

## 円管内を水力輸送される固体球群の垂直方向の確率密度関数について

その他（別言語等）のタイトル	The Function of Vertical Probability Density of Small Spheres in a Horizontal Circular Water Pipe
著者	奥田 教海, 山岸 英明
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	9
号	1
ページ	269-275
発行年	1976-12-18
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3650">http://hdl.handle.net/10258/3650</a>

# 円管内を水力輸送される固体球群の垂直方向の 確率密度関数について

奥田教海・山岸英明

## The Function of Vertical Probability Density of Small Spheres in a Horizontal Circular Water Pipe

Kyokai Okuda and Hideaki Yamagishi

### Abstract

In this paper we report that the probability density of small spheres is obtained by using density distribution of small spheres in a horizontal water pipe. It is assumed that the vertical diffusivity is independent of horizontal dispersion of spheres in a pipe. Especially, the vertical probability density and diffusivity are estimated experimentally.

### I. 緒 言

近年流体による固体の輸送の問題がクローズアップされつつある。たとえば空気流による粉体の輸送、水流を利用した石炭・土砂・パルプ・様々のカプセルなどの輸送がある。これら実際的な問題に対しては数多くの論文が発表されている。比較的盛んに研究が行なわれ、かつ実際に応用されているのは円管による水力輸送の場合である。この場合における最も重要な問題は固体濃度に対して圧力損失がどのように変化するかということにある。そしてさらに流量と関係づけることにより輸送効率を議論できる。一方固体粒子群が管内を移動する際、管断面上にどのように分布するか即ちフロー・パターンを様々の条件の下で調べることによって輸送効率の問題を検討できる。本報告はフローパターンを取扱う一方法として固体粒子群が任意の管断面を通過する際に、その断面上の任意の点を通る確率密度関数について考察した。この確率密度関数より垂直方向の分散係数を求めることを試みた。

### II. 解 析

円管内を水力輸送される球群の運動において球の存在はマルコフ連鎖に従う確率過程で記述できる。このような場合球群はキャリア流体の流れに運ばれながら、主流方向およびそれに垂直な方向に分散する傾向を示す。ある球が時刻  $t$  に点  $(x, y)$  に存在する確率を  $P(x, y, t)$  とすると次式で球群の拡散を記述できる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + C_x \frac{\partial p}{\partial x} - C_y \frac{\partial p}{\partial y} = K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad \dots(1)$$

球の存在の確率は主流方向（x方向）とそれに垂直な方向（y方向）それぞれ独立に定まると仮定すれば次式のように書き換えられる。

$$p(x, y, t) = \psi(x, t) \phi(y) \quad \dots(2)$$

(2)式を(1)式に代入すれば

$$\phi \frac{\partial \psi}{\partial t} + C_x \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} - C_y \psi \frac{\partial \phi}{\partial y} = K \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + D \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \dots(3)$$

(3)式を整理すると

$$\phi \frac{\partial \psi}{\partial t} + C_x \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} - K \phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = C_y \psi \frac{\partial \phi}{\partial y} + D \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \equiv k \quad \dots(4)$$

定数  $k$  は明らかに  $x$ ,  $y$ ,  $t$  には依存しない単なる定数と見做せる。今ここで  $k=0$  とすると

(4)式は次の2つの式と等価である。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -C_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + K \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \dots(5)$$

$$C_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + D \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots(6)$$

(5)式は Fokker-Planck の式として知られているものである。この(5)式による詳しい検討は次報以下で行なうことにし、本報告では管の垂直方向の確率密度関数  $\phi(y)$  のみを考えることにする。

(6)式より

$$\phi = \frac{D}{C_y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_1 \quad \dots(7)$$

一方 Barnard 等<sup>(1)</sup>は球の垂直方向の移動に対して次のように考えている。即ち球の静水中で沈降速度を  $V$  とすれば、任意の垂直断面内において単位長さを持つ水平面を下方に横切る球の確率は

$$\phi_1 = V \phi(y) \quad \dots(8)$$

また同じ平面を水の乱れによる拡散力で上方に横切る確率は

$$\phi_2 = v_{ra} D \frac{d\phi}{dy} \quad \dots(9)$$

定常状態では  $\phi_1 = \phi_2$  となる。以上の事を考慮すれば(7)式のようになる。

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{V}{v_{ra} D} \phi \quad \dots(10)$$

ただし  $v\tau$ : 摩擦速度 ( $U\sqrt{\lambda/8}$ ,  $\lambda$ : 摩擦損失係数)

$$z = y/a \quad \dots(11)$$

$$A_1 = 0 \quad \dots(12)$$

$$C_y = V/v\tau \quad \dots(13)$$

ここで  $C_y$  はドリフト係数と呼ばれる。

(10)式を解けば

$$\phi(z) = \phi_0 \exp(Mz) \quad \dots(14)$$

ただし

$$\begin{cases} z = 0: \phi = \phi_0 \\ \gamma = V/U \quad (U \text{ は主流速度}) \\ M = \gamma U/v\tau D \end{cases} \quad \dots(15)$$

