Laplace変換による一変定数回路の解析

その他（別言語等）のタイトル	Analysis of a Variable Constant Electric Circuit by Laplacian Transformation
著者	三浦　五郎，山上　孝
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	2
号	1
ページ	15-27
発行年	1955-12-20
URL	http://hdl.handle.net/10258/3054

Laplace 変換による一変定数回路の解析

三浦五郎　山上　孝

Analysis of a Variable Constant Electric Circuit by Laplacian Transformation

Goro Miura and Takashi Yamagami

Abstract

An electric circuit analized here is the one consisting of one resistance, one capacitance in series with one inductance of which constant varies in sinusoidal. Practically, the problem is seen in the behaviour of a single-phase synchronous alternator with salient-poles connected to series capacitors. Applying Laplacian Ttansformation and making allowable approximation, authors solved resulting currents, as in the following simple formula, which has been considered impossible or troublesome so far.

$$i(t)=\frac{-jE_1}{r+j\left\{\omega L'\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\alpha-\frac{1}{\omega C}\right\}}\sum_{0}^{\infty}(-b_1)^n\cos\left\{(2n+1)\omega t\right\}$$

I 緒　　言

電気工学の交流回路において，抵抗とインダクタンス及びコンデンサが直列に接続された最も基本的な回路の種々な条件における過渡現象については，既にあまねく討議し尽されている。然しこれ等は何れも3者が一定の常数を持ついわゆる定集中定数回路であつて，これ等の中一つまたは二つが何等かの条件に従つて可変なる場合は，その一般的な数値解析法は甚だ難渋である。実際にはかような問題は多く見られるのであつて，例えばコイルの鉄芯部の磁気飽和を考慮する場合は，インダクタンスはBH曲線によつて変化するし，コンデンサの絶縁部分の誘電率を考慮する時は，ほゞ実験的に電荷の双曲線函数に従つて変化することが判つている。また直流発電機の過渡現象や交流同期発電機の運転特性を考慮する時は，回転子の凸極性に基づき，コイル・インダクタンスが正弦的函数によつて周期的に変化する。

本問題は同期機の凸極性を考慮した場合，いわゆるインダクタンスが同期速度の2倍の時間項によつて，正弦的に変化する場合の微分方程式の特解を求めたもので，電気工学的に云えば

単相交流発電機が，直列コンデンサを通じて永久短絡故障を起した場合の，定態時電流を求めることになる。解を単なる級数で表現することは容易であるが，適当な近似を行つてこれ等級数の，任意高調波における各振幅項の値を明確にし，その凸極性の影響を考察して，回路理論的見地に立つ解釈を下し得るものでなければならないことは云う迄もない。

II 基礎微分方程式

$$ri+\frac{d}{dt}(L\cdot i)+\frac{1}{C}\int i\,dt=e \qquad (1)$$

但し r は抵抗，C はコンデンサ静電容量であり，L は

$$L=L'(1+2\alpha\cos 2\omega t) \qquad (2\alpha<1) \qquad (2)$$

また印加電圧 e は純正弦波起電力で

$$e=E_1\sin\omega t \qquad (3)$$

とする。従つて，（2），（3）式を（1）式に代入して

$$ri+\frac{d}{dt}\left\{L'(1+2\alpha\cos 2\omega t)i\right\}+\int\frac{i}{C}dt=e \qquad (4)$$

いま考察しようとする時間以前は電流が零であり，コンデンサ電荷も零であるとする時は

$$i(t\leq 0)=0$$

$$q=\int i\,di(t\leq 0)=0$$

（4）式に Laplace 変換（第1種）を施すのであるが

$$\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{L}i(t)=\int_0^\infty \varepsilon^{-pt}i(t)dt=I(p)\\&\mathfrak{L}e(t)=E(p)\\&\mathfrak{L}\frac{d}{dt}i(t)=p\mathfrak{L}i(t)-i(0)\\&\mathfrak{L}\int_0^t i(t)dt=\frac{1}{p}I(p)\end{aligned}\right.$$

