凸極同期機系統における基礎式変換理論

その他（別言語等）のタイトル	Transformation Theory of Fundamental Equations on Salient-pole Alternator Systems
著者	三浦　五郎
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	2
号	2
ページ	435-446
発行年	1956-12-20
URL	http://hdl.handle.net/10258/3080

凸極同期機系統における
基礎式変換理論

三　浦　五　郎

Transformation Theory of Fundamental Equations on Salient-pole Alternator Systems.

Goro Miura

Abstract

The present writer has previously introduced a new coordinate, the static-symmetrical axis, for the solution of salient-pole synchronous machine behaviors. In this paper, the comparison is systematically made among phase-axes, rectangular-axes, instantaneous symmetrical co-ordinate, and the static-symmetrical axes, by developing the calculation of Park's equations, power, loss, torque, wattless power and others, which are necessary for the analysis of transient performance on the system.

I 緒　　言

凸極同期機が送電系統に接続される場合を解析する基礎微分方程式については，従来の直交系軸，対称座標軸及び相軸の３軸の外に筆者によつて導入された静止対称軸がある。[1]　これら4軸間の相互的関係については今まで多く述べた[2,3] から，本文では従来まちまちに与えられている Park 氏基本式，電力，トルク，損失量，その他過渡現象求解に必要と思われる諸量を統合し，各４座標軸に表現して容易に比較出来るようにした。

1　三浦五郎：多相凸極同期機の変換理論による基礎解析．電工論 4, No.3 137 (1952)
2　三浦五郎：長距離送電線の静止対称軸における表示と凸極同期機に対する解析法．室工大研報，1, No.5 599 (1954)
3　三浦五郎：長距離単一送電線に接続された凸極機動作の静止対称軸上における表示 (第2報)．三学会支部連大集 311 (1954)

Ⅱ　発電機動作と電動機動作について

凸極機と外部送電線を直列にした系統の方程式は結局 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{i}$ なるマトリクス微分方程式に帰一されるが，この場合同期機が発電機動作をしているか電動機動作をしているかは，電圧マトリクス $\boldsymbol{e}$（電流 $\boldsymbol{i}$ でもよい）の符号によつて定まり，発電機動作に対しては $-\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{i}$，電動機動作に対しては $+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{i}$ が成立する。

さて系統方程式は直交軸と静止対称軸において定係数となる。このインピーダンス・マトリクスを

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{L}p+\boldsymbol{G}\qquad(p\theta=1,\ \text{同期速度回転})\tag{1}$$

とおく時は，凸極機の発生または受電する電力 $\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{e}^*$ は次のごとく表わされる。$\boldsymbol{i}_t$ は $\boldsymbol{i}$ の転置マトリクスを，また $\boldsymbol{e}^*$ は $\boldsymbol{e}$ の共軛マトリクスを示す。$\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{e}^*$ と $\boldsymbol{i}_t^*\boldsymbol{e}$ とは無効電力の符号を異にするだけで他は等しい。

a）発電機動作の場合

$$P=\boldsymbol{i}_t\,\boldsymbol{e}^*=-\boldsymbol{i}_t\,\boldsymbol{Z}^*\,\boldsymbol{i}^*=-\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}_t^*\boldsymbol{L}\,p\,\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{i}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{i}=\text{銅損}\\ \boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{L}\,p\,\boldsymbol{i}=\text{無効電力（遅相値を正）}\\ -\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{i}=\text{機械トルク（入力）}\end{cases}$$

従つて

$$\text{機械的入力}=\text{電気的出力}+\text{銅損}+\text{無効電力}\tag{3}$$

の関係が成立する。

b）電動機動作の場合

$$P=\boldsymbol{i}_t\,\boldsymbol{e}^*=\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{L}\,p\,\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}_t^*\,\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{i}\tag{4}$$

$$\text{電気的入力}=\text{機械的出力}+\text{銅損}+\text{無効電力}\tag{5}$$

次にインピーダンス・マトリクスが定係数でない相軸，対称軸（$\alpha\beta 0$ 軸も同様）では以上のことはどうなるであろうか。この時は直交軸または静止対称軸のインピーダンス・マトリクスを時間項を含む変換マトリクス $\boldsymbol{C}$ によつて変換したことになる。

$$\boldsymbol{Z}'=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}[\boldsymbol{R}+\boldsymbol{L}p+\boldsymbol{G}]\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}p+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{L}\frac{\partial\boldsymbol{C}}{\partial\theta}\tag{6}$$

