

有限要素法による透過性構造物内の非ダルシー不定流解析

その他（別言語等）のタイトル	The Analysis of Unsteady Non-Darcy Flow in the Porous Structure by Finite Elements
著者	藤間 聡
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	8
号	3
ページ	601-609
発行年	1976-01-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/3613

有限要素法による透過性構造物内の 非ダルシー不定流解析

藤 間 聡

The Analysis of Unsteady Non-Darcy Flow in the Porous Structure by Finite Elements

Satoshi Toma

Abstract

For the numerical solution of problems involving flow of water through porous structure by means of a computer the finite element method is developed.

But most of them have been solved on the assumption of Darcy's law, only a few literatures exist on solution of unsteady non-Darcy flow problems.

In this paper, the writer attempted to solve non-Darcy flow in coarse granular structure subjected harmonic wave action by finite element analysis.

A finite element analysis based on the equation of continuity gives good results for the wave motion of transitional flow.

I 緒 言

現在海浜及び海岸構造物の保全のため各種異形ブロック、捨石等を用いた透過性消波構造物が広く採用されている。しかし水理現象が複雑なため、これら透過性構造物の水理特性は主に実験により把握され、設計施工の基礎となっている¹⁾。

本研究は透過性消波構造物内部における波の変形機構の数値解析を目的とし、有限要素法を使用して遷移時における透水係数、抵抗係数を考慮して構造物の内部波形及び波高分布を推定するものである。同時に同一条件のもとで実験を行ない、両者の結果を比較検討することにより数値解析法の有効性を確かめるものである。

II 基礎理論

1. 連続の方程式

本研究で対象とする構造物は、砕石で構成されるため空隙が大きく、層流状態が維持し難く、流れに乱れが発生しもはやDarcy則は成立しないと考えられる。既往の論文^{2),3)}によると、Darcy則が満足される領域は Reynolds 数が $Re \leq 2 \sim 3$ の範囲であり、 $Re = 75$ 付近では乱流が発生し、 $Re = 180$ で粒子間の流れは完全に乱流になると考えられる。

これらの事項を考慮して、碎石構造物の抵抗則として Polubarinova-kochina 則を用いる。

$$I = aq + bq^2 + c(\partial q / \partial t) \quad (1)$$

I : 動水勾配

q : 見掛けの流速

a, b, c : 定数

こゝで c は空隙物質に関する定数で、粒子間の流れ（以下浸透流とする。）は重力によって起因すること、慣性項全体を無次元とするため次式により定義する。

$$c = \tau / g\lambda \quad (2)$$

τ : 見掛けの質量係数

g : 重力加速度

λ : 空隙率

この (1) 式を用いて連続の方程式を誘導するため、透水係数及び流速を求める。

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\Delta H'}{\Delta s} = aq + bq^2 + \frac{\tau}{g\lambda} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \nabla H &= \nabla H' + \frac{\tau}{g\lambda} \frac{\partial q}{\partial t} = -(a + bq)q \end{aligned} \quad (3)$$

但し $\nabla H' = \text{grad } H' = \Delta H' / \Delta s$ であり、こゝで H' は水頭値、 Δs は流線に沿う長さを表わす。

$$q = -\frac{\nabla H}{a + bq} \quad (4)$$

また流速 q は透水係数 \bar{k} を用いて次式で表わすことができる。

$$q = -\bar{k} \nabla H \quad (5)$$

(4), (5) 式を用いて透水係数 \bar{k} は次式で得られる。

$$\bar{k} = \frac{1}{a + bq} = \frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1 + (4b/a^2) \nabla H} - 1}{\nabla H} \quad (6)$$

以上の式より連続の方程式は

$$\begin{aligned} \text{div } q &= \text{div}(\bar{k} \nabla H) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1 + (4b/a^2) \nabla H} - 1}{\nabla H} H_{,x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1 + (4b/a^2) \nabla H} - 1}{\nabla H} H_{,y} \right) \quad (7) \\ H_{,x} &= \frac{\partial H}{\partial x} \quad H_{,y} = \frac{\partial H}{\partial y} \end{aligned}$$

となる。

III 有限要素法による解析

1. 変分原理

有限要素法による解析手順は、一般に変分原理（物理法則を変分問題の形で表現したもの）を用いて適当な汎関数を見出し、これを停留させるようなパラメーターの値を決定することになる。本研究の対象とする問題は、粘性が慣性に対して卓越している状態にあるので、確実に変分原理が存在すると考えられる。それ故以下において適当な汎関数 E を求める。