となる。さて上の条件により，$t\leq 0$ に対しては

$$i(0)=0$$

$$\int i\,dt=\left\{\int_\alpha^0+\int_0^t\right\}i\,di=\int_0^t i\,dt$$

であるから，これ等の変換式によつて

$$\mathfrak{L}\frac{d}{dt}\left\{L'(1+2\alpha\cos2\omega t)\,i\right\}$$

$$=\mathfrak{L}'p\left\{\mathfrak{L}i+\mathfrak{L}(2\alpha\cos2\omega t\cdot i)\right\}$$

$$=L'p\Big[I(p)+\alpha I(p+j2\omega)+\alpha I(p-j2\omega)\Big]$$

$$\mathfrak{L}e=\mathfrak{L}E_1\sin\omega t=\frac{\omega E_1}{p^2+\omega^2}=E(p)$$

従つて（4）式は次の如き形式で表わされるのである。

$$\left\{r+L'p+\frac{1}{Cp}\right\}I(p)+\alpha L'pI(p+j2\omega)+Conj=E(p) \qquad (5)$$

但し $Conj$ とはその直ぐ前項の共軛値を表わすことにする。

さて

$$r+L'p+\frac{1}{Cp}=Z(p) \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} K(p)&=\frac{\alpha L'p}{Z(p)} \\ F(p)&=\frac{E(p)}{Z(p)} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

とすれば（5）式は

$$I(p)+K(p)\{I(p+j2\omega)+I(p-j2\omega)\}=F(p) \qquad (8)$$

（8）式は p に関する恒等式であるから，p の代りに $p+j2n\omega$（$n=-\infty \sim +\infty$）を代置してよい。かくする時は結局無限個の代数方程式が得られ，これは次の如き1個の無限マトリクス方程式を成立させる。

$$[y_n]=[a_{nm}][x_m] \qquad (9)$$

$$y_n=F(p+j2n\omega)$$

$$x_m=I(p+j2m\omega)$$

$[a_{nm}]$：無限正方マトリクス

$$\left.\begin{aligned} a_{nm}&=1 && m=n \\ a_{nm}&=K(p+j2n\omega) && m=n+1 \text{ 及び } m=n-1 \\ a_{nm}&=0 && |m-n|\geqq 2 \end{aligned}\right\}$$

（9）式は次の如き形式を持つ。

$$
\begin{array}{c} \downarrow \\ n \end{array}
\begin{pmatrix} \vdots \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}
=
\begin{array}{c} \downarrow \\ n \end{array}
\begin{pmatrix}
\to m & \ddots & \ddots & (m=0) & & & \\
\ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\
a_{-2-3} & a_{-2-2} & a_{-2-1} & \vdots & & & \\
 & a_{-1-2} & a_{-1-1} & a_{-10} & & & \\
 & & a_{0-1} & a_{00} & a_{01} & & \\
 & & & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \\
 & & & \vdots & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 & & & \downarrow & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{array}{c} \downarrow \\ m \end{array}
\begin{pmatrix} \vdots \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

$m=0$ とする時は Cramer の定理より（9）式の解は

$$x_0=I(p)=\frac{1}{|a_{nm}|}\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\times(a_{n0}\text{ の余因子})$$

$|a_{nm}|$ は $[a_{nm}]$ の行列式である。

一般に

$$\frac{1}{|a_{nm}|}(a_{n0}\text{ の余因子})=A_n(p)$$

とおけば基礎方程式（8）式の解は

$$I(p)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(p)F(p+j2n\omega) \tag{10}$$

の如く無限級数を以て表示し得る。

Ⅲ　解式の係数決定

問題は（10）式の表現における係数 $A_n(p)$ を決定して，解析的解を得るにある。いま（10）式を原式（8）に代入する。即ち

$$I(p+j2\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(p+j2\omega)F(p+j\overline{2n+2}\omega)$$

$$I(p-j2\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(p-j2\omega)F(p+j\overline{2n-2}\omega)$$

