

## 直列コンデンサ系統の過補償における一解析

その他（別言語等） のタイトル	An Analysis of Over-Compensated Series Capacitor Systems
著者	三浦 五郎
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	3
号	1
ページ	33-40
発行年	1958-07-10
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3113">http://hdl.handle.net/10258/3113</a>

# 直列コンデンサ系統の過補償における一解析

三 浦 五 郎

## An Analysis of Over-Compensated Series Capacitor Systems

Goro Miura

### Abstract

Analyses for under compensation have been reached by the present writer on several kinds of transients.

This paper makes the complexity of over-compensated problems remarkably simple by applying Van der Pol's solutions. The writer obtains general expressions of rush currents and charges in the system, frequencies of higher harmonics, quantitative characteristics of pole-saliency, and sufficient conditions of stable and unstable regions.

### I. 緒 言

単一送電線路に直列コンデンサを附して、凸極同期発電機と他の同期機または母線間を連系するときの、いろいろな故障における突流解析、異常電圧の求出はいままで多く行なわれてきている。すでに筆者によつても3相同時故障<sup>1)</sup>と、不足補償における線間故障<sup>2)</sup>について最近公表したところである。しかるに、いわゆる過補償における不平衡短絡となると、解析はいちぢるしく複雑となり、定性的にはもとより簡明な凸極効果の把握が行ない難い。本論文はこの場合の一試案として、周波数変調に対する Van der Pol の解<sup>3)</sup>を応用すれば、故障電流(または電荷)の解をベッセル級数で表示できることを示し、あわせて系統の不安領域境界を知ることが明らかにしたものである。

### II. 基本式の変換

同期機の回転子回路と電機子回路につき、下に示す基本式が成立する。便宜上、ここでは制動捲線を有しない機械の場合を示すが、以下の算法は制動捲線を有する場合に進展させるこ

- 1) 三浦：電学誌, **73**, 1345 (1953); 三浦：電学誌, **74**, 930 (1954); 三浦：送電線直蓄委, 219 (1955) 等.
- 2) 三浦：室工大研報, **2**, 173 (1956); 三浦：連大, 357 (1956); 三浦：電学誌, **77**, 404 (1957) 等.
- 3) B. Van der Pol: P. I. E. E., **18**, 1194 (1930).

ととする。

$$\left. \begin{aligned} x_{af} \left[ T'_{d0} \frac{d}{dt} + 1 \right] I_{fa} &= \frac{2}{\sqrt{3}} T'_{d0} (x_a - x'_a) \frac{d}{dt} i \sin \theta \\ \sqrt{3} e \cos \theta &= -\sqrt{3} x_{af} \frac{d}{dt} I_{fa} \sin \theta \\ &+ 2 \left[ r + \frac{d}{dt} (A' - B' \cos 2\theta) \right] i + 2x_c \int i dt \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし

$$A' = \frac{1}{2} (x_a + x_q) + x_i + x_t$$

$$B' = \frac{1}{2} (x_a - x_q)$$

$$\theta = \theta_0 + t$$

上式に用いた記号はすべて慣用記号であるので、説明は省略する。時間に関しては単位法を採用した。

さて制動巻線を含めて回転子回路の抵抗を零とおく（時定数は無限大）方法と、同抵抗を無限大とおく（時定数は零）方法の両極端の解析から、この過渡現象を知ることとする。筆者が前に行なつた不平衡故障解析のように、この両者をあわせ考察することは、本問題のごとき過補償 ( $x_c > x_i + x_t$ ) については到底不可能であるからである。かかる観点より全回転子回路を消去するときは、結局次式のごとき方程式に帰一する。

$$\frac{r}{A} i + \frac{d}{dt} (1 + a \cos 2\theta) i + a \int i dt = \frac{\sqrt{3}}{2A} e \sin \theta \quad (2)$$

ただし

$$A = \frac{1}{2} (x'_a + x'_q) + x_i + x_t$$

$$a = \frac{x'_q - x'_a}{x'_a + x'_q + 2x_i + 2x_t}$$

$$a = \frac{x_c}{A} \dots \dots \text{系統全体の補償度 (過)}$$

上式は直列コンデンサ補償送電線路と凸極同期発電機の直列回路が、線間短絡故障を起すときの近似方程式となる。初め、両辺を一度微分して  $i$  のかわりに電荷  $q = \int i dt$  を用い、その結果に定数変化法によつて  $q = u(t)y(t)$  とおくときは、 $y$  に関しその一次導関数を欠く2階常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left[ \frac{a}{1 + a \cos 2\theta} - \frac{dP}{dt} - P^2 \right] y = \frac{\sqrt{3} e}{2A(1 + a \cos 2\theta)} \cdot \frac{\cos \theta}{u(t)} \quad (3)$$