上式は末項に Christoffel 成分を作る。更に今一度変換すればこの成分はまた1個追加される。従つて抵抗（銅損）とトルク（機械力）は普通の通り変換して差支ないが，トルクに関しては結果の式より項中に p を含まないもの（$\boldsymbol{R}$ マトリクスは除いておいて）を収拾したものではない。これは真のトルク・マトリクスの外に Christoffel 成分を含むからである。また

無効電力については（6）式の結果のマトリクスで p を含まないものはすべて零として，p 項のみを収拾すればよい。そのため相軸または対称軸のインピーダンス・マトリクスより p を含まぬ項を零として直ちに求められる。以上の算式は Ⅵ～Ⅸ において一括誘導羅列することとする。

Ⅲ 平衡電圧表現と定態時の p

送電系統任意点の電圧に応じインピーダンス・マトリクスの演算子 p のとる値は各軸で異る。例えばある点で3相短絡が起るとすれば，凸極機励磁を零とし考察点に短絡前の発生電圧と同大，方向反対の電圧を印加して解析される。このため電圧を各軸上に表示しておく。

a) （abc）軸上

負荷点その他任意点を考察点にとり該点の電圧絶対値を e，相差角は凸極機無負荷誘導起電力より一般に δ だけ進んでいるとする。相軸における該点端子電圧は

$$\left.\begin{aligned} e_a &= e\sin(\theta_1+\delta) \\ e_b &= e\sin(\theta_2+\delta) \\ e_c &= e\sin(\theta_3+\delta) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\theta_1=\theta=i+\varphi,\quad \theta_2=\theta+120^\circ,\quad \theta_3=\theta+240^\circ$$

であり，無負荷で発電機電力を何等消費しない時は $\delta=0$ とおいて

$$\left.\begin{aligned} e_a &= e\sin\theta_1 \\ e_b &= e\sin\theta_2 \\ e_c &= e\sin\theta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

となる。上式より e_a，e_b，e_c は ε^{jt} または ε^{-jt} の時間項を有するから，ε^{pt} に対応する p は $p=j$ または $p=-j$ となる。従つて定常電流計算は直ちに $p=j$ とおいてよい。

b) （$dq0$）軸上

直交軸変換マトリクス $\boldsymbol{C}$ によつて（7）式を変換する。$\boldsymbol{e}_{dq0}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{e}_{abc}$

$$\left.\begin{aligned} e_d &= e\sin\delta \\ e_q &= e\cos\delta \\ e_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

ε^{pt} に対応する p は零であるので定常電流は直交軸インピーダンス・マトリクス $\boldsymbol{Z}_{dq0}$ で $p=0$ とおいて求まる。

c) （120）軸上

同様に（7）式を対称軸変換マトリクス $\boldsymbol{C}'$ によつて $\boldsymbol{e}_{120}=\boldsymbol{C}'^{-1}\boldsymbol{e}_{abc}$ より変換すれば

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= -\frac{e}{2j}\varepsilon^{-j(\theta+\delta)} \\ e_2 &= +\frac{e}{2j}\varepsilon^{j(\theta+\delta)} \\ c_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

無負荷時では $\delta=0$ とする。定態値には正相分（電流）に対しては $p=-j$，逆相分に対しては $p=j$ とおけばよい。

d)（I II 0）軸上

(10) 式を静止対称軸変換マトリクス $\boldsymbol{C}''$ によつて変換する。$\boldsymbol{e}_{\mathrm{I\,II}\,0}=\boldsymbol{C}''^{-1}\boldsymbol{e}_{120}$

$$\left.\begin{aligned} c_{\mathrm{I}} &= +\frac{e}{2j}\varepsilon^{+j\delta} \\ e_{\mathrm{II}} &= -\frac{e}{2j}\varepsilon^{-j\delta} \\ e_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

無負荷時は $\delta=0$，定態時は $\varepsilon^{pt}=1$ に対応して $p=0$ とおけばよいことは直交軸と同様である。

なお以上用いた変換マトリクス $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}'$，$\boldsymbol{C}''$ については従来発表した通り[1] なのでここに再記しない。

IV　電力の不変量変換

系統変換に関し在来筆者が扱つてきた変換はすべて“マトリクス変換”であつて，いわゆる“テンソル変換”でない。即ち電圧と電流は同一の変換マトリクスで変換されるため計算は極めて円滑であつて対称軸，直交軸等の表示は Park その他既成大家の研究結果とその儘一致する点はマトリクス変換の最大の利点であるが，一方電力，トルク，損失等 $\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{Z}\boldsymbol{i}$ のごとく 2 回重合される量は各軸を通じ不変量として扱えない欠点を有す。この点テンソル変換が有利であるが，併しテンソル変換では不変量保持のためには例えば対称座標法の係数や，直交軸の零相成分等を特別な関係式に逆に定義し直さねばならぬ点が非常に不利で，既成の知識がその儘応用され得ない点が生ずる。