であるから（10）式に代入して

$$\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(p)F(p+j2n\omega)+K(p)\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(p+j2\omega)F(p+j\overline{2n+2}\omega)$$

$$+K(p)\sum_{-\infty}^{\infty}A_n(p-j2\omega)F(p+j\overline{2n-2}\omega)=F(p)$$

両辺の p 同次の項を比較する未定係数法により

$$n \neq 0 \qquad A_n(p)+K(p)A_{n-1}(p+j2\omega)+K(p)A_{n+1}(p-j2\omega)=0 \tag{11}$$

$$n=0 \qquad A_0(p)+K(p)A_{-1}(p+j2\omega)+K(p)A_1(p-j2\omega)=1 \tag{12}$$

工学的見地よりみて $A_n(p)$ の級数は収斂するから

$$\lim_{n\to\infty} A_n(p)=0$$

従つて n が充分大きい処では (11) 式は

$$A_n(p)+K(p)A_{n-1}(p+j2\omega)\fallingdotseq 0 \tag{13}$$

が成立する。上式で p を $p-j2\omega$ とおけば

$$A_n(p-j2\omega)+K(p-j2\omega)A_{n-1}(p)=0$$

(11) 式で n を $n-1$ におくと (n を一段下げた処)

$$A_{n-1}(p)+K(p)A_{n-2}(p+j2\omega)+K(p)A_n(p-j2\omega)=0$$

以上2式より $A_n(p-j2\omega)$ を消去すると

$$\{1-K(p)K(p-j2\omega)\}A_{n-1}(p)+K(p)A_{n-2}(p+j2\omega)=0 \tag{14}$$

(13) 式が n の充分大きい処で成立するとすれば，n を一段下げた $n-1$ 次数で (14) 式が同一形で誘導された。同様にしてこの次数を下げ，任意の n でこの形を求め得る。即ち (14) 式で p を $p-j2\omega$ とおき，(11) 式で n を $n-2$ とおいて両式より $A_{n-1}(p-j2\omega)$ を消去すると

$$\left\{1-\frac{K(p)K(p-j2\omega)}{1-K(p-j2\omega)K(p-j4\omega)}\right\}A_{n-2}(p)+K(p)A_{n-3}(p+j2\omega)=0$$

上式で p を $p-j2\omega$ とおき，(11) 式で n を $n-3$ とおき両式より $A_{n-2}(p-j2\omega)$ を消去する。同様な方法を多数回繰返すことにより結局

$$Y_a(p)A_n(p)+K(p)A_{n-1}(p+j2\omega)=0 \tag{15}$$

$$Y_a(p)=1-\frac{K(p)K(p-j2\omega)}{Y_a(p-j2\omega)}$$

$$=-\frac{K(p)K(p-j2\omega)}{1-\dfrac{K(p-j2\omega)K(p-j4\omega)}{1-\cdots\cdots}} \tag{16}$$

以上は $n>0$ に対してであるが，$n<0$ に対しても同様な方法による。即ち (11) 式はその儘 n を $-n$ と書き直し，n の充分大きい処では $A_{-(n+1)}\fallingdotseq 0$ となるから

$$A_{-n}(p)+K(p)A_{-(n-1)}(p-j2\omega)\fallingdotseq 0$$

p を $p+j2\omega$ とおき，(11) 式で n を $n-1$ とおいて $A_{-n}(p+j2\omega)$ を消去ずる。以下同一方法を繰返せば $n<0$ に対しては (15), (16) 式に対応して次式が得られる。

$$Y_a^*(p)A_{-n}(p)+K(p)A_{-n+1}(p-j2\omega)=0 \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_a^*(p)&=1-\frac{K(p)K(p+j2\omega)}{Y_a^*(p+j2\omega)} \\ &=1-\cfrac{K(p)K(p+j2\omega)}{1-\cfrac{K(p+j2\omega)K(p+j4\omega)}{1-\cdots\cdots\cdots\cdots}} \\ &=Y_a \text{ の共軛値} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

さて (15) 式より

$$A_n(p)=-\frac{K(p)}{Y_a(p)}A_{n-1}(p+j2\omega)$$

である。n を $n-1$, p を $p+j2\omega$ に置換すれば

$$A_{n-1}(p+j2\omega)=-\frac{K(p+j2\omega)}{Y_a(p+j2\omega)}A_{n-2}(p+j4\omega)$$

同様に

$$A_{n-2}(p+j4\omega)=-\frac{K(p+j4\omega)}{Y_a(p+j4\omega)}A_{n-3}(p+j6\omega)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