ただし

$$P = \frac{r - 2aA \sin 2\theta}{2A(1 + a \cos 2\theta)}$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + a \cos 2\theta}} \text{Exp} \left\{ \frac{-r}{2A\sqrt{1-a^2}} \tan^{-1} \left[ \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot \tan \theta \right] \right\}$$

$u(t)$  は電線路抵抗  $r$  にもとづく電荷減衰率を示す。そしてかりに  $a \doteq 0$  とみなせば

$$u(t) = \text{Exp} \left\{ \frac{-r\theta}{2\sqrt{(x'_q + x_l + x_t)(x'_q + x_l + x_t)}} \right\}$$

であつて、一相あたりの逆相リアクタンスはコンデンサに無関係となる。一方(3)式は、Hillの方程式の一般形に帰着する。いま近似解を求めるため、これを Mathieu の方程式に変換する。すなわち凸極性を示す  $a$  の値は、一般に大凡 0.3 附近以下の大きさであるから、 $a^2 \ll 1$  として(3)式の  $y$  の係数を簡略化するときは

$$\left[ \frac{a}{1 + a \cos 2\theta} - \frac{dP}{dt} - P^2 \right] \doteq p + 16q \cos 2\theta \quad (4)$$

ただし

$$p = a - \left( \frac{r}{2A} \right)^2$$

$$q = \frac{a}{8} \left[ 1 - \frac{a}{2} + \left( \frac{r}{2A} \right)^2 \right]$$

かくして次式のごとき近似方程式が得られた。なお  $\theta = x$ 。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p + 16q \cos 2x)y = \frac{\sqrt{3} e}{2A(1 + a \cos 2\theta)} \cdot \frac{\cos x}{u(x - \theta_0)} \quad (5)$$

### III. 系統の不安定領域

(5)式の齊次方程式をとると

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p + 16q \cos 2x)y = 0 \quad (6)$$

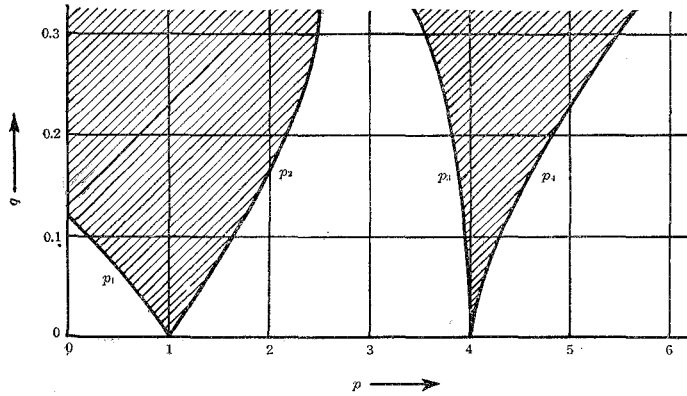
この一般解は Mathieu 関数であつて

$$y = C_1 e^{\mu x} \phi(x) + C_2 e^{-\mu x} \phi(-x)$$

$\phi(x)$ ,  $\phi(-x)$  は  $\pi$  又は  $2\pi$  を周期とする偶関数であるが、いまの場合  $q$  の値は  $|q| \doteq \frac{1}{25} \left| 1 - \frac{a}{2} \right|$  で、全系統に対する補償度  $a$  が 100~300% の過補償範囲においては  $|q| \doteq 0.02$  が成立するとき小値である。故に  $q^2 \ll 1$  によつて特性数  $p$  を展開するとき<sup>4)</sup>

4) C. Hayashi: Forced Oscillations in Non-Linear Systems.

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1 - 8q - 8q^2 + \dots \\
 p_2 &= 1 + 8q - 8q^2 - \dots \\
 p_3 &= 4 + \frac{80}{3}q^2 - \dots \\
 p_4 &= 4 - \frac{16}{3}q^2 + \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}$$



Mathieu 方程式の不安定領域

これから周知の図に示すごとに、領域曲線が画かれる。図で斜線を施した部分は不安定である。現在の場合は  $p_2$  と  $p_3$  との間に存在する解を求めているわけで、これ以外は不安定領域であり

$$p \leq p_2, \quad p \geq p_3$$

あるいは、安定のための十分条件は  $p_2 < p < p_3$  で与えられ、これより上記補償範囲ではほぼ

$$\sqrt{1+a} \left[ 1 + \left( \frac{r}{2A} \right)^2 \right] < a < 4 + \left( \frac{r}{2A} \right)^2 \tag{7}$$

において安定である。

#### IV. Van der Pol 解の応用

齊次方程式(6)において、 $16q=r$  とおけば

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (p+r \cos 2x)y = 0 \tag{8}$$