マトリクス変換の電力，トルク等が一般に不変量変換でないことは次のごとく証明される。電圧，電流を同一の変換式 $\boldsymbol{C}$ で変換すれば

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}', \qquad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{i}'$$

従つて

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{e}^*=\{\boldsymbol{C}\boldsymbol{i}'\}_t\{\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}'\}^*=\boldsymbol{i}_t'\boldsymbol{C}_t\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{e}'\neq\boldsymbol{i}_t'\boldsymbol{e}^*$$

$$-\boldsymbol{T}=\boldsymbol{i}_t^*\boldsymbol{G}\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_t'^*\boldsymbol{C}_t^*\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{i}'\neq\boldsymbol{i}_t'^*\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}_t'^*\boldsymbol{G}'\boldsymbol{i}'$$

1　前　出

では相軸における電力を恒等的に導いて他軸上に表現し，不変量であるためにはどのような換算係数を必要とするかを検討してみよう。3相全部の相軸の電力は

$$P_{3\phi}=i_a v_a^*+i_b v_b^*+i_c v_c^* \qquad \text{〔相 軸 上〕}$$

これを直交軸変換すると

$$=(i_d \cos\theta_1+i_q \sin\theta_1+i_0)v_a^* + (i_d \cos\theta_2+i_q \sin\theta_2+i_0)v_b^*$$
$$+(i_d \cos\theta_3+i_q \sin\theta_3+i_0)v_c^*$$
$$=i_d(v_a \cos\theta_1+v_b \cos\theta_2+v_c \cos\theta_3)^*$$
$$+i_q(v_a \sin\theta_1+v_b \sin\theta_2+v_c \sin\theta_3)^* + i_0(v_a+v_b+v_c)^*$$
$$=3\left\{\frac{1}{2}i_d v_d^*+\frac{1}{2}i_q v_q+i_0 v_0^*\right\} \qquad \text{〔直交軸上〕}$$

次に最初の相軸の式を対称軸変換すると

$$=(i_1+i_2+i_0)v_a^* + (a^2i_1+ai_2+i_0)v_b^* + (ai_1+a^2i_2+i_0)v_c^*$$
$$=i_1(v_a+av_b+a^2v_c)^* + i_2(v_a+a^2v_b+av_c)^* + i_0(v_a+v_b+v_c)^*$$
$$=3\{i_1v_1^*+i_2v_2^*+i_0v_0^*\} \qquad \text{〔対称軸上〕}$$

上式を静止対称軸へ変換すれば

$$=3\{(i_{\rm II}\varepsilon^{-j\theta})v_1^*+(i_{\rm I}\varepsilon^{j\theta})v_2^*+i_0v_0^*\}$$
$$=3i_{\rm II}(\varepsilon^{j\theta}v_1)^*+i_{\rm I}(\varepsilon^{-j\theta}v_2)^*+i_0v_0^*\}$$
$$=3\{i_{\rm I}v_{\rm I}^*+i_{\rm II}v_{\rm II}^*+i_0v_0\} \qquad \text{〔静止対称軸上〕}$$

以上より各軸における1相当りの瞬時電力は

$$\left.\begin{aligned}P_{1\phi}&=\frac{1}{3}(i_av_a^*+i_bv_b+i_cv_c^*)=\frac{1}{2}(i_dv_d^*+i_qv_q^*)+i_0v_0^*\\&=i_1v_1^*+i_2v_2^*+i_0^*v_0^*=i_{\rm I}v_{\rm I}^*+i_{\rm II}v_{\rm II}^*+i_0v_0^*\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となつて各式の係数は異るから電力等算定には注意を要する。これは前言したごとく“マトリクス変換”なるため不変量変換の不成立なることによる。

V　Park 基本式の各軸表示

次に磁束鎖交数ψの概念を明確にし凸極同期機の Park 基本式を各座標軸に表示すると共にその相互関係を明らかにしよう。

a)（$a\,b\,c$）軸上

相軸におけるインピーダンス・マトリクスを樹立することにより次式の基本式を得る。

$$\left.\begin{aligned}-e_a&=r\,i_a+p\,\psi_a\\-e_b&=r\,i_b+p\,\psi_b\\-e_c&=r\,i_c+p\,\psi_c\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ここに各相磁束鎖交数は