一般に汎関数は多重積分の形を呈しているので次式の形で表わす⁴⁾。

$$E = \int \int G(H, H_{,x}, H_{,y}, x, y) dx dy \quad (8)$$

(8) 式の変分をとると Euler 方程式と自然境界条件が得られる。

Euler 方程式は

$$\frac{\partial G}{\partial H} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial H_{,x}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial H_{,y}} \right) = 0 \quad (9)$$

で得られる。この(9)式と(7)式とを等置とすると、次の条件が満足されなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial H} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial H_{,x}} &= \frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1+(4b/a^2)\nabla H} - 1}{\nabla H} H_{,x} \\ \frac{\partial G}{\partial H_{,y}} &= \frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1+(4b/a^2)\nabla H} - 1}{\nabla H} H_{,y} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) 式を不定積分することにより関数 G が求められる。

$$G = -\frac{a}{2b} \nabla H + \frac{2}{3} b \left[\left(\frac{a}{2b} \right)^2 + \frac{\nabla H}{b} \right]^{3/2} \quad (11)$$

$$E = \int \int G dx dy = \int \int \left[\bar{k} (\nabla H)^2 + \frac{a^3}{24b^2} \left(2 - \frac{4b}{a^2} \nabla H \right) \left(1 + \frac{4b}{a^2} \nabla H \right)^{1/2} \right] dx dy \quad (12)$$

(12) 式により汎関数 E が求められる。次に適当な近似解関数 H を決定し、 E に代入した後、 E の値を停留させるようにするとよい。(不定常の場合(12)式に時間に関する積分が付く。)

2. 近似解関数

本研究では要素として三角形要素を用いるが、近似解関数を採用する場合に生ずる問題は、Non-Darcy 則浸透流であるため、透水係数 \bar{k} が流速により支配されることである。

流速 q は時間により刻々変化するため透水係数 \bar{k} が一定値とならず連続的に変化する。

こゝでは McCorquodale が提唱した近似解関数⁵⁾を使用する。

三角形要素内の水頭値 H を表わす近似解関数を次式で定義する。

$$H = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y)t + (\alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y) \quad (13)$$

(13) 式の形状係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ は二つの三角形の6頂点より求められる。(図-1 参照)

頂点 i, j, k における水頭値 H_i, H_j, H_k は

$$\left. \begin{aligned} H_i &= \alpha_3 + \alpha_4 x_i + \alpha_5 y_i \\ H_j &= \alpha_3 + \alpha_4 x_j + \alpha_5 y_j \\ H_k &= \alpha_3 + \alpha_4 x_k + \alpha_5 y_k \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

一方頂点 l, m, n における水頭値は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} H_l &= (\alpha_0 + \alpha_1 x_l + \alpha_2 y_l)\Delta t + (\alpha_3 + \alpha_4 x_l + \alpha_5 y_l) \\ H_m &= (\alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m)\Delta t + (\alpha_3 + \alpha_4 x_m + \alpha_5 y_m) \\ H_n &= (\alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n)\Delta t + (\alpha_3 + \alpha_4 x_n + \alpha_5 y_n) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(14), (15) 式をマトリックス表示すると (16) 式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} H_l \\ H_m \\ H_n \\ H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta t & x_l \Delta t & y_l \Delta t & 1 & x_l & y_l \\ \Delta t & x_m \Delta t & y_m \Delta t & 1 & x_m & y_m \\ \Delta t & x_n \Delta t & y_n \Delta t & 1 & x_n & y_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

(16) 式から時間に無関係な α 項を求める。

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix} \quad (17)$$

上式中, $a_i = x_j y_k - x_k y_j$

$b_i = y_j - y_k$ 他は回転順列

$c_i = x_k - x_j$

Δ : 三角形要素の面積

時間に関する α 項は次式の手順で得られる。

$$\left. \begin{aligned} H_l^0 &= \alpha_3 + \alpha_4 x_l + \alpha_5 y_l \\ H_m^0 &= \alpha_3 + \alpha_4 x_m + \alpha_5 y_m \\ H_n^0 &= \alpha_3 + \alpha_4 x_n + \alpha_5 y_n \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

