

剛体で圧縮された多層弾性体の3次元応力解析

その他（別言語等） のタイトル	Stress Analysis of Multi-layered Systems Compressed by a Rigid Body
著者	松岡 健一, 能町 純雄
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	8
号	3
ページ	611-621
発行年	1976-01-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/3614

剛体で圧縮された多層弾性体の3次元応力解析

松岡 健一・能町 純雄*

Stress Analysis of Multi-layered Systems Compressed by a Rigid Body

Kenichi Matsuoka and Sumio Nomachi*

Abstract

The stress problems of multi-layered systems compressed by a rigid body are solved by combining the solution of an infinite case and the arbitrary functions, by which the difference between the infinite case and the multi-layered case may be canceled, so as to satisfy the condition of surface displacement.

The numerical calculations were carried out for the case of two layered systems of which the surface displacement varies linearly in one direction for $r < a$. The results show that the stresses and the displacements became larger as the value of the elastic constant of bottom layer becomes smaller than that of the surface layer.

1. ま え が き

剛体で圧縮される弾性体の問題は、接触応力問題の一種であるが、これに関する研究は2次元応力問題に対しては従来数多くの研究があり、ほとんど完成された観がある¹⁾。また3次元応力問題に対しては、HertzやBoussinesqueの研究があるが、半無限体の問題では、Sneddon²⁾が円柱座標でHankel変換を用いて、剛円柱および円錐で圧縮された場合の問題を解析している。これらはいずれも軸対称問題であるが、牟岐はこれを非軸対称問題に拡張し、傾斜した底面をもつ円柱で圧縮された半無限体を解析している。以上の研究はほとんど半無限領域に対するものであり、有限領域のものとしては、帯状無限体としてさえも解析が困難である。さらに多層弾性体の問題としては2次元応力問題でも、解析解を見出すことは不可能に近く、これに関する研究もほとんどない。わずかに2層体に対する木村³⁾の研究があるが、これも表面の接触応力を階段状に分割し、境界変位の条件を満足するようにこれを決定し、応力分布を求めたものである。従って多層体の3次元応力問題で表面に変位が与えられた場合の研究は、いわゆる有限要素法等完全な数値解析以外の方法で行なわれたものはないように思われる。

以上のように剛体で圧縮された多層弾性体の3次元応力問題では厳密に解析解を求めることはやはり不可能と考えられるので、ここでは一つの方法として解析解と数値解を組合せて解析する方法で、この問題を解析した。この問題は基礎地盤上の剛体(構造物)の変位によって基

* 北海道大学工学部教授 工博

礎地盤に生ずる変形および応力の挙動を解析するための一つの手がかりを与えるものである。

2. 無限厚板の一般解

2. 1 変位成分の一般式

無限厚板を図-1に示すように、厚さの方向に z 座標、これに直角方向に r, θ 座標をとり、それぞれの方向の変位成分を w, u, v とする。この無限厚板の一般解は、有限 Fourier-Hankel 変換を用いると⁵⁾⁶⁾

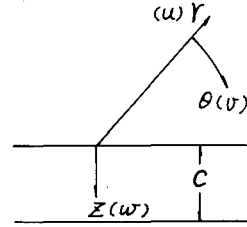


図-1 無限厚板

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi \{ A_{m\epsilon z} J_{m+1}(\xi r) + B_{m\epsilon z} J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \cos m\theta, \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi \{ A_{m\epsilon z} J_{m+1}(\xi r) - B_{m\epsilon z} J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \sin m\theta, \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi W_{m\epsilon z} J_m(\xi r) d\xi w m\theta, \quad (3)$$

ここで

$$A_{m\epsilon z} = \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{\mu} \phi^{(k)}(\xi z) \gamma_{m\epsilon k} + \frac{\mu + \lambda}{4\mu(2\mu + \lambda)} \{ \phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z) \} (\gamma_{m\epsilon k} - \delta_{m\epsilon k}) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} D_{m\epsilon k} \right] \quad (4)$$

$$B_{m\epsilon z} = \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{\mu} \phi^{(k)}(\xi z) \delta_{m\epsilon k} - \frac{\mu + \lambda}{4\mu(2\mu - \lambda)} \{ \phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z) \} (\gamma_{m\epsilon k} - \delta_{m\epsilon k}) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \phi^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} D_{m\epsilon k} \right], \quad (5)$$

