot(-1)^r\cdot s!\cdot$$

$$\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{(p+j\lambda)^{n+r-s+1}}\left\{\frac{1}{(p-j)^{s+1}}-\frac{1}{(p+j)^{s+1}}\right\}\cdot$$

$$p^{2n-q+r}\{{}_{2n+1}P_{q-r}p\cos\varphi-{}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi\}$$

上記の F を (14) 式に代入して $p=j\lambda$ の注入を行う。かつ

$${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$j^{-4}=1$$

に注意して運算すると

$$i_0^{(n)}=\frac{n!e}{(\lambda^2-1)^{n+1}}\cos\theta$$

$$+e\sum_{q=0}^{n}\sum_{r=0}^{q}\sum_{s=0}^{r}\frac{(n+r-s)!}{(n-q)!(q-r)!(r-s)!}\cdot\frac{\lambda^{n-q+s-1}}{2^{n+r-s+2}}\cdot$$

$$\left\{\frac{1}{(\lambda-1)^{s+1}}-\frac{1}{(\lambda+1)^{s+1}}\right\}t^{n-q}\cdot(-1)^{n+r}\cdot j^{n-q+1}\varepsilon^{j\lambda t}.$$

$$\{{}_{2n+1}P_{q-r}(j\lambda)\cos\varphi-{}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi\}+Conj$$

$$=\frac{n!e}{(\lambda^2-1)^{n+1}}\cos\theta$$

$$+e\sum_{q=0}^{n}\sum_{r=0}^{q}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{n+r}\frac{(n+r-s)!}{(n-q)!(q-r)!(r-s)!}\cdot\frac{\lambda^{n-q+s-1}}{2^{n-r-s+1}}\cdot$$

$$\left\{\frac{1}{(\lambda-1)^{s+1}}-\frac{1}{(\lambda+1)^{s+1}}\right\}t^{n-q}\cdot$$

$$\Big[-{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi\cdot j^{n-q}\cdot\frac{\varepsilon^{j\lambda t}+(-1)^{n-q}\varepsilon^{-j\lambda t}}{2}$$

$$-{}_{2n+1}P_{q-r}\sin\varphi\cdot j^{n-q}\cdot\frac{\varepsilon^{j\lambda t}-(-1)^{n-q}\varepsilon^{-j\lambda t}}{2}\Big]\qquad(15)$$

(15) 式の〔　〕の内部は $n-q$ が偶数か奇数かによつて，符号が異るが一般に

$$j^{n-q}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-q}{2}} & (n-q\text{ が偶数の時})\\[2ex] \dfrac{1}{j}(-1)^{\frac{n-q+1}{2}} & (n-q\text{ が奇数の時})\end{cases}$$

であるから，これより大括弧の内部は

$$〔-{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi\cdot(-1)^{\frac{n-q}{2}}\cos\lambda t+{}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi\cdot(-1)^{\frac{n-q}{2}}\sin\lambda t〕\quad (n\ が偶数)$$

$$〔-{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi\cdot(-1)^{\frac{n-q+1}{2}}\sin\lambda t+{}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi\cdot(-1)^{\frac{n-q-1}{2}}\cos\lambda t〕\quad (n\ が奇数)$$

となる。したがつて $n-q$ の奇数，偶数の如何を問わずこれは

$$-\left[{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi\cos\left(\lambda t+\frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right)-{}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi\cdot\sin\left(\lambda t+\frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right)\right]$$

のごとく表わされる。したがつて（15）式に代入して，$i_0^{(n)}$ は次の様になるのである。

$$i_0^{(n)}=\frac{n!e}{(\lambda^2-1)^{n+1}}\cos\theta$$

$$+e\sum_{q=0}^{n}\sum_{r=0}^{q}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{n+r-1}\frac{(n+r-s)!}{(n-q)!(q-r)!(r-s)!}\cdot$$

$$\frac{\lambda^{n-q+s-1}}{2^{n+r-s+1}}\left\{\frac{1}{(\lambda-1)^{s+1}}-\frac{1}{(\lambda+1)^{s+1}}\right\}t^{n-q}\cdot$$

$$\left\{{}_{2n+q}P_{q-r}\lambda\cos\varphi\cos\left(\lambda t+\frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right)-{}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi\sin\left(\lambda t+\frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right)\right\}\quad(16)$$