従つて

$$A_n(p)=(-1)^n\frac{K(p)}{Y_a(p)}\cdot\frac{K(p+2j\omega)}{Y_a(p+j2\omega)}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{K(p+j\overline{2n-2}\omega)}{Y_a(p+j\overline{2n-2}\omega)}A_0(p+j2n\omega)$$

$$=(-1)^nA_0(p+j2n\omega)\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K(p+j2\nu\omega)}{Y_a(p+j2\nu\omega)} \tag{19}$$

同様にして $n<0$ に対しては (17) 式より n を $n-1$, p を $p-j2\omega$ 等に置換して運算すれば

$$A_{-n}(p)=(-1)^nA_0(p-j2n\omega)\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K(p-j2\nu\omega)}{Y_a(p-j2\nu\omega)} \tag{20}$$

となる。(19), (20) 式中の $A_0(p)$ については次の如くして求められる。両式で $n=1$ とすると

$$A_1(p)=-A_0(p+j2\omega)\frac{K(p)}{Y_a(p)}$$

$$A_{-1}(p)=-A_0(p-j2\omega)\frac{K(p)}{Y_a^*(p)}$$

故に

$$A_1(p-j2\omega)=-A_0(p)\frac{K(p-j2\omega)}{Y_a(p-j2\omega)}$$

$$A_{-1}(p+j2\omega)=-A_0(p)\frac{K(p+j2\omega)}{Y_a^*(p+j2\omega)}$$

然るに (16), (18) 式より

$$Y_a(p)=1-\frac{K(p)K(p-j2\omega)}{Y_a(p-j2\omega)}$$

$$Y_a^*(p)=1-\frac{K(p)K(p+j2\omega)}{Y_a^*(p+j2\omega)}$$

であるから，これ等を (12) 式に代入して

$$A_0(p)=\frac{1}{Y_a(p)+Y_a^*(p)-1} \tag{21}$$

の如くなる。

以上の数式により $A_n(p)$ はすべて求まつた。問題は（6）式，（7）式等の実際の定数をこれ等に当て嵌めて $A_n(p)$ を求め，級数の形を決定することである。

IV　一般的解法

(10) 式の電流解は Laplace 逆変換により求められる。即ち

$$i(t)=\mathfrak{L}^{-1}I(p)=\frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty}e^{pt}I(p)dp$$

$$=\sum\left(e^{pt}I(p)\text{ の留数}\right)$$

$I(p)=\dfrac{M(p)}{N(p)}$ とすれば部分分数の公式より

$$\frac{M(p)}{N(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{M(p)}{(p-p_k)N'(p_k)}$$

但し

$$N'(p_k)=\left[\frac{dN(p)}{dp}\right]_{p=p_k}$$

故に p_1, p_2, ………p_k, ……… で $I(p)$ は特異点を有する。$p=p_k$ における $I(p)$ の留数は

$$C_k=\Big[(p-p_k)\,I(p)\Big]_{p=p_k}=\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}$$

となる。故に

$$i(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{M(p_k)}{N'(p_k)}\varepsilon^{p_kt}=\sum_{k=1}^{n}C_k\varepsilon^{p_kt} \tag{22}$$

で表わされる。

上式より判る様に電流解は，無限個の指数函数項より成り立つている。実際的見地よりみて，

この変定数インダクタンスと抵抗及びコンデンサ直列回路の定態時電流は，無限個の奇数高調波より成り立つことが了承される。即ち（7）式の $F(p)$ における $E(p)$ は既に示した通り

$$E(p)=\mathfrak{L}e=\frac{\omega E_1}{(p+j\omega)(p-j\omega)}$$

であるから，$F(p\pm j2n\omega)$ $(n=0\sim\infty)$ によつて

$$F(p\pm j2n\omega)=\frac{1}{Z(p\pm j2n\omega)}\cdot\frac{\omega E_1}{(p\pm j\overline{2n+1}\omega)(p\pm j\overline{2n-1}\omega)}$$

となり $F(p\pm j2n\omega)$ の印加電圧によつて定態時には $p_k=\pm j\overline{2n+1}\omega$ の特異点を有することが明らかである。故に（22）式は

$$i(t)=\mathfrak{L}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{C_k}{p+j(2n+1)w}+Conj\right\} \tag{23}$$