$$W_{m\epsilon z} = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} P^{(k)}(\xi z) (\gamma_{m\epsilon k} - \delta_{m\epsilon z}) + \left\{ Q^{(k)}(\xi z) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} P^{(k)}(\xi z) \right\} D_{m\epsilon k} \right], \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{m\epsilon 1} &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty r J_{m+1}(\xi r) \left\{ C_m[\tau_{rz}] + S_m[\tau_{\theta z}] \right\}_{z=0} dr \\ \gamma_{m\epsilon 2} &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty r J_{m+1}(\xi r) \left\{ C_m[\tau_{rz}] + S_m[\tau_{\theta z}] \right\}_{z=c} dr \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{m\epsilon 1} &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty r J_{m-1}(\xi r) \left\{ C_m[\tau_{rz}] - S_m[\tau_{\theta z}] \right\}_{z=0} dr \\ \delta_{m\epsilon 2} &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty r J_{m-1}(\xi r) \left\{ C_m[\tau_{rz}] - S_m[\tau_{\theta z}] \right\}_{z=c} dr \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{m\epsilon 1} &= \int_0^\infty r J_m(\xi r) C_m[w]_{z=0} dr \\ D_{m\epsilon 2} &= \int_0^\infty r J_m(\xi r) C_m[w]_{z=c} dr \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$C_m[f] = \int_0^{2\pi} f \cdot \cos \theta d\theta, \quad S_m[f] = \int_0^{2\pi} f \cdot \sin m\theta d\theta.$$

また、式(4)~(6)中の関数は、有限 Fourier 変換の逆変換で与えられる関数で、

$$Q^{(1)}(\xi z) = \frac{\sinh \xi(c-z)}{\sinh \xi c}, \quad Q^{(2)}(\xi z) = \frac{\sinh \xi z}{\sinh \xi c}, \quad \phi^{(1)}(\xi z) = \frac{\cosh \xi(c-z)}{\sinh \xi c}, \quad \phi^{(2)}(\xi z) = \frac{\cosh \xi z}{\sinh \xi c}$$

$$\phi^{(k)}(\xi z) = \xi z \phi^{(k)}(\xi z) - \xi c Q^{(2)}(\xi z) \phi^{(k)}(\xi c), \quad \psi^{(k)}(\xi z) = \xi z Q^{(k)}(\xi z) - \xi c \phi^{(2)}(\xi z) \phi^{(k)}(\xi c)$$

式(4)～(6)は明らかに $c \rightarrow \infty$ とすれば、半無限弾性体の一般解となり、 $m=0$ とすれば軸対称変形を表わす。 γ, δ, D は式(7)～(9)に示すように境界の応力および変位で与えられる積分定数で、境界条件を満足するように決定する。なお、 μ, λ は Lamé の弾性定数で、 $J_m(\xi r)$ は m 次の第1種 Bessel 関数である。

2. 2 応力成分の一般式

応力成分の一般式は、式(1)～(6)から Hooke の法則を用いて求められる。今、 r, θ, z 方向の直応力を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ それぞれの面に作用するせん断応力を $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ とすれば、これらの値は、

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 \left[\lambda \Delta + 2\mu (A_{m\xi z} - B_{m\xi z}) \right] J_m(\xi r) - 2\mu \{ (m+1) A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \\ &\quad - (m-1) J_{m-1}(\xi r) \} \frac{1}{\xi r} \Big] d\xi \cos m\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= (2\mu + \lambda) \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 \left[\lambda \Delta J_m(\xi r) + 2\mu \{ (m+1) A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \right. \\ &\quad \left. - (m-1) B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r) \} \frac{1}{\xi r} \right] d\xi \cos m\theta, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 \left[\lambda \Delta + 2\mu \frac{dW_{m\xi z}}{\xi dz} \right] J_m(\xi r) d\xi \cos m\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 J_m(\xi r) \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{2\mu(\mu + \lambda)}{\mu + \lambda} \{ \phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z) \} D_{m\xi k} - \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi^{(k)}(\xi z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} (\gamma_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}) \right] d\xi \cos m\theta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu \left\{ \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \mu \xi^2 \left[(A_{m\xi z} - B_{m\xi z}) J_m(\xi r) - 2 \{ (m+1) A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \right. \\ &\quad \left. + (m-1) B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r) \} \frac{1}{\xi r} \right] d\xi \sin m\theta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right\} = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 \{ T_{m\xi z}^a J_{m+1}(\xi r) - T_{m\xi z}^b J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \sin m\theta, \quad (14)$$

$$\tau_{zr} = \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right\} = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 \{ T_{m\xi z}^a J_{m+1}(\xi r) + T_{m\xi z}^b J_{m-1}(\xi r) \} d\xi \cos m\theta, \quad (15)$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^2 \left\{ -\frac{1}{2\mu+\lambda} (\gamma_{m\epsilon k} - \delta_{m\epsilon k}) - \frac{2\mu}{2\mu+\lambda} D_{m\epsilon k} \right\} \phi^{(k)}(\xi z) \tag{16}$$

$$T_{m\epsilon z}^a = \sum_{k=1}^2 \left[Q^{(k)}(\xi z) \gamma_{m\epsilon k} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(k)}(\xi z) \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_{m\epsilon k} - \delta_{m\epsilon k}) + \mu D_{m\epsilon k} \right\} \right], \tag{17}$$

$$T_{m\epsilon z}^b = \sum_{k=1}^2 \left[Q^{(k)}(\xi z) \delta_{m\epsilon k} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(k)}(\xi z) \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_{m\epsilon k} - \delta_{m\epsilon z}) + \mu D_{m\epsilon k} \right\} \right], \tag{18}$$