$$\left.\begin{aligned}
\psi_a &= x_{afd}\, I_{fd} \cos\theta_1 + x_{a1d}\, I_{1d} \cos\theta_1 + x_{a1q}\, I_{1q} \sin\theta_1 \\
&\quad + \frac{x_0}{3}(i_a+i_b+i_c) + \frac{2A}{3}\left\{i_a - \frac{i_b+i_c}{2}\right\} \\
&\quad + \frac{2B}{3}\left\{i_a \cos 2\theta + i_b \cos(2\theta+120) + i_c \cos(2\theta+240)\right\} \\
\psi_b &= x_{afd}\, I_{fd} \cos\theta_2 + x_{a1d}\, I_{1d} \cos\theta_2 + x_{a1q}\, I_{1q} \sin\theta_2 \\
&\quad + \frac{x_0}{3}(i_a+i_b+i_c) + \frac{2A}{3}\left\{i_b - \frac{i_c+i_a}{2}\right\} \\
&\quad + \frac{2B}{3}\left\{i_a \cos(2\theta+120) + i_b \cos(2\theta+240) + i_c \cos 2\theta\right\} \\
\psi_c &= x_{afd}\, I_{fd} \cos\theta_3 + x_{a1d}\, I_{1d} \cos\theta_3 + x_{a1q}\, I_{1q} \sin\theta_3 \\
&\quad + \frac{x_0}{3}(i_a+i_b+i_c) + \frac{2A}{3}\left\{i_c - \frac{i_a+i_b}{2}\right\} \\
&\quad + \frac{2B}{3}\left\{i_a \cos(2\theta+240) + i_b \cos 2\theta + i_c \cos(2\theta+120)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(13) 式の負号は発電機動作を表わす。r は系統の回路抵抗，I_{fd}，I_{1d}，I_{1q} は界磁，直軸及びアモルト回路電流，x_{afd}，x_{a1d}，x_{a1q} は直軸電機子と界磁及び直横アモルト間の相互リアクタンスを示す。また

$$A = \frac{x_d + x_q}{2}, \qquad B = \frac{x_d - x_q}{2}$$

そして無負荷誘導起電力 e は

$$e = -x_{afd}\, I_{f0} \tag{15}$$

のごとく示される。I_{f0} は e（実効値）を定格値ならしめる励磁直流とする。

b)（$d\,q\,0$）軸上

いわゆる Park が誘導した方程式である。直交軸上のインピーダンス・マトリクスより直ちに

$$\left.\begin{aligned}
-e_d &= p\,\psi_d(p) + \psi_q(p) + r\, i_d \\
-e_q &= p\,\psi_q(p) - \psi_d(p) + r\, i_q \\
-e_0 &= p\,\psi_0(p) + r\, i_0
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
\psi_d(p) &= G(p)\, E_{fd} + x_d(p)\, i_d \\
\psi_q(p) &= x_q(p)\, i_q \\
\psi_0(p) &= x_0\, i_0 \\
G(p) &= \frac{x_{afd}(p)}{R_{fd} + p\, x_{ffd}(p)} = \frac{x_{afd}(R_{1d} + x_{11d}\, p) - x_{f1d}\, x_{a1d}\, p}{(R_{fd} + x_{ffd}\, p)(R_{1d} + x_{11d}\, p) - x^2_{f1d}\, p^2}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

R_{fd}, x_{ffd}; R_{1d}, x_{11d} 及び R_{1q}, x_{11q} はそれぞれ界磁，直横両軸アモルト回路の抵抗及びリアクタンスであり，x_{f1d}, x_{a1d} は界磁と直軸アモルト間及び直軸電機子直軸アモルト間の相互リアクタンスを示す。E_{fd} は励磁電圧（直流一定）とする。$x_d(p)$, $x_q(p)$ は演算子インピーダンスである。

アモルト回路が無い時は $R_{1d}=\infty$, $R_{1q}=\infty$ とおくから

$$x_q(p)=x_q$$

$$G(p)=\frac{x_{afd}}{R_{fd}+x_{ffd}\,p}=\frac{1}{x_{afd}}\cdot\frac{T_{d_0}'(x_d-x_d')}{T_{d_0}'\,p+1}$$

但し T_{d_0}' は過渡直軸開路時定数である。

$$T_{d_0}'=\frac{x_{ffd}}{R_{fd}}$$

c) （120）軸上

相軸インピーダンス・マトリクスを対称軸変換により対称軸上に表示させる。併し界磁その他の回転子項を消去するためにはこれを一旦静止対称上に変換し，消去後対称軸へ再変換するごとき操作が必要である。なおこの際演算子変移定理を使用して $\varepsilon^{\pm j\theta}$, $\varepsilon^{\pm 2j\theta}$ の時間項を間違いなく処理しなければならない。

$$\left.\begin{aligned}-e_1&=r\,i_1+p\,\psi_1(p,\ t)\\-e_2&=r\,i_2+p\,\psi_2(p,\ t)\\-e_0&=r\,i_0+p\,\psi_0\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(p,\ t)&=\frac{1}{2}G(p+j)\cdot\varepsilon^{-j\theta}E_{fd}+A(p+j)i_1+B(p+j)\cdot\varepsilon^{-j2\theta}i_2\\\psi_2(p,\ t)&=\frac{1}{2}G(p-j)\cdot\varepsilon^{j\theta}E_{fd}+A(p-j)i_2+B(p-j)\cdot\varepsilon^{j2\theta}i_1\\\psi_0&=x_0\,i_0\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