の如く表現してもよい。

V 定態時電流式

前章で述べた如く $F(p+j2n\omega)$ は，明らかに $p_k=-j\overline{2n+1}\omega$ の特異点を有するが，同特異点はまた $F(p+j\overline{2n+2}\omega)$ によつても明らかに発生する。従つて留数 C_k は

$$C_k=\left\{[p+j(2n+1)\omega][A_n(p)F(p+j2n\omega)+A_{n+1}(p)F(p+j\overline{2n+2}\omega)]\right\}_{p=-j(2n+1)\omega} \cdots\cdots(24)$$

(19) 式により $A_n(p)$ 及び $A_{n+1}(p)$ を求めれば

$$\underset{p=-j(2n+1)\omega}{A_n(p)}=(-1)^nA_0(-j\omega)\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]}{Y_a[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]} \tag{25}$$

$$\underset{p=-j(2n+1)\omega}{A_{n+1}(p)}=(-1)^{n+1}A_0(j\omega)\prod_{\nu=0}^{n}\frac{K[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]}{Y_a[j(2\nu-2n+1)\omega]} \tag{26}$$

さてここで特定の p 値に対応する $K(p)$，$Y_a(p)$ 等の，近似値を求めねばならない。これは既に連分数の形になつている $Y_a(p)$ 導入による，数式の複雑化を避けるためである。（6），（7）式より

$$\left.\begin{aligned}
&K(p)=\frac{p^2\alpha CL'}{1+rCp+CL'p^2}=\frac{p^2\alpha}{(p-x)(p-y)}\\
&\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=-\frac{r}{2L'}\pm j\omega'\\
&\omega'=\sqrt{\frac{1}{CL'}-\left(\frac{r}{2L'}\right)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

となる。上式で r は微小であるし，また不足補償であれば恒に

$$\frac{1}{\omega C} \leqq \omega L' \qquad \therefore \frac{1}{\omega^2 CL'} \leqq 1$$

が成立するから (27) 式は $p \geqq |\pm 2j|$ に対しては

$$K(p)=\alpha \tag{28}$$

と近似することができる。この際 $\omega L'$ は恒に $1/\omega C$ より小さいと云う条件が必要で，そうでない時は第2，第3高調波等で共振現象を惹起することになり，(28) 式の近似は成立しない。この条件は普通行われている同期機を含む送電線のコンデンサ補償においては，実際的に成立することである。

さてこの時は

$$\underset{p\leqq -2j\omega}{Y_a(p)} = \underset{p\geqq 2j\omega}{Y_a{}^*(p)} = 1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cdots\cdots}} = \frac{1+\sqrt{1-4\alpha^2}}{2} \tag{29}$$

$$(2\alpha<1)$$

従つて (25)，(26) 式の Π 値は

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]}{Y_a[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]}$$

$$=\underbrace{\frac{K[j(-2n+1)\omega]}{Y_a[j(-2n+1)\omega]}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{K(-j3\omega)}{Y_a(-j3\omega)}}_{n\text{個}}$$

$$=\left[\frac{2\alpha}{1+\sqrt{1-4\alpha^2}}\right]^n=b_1{}^n \tag{30}$$

但し

$$b_1=\frac{2\alpha}{1+\sqrt{1-4\alpha^2}} \tag{31}$$

$$\prod_{\nu=0}^{n}\frac{K[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]}{Y_a[j(2\nu-\overline{2n+1})\omega]}$$

$$=\underbrace{\frac{K[j(-\overline{2n+1})\omega]}{Y_a[j(-\overline{2n+1})\omega]}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{K(-j3\omega)}{Y_a(-j3\omega)}\cdot\frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)}}_{n+1\text{個}}$$

$$=b_1{}^n\frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)} \tag{32}$$

$p\doteqdot\pm|2j\omega|$ に対しては上式の如き近似ができないので次の様に求める。先ず (27) 式より

$$K(p)=\frac{p^2\alpha}{\left(p+\dfrac{r}{2L'}+j\omega'\right)\left(p+\dfrac{r}{2L'}-j\omega'\right)}$$