と置くことにより (15) 式から

$$\left. \begin{aligned} H_l - H_l^0 &= \Delta H_l = (\alpha_0 + \alpha_1 x_l + \alpha_2 y_l) \Delta t \\ H_m, H_n \text{ に対しても同様な形式をとると} \\ \Delta H_m &= (\alpha_0 + \alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m) \Delta t \\ \Delta H_n &= (\alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n) \Delta t \\ \Delta H_m &= H_m - H_m^0, \quad \Delta H_n = H_n - H_n^0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(19) 式から $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ を求める。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\Delta \cdot \Delta t} \begin{vmatrix} \Delta H_l & x_l & y_l \\ \Delta H_m & x_m & y_m \\ \Delta H_n & x_n & y_n \end{vmatrix} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2\Delta \cdot \Delta t} \begin{vmatrix} 1 & \Delta H_l & y_l \\ 1 & \Delta H_m & y_m \\ 1 & \Delta H_n & y_n \end{vmatrix} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2\Delta \cdot \Delta t} \begin{vmatrix} 1 & x_l & \Delta H_l \\ 1 & x_m & \Delta H_m \\ 1 & x_n & \Delta H_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

以上 (17) 及び (20) 式から三角形要素の各頂点の座標が与えられると $\{\alpha_i\}$ を決定することができる。 $\{\alpha_i\}$ を決定すると近似解関数が確定し、これを汎関数 E に代入し、停留させる。こゝで $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ を (17) 式と同形式で表わす。

$$\{a\} = \frac{1}{2\Delta \cdot \Delta t} \begin{bmatrix} a_l & a_m & a_n \\ b_l & b_m & b_n \\ c_l & c_m & c_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta H_l \\ \Delta H_m \\ \Delta H_n \end{Bmatrix} \quad (21)$$

こゝで、 $a_l = x_m y_n - x_n y_m$

$b_l = y_m - y_n$ 他は回転順列。

$c_l = x_n - x_m$

こゝで、一つの要素における汎関数 E^e を考える。水頭値 H_l に関する E の微係数をとると、

$$\frac{\partial E^e}{\partial H_l} = \iiint \left[2\bar{k} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_l} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + 2\bar{k} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_l} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] dx dy dt \quad (22)$$

$$= 2 \iiint \left[\bar{k} (\alpha_1 t + \alpha_4) \frac{\partial}{\partial H_l} (\alpha_1 t + \alpha_4) + \bar{k} (\alpha_2 t + \alpha_5) \frac{\partial}{\partial H_l} (\alpha_2 t + \alpha_5) \right] dx dy dt \quad (24)$$

時間に関する積分の下限及び上限を便宜上 $t = 0, t = t$ と置く。

$$\begin{aligned}
 &= 2 \iint \left[\frac{\bar{k}}{2} \left(\frac{\partial \alpha_1^2}{\partial H_l} + \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial H_l} \right) \frac{t^3}{3} + \bar{k} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial H_l} \alpha_4 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial H_l} \alpha_5 \right) \frac{t^2}{2} \right] dx dy \\
 &= \frac{t}{6} \frac{\bar{k} \bar{A}}{\Delta} [S_{lm} (H_l - H_l^0) + 3(b_l \alpha_4 + c_l \alpha_5)] \quad (24)
 \end{aligned}$$

S_{lm} : 浸透性マトリックス

\bar{A} : 三角形 i, j, k 及び三角形 l, m, n の面積の平均値

Δ : 三角形 l, m, n の面積

水頭値 H を得るためには領域全体の $\partial E / \partial H$ を求めて次の多元連立方程式を解くことになる。

$$\frac{\partial E}{\partial H} = \sum \frac{\partial E^e}{\partial H_l} = 0 \quad (25)$$

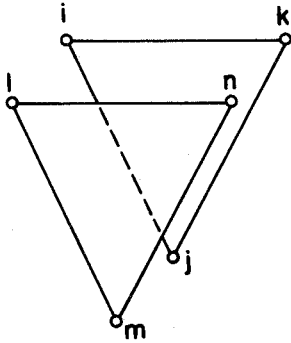


図-1 三角形要素

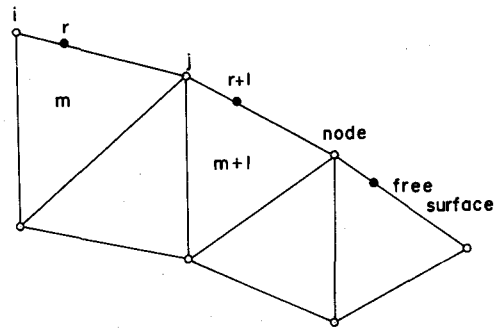


図-2 自由水面を形成する要素群

(25) 式により解析すべき領域内部の支配方程式が与えられたことになる。

次に時々刻々変化する自由水面を算定する式を求め。今図-2 に示す自由水面に沿う三角形要素 $m, m+1$ について考える。

この m 及び $m+1$ 要素の流速 q は夫々、各三角形の3頂点の水頭値から求めることができる。こゝで各要素の自由水面に一致する边上に一つの代表点 r を決め、この点の Δt 間における移動量を求める。

$$d = q \Delta t / \lambda \quad (26)$$

$$q = u \mathbf{i} + v \mathbf{j}$$

(26) 式から $t = 0$ 時に位置 $d(x, y, 0)$ にあった粒子は Δt 後

$$d(x, y, \Delta t) = q \Delta t / \lambda + d(x, y, 0) \quad (27)$$

の位置にある。(27) 式を用いて自由水面に面している全要素における代表点 r の移動量を算定し、 Δt 時間後の位置座標を求めた後、各隣合う代表点間で補間を行ない自由水面上の節点 i, j の位置を決定する。