上式の $\psi(p,\ t)$ は時間項を含むため可逆的取扱いができない。

d) （I II 0）軸上

静止対称軸変換によつて求まるインピーダンス・マトリクスより直ちに次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}-e_{\mathrm{I}}&=p\psi_{\mathrm{I}}(p)+j\psi_{\mathrm{I}}(p)+r\,i_{\mathrm{I}}\\-e_{\mathrm{II}}&=p\psi_{\mathrm{II}}(p)-j\psi_{\mathrm{II}}(p)+r i_{\mathrm{II}}\\-e_0&=p\,\psi_0(p)\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

ここに

$$\psi_{\mathrm{I}}(p)=\frac{1}{2}G(p)E_{fd}+A(p)i_{\mathrm{I}}+B(p)i_{\mathrm{II}}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{II}(p)&=-\frac{1}{2}G(p)E_{fd}+B(p)i_I+A(p)i_{II}\\ \psi_0(p)&=x_0 i_0\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

以上の4軸を通じ，ri は抵抗による電圧降下，$p\psi$ は無効電流によるリアクテブ電圧を表わし，それ以外の項はトルク成分を表わす。相軸と対称軸においては，トルク成分は $p\psi$ の中に含まれており

$$p\psi=\psi p+\frac{d\psi}{d\theta}p\theta$$

の第1項（即ち $p\psi$ で $p=1$ としたもの）が無効電流による電圧成分を，第2項がトルク成分を代表する。但し第2項はトルク成分のみならず Christoffel 成分をも含むから，トルクに関する限りこのような方法で分離はできない。

Ⅵ　直交軸における諸量

次に4軸の出力，無効電力，損失，トルク各瞬時値諸量をそれぞれ算出し，最後にすべてこれを直交軸量と比較し換算係数を調べる。マトリクス変換に基因する電力の不変量不成立についてはⅣで述べたから，ここではマトリクス変換の儘各軸上に個別に表示しよう。先ず $(d\,q\,0)$ 軸から述べる。（発電機動作について）（3）式に述べたごとく

銅損$=\dot{i}_t{}^*\dot{R}\dot{i}$，無効電力$=\dot{i}_t{}^*\dot{L}p\dot{i}$，トルク$=-\dot{i}_t{}^*\dot{G}\dot{i}$

直交軸の $\dot{e}(e_d\,e_q\,e_0)$，$\dot{i}(i_d\,i_q\,i_0)$ 要素はすべて実数で共軛値は原値に等しい。

$$\left.\begin{aligned}
\text{損　失}&=\dot{i}_t{}^*\dot{R}\dot{i}=r(i_d{}^2+i_q{}^2+i_0{}^2)\\
\text{出　力}&=\dot{i}_t\dot{e}^*=e_d i_d+e_q i_q+e_0 i_0\\
\text{無効電力}&=\dot{i}_t{}^*\dot{L}p\dot{i}\\
&=p\left[G(p)E_{fd}i_d+x_d(p)i_d{}^2+x_q(p)i_q{}^2+x_0 i_0{}^2\right]\\
&=p\left[\psi_d(p)i_d+\psi_q(p)i_q+\psi_0(p)i_0\right]\\
\text{トルク(入力)}&=-\dot{i}_t{}^*\dot{G}\dot{i}\\
&=G(p)E_{fd}i_q-\{x_d(p)-x_q(p)\}i_d i_q\\
&=\psi_d(p)i_q-\psi_q(p)i_d
\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

以上の計算は直交軸上のインピーダンス・マトリクスの $\dot{R}$, $\dot{L}$, $\dot{G}$ 対応要素を（2）式より収拾してなされる。対称負荷時では恒に $i_0=0$ となるからこれを代入すればよい。更に定態時では $p=0$ で無効電力は消失する。

Ⅶ　相軸における諸量

相軸では定係数方程式とならないから，無効電力とトルクについては特別の注意が要る。ト

ルクは直交軸上インピーダンスの対応要素 $\dot{Z}_{dq0}$ を相軸変換によつて（$a\,b\,c$）軸へ再変換して求まる。

$$\dot{G}_{dq0}=\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & f & d & q & 0 \\ \hline
f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
d & 0 & 0 & x_q(p) & 0 \\ \hline
q & -x_{1fd}(p) & -x_d(p) & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