となる。

3. 多層弾性体の解法

多層体は、無限厚板を重ね合せ、各層間の境界条件を満足させて解析する。今図-2に示すように、多層体の各層を表面から数えて、0, 1, 2, ..., i, ..., n-1とし、i-1 i間の厚板を表わす全ての量、一般式に含まれる関数等にサフィックス i を付し、z は各層の局所座標で与えるものとする。本論では、多層体の各境界で付着が完全であり、せん断力が作用する場合を考えるものとする、各層境界の変位および応力は連続であるから

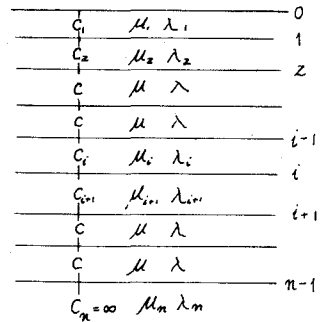


図-2 多層弾性体

$$u_{i+1}|_{z=0} = u_i|_{z=c_i}, \tag{19} \quad v_{i+1}|_{z=0} = v_i|_{z=c_i}, \tag{20}$$

$$w_{i+1}|_{z=0} = w_i|_{z=c_i}, \tag{21} \quad \sigma_{z,i+1}|_{z=0} = \sigma_{z,i}|_{z=c_i}, \tag{22}$$

$$\tau_{zr,i+1}|_{z=0} = \tau_{zr,i}|_{z=c_i}, \tag{23} \quad \tau_{z\theta,i+1}|_{z=0} = \tau_{z\theta,i}|_{z=c_i}, \tag{24}$$

となる。式 (21), (23), (24) から

$$D_{m\epsilon i}^{i+1} = D_{m\epsilon z}^i = D_i \quad \gamma_{m\epsilon i}^{i+1} = \gamma_{m\epsilon z}^i = \gamma_i, \quad \delta_{m\epsilon i}^{i+1} = \delta_{m\epsilon z}^i = \delta_i, \tag{25}$$

式 (19), (20) は、式 (1), (2), (4), (5) から

$$A_{m\epsilon z}^{i+1}|_{z=0} = A_{m\epsilon z}^i|_{z=c_i}, \quad B_{m\epsilon z}^{i+1}|_{z=0} = B_{m\epsilon z}^i|_{z=c_i}, \tag{26}$$

または

$$(A_{m\epsilon z}^{i+1} \pm B_{m\epsilon z}^{i+1})|_{z=0} = (A_{m\epsilon z}^i \pm B_{m\epsilon z}^i)|_{z=c_i}, \tag{26}'$$

従って、この場合の各層の連続条件を満足させる境界条件式は、 $1 < i < n-1$ で

$$I_{1,i}^1(c_i) \cdot D_{i-1} + I_{2,i}^1(c_i) \alpha_{i-1} + \{I_{1,i}^2(c_i) - I_{1,i+1}^1(0)\} D_i + \{I_{2,i}^2(c_i) - I_{2,i+1}^1(0)\} \alpha_i - I_{1,i+1}^2(0) D_{i+1} - I_{2,i+1}^2(0) \alpha_{i+1} = 0, \tag{27}$$

$$I_{2,i}^1(c_i) D_{i-1} + I_{3,i}^1(c_i) \alpha_{i-1} + \{I_{2,i}^2(c_i) - I_{2,i+1}^1(0)\} D_i + \{I_{3,i}^2(c_i) - I_{3,i+1}^1(0)\} \alpha_i - I_{2,i+1}^2(0) D_{i+1} - I_{3,i+1}^2(0) \alpha_{i+1} = 0, \tag{28}$$

$$I_{4,i}^1(c_i) \beta_{i-1} + \{I_{4,i}^2(c_i) - I_{4,i+1}^1(0)\} \beta_i - I_{4,i+1}^2(0) \beta_{i+1} = 0, \tag{29}$$