### III. 垂直方向の分散係数, D について

確率密度  $\phi(z)$  が定まれば(14)式を次式に書き換えたものより分散係数 D が算出できる。

$$\log_{10}\phi(z) = \log_{10}\phi_0 + (M\log_{10}e)z \quad \dots(16)$$

$M\log_{10}e$  は  $\log_{10}\phi(z)$  VS.  $z$  の関係を求めた時の勾配になる。従ってこの M を知れば(15)式からの

$$D = \frac{\gamma U}{v\tau M} = \frac{\gamma U \log_{10}e}{v\tau m} \quad \dots(17)$$

によって D が求まる。ここで  $m$  は勾配で  $M\log_{10}e$  に等しい。

### IV. 濃度分布 $n(z)$ と確率密度関数 $\phi(z)$

高さ  $z$  の位置を通過する球に着目すれば次式が成り立つ。

$$n(z) = N\phi(z)A(z)u(z) \quad \dots(18)$$

ただし  $A, u$  はそれぞれ  $z$  の位置での面積と主流速度

$N$ : 球の総数

$$\int_{-a_0}^{a_0} n(z)dz = N \quad \dots(19)$$

$$\int_{-a_0}^{a_0} \phi(z)A(z)dz = 1 \quad \dots(20)$$

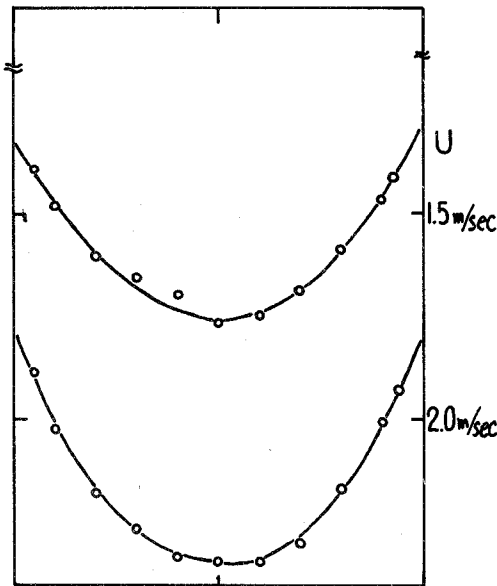
$\pm a_0 = \pm(1-\alpha)a$ ,  $\alpha = d/2a$ :  $d$  は球の直径

### V. 実 験

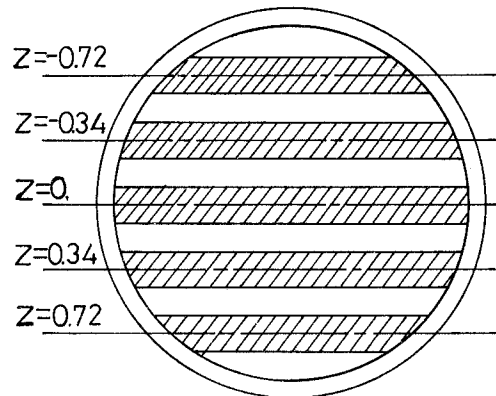
前述の解析結果をもとに直径 100 mm の円管内を水力輸送されるアクリル (直径 12 mm,

第1表 測定結果

RUN	U=1.5 m/sec			U=2.0 m/sec		
	Z			Z		
	0	0.34	0.72	0	0.34	0.72
1		5	29	1	21	37
2		4	24	1	17	28
3	3	4	32	1	12	36
4		4	31	1	17	33
5	1	4	38	1	10	38
6		8	31		11	34
Total	4	29	185	5	88	206
n(z)/N	0.018	0.133	0.849	0.017	0.294	0.689



第2図 測定部における垂直方向速度分布



第1図 測定部における円管断面

第2表  $\phi(z)$  の計算結果

$\phi(z)$	U=1.5m/sec	U=2.0m/sec
$\phi(0)$	0.069	0.069
$\phi(0.34)$	0.603	1.303
$\phi(0.72)$	5.608	4.066

比重 1.20) 球群の場合について実験を行ない、確率密度関数および垂直方向の分散係数を求めた。実験装置および測定方法は既報<sup>(2)</sup>のものと同様と変わらないので省略する。ここでは測定箇所  
の円管断面を第1図に示す。図のように管断面を斜線部のように5層に区別し、この部分を通  
過する球を光電管で検出するようになっている。測定は主流平均速度で1.5m/secと2.0m/  
secの2つの場合について行ない、その結果を第1表に示す。

また各値は次のようになる。

沈降終速度 (V) : 0.17m/sec

$\gamma (V/U)$  : U=1.5m/sec の時 0.113

U=2.0m/sec の時 0.085

摩擦速度 ( $v\tau$ ) :  $v\tau = U\sqrt{\lambda/8}$  ( $\lambda$ は円管の摩擦  
損失係数)