また無効電力については $\dot{Z}_{abc}$ にて p を含まない項をすべて零として，または $\dot{Z}_{dq0}$ の $\dot{L}$ マトリクスに同様な変換を施して求まる。これらトルク及び無効電力の運算は何れも p が代数的数でないため，例えば $x_d(p)\cdot\cos\theta$ のごときは $\cos\theta\cdot x_d(p)$ と等しくならず計算は甚だ複雑化する。それで次のように近似することにする。$x_d(p)$，$x_q(p)$ の演算子インピーダンスは p を含みはするが，これは時間の経過につれて次過渡値から過渡値を経て定態値へと移行するインピーダンス値を意味し，特定瞬間には一定値を示すと考えられる。故に $x_d(p)$，$x_q(p)$ 及び $G(p)$ に関する限り p は代数的数であると仮定し，これ以外の p はすべて厳密に扱う。如上の点より本章の $x_d(p)$，$x_q(p)$ は定数であり，もはや厳密な演算子的性格が失われたものである。なお直交軸同様相軸においても $\dot{e}(e_a\,e_b\,e_c)$，$\dot{i}(i_a\,i_b\,i_c)$ は実数でその共軛値に相等しい。以下計算結果を示す。

$$\left.\begin{aligned}
\text{損}\quad\text{失}&=\dot{i}_t{}^*\,\dot{R}\,\dot{i}=r(i_a{}^2+i_b{}^2+i_c{}^2)\\
\text{出}\quad\text{力}&=\dot{i}_t\,\dot{e}^*=e_a\,i_a+e_b\,i_b+e_c\,i_c\\
\text{無効電力}&=\dot{i}_t{}^*\,\dot{L}\,p\,\dot{i}=p\,[\psi_a\,i_a+\psi_b\,i_b+\psi_c\,i_c]\\
&=p\Big[G(p)E_{fd}(i_a\cos\theta_1+i_b\cos\theta_2+i_c\cos\theta_3)+\frac{x_0}{3}(i_a+i_b+i_c)^2\\
&\quad+\frac{2}{3}A(p)\{(i_a\sin\theta_1+i_b\sin\theta_2+i_c\sin\theta_3)^2\\
&\quad+(i_a\cos\theta_1+i_b\cos\theta_2+i_c\cos\theta_3)^2\}\\
&\quad-\frac{2}{3}B(p)\{(i_a\sin\theta_1+i_b\sin\theta_2+i_c\sin\theta_3)^2\\
&\quad-(i_a\cos\theta_1+i_b\cos\theta_2+i_c\cos\theta_3)^2\}\Big]\\
\text{トルク}&=-\dot{i}_t{}^*\,\dot{G}\,\dot{i}\\
&=G(p)\,E_{fd}\{i_a\sin\theta_1+i_b\sin\theta_2+i_c\sin\theta_3\}\\
&\quad+\frac{4}{3}B(p)\{i_a\sin\theta_1+i_b\sin\theta_2+i_c\sin\theta_3\}\times\\
&\qquad\{i_a\cos\theta_1+i_b\cos\theta_2+i_c\cos\theta_3\}
\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

対称負荷時では $i_0=0$, $i_a+i_b+i_c=0$ が成立する。更に定態時では $x_d(0)=x_d$, $x_q(0)=x_q$ 等の定態値を有する。但し無効電力の前部に括出した p は微分記号を表わし，定態時では [　　] 内部は定数となるから無効電力は零である。

以上を直交軸量 (22) 式と比較するため直交軸変換式によつて直交軸に表示した結果を示すと

$$\left.\begin{aligned} \text{損　失} &= \frac{3}{2} r\,(i_d^2+i_q^2)+3\,r\,i_0^2 \\ \text{無効電力} &= p\left[\frac{3}{2}\{\psi_d(p)i_d+\psi_q(p)\,i_q\}+3\psi_0(p)\,i_0\right] \\ \text{トルク} &= \frac{3}{2}\,[\psi_d\,(p)\,i_q-\psi_q\,(p)\,i_d] \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