故に

$$\left.\begin{aligned} K(j\omega)&=\frac{-\alpha}{\left\{\frac{r}{2\omega L'}+j\left(1+\frac{\omega'}{\omega}\right)\right\}\left\{\frac{r}{2\omega L'}+j\left(1-\frac{\omega'}{\omega}\right)\right\}} \\ K(-j\omega)&=[K(j\omega)]^* \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

$$K(j\omega)K(-j\omega)=\frac{\alpha^2}{\left\{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}\right)^2+\left(\frac{r}{2\omega L'}\right)^2\right\}\left\{\left(1-\frac{\omega'}{\omega}\right)^2+\left(\frac{r}{2\omega L'}\right)^2\right\}}$$

(16), (30) 式より

$$Y_a(j\omega)=1-\frac{K(j\omega)K(-j\omega)}{1-b_1K(-j\omega)}$$

に上記の式を代入して

$$\left.\begin{aligned} Y_a(j\omega)&=1-\frac{\alpha^2}{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}+\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}+\frac{r}{j2\omega L'}\right)}\cdot \\ &\quad\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)-b_1\alpha\right.} \\ Y_a^*(-j\omega)&=[Y_a(j\omega)]^* \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

次に同様にして

$$\left.\begin{aligned} Y_a(-j\omega)&=1-b_1K(-j\omega) \\ &=1-\frac{b_1\alpha}{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)} \\ Y_a^*(j\omega)&=[Y_a(-j\omega)]^* \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

以上より (21) 式の $A_0(j\omega)$, $A_0(-j\omega)$ は次の如く計算される。

$$A_0(j\omega)=\frac{1}{Y_a(j\omega)+Y_a^*(j\omega)-1}$$

$$\left.\begin{aligned} &=\frac{1}{R}\left(1+\frac{\omega'}{\omega}+\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}+\frac{r}{j2\omega L'}\right)\cdot \\ &\quad\left\{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)-b_1\alpha\right\} \\ R&=\left\{\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2-b_1\alpha\right\}\cdot \\ &\quad\left\{\left(1-\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2-b_1\alpha\right\}-\alpha^2 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$A_0(-j\omega)=[A_0j\omega)]^* \quad (37)$$

また (32) 式の末尾に表われる $\frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)}$ についても (33), (35) 両式より

$$\frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)}=\frac{\alpha}{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)-b_1\alpha} \quad (38)$$

となる。以上より (25), (26) 式に (30), (32), (36), (37) 及び (38) の各式を代入して, $A_n(p)$, $A_{n+1}(p)$ の $p=-j(2n+1)\omega$ における値を計算することができる。

次に留数 C_k の $A_n(p)$ 以外の部分について計算を施す。

$$\Big\{[p+j(2n+1)\omega]\,F(p+j2n\omega)\Big\}_{p=-j(2n+1)\omega}$$

$$=-\frac{E_1}{2\omega L'}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}-\frac{r}{j2\omega L'}\right)} \quad (39)$$

$$\Big\{[p+j(2n+1)\omega]F(p+j\overline{2n+2}\omega)\Big\}_{p=-j(2n+1)\omega}$$

$$=-\frac{E_1}{2\omega L'}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\omega'}{\omega}+\frac{r}{j2\omega L'}\right)\left(1-\frac{\omega'}{\omega}+\frac{r}{j2\omega L'}\right)} \quad (40)$$

よつてこれ等の悉くを (24) 式に代入し，留数 C_k の値は次の如くなるのである。

$$C_k=-\frac{E_1}{2\omega L'}(-b_1)^n\frac{1}{R}\left\{\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2-(1+b_1)\alpha\right\} \quad (41)$$

R は (36) 式で示される様な実数値である。

さて (41) 式の儘でよいのであるが，この振幅項は甚だ複雑で，工学的解釈が難渋である。それで許し得る仮定として，更に (36) 式の R について最初の第1項の $\{\quad\}$ 内の $\left(1-\frac{r}{j2\omega L'}\right)$ を，$\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)$ と近似する。実際問題として $\frac{r}{j2\omega L'}$ は1に比し negligible small であり，この近似は充分妥当である。かくする時は

$$R=\left\{\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2-b_1\alpha\right\}^2-\alpha^2$$

$$=\left\{\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2+(1+b_1)\alpha\right\}\cdot$$

$$\left\{\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2-(1-b_1)\alpha\right\}$$