を得る。上式は Mathieu の方程式であるが、工学的近似解を求めるため、Van der Pol の方法を応用することとする。前章で述べたように、過補償域においては  $p > 1$ ,  $|q| < 0.02$  である故

$$\left(\frac{\gamma}{p}\right)^2 \ll 1$$

いま(8)式の特解の一つを

$$y = \text{Exp}\left\{\int \kappa dt\right\} \quad (9)$$

と仮定するときは

$$\frac{dy}{dx} = \kappa y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y \left( \frac{d\kappa}{dx} + \kappa^2 \right)$$

したがって(8)式は次のように表わされる。

$$\frac{d\kappa}{dx} + \kappa^2 + p + \gamma \cos 2x = 0$$

本式の近似解は

$$\kappa \doteq \pm j\sqrt{p + \gamma \cos 2x}$$

である。ただし、そのためには上記したごとき条件が成立しなければならない。

かくして

$$y = c_1 e^{\int \kappa_1 dx} + c_2 e^{\int \kappa_2 dx} \\ = C_1 \cos \left[ \int \sqrt{p + \gamma \cos 2x} dx \right] + C_2 \sin \left[ \int \sqrt{p + \gamma \cos 2x} dx \right]$$

を得る。 $C_1$ 、 $C_2$ 等は初期条件により定まる積分定数である。 $p^2 \gg \gamma^2$ の近似によつて展開すれば、上式は

$$y = C_1 \cos [px + m \sin 2x] + C_2 \sin [px + m \sin 2x] \\ = C_1 \cos px \cdot \cos (m \sin 2x) - C_1 \sin px \cdot \sin (m \sin 2x) \\ + C_2 \sin px \cdot \cos (m \sin 2x) + C_2 \cos px \cdot \sin (m \sin 2x) \quad (10)$$

ただし

$$m = \frac{\gamma}{4} = 4q$$

いま

$$\cos (m \sin \varphi) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos 2\varphi + 2J_4(m) \cos 4\varphi + \dots \\ \sin (m \sin \varphi) = 2J_1(m) \sin \varphi + 2J_3(m) \sin 3\varphi + 2J_5(m) \sin 5\varphi + \dots$$

なるフーリエ展開を利用して  $y$  を級数展開するときは、結局次に示すごとき解を得ることができ。

$$y = C_1 \{ J_0(m) \cos px - J_1(m) [\cos (p-2)x - \cos (p+2)x] \\ + J_2(m) [\cos (p-4)x + \cos (p+4)x] \\ - J_3(m) [\cos (p-6)x - \cos (p+6)x] \\ + \dots \}$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_2 \{ J_0(m) \sin px + J_1(m) [\sin (p+2)x - \sin (p-2)x] \\
 &\quad + J_2(m) [\sin (p+4)x + \sin (p-4)x] \\
 &\quad + J_3(m) [\sin (p+6)x - \sin (p-6)x] \\
 &\quad + \dots \} \tag{11}
 \end{aligned}$$

前言したとおり  $r$  は小値であり、大約  $m \doteq 0.08$  である。近似的に  $m^2 \ll 1$  とおけるときは

$$J_0(m) = 1, \quad J_1(m) = \frac{m}{2}, \quad J_2(m) = J_3(m) = \dots = 0$$

が成立し、 $p$  なる周波数のほかに  $p \pm 2$  の 2 種の高調波出現をみるに止まる。基本周波数  $p$  については II 章に示した。

なお (11) 式を、 $J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$  の関係より、次式のごとく簡略して記すことができる。すなわち  $\theta = x$ ,  $q = u(t)y(t)$  を置換して

$$q = K \cdot u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cdot \cos [(p+2n)\theta - \xi] \tag{12}$$

ただし

$$K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \xi = \tan^{-1} \frac{C_2}{C_1}$$

で初期条件からきまる積分定数でである。したがって電流  $i$  は  $q$  を微分して得られ、近似的に次式で与えられる。

$$i = -K \cdot u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (p+2n) J_n(m) \cdot \sin [(p+2n)\theta - \xi] \tag{13}$$

### V. 定常電流の解

つぎに  $q$  または  $i$  の一般解を求める。基本式 (3) 式に  $q = u(t)y(t)$  の置換を行なえば

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2P \frac{dq}{dt} + \frac{a}{1+a \cos 2\theta} q = \frac{\sqrt{3} e \cos \theta}{2A(1+a \cos 2\theta)} \tag{14}$$

となるが、この右辺項 (これを  $f(t)$  とする) を零とした齊次方程式の特解を  $q_1, q_2$  とすると、(14) 式の一般解は次式で示されることは微分方程式の理論<sup>5)</sup>の教えるところである。

$$q = C_1 q_1 + C_2 q_2 + q_1 \int \frac{1}{W} f(t) q_2 dt - q_2 \int \frac{1}{W} q_1 dt \tag{15}$$

ただし

$$W = q_2 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_2}{dt}$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3} e \cos \theta}{2A(1+a \cos 2\theta)} \dots\dots \text{印加起電力}$$

5) A. R. Forsyth: Differential Equations.