となる。ただし

$$I_{1,i}^k(z) = \frac{2\mu_i(\mu_i + \lambda_i)}{2\mu_i + \lambda_i} \{ \phi_i^{(k)}(\xi z) + \psi_i^{(k)}(\xi z) \},$$

$$\begin{aligned}
I_{2,i}^k(z) &= \frac{\lambda_i}{2\mu_i + \lambda_i} \phi_i^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu_i + \lambda_i}{2\mu_i + \lambda_i} \{ \phi_i^{(k)}(\xi z) - \psi_i^{(k)}(\xi z) \}, \\
I_{3,i}^k(z) &= -\frac{1}{2\mu_i + \lambda_i} \phi_i^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu_i + \lambda_i}{2\mu_i(2\mu_i + \lambda_i)} \{ \phi_i^{(k)}(\xi z) - \psi_i^{(k)}(\xi z) \}, \\
I_{4,i}^k(z) &= \frac{1}{\mu_i} \phi_i^{(k)}(\xi z), \\
\alpha_i &= \gamma_i - \delta_i, \quad \beta_i = \gamma_i + \delta_i.
\end{aligned}$$

ところで本論では、スタンプの問題を取扱うが、表面ではせん断応力がないものとするれば $\gamma_0 = \delta_0 = 0$ 。ゆえに $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ となり、式(29)から全ての β は零となる。従ってこの場合の未知数は、 D_i ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$), α_i ($i=1, 2, 3, \dots, n-1$) となり、これを式(27), (28) および、表面における境界条件と ($n-1$) における境界条件より求める。

表面においては、表面に作用する直応力を $p(r, \theta)$ とすれば

$$\begin{aligned}
\sigma_{z1}|_{z=0} &= p(r, \theta) \\
\therefore -I_{1,1}^1(0) \cdot D_0 - I_{2,1}^1(0) D_1 - I_{3,1}^1(0) \alpha_1 &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r p(r, \theta) J_m(\xi r) \cos m\theta dr d\theta. \quad (30)
\end{aligned}$$

また、 $n-1$ 境界では、この種の問題の性格上半無限体上に多層体があるものとして、 n 層は $C_n = \infty$ として取扱う、このときの境界条件は、

$$\begin{aligned}
I_{1,n-1}^1(C_{n-1}) D_{n-2} + I_{2,n-1}^1(C_{n-1}) \alpha_{n-2} + \left\{ I_{1,n-1}^2(C_{n-1}) - \frac{2\mu_n(\mu_n + \lambda_n)}{2\mu_n + \lambda_n} \right\} D_{n-1} \\
+ \left\{ I_{2,n-1}^2(C_{n-1}) + \frac{\mu_n}{2\mu_n + \lambda_n} \right\} \alpha_{n-1} = 0, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{1,n-1}^1(C_{n-1}) D_{n-2} + I_{3,n-1}^1(C_{n-1}) \alpha_{n-2} + \left\{ I_{2,n-1}^2(C_{n-1}) + \frac{\mu_n}{2\mu_n + \lambda_n} \right\} D_{n-1} + \\
+ \left\{ I_{3,n-1}^2(C_{n-1}) + \frac{3\mu_n + \lambda_n}{2\mu_n(2\mu_n + \lambda_n)} \right\} \alpha_{n-1} = 0, \quad (32)
\end{aligned}$$

となる。

4. 表面変位が与えられた場合の解析

表面が剛体で圧縮された多層弾性体の問題は、表面で変位が与えられた多層弾性体の問題を組合せて求められる。従って、まず任意の表面変位が与えられた場合の多層体の解析を行わなければならない。この解析手段としては、表面に部分等分布荷重が作用するときの多層体の解を利用して、接触面の接触応力を階段状の部分等分布荷重に置き換え、このときの表面の変位を与えられた変位に一致させるように分布荷重の大きさを決定する方法が一般的であり、木村もこの方法で、剛地盤上にある有限層を剛体で圧縮した場合の接触応力を2次元問題として解析している。しかし、この方法では、仮定から当然接触応力が不連続になり、実際の条件に合致しない。この点を考慮して、本論では、接触応力および接触面を含む表面の変位を次のように仮定する。

$$\sigma_{z1}|_{z=0} = p(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta) + \Phi_1(r, \theta), \quad (33)$$

$$w_1|_{z=0} = w_0(r, \theta) + w(r, \theta), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta) &= p(r, \theta) - \Phi_0(r, \theta), \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_m \sum_{n=1}^{l-1} S_i(r) \cos m\theta, \end{aligned} \quad (35)$$

