

幾何計画法の最適設計への応用について

その他（別言語等） のタイトル	On An Application Of The Geometric Programming To An Optimum Design
著者	杉本 博之
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	9
号	2
ページ	479-495
発行年	1977-12-10
URL	http://hdl.handle.net/10258/3665

幾何計画法の最適設計への応用について

杉 本 博 之

On An Application Of The Geometric Programming To An Optimum Design

Hiroyuki Sugimoto

Abstract

Geometric programming is one of the most new technique in the nonlinear programming used for the optimum design of structures. Using geometric programming, one can transform the highly nonlinear optimizing problem to the linear simultaneous equations and the result is guaranteed to be a global optimum solution, when degrees of difficulty is zero.

This paper also explains the two approximate techniques. One is the technique using approximating functions, the second is the technique based on condensation.

Three examples, the design of H-shape member subjected to bending moment, the design of flat corrugation wide column under uniform axial compression and the design of simply supported beam with changes in cross section, are solved successfully using geometric programming.

Lastly, by solving an optimizing problem with a local optimum solution, sequential geometric programming is compared with sequential unconstrained minimization technique, and it is concluded that, in this case, the former is superior to the latter in the accuracy and the computed time.

1. ま え が き

土木工学における最適設計法は、主に橋梁を対象として、種々の荷重の組み合わせを受ける種々の断面形状の部材の最適設計から、種々の崩壊形式に対する構造系全体の最適設計まで、いろいろな角度から実用化へ向けて研究されている。そこで用いられる最適化手法には、構造の特性を利用する方法、線形計画法 (LP)、種々の非線形計画法 (NLP) 等がある。

筆者は、すでに、全応力設計の結果を利用する方法⁽⁹⁾、SUMT を用いる有限変形の影響を考慮したトラス構造物の最小重量設計⁽¹⁰⁾、SLP を用いる大型トラス構造物の最小重量設計⁽¹¹⁾について発表しているが、ここでは、最近注目されている幾何計画法について、主に文献 (1) に従って説明し、それを用いて、すでに他の方法で部分的に解かれている問題を解き、その有効性を検討し、さらに、SUMT と計算精度、計算時間を比較する。

幾何計画法は、1960 年代の初期、Zener により発見され、その後、Zener, Duffin 等により開発⁽²⁾された非線形計画法の 1 つであり、現在各方面で研究、応用されている^{(3),(4),(5)}。

この方法は、他の非線形計画法に比べて、有効な適用範囲は狭いが、高次の非線形の問題を

線形連立方程式に変換できるので、問題によっては非常に有利となる。

2. 幾何計画法

目的関数および制約条件式が多項式よりなる最適設計の問題は、次のように表現される。

制約条件式

$$h_m(\mathbf{x}) \leq \sigma_m (= \pm 1); m = 1, \sim, M \quad (2-1)$$

のもとで、目的関数 $h_0(\mathbf{x})$ を最小にする設計変数 \mathbf{x} の決定。

ここで、

$$h_m(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{Tm} \sigma_{mt} C_{mt} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mtn}}; m = 0, 1, \sim, M \quad (2-2)$$

$$\sigma_{mt} = \pm 1, C_{mt} > 0; m = 0, 1, \sim, M, t = 1, \sim, Tm$$

$$x_n > 0; n = 1, \sim, N$$

2-1 正多項式 (posynomial) の場合

まず最初に、すべての目的関数、制約条件式が正多項式である場合を考える。つまり、

$$\sigma_m = \sigma_{mt} = 1; m = 1, \sim, M, t = 1, \sim, Tm \quad (2-3)$$

となる。

この時、上述の主問題は、次の双対問題に変換される。

正規条件

$$\sum_{t=1}^{T_0} \lambda_{0t} = 1 \quad (2-4)$$

直交条件

$$\sum_{m=0}^M \sum_{t=1}^{Tm} a_{mtn} \lambda_{mt} = 0; n = 1, \sim, N \quad (2-5)$$

$$\lambda_{mt} \geq 0; m = 0, 1, \sim, M, t = 1, \sim, Tm \quad (2-6)$$

の条件のもとで、双対関数

$$z(\lambda) = \prod_{m=0}^M \prod_{t=1}^{Tm} \left(\frac{C_{mt} \lambda_{m0}}{\lambda_{mt}} \right) \lambda_{mt} \quad (2-7)$$