出力計算についてはⅣに示した通りであるので再掲しない。

Ⅷ 対称軸における諸量

対称軸においても相軸同様インピーダンス・マトリクスは定係数表現とならぬから，前章の近似はここでも適用され $G(p)$, $x_d(p)$, $x_q(p)$ は常数視する。無効電力は $p\Sigma\psi(p)i^*$ のごとくして，またトルクは $G_{120}=C'''^{-1}Z_{dq0}C'''$ より直交軸から直接計算する。C''' は直交軸対称軸変換マトリクスであつて次のような変換式である。但し界磁項の変換にはこれに 1 の単位マトリクスを直接和して4行列のマトリクスにする。

$$C'''=\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 0 \\ \hline d & \varepsilon^{j\theta} & \varepsilon^{-j\theta} & 0 \\ q & -j\varepsilon^{j\theta} & j\varepsilon^{-j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad C'''^{-1}=\frac{1}{2}\begin{array}{c|ccc} & d & q & 0 \\ \hline 1 & \varepsilon^{-j\theta} & j\varepsilon^{-j\theta} & 0 \\ 2 & \varepsilon^{j\theta} & -j\varepsilon^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \tag{25}$$

なお対称軸では次章の静止対称軸と同様電圧，電流の共軛値は原値と異り例えば

$i_1 i_1^*=|i_1|^2 \neq i_1^2$

$i_2 i_2^*=|i_2|^2 \neq i_2^2$

となる。以下計算結果を示すと

$$\begin{aligned} \text{損　失} &= i_t^* R\, i = r[\,|i_1|^2+|i_2|^2+|i_0|^2\,] \\ \text{出　力} &= i_t\, e^* = e_1^*\, i_1+e_2^*\, i_2+e_0^*\, i_0 \\ \text{無効電力} &= p\,[\psi_1\,(p)\,i_1^*+\psi_2\,(p)\,i_2^*+\psi_0\,(p)\,i_0^*] \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &=p\Big[\frac{1}{2}G(p)E_{fd}\{\varepsilon^{-j\theta}i_1^*+\varepsilon^{j\theta}i_2^*\}+A(p)\{|i_1|^2+|i_2|^2\} \\ &\quad+B(p)\{\varepsilon^{-j2\theta}i_1^*i_2+\varepsilon^{j2\theta}i_1i_2^*\}+x_0i_0^2\Big] \\ \text{トルク}&=-\underset{\cdot}{i_t}^*\underset{\cdot\cdot}{G}\underset{\cdot}{i}=-\frac{j}{2}G(p)E_{fd}\{\varepsilon^{-j\theta}i_1^*-\varepsilon^{j\theta}i_2^*\} \\ &\quad+jA(p)\{|i_1|^2-|i_2|^2\}+jB(p)\{\varepsilon^{-j2\theta}i_1^*i_2-\varepsilon^{j2\theta}i_1i_2^*\} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

平衡負荷または平衡故障の過渡時においては常に

$$i_1^*=i_2,\quad e_1^*=e_2,\quad i_0=0$$
$$i_1=i_2^*,\quad e_1=e_2^*,\quad e_0=0$$

が成立するから上式は次のごとく簡略化される。

$$\left.\begin{aligned} \text{損失}&=2r\,i_1i_2 \\ \text{出力}&=e_2i_1+e_1i_2 \\ \text{無効電力}&=p\Big[\frac{1}{2}G(p)E_{fd}\{\varepsilon^{-j\theta}i_2+\varepsilon^{j\theta}i_1\} \\ &\quad+2A(p)i_1i_2+B(p)\{\varepsilon^{-j2\theta}i_2^2+\varepsilon^{j2\theta}i_1^2\}\Big] \\ \text{トルク}&=\frac{j}{2}G(p)E_{fd}\{\varepsilon^{-j\theta}i_2-\varepsilon^{j\theta}i_1\} \\ &\quad+jB(p)\{\varepsilon^{-j2\theta}i_2^2-\varepsilon^{j2\theta}i_1^2\} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

平衡定態時では i_1, i_2 は一定で上式 { } 内部は共軛値の和となつて一定である。そして無効電力は零になる。

また (26) 式結果を直交軸へ変換して換算係数を示すと

$$\left.\begin{aligned} \text{損失}&=\frac{r}{2}(i_d^2+i_q^2)+ri_0^2 \\ \text{無効電力}&=p\Big[\frac{1}{2}\{\psi_d(p)i_d+\psi_q(p)i_q\}+\psi_0(p)i_0\Big] \\ \text{トルク}&=\frac{1}{2}\Big[\psi_d(p)i_q-\psi_q(p)i_d\Big] \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