ここで、 Φ_0, w_0 は半無限体の圧入問題の解、 Φ_1, w' は多層体の場合の修正項である。接触応力 p の分布を図-3 のように仮定したとき

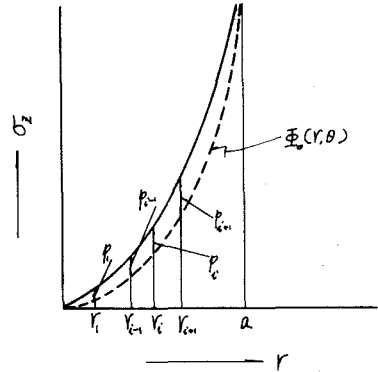


図-3 接触応力分布

$$S_i(r) = \begin{cases} \frac{r_i^{2m} - r_{i-1}^{2m}}{r_i^{2m} - r_{i-1}^{2m}} \left[p_i \left\{ \left(\frac{r}{r_{i-1}} \right)^m - \left(\frac{r_{i-1}}{r} \right)^m \right\} - p_{i-1} \left\{ \left(\frac{r}{r_i} \right)^m - \left(\frac{r_i}{r} \right)^m \right\} \right], & r_{i-1} < r < r_i \\ 0, & r < r_{i-1}, r_i < r \end{cases}, m \neq 0$$

$$S_i(r) = \begin{cases} \frac{1}{\log r_i - \log r_{i-1}} [p_i (\log r - \log r_{i-1}) - p_{i-1} (\log r - \log r_i)], & r_{i-1} < r < r_i \\ 0, & r < r_{i-1}, r_i < r \end{cases}, m = 0$$

とおく、従ってこのとき式 (30) の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r p(r, \theta) J_m(\xi r) \cos m\theta dr d\theta &= \frac{1}{\xi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \Phi_0(r, \theta) \cos m\theta dr d\theta \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{\xi^2} p_j \left[\frac{r_j^{2m}}{r_j^{2m} - r_{j-1}^{2m}} \left\{ r_j^{m+1} J_{m-1}(\xi r_j) - r_{j-1}^{m+1} J_{m+1}(\xi r_{j-1}) + r_{j-1}^{m+1} J_{m-1}(\xi r_j) - r_j^{m+1} J_{m-1}(\xi r_{j-1}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_j^{2m}}{r_{j+1}^{2m} - r_j^{2m}} \left\{ r_j^{m+1} J_{m+1}(\xi r_j) - r_{j+1}^{m+1} J_{m+1}(\xi r_{j+1}) - r_{j+1}^{m+1} J_{m-1}(\xi r_{j+1}) + r_j^{m+1} J_{m-1}(\xi r_j) \right\} \right], m \neq 0 \\ &\sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{\xi^2} p_i \left[\frac{1}{\log r_i - \log r_{i-1}} \left\{ \xi r_i \log r_i J_1(\xi r_i) - \xi r_i \log r_{i-1} J_1(\xi r_i) + J_0(\xi r_i) - J_0(\xi r_{i-1}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\log r_{i+1} - \log r_i} \left\{ \xi r_i \log r_{i-1} J_1(\xi r_i) - \xi r_i \log r_i J_1(\xi r_i) + J_0(\xi r_{i+1}) - J_0(\xi r_i) \right\} \right], m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

式 (27), (28), (30), (31), (32), および (36) から D_i, α_i を Φ_0 および $p_i (i = 1, 2, 3, \dots, l-1)$ を含む形で求めることができるが、 $D_0 (= D^1 m \xi_1)$ は表面変位の有限 Fourier-Hankel 変換値であるので次の条件を満足しなければならない。

$$\frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty D_0 \xi J_m(\xi r) d\xi \cos m\theta = w_1|_{z=0} \quad (37)$$

式 (37) は、 $r_i (i = 1, 2, 3, \dots, l-1)$ の各点で成立しなければならないから、この条件より、仮定した接触応力 p_i を求めることが出来る。ここで得られる解は、厳密な意味での連

続性は保障されないが、少なくとも階段状になるような不連続性は解消される。

5. 数値計算

数値計算は、多層体の表面に、半径 a の剛円柱を傾むけて押しつけた場合を取扱った。このとき表面変位の状態は、軸対称変形 ($m = 0$) と非軸対称変形 ($m = 1$) の合成となるが、計算はこのうち非軸対称成分についてだけ行った。すなわち接触面の z 方向変位は

$$w_1)_{z=0} = \varepsilon \cdot \frac{r}{a} \cos \theta \quad 0 \leq r \leq a$$

で表わされ、図-4に示すようになる。ただし、 ε は $r = a, \theta = 0$ における変位である。この問題の半無限体の場合は牟岐によっても解かれているが、

$$w_0(r, \theta) = \begin{cases} \varepsilon \frac{r}{a} \cos \theta & 0 \leq r \leq a \\ \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{a} \left\{ r \sin^{-1} \frac{a}{r} - a \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} \right\} \cos \theta, & a \leq r \end{cases} \quad (38)$$

$$\Phi_0(r, \theta) = \begin{cases} - \left\{ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \cdot \frac{4\varepsilon r}{a^2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \right\} \cos \theta & 0 \leq r \leq a \\ 0 & a < r \end{cases} \quad (39)$$

となることがわかっている。このとき $m = 1$ であるから、各式で $m = 1$ とおき、境界条件から、積分定数を ε と p_i で求め、式 (37) を満足するように p_i を定める。