以下、時間増分 Δt 毎に順次同様な操作を行なって自由水面の形状を追跡して行く。

IV 実験方法

1. 実験装置

実験は長さ 18.5 m、幅 0.4 m、高さ 1.0 m の片面ガラス張り鋼製二次元造波水槽にて行なわれた。この水路の一端にはフラップ式造波装置が付設されており、実験用砕石構造物に所定の入射波を作用させることができる。砕石構造物は造波板から 11 m の位置に長さ 0.6 m、高さ 0.5 m、幅 0.4 m の寸法のアングル及び金網よりなる骨組型枠を設置し、砕石を填充し形成し、構造物後面に耐水性の木板を挿入して不透性とした。

この構造物に作用させた波の諸元は次の通りである。

$$\text{水深 } h = 30.0 \text{ cm}$$

$$\text{周期 } T = 1.0, 1.5, 2.0 \text{ sec}$$

$$\text{波高 } Hi = 3.0 \sim 5.0 \text{ cm}$$

2. 実験用砕石

実験に用いた砕石の物理的特性及び水理的特性は以下の通りである。

物理的特性 比重 $G = 2.68$

空隙率 $\lambda = 42.77\%$

等価直径 $D = 2.94 \text{ cm}$

なお直径として等価直径を採用した理由は、砕石が角ばっており直径を直接決定することが不可能なため、砕石の平均体積に等しい体積の球に換算し、その球の直径を用いた。

水理的特性

式 (1) における定数 a 、 b の定常流

時の値を決定するため長さ 12.0 m、高さ 0.3 m、幅 0.3 m の可傾斜型開水路にて実験を行なった。その結果を図-3 に示す。

この図から $a = 0.008 \text{ sec/cm}$

$$b = 0.0055 (\text{sec/cm})^2$$

が得られる。

3. 実験方法

波高を測定するためには一般に、抵抗線式及びサーボ式の波高計を用いるが、砕石を用いるため器具を構造物内部に挿入することが不可能である理由から、本実験では不定常現象を毎秒

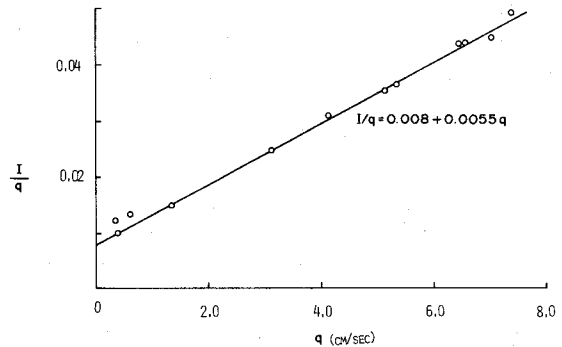


図-3 流速と動水勾配との関係

4コマ撮影できるモータードライブカメラ（日本光学製）を使用して、構造物前面及び内部の水面形状を捉え、マイクロリーダー（富士フィルム製）にて内部波高を読み取った。

V 実験結果及び数値解析結果

1. 水面挙動

図—4は碎石構造物に、周期 $T = 1.5 \text{ sec}$ の正弦波を作用させた場合の構造物内部の前面及び後面における水面変動を示している。この図から実験値には多少のバラツキが見られるが、両者は良い精度で一致していることが認められる。前面での振幅と後面での振幅を比較すると、後者は前者の5割程度であり、構造物内部での抵抗がかなり大きいことが想像できる。この抵抗が大きい原因として、碎石の表面の粗によるものばかりでなく、碎石の形状の不規則性による渦等の乱れ成分が多分に寄与していると思われる。