U=1.5m/sec の時  $\lambda=0.0147$

$v\tau=0.0645$  (m/sec)

U=2.0m/sec の時  $\lambda=0.0148$

$v\tau=0.0851$  (m/sec)

速度分布,  $u(z)$  は第2図に示す円管断面の中心を通る垂直方向のものをを用いた。

この図より  $u_{maximum}$  で無次元化した各層の速度は以下のようになる。

U=1.5m/sec の場合

$u(0) = 1.00$

$u(0.34) = 0.91$

$u(0.72) = 0.87$

U=2.0m/sec の場合

$u(0) = 1.00$

$u(0.34) = 0.97$

$u(0.72) = 0.89$

各層の面積,  $A(z_i)$  :

$A(0) = 0.227$

$A(\pm 0.34) = 0.2125$

$A(\pm 0.72) = 0.174$

ただし  $\sum A(z_i) = 1.0$

以上の数値を用いて求めた確率密度関数の値を第2表に示す。これらの確率密度関数は(20)式の条件を満たす。即ち

$$\sum_i \phi(z_i) A(z_i) = 1 \quad \dots(21)$$

第2表の結果を第3図に示す。第3図より勾配mはそれぞれ次のように得られた。

U=1.5m/sec の場合 : m=5.48 また D=0.479, M=5.48

U=2.0m/sec の場合 : m=1.32 また D=0.657, M=3.04

垂直方向の分散係数Dの結果を Barnard 等の値と比較するために第4図に示した。上記のMの値および第3図の  $z=0$  の  $\phi$  の値より確率密度関数は本実験の場合次のようになる。

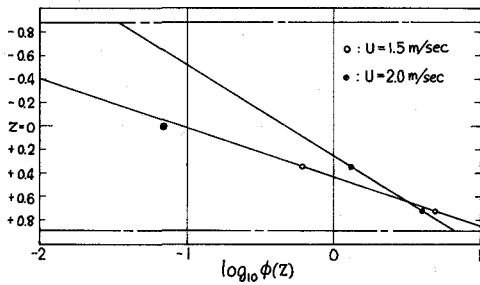
$$U = 1.5 \text{ m/sec} : \phi(z) = 0.092 \exp(5.48z) \quad \dots(22)$$

$$U = 2.0 \text{ m/sec} : \phi(z) = 0.465 \exp(3.04z) \quad \dots(23)$$

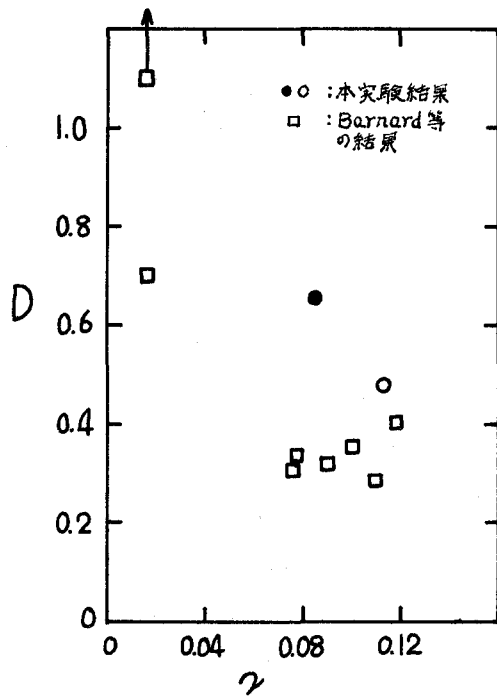
VI. 検 討

理論的には(2)式の仮定が成り立つかどうか気になるところである。実際に球群が流れ始める最初の状態の影響が消滅する程充分に運ばれた地点から先はこの仮定が妥当と思われる。しかしながら球相互の衝突などによる作用の影響の程度の差によって垂直方向の分散係数が変化すると考えた方が適切である。従って(2)式は球の相互作用が全く無視できる場合に満足すべきものである。実験も以上の事を考慮して比較的少数の球を用いて行なった。最終的に得られた(22)、(23)の両式は球群の密度が高くなるような場合には変化させる必要がある。さらに実験について言えば装置上の問題に加え、十分に統計処理を行なえる程多数測定を繰返していない。本実験結果は試行的な性格を持つもので今後測定を重ねるつもりである。また(5)式を解くことにより主流方向の拡散の問題が理論的・実験的に検討できる。この問題も現在解析を進めている。

終りに室蘭工大機械系学科・流体工学研究室の諸氏のご協力を得ましたので深く感謝申し上げます。



第3図 確率密度関数  $\phi(z)$



第4図 拡散係数Dと  $\gamma$  の関係

(昭和51年5月21日受理)

文 献

- (1) Barnard, B.J.S. & Binnie, A.M. : J. Fluid Mechanics, Vol.15 (1963) 35.
- (2) 奥田教海：室蘭工業大学研究報告，第8巻第3号（昭和51年）671.