数値計算の結果を図-5~9に示す。計算に用いた数値は、 $n = 2$ すなわち2層体で表層厚を a 、基層厚は無限大、表層と基層の弾性係数をそれぞれ $E_1 = E_2 = E$; $E_1 = 0.1E, E_2 = E$; $E_1 = E, E_2 = 0.1E$ の3種でポアソン比は全て0.25とし、 w の最大値も全ての場合で ε とした。また、 p_i を求めるための分割点は $r_i/a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1.0$ の6点とし、 ξ については数値積分を行なったが、積分範囲は $40\pi a$ 迄で、一区間 πa ごとに Gauss の8分点法により計算を行った。

図-5は E_1/E_2 3種について、 z 方向変位 w の各断面における r 方向の変化を示したものである。図から明らかなように、表層の弾性係数の小さい場合には変形は局部的になり、 z 方向へも、 z の大きさとともに急激に減少している。これに対し、表層の弾性係数の大きな場合には変形は r 方向、 z 方向とも広範囲にわたっているし、基層にも最大50%強の変位を生じている。



図-4 表面変位

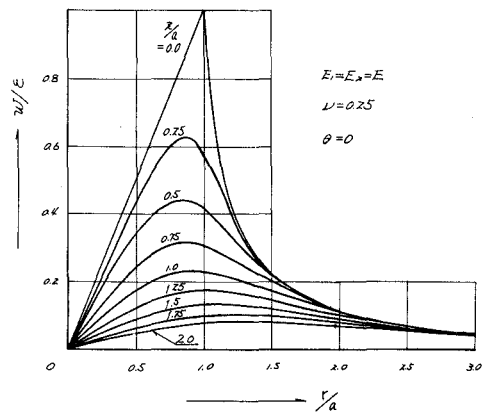


図-5 w の r 方向の変位

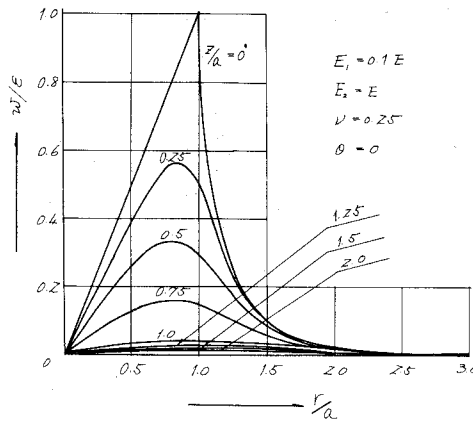


図-5 (b)

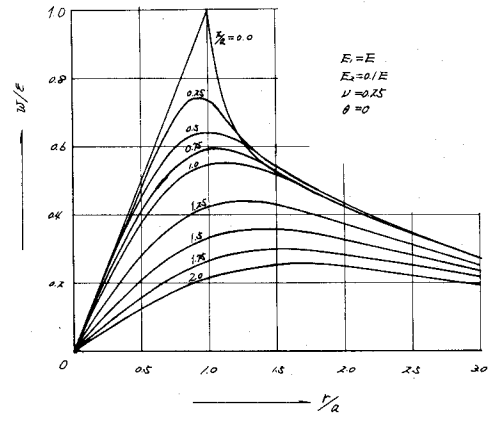


図-5 (c)

$E_1 = E_2$ の場合はこの中間の状態を示している。

図-6 は同様の場合の σ_z の r 方向の分布である。この計算例では、表面における最大変位を同一にとっているため、半無限体 ($E_1 = E_2$) の場合の応力分布が最も大きく、表層の弾性係数の小さなものが最も小さい応力分布を示している。しかし、基礎の弾性係数を基準に考えた場合では、図-6 (b) の値は 10 倍されるので、当然のことながら表層の弾性係数の大きいもの程大きな接触応力を生ずることになる。 σ_z の z 方向の変化は、やはり表層の弾性係数の大きなもの程 z の大きさとともに急激に減少している。

図-7 は σ_r に対する分布図である。値の大きさに関しては σ_z と同様であるが、 σ_r の分布の特徴は、表面では $r = a$ で無限大になりその両側で急激に減少する分布を示すが、 z が深くなるにつれて最大の σ_r を与える断面が $r = a$ からずれる。すなわち $z = 0.25a$ では、むしろ $r = a$ の σ_r は減少しその両側に大きな応力が生じ、 $r = 1.25a$ 付近にこの断面の最大値が生ず

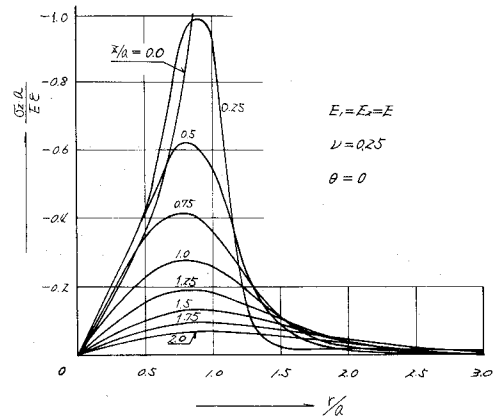


図-6 σ_z の r 方向の分布 (a)