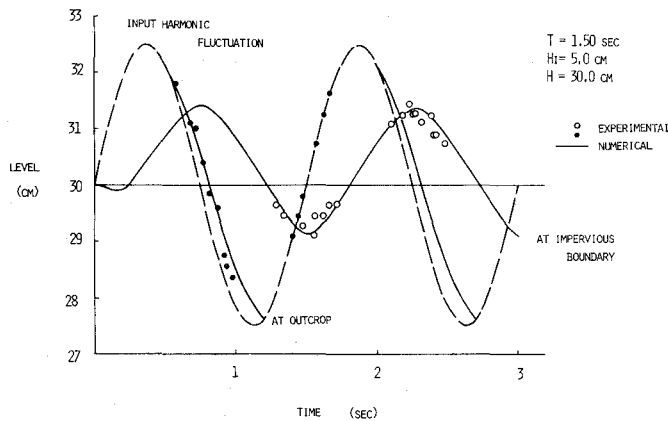
構造物内部の水面は降下する場合に構造物前面の水面降下に追従できず、浸出面が生ずることが同図より判明する。この浸出面が水面降下時に出現することは、構造物内部の流れは重力の作用により生ずるため限界浸透速度 q/λ が存在し、前面での水面降下速度がこの限界浸透速度より卓越した時に生ずると説明される。

2. 水面形

次にある時刻における構造物内部の水面形状を図—5に示す。同図から数値解析と実験結果との相関は $T = 1.5 \text{ sec}$ より 2.0 sec が優れている。これは水理特性の定数 a, b の値を定常流において決定しているため、水平方向水粒子速度が卓越する 2.0 sec がより良い一致を示すと考えられる。

3. 内部波高分布

図—6に構造物内部における解析波高分布を示す。この図から波高分布は前面が腹、後面は不透水であるので小さな腹を形成するが全体として見て節とするような定常波型の分布を呈し



図—4 構造物前面及び後面における水面変動

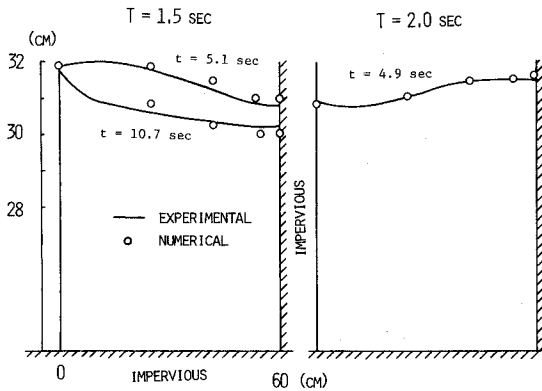


図-5 構造物内部波形

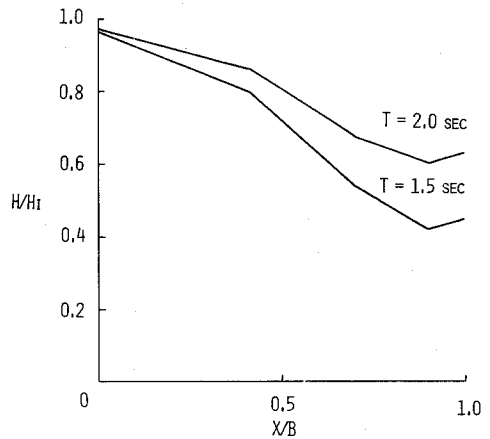


図-6 構造物内部波高分布

ている。また波形勾配の急な波ほど構造物内部での減衰が激しいことも認められる。

VI 結 び

変形のない正弦波を直立砕石構造物に作用させた場合の、構造物内部における波形及び波高分布が有限要素法により十分推定できることが確認された。

しかしながら本研究において対象としたモデルは、水理的及び物理特性が非常に基本的であるので、直ちに、複雑な特性を有する実際の現象を十分には説明できえない。今後は実際の消波構造内の慣性の卓越した流れに注目して解析する所存である。しかし慣性が粘性より支配的な流れの場においては、もはや変分原理が存在しないので、重み付残差法によるアプローチしかなないように思われる。

最後に、本研究に対して終始御指導をいただいた本学土木工学科近藤俣郎教授に感謝の意を表し、また本研究の一部には昭和49年度文部省科学研究費の補助を受けたことと、本研究の数値計算には北海道大学大型計算センターのFACOM 230-75を使用したことを付記する。

(昭和50年5月19日受理)

参 考 文 献

- 1) 尾崎 晃：消波構造論 水工学シリーズ 土木学会水理委員会 1965
- 2) Engelund, F.: On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand. Trans. Danish Acad. Tech. Sci., NO. 3, 1953
- 3) Bear, J.: Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, 1972
- 4) Volker, R.E.: Nonlinear flow in porous media by finite elements. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 95, HY 6, 1969
- 5) Mc Corquodale, J. A.: Variational approach to non-Darcy flow. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol 96, HY 11, 1970