となり (41) 式は

$$C_k=-\frac{E_1}{2\omega L'}(-b_1)^n\frac{1}{\left(1+\frac{r}{j2\omega L'}\right)^2-\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2+(1-b_1)\alpha}$$

然して (27) 式より

$$\omega'^2=\frac{1}{CL'}-\left(\frac{r}{2L'}\right)^2$$

であるから結局

$$C_k=-\frac{E_1}{2}(-b_1)^n\frac{j}{r+j\left[\omega L'-\frac{1}{\omega C}+\omega L'(1-b_1)\alpha\right]} \tag{42}$$

よつて電流解は，(22) または (23) 式により

$$i(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}C_k\varepsilon^{p_kt}=\sum_{0}^{\infty}\left\{C_k\varepsilon^{p_kt}+Conj\right\}$$

$$=-E_1\frac{j}{r+j\left\{\omega L'\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\alpha-\frac{1}{\omega C}\right.}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-b_1)^n\cos\left\{(2n+1)t\right\} \tag{43}$$

の如く求まつたことになる。

Ⅵ 結果の研討と結言

ここで甚だ興味深い結果は，実際上許し得る近似をもつて各振幅項が極めて簡単な結果で導き得られたことで，かつその可変定数インダクタンスは (30) 式より計算される如く

$$\omega L'\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\alpha=\frac{\omega L'}{2}\left\{1+2\alpha+\sqrt{1-4\alpha^2}\right\}$$

の如き特殊な値を有することが判明したのである。$\alpha=0$ とおけば，勿論定インダクタンス回路で $\omega L'$ となる。$\alpha=0.5$ とおけば，このインダクタンスは 0 と $2\omega L'$ の間を正弦函数的に変化する変定数で，この場合結果のインダクタンスはやはり $\omega L'$ となる。

また収斂級数は b_1 によつて変化し，$\alpha=0$ では $b_1=0$ で高調波 ($n\geqq2$) は発生しないし，$\alpha=0.5$ では $b_1=1$ で永久に減衰しない，それぞれ相等しい振幅項を有する無限の高調波を含有する。$\alpha=0\sim0.5$の間ではにの中間の現象となる。

これ等高調波のため，電流波形は非常に尖鋭となつてくることが判る。因みにその尖頭値を求めてみれば，(43) 式で $\omega t=\pi$ においては

$$i(t)_p=\frac{E_1}{\sqrt{r^2+\omega^2L'^2\left\{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\alpha-\frac{1}{\omega C}\right\}^2}}\cdot\frac{1}{1+b_1}$$

となり基本波のそれより小となるが，若し印加電圧が $E_1\sin\omega t$ でなく， $E_1\cos\omega t$ の時は

$\frac{1}{1-b_1}$ の如くなつてくることが容易に了察される。

またコンデンサ両端の電圧は

$$v_c=\int\frac{i(t)}{\omega C}dt$$

より求まり，上記と全く同様な解釈を下し得る。

以上述べことにより不足補償（コンデンサ・リアクタンスがインダクタンス・リアクタンスより小）の場合は，充分な正確さを以て，従来困難視されていたこの問題を解き得たのである。然し過補償となると，任意の高調波次数により

$$n\omega=\frac{1}{\sqrt{CL'\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\alpha}}$$

の如き共振現象が起るため，本式は不成立であるが，この場合はその特定次数に対する不足補償範囲内で，以上と同様な式を樹立すればよい。然しその一般的表示は相当複雑なものとなるであろう。本問題は若し実際の同期発電機の如く，2次的回路要素の制動捲線や回転子捲線を有する場合，また短絡瞬時の過渡現象を扱う場合の，直列コンデンサの解法[1,2]に対し種々の示唆を与えるであろうと信ずる。

終りに当り種々の御鞭撻を頂いた本学電気工学科の諸教官に深謝する。

（昭和30年5月27日受付）

1　三浦：電学誌　73,　1345　(1952)

2　三浦：電学誌　74,　940　(1953)