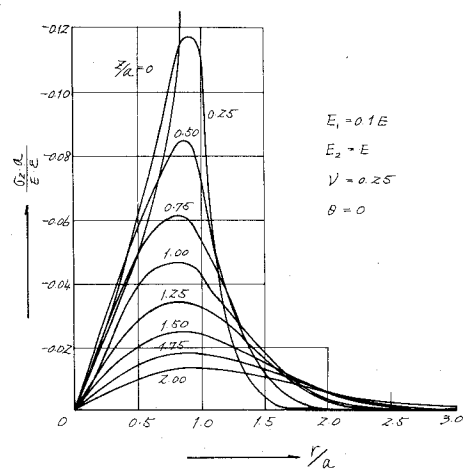


図-6 (b)

るようである。この傾向は E_1/E_2 の値に無関係に皆同じである。 σ_r と σ_z とを比較すると、いずれも σ_r の方が σ_z より小さく z が大きくなるに従いその差は一層大きくなっている。

図-8, 9にはせん断応力 $\tau_{z\theta}$, τ_{zr} の分布を示した。これらについても E_1/E_2 に対する大きさの変化は σ_z とほぼ同様である。せん断応力で特徴的なことは、図-9に示されているように $r = a$ で符号が逆転することである。しかし、応力の大きさは、やはり σ_z に比較してかなり小さく σ_z の $1/3 \sim 1/4$ 位である。

なお、数値積分の精度については詳細な検討をしていないが、積分範囲 $39\pi a$ の値と $40\pi a$ の値とを比較すると、変位では $z = 0, r = a$ の w に約6%の誤差がみられるが、その他の値はほぼ100%収束している。また応力に±5%程度の誤差があるが、 $z = 0.125a$ では、有効数字4桁まで収束していた。

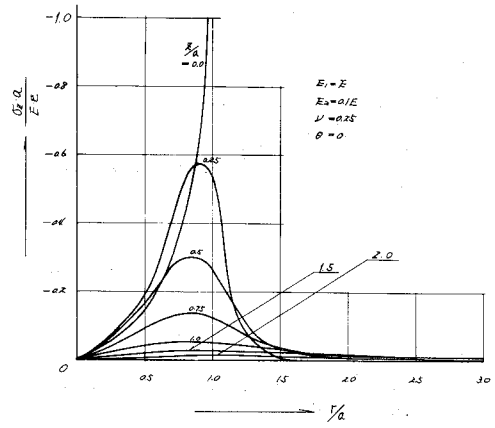


図-6 (c)

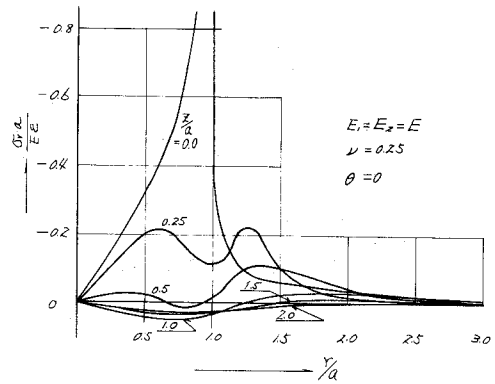


図-7 σ_r の r 方向の分布 (a)

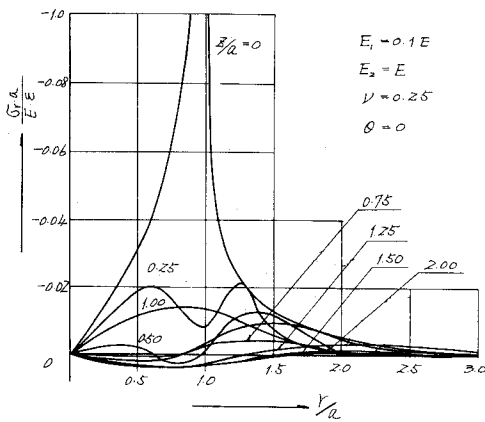


図-7 (b)

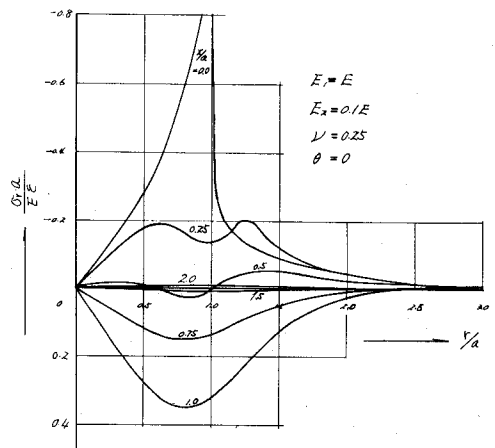


図-7 (c)