出力については (12) 式より自明である。

XI　静止対称軸における諸量

本軸上では定係数のインピーダンスであるから表現は甚だ容易である。対称軸を静止対称軸変換したマトリクス及び (20), (21) の Park 基本式より次の結果を得る。

$$\text{損失}=\underset{\cdot}{i_t}^*\underset{\cdot\cdot}{R}\underset{\cdot}{i}=r\,[\,|i_{\mathrm{I}}|^2+|i_{\mathrm{II}}|^2+|i_0|^2\,]$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{出　　力} = \underset{\cdot}{i}_t \underset{\cdot}{e}^* = e_{\mathrm{I}}^* i_{\mathrm{I}} + e_{\mathrm{II}}^* i_{\mathrm{II}} + e_0^* i_0 \\
&\text{無効電力} = \underset{\cdot}{i}_t^* \underset{\cdot}{L}\, p\, \underset{\cdot}{i} = p[\psi_{\mathrm{I}}(p)\, i_{\mathrm{I}}^* + \psi_{\mathrm{II}}(p)\, i_{\mathrm{II}}^* + \psi_0(p)\, i_0^*] \\
&\qquad = p\Big[\frac{1}{2} G(p)\, E_{fd}\{i_{\mathrm{I}}^* + i_{\mathrm{II}}^*\} \\
&\qquad\quad + A(p)\{|i_{\mathrm{I}}|^2 + |i_{\mathrm{II}}|^2\} + B(p)\{i_{\mathrm{I}}^* i_{\mathrm{II}} + i_{\mathrm{I}}\, i_{\mathrm{II}}^*\} + x_0 i_0^2\Big] \\
&\text{ト　ル　ク} = -\underset{\cdot}{i}_t^* \underset{\cdot}{G}\, \underset{\cdot}{i} = -\frac{1}{2} G(p)\, E_{fd}\{j\, i_{\mathrm{I}}^* - j\, i_{\mathrm{II}}^*\} \\
&\qquad - jA(p)\{|i_{\mathrm{I}}|^2 - |i_{\mathrm{II}}|^2\} - jB(p)\{i_{\mathrm{I}}^* i_{\mathrm{II}} - i_{\mathrm{II}}^* i_{\mathrm{I}}\}
\end{aligned}\right\} \tag{29}
$$

平衡時の過渡問題では $i_{\mathrm{I}}^* = i_{\mathrm{II}}$, $i_0 = 0$ 等であるから

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{損　　失} = 2r\, i_{\mathrm{I}}\, i_{\mathrm{II}} \\
&\text{出　　力} = e_{\mathrm{I}}\, i_{\mathrm{II}} + e_{\mathrm{II}}\, i_{\mathrm{I}} \\
&\text{無効電力} = p\Big[\frac{1}{2} G(p)\, E_{fd}\{i_{\mathrm{I}} + i_{\mathrm{II}}\} + 2A(p)\, i_{\mathrm{I}}\, i_{\mathrm{II}} + B(p)\{i_{\mathrm{I}}^2 + i_{\mathrm{II}}^2\}\Big] \\
&\text{ト　ル　ク} = \frac{1}{2} G(p)\, E_{fd}\{j\, i_{\mathrm{I}} - j\, i_{\mathrm{II}}\} + jB(p)\{i_{\mathrm{I}}^2 - i_{\mathrm{II}}^2\}
\end{aligned}\right\} \tag{30}
$$

上式の結果は対称軸と極めて相似しているので実際の計算上便利である。しかもこれらの式は何れも厳密な演算子方程式であつて，対称軸における演算子式常数化のごとき近似を行わずに成立している。直交軸変換によつて (29) 式を書直せば次の換算係数を示す。

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{損　　失} = \frac{r}{2}(i_d^2 + i_q^2) + r\, i_0^2 \\
&\text{無効電力} = p\Big[\frac{1}{2}\{\psi_d(p)\, i_d + \psi_q(p)\, i_q\} + \psi_0(p)\, i_0\Big] \\
&\text{ト　ル　ク} = \frac{1}{2}[\psi_d(p)\, i_q - \psi_q(p)\, i_d]
\end{aligned}\right\} \tag{31}
$$

(28) 式と比較すれば判る通り対称軸の結果とここでも全く一致している。

X　結　　　言

マトリクス変換に基く不変量変換の不成立につき換算係数を挙げて説明し，電力のみならず損失，トルク，無効電力等もこの様な関係を有することを示した。これら諸量はすべてエネルギーの単位である。4軸の結果中，実用性のあるものは直交軸と静止対称軸の2者であり，前者は最も簡潔な表現である。後者は対称軸と極めて相似する表現で物理的見地より有用である。

なお過渡現象に関しても系統の故障時突発電流や，系統内機器の電圧尖頭値の解析並びに論議では，電圧方程式のみを取扱うから不変量成立の必要は全く生じないことを附言する。

終りに当り本研究全般に亘つて直接的の御指導を載いた北大工学部小串孝治教授に衷心より感謝の意を表する。

（昭和31年4月30日受理）