しかるに特解  $q_1, q_2$  については (10) 式によつて既出である。すなわち

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \cdot u(t) \cdot \cos [px + m \sin 2x] \\ q_2 &= C_2 \cdot u(t) \cdot \sin [px + m \sin 2x] \end{aligned}$$

これよりロンスキー定数  $W$  は

$$W = -C_1 C_2 [u(t)]^2 [p + 2m \cos 2\theta]$$

のごとくなり、これらと (15) 式より一般解  $q$  を計算することができる。ただ途中の運算は相当に複雑であるが、 $u(t)$  の指数項は小量であることを利用して、積分および微分の際は  $u(t)$  を常数視するなどの近似を適宜に行なうときは次式を得る。

$$\begin{aligned} q \text{ の定常成会} &= q_s = q_1 \int \frac{1}{W} f(t) q_2 dt - q_2 \int \frac{1}{W} f(t) q_1 dt \\ &= \frac{\sqrt{3} e}{2A [p + (2m + ap) \cos 2\theta]} \left\{ - \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) \cdot \cos (p + 2n) \theta \int_{-\infty}^{\infty} [J_n(m) \right. \\ &\quad \left. + J_{n+1}(m)] \sin (p + 2n + 1) \theta dt + \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) \cdot \sin (p + 2n) \theta \int_{-\infty}^{\infty} [J_n(m) \right. \\ &\quad \left. + J_{n+1}(m)] \cos (p + 2n + 1) \theta dt \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3} e}{4A [p + (2m + ap) \cos 2\theta]} \sum_l \sum_n J_l(m) [J_n(m) \\ &\quad + J_{n+1}(m)] \cdot \frac{\cos [2(n-l) + 1] \theta}{p + 2n + 1} \end{aligned} \quad (16)$$

$J_l(m), J_n(m)$  は  $l$  次および  $n$  次の第 1 種ベッセル関数であり、 $l, n$  は  $-\infty$  より  $+\infty$  に至る整数全部をとる。

上式より直ちに、定常電流は基本波のほかに、無限個の奇数調波を含むことが明らかとなつた。また、その基本波、第 3 高調波等に対する振幅値が得られる。たとえば基本周波数は  $n=l$  および  $n=l-1$  にて

$$q_{s1} = \frac{\sqrt{3} e \cos \theta}{4A [p + (2m + ap) \cos 2\theta]} \sum_l \left\{ \frac{J_l(J_l + J_{l+1})}{a + 2l + 1} + \frac{J_l(J_{l-1} + J_l)}{a + 2l - 1} \right\} \quad (17)$$

のごとくであり、第 3 調波では  $n=l+1$  および  $n=l-2$ 、第 5 調波では  $n=l+2, l-3$  等である。しかし厳密に言えば、(17) 式はさらに無限個の奇数調波に分解され、また基本周波についても他の  $q_{s3}, q_{s5} \dots$  等からも僅少ではあるが導出されるので、正確にはこれらの和をとらねばならない。

## VI. 結 言

かくして全電荷の解は、特解 (12) 式と定常解 (16) 式との和であり、電流値はこれを微分し



て求まる。以下、得られた結果を要約すれば次のとおりである。

(イ) 直列コンデンサの補償が100%以上のときは、基礎方程式は Mathieu の微分方程式に帰一することを確認、近似的の一般解式を得た。

(ロ) 電機子回路にもとづく過渡電流の周波数は  $p \pm 2n$  ( $n = 0 \sim \infty$ ) の無限調波からなり、また定常電流の周波数は 1, 3, 5, …… の無限奇数調波である。

(ハ) 回転子回路にもとづく解析は未解決である。しかし突流の最大値を求めるのには支障ない。

(ニ) 補償度が100~400%におよぶときに、必要な安定領域に納まるための十分条件を得た。

(ホ) 本論文は Van der Pol の解を応用したものであるが、近年 Pipe 氏が B.W.K.<sup>6)</sup> 法を用いて一部の問題を解いたのと結果的に一致することを知った。

最後に本研究は北海道科学研究補助金の一部によつてなされたものであることを記し、御援助を頂いた北大、浅見義弘教授に謝意を表す。また有益な御指導と御助言を頂いた北大、小串孝治教授と早大、埴野一郎教授に深謝する。

(昭和33年5月、電気四学会連大講演)

昭和33年4月22日

---

6) L. A. Pipes: T.A.I.E.E., 73, Part I. 93 (1954).