Ⅳ　数式の物理的意義と結言

故に題意のごとき変定数回路を流れる電流は（9）式より

$$i=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n i_0^{(n)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}i_0^{(n)}\cos^n 2\theta\qquad(17)$$

のごとく算出された訳であつて，これは（8）式の厳密解である。

（3）式に表わした通り $|z|<1$ であるから $|z|$ の値如何によつては，i の収斂は甚速になつたり緩慢になつたりする。普通の場合は通常 $n=3$ 位までで，充分の精度があろうと推察される。

級数は $\cos^n 2\theta$ の形となるが，一般に

$$\cos^2 2\theta=\frac{1}{2}(\cos4\theta+1)$$

$$\cos^3 2\theta=\frac{1}{4}(\cos6\theta+3\cos2\theta)$$

$$\cos^4 2\theta=\frac{1}{8}(\cos8\theta+4\cos4\theta+3)$$

$$\cos^5 2\theta=\frac{1}{16}(\cos10\theta+5\cos6\theta+10\cos2\theta)$$

………………………………………………

で無限の偶数高周波から成り立つが，（17）式は（16）式が乗ずるのであり，しかも（16）式

は一見わかるごとく $\cos\theta$ なる基本波と，他は λt で変化する正弦函数と t^n の項からなつている。したがつて $\cos\theta$ の項は偶数高調波との積により，無限の奇数高調波を発生することが判る。一方 λt および t^n の項はこれに無限偶数調波を乗じた形となる。

もし回路抵抗分を考慮する時は，(16) 式の第1項は抵抗分によつて減衰しない項であつて定常電流となり，第2項は抵抗分によつて定まるある減衰率で減衰しついに消去する項である。いま第1項だけを求めてみると

$$i_1 = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\lambda^2-1)^{n+1}}\cos\theta\cdot\cos^n 2\theta \tag{18}$$

実際の計算を行うには (16) 式に $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ などの数値を代入した結果を用いるのであつて，いくらでも精密な結果を得ることができる訳である。しかし実際問題として，(16) 式の計算はそれ程容易でもない。試みに $n=0,\ 1,\ 2$ の結果を示すと次のごとくなる。

$$i_0 = \frac{e}{\lambda^2-1}\left\{\cos\theta - \cos\varphi\cos\lambda t + \frac{1}{\lambda}\sin\varphi\sin\lambda t\right\}$$

$$\begin{aligned} i_0{}' = &\frac{e}{(\lambda^2-1)^2}\left\{\cos\theta - \cos\varphi\cos\lambda t + \left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2\lambda}\right)\sin\varphi\sin\lambda t\right. \\ &+\frac{e}{\lambda^2-1}\ t\left\{-\frac{\lambda}{2}\cos\varphi\sin\lambda t - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\lambda t\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_0{}'' = &\frac{e}{(\lambda^2-1)^3}\left\{2\cos\theta - 2\cos\varphi\cos\lambda t + \left(-\frac{\lambda^3}{4}+\frac{3\lambda}{2}+\frac{3}{4\lambda}\right)\sin\varphi\sin\lambda t\right. \\ &+\frac{e}{(\lambda^2-1)^2}\ t\left\{\left(\frac{3\lambda^3}{4}-\frac{7\lambda}{4}\right)\cos\varphi\sin\lambda t + \left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{5}{4}\right)\sin\varphi\cos\lambda t\right\} \\ &+\frac{e}{(\lambda^2-1)}\ t^2\left\{\frac{\lambda^2}{4}\cos\varphi\cos\lambda t - \frac{\lambda}{4}\sin\varphi\sin\lambda t\right\} \end{aligned}$$

これらの級数は普通凸極機の計算で行う様な Fourier 級数ではないため一見変つた表現に見える。ともあれ変定数回路の解析に一方法として提示したまでであつて，これより高調波共振の周波数やインピーダンス，コンデンサの両端子間尖頭電圧値について，同様な方法によつて推察することが今後に残された問題となろう。

(昭和 30 年 5 月 27 日受理)