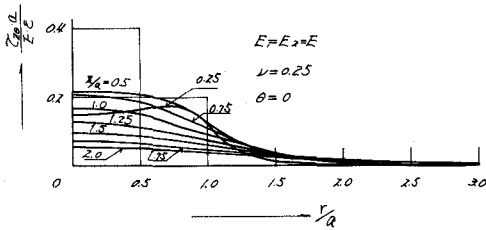


図-8 $\tau_{\theta r}$ の r 方向の分布 (a)

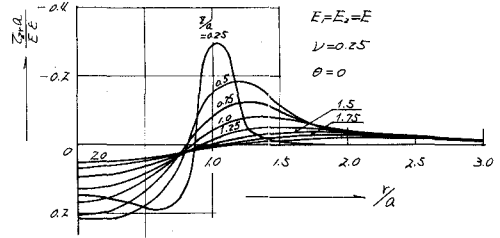


図-9 τ_{zr} の r 方向の分布 (a)

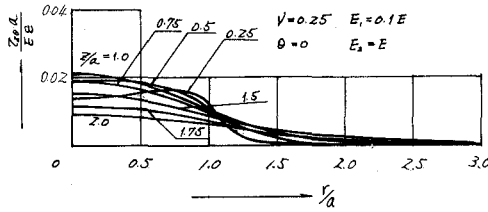


図-8 (b)

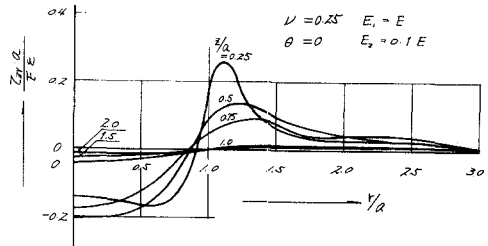


図-9 (b)

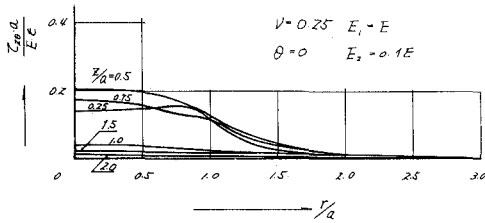


図-8 (c)

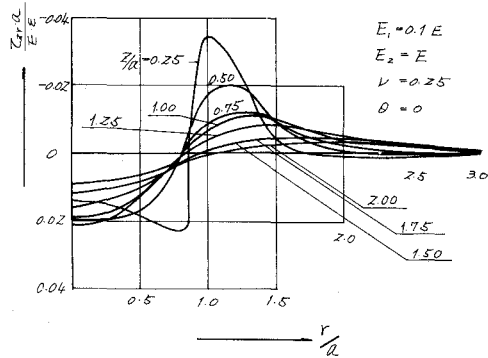


図-9 (c)

6. むすび

多層弾性体の表面が剛体で圧縮される場合の応力解析を非軸対称変形のみを対象として行なった。解析の方法は、半無限体表面を剛体で圧縮するときの解と、これと多層体との差を適当な応力分布仮定し、解析解と数値解を組合せる方法である。数値計算は、2層体で、表層厚を剛体半径と同一とし、表層、基層の弾性係数比を0.1, 1.0, 10.0の3種とした。計算結果から a) 2層体の場合、表層に比べ基層の弾性係数の小さいもの程、変位、応力ともに大きくなる b) いずれの場合も、 σ_z に比べ他の応力は、表層のごく浅いところを除けばかなり小さく、深さとともに急激に減少する

ことがわかった。計算例はそれ程十分ではないが、本解析方法は十分実用になるものと思わ

れる。

終りに、計算結果の整理、図の作成にご協力をいただきました本学助手小林茂氏、技官田中功氏に厚く感謝致します。

なお、本計算は主に北海道大学大型計算機センターのFACOM 230—05で行ない、また一部を本学情報教育センターのMELCOM 9100で行ったものである。

(昭和50年5月20日受理)

参 考 文 献

- 1) J. A. ガーリン (佐藤常三訳) : 弾性接触論, (1952)
- 2) I. N. Sneddon : Fourier Transforms, p 450 (1951)
- 3) 牟岐鹿楼 : 機械学会論文集, 21—111, p 767 (1955)
- 4) 木村 孟 : 土木学会論文報告集, 162, p 31 (1969)
- 5) 能町純雄, 松岡健一 : 土木学会第29回年次学術講演会概要集第1部, p 14 (1974)
- 6) 能町純雄, 松岡健一 : 土木学会北海道支部論文報告集, 31, p 257 (1975)