を最大にする λ の決定。ここで、

$$\lambda_{m0} = \sum_{t=1}^{Tm} \lambda_{mt} \geq 0; m = 1, \sim, M \quad (2-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{00} &= 1 \\ \lim_{\lambda_{mt} \rightarrow 0} \left(\frac{C_{mt} \lambda_{m0}}{\lambda_{mt}} \right) \lambda_{mt} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

と定義される。正多項式よりなる問題の場合は、主問題と双対問題の間に、

$$h_o(\mathbf{x}) \geq h_o(\mathbf{x}^*) = z(\lambda^*) \geq z(\lambda) \quad (2-10)$$

なる関係があり、双対問題の全域的最適解 (λ^*) に対応する双対関数の最大値は、主問題の全域的最適解 (\mathbf{x}^*) に対応する目的関数の最小値と一致する。

次に、

$$T = \sum_{m=0}^M T_m$$

と定義すると、 $T - (N + 1) = 0$ の場合は、式(2-4)、(2-5)よりなる線形連立方程式は唯一解を有し、その解は前述の λ^* となり、非線形であった主問題は、線形連立方程式を解くという非常に簡単な問題に置き換わる。 $T - (N + 1)$ は困難度といわれ、困難度が大きくなるに従って、上述の有利さは薄れてくる。

双対問題の解 λ が求まると、主問題の解 \mathbf{x} は、次式より計算される。

$$\left. \begin{aligned} C_{ot} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{otn}} &= \lambda_{ot} z(\lambda); t = 1, \sim, T_0 \\ C_{mt} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mtn}} &= \frac{\lambda_{mt}}{\lambda_{mo}}; t = 1, \sim, T_m, m = 1, \sim, M \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

2-2 一般的な多項式 (polynomial) の場合

これは、目的関数あるいは(および)制約条件式に負の係数を含む場合である。つまり、

$$\sigma_m = \sigma_{mt} = \pm 1; m = 1, \sim, M, t = 1, \sim, T_m \quad (2-12)$$

となる。

この場合の双対問題は、次のように定義される。

正規条件

$$\sum_{t=1}^{T_0} \sigma_{ot} \lambda_{ot} = \sigma (= \pm 1) \quad (2-4)'$$

直交条件

$$\sum_{m=0}^M \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} a_{mtn} \lambda_{mt} = 0; n = 1, \sim, N \quad (2-5)'$$

$$\lambda_{mt} \geq 0; m = 0, 1, \sim, M, t = 1, \sim, T_m \quad (2-6)'$$

双対関数

$$z(\lambda) = \sigma \left[\prod_{m=0}^M \prod_{t=1}^{T_m} \left(\frac{C_{mt} \lambda_{mo}}{\lambda_{mt}} \right) \sigma_{mt} \lambda_{mt} \right] \sigma \quad (2-7)'$$

また、式(2-8)、(2-9)と同様に、次式が定義される。

$$\lambda_{m0} = \sigma_m \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} \lambda_{mt} \geq 0; m = 1, \sim, M \quad (2-8)'$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{00} &= 1 \\ \lim_{\lambda_{mt} \rightarrow 0} \left(\frac{C_{mt} \lambda_{m0}}{\lambda_{mt}} \right) \sigma_{mt} \lambda_{mt} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)'$$

このように、一般的な多項式の場合も、正多項式の場合と同じ形で表現されるが、主問題と双対問題の関係は複雑になる。

まず、困難度が0の場合は、式(2-4)', (2-5)'よりなる線形連立方程式の解 λ^* より計算される主問題の解 \mathbf{x}^* は、主問題が最小値を持つかぎり、主問題の全体的最適解となる。このように、負の係数を含む場合も困難度が0となる時は、問題を非常に簡単にできる。ところが、困難度が0より大きくなると、双対問題の停留点に対応する主問題の解は、主問題の停留点であることが証明されるのみで、全体的最適解を得るのは、非常に難しい問題となる。

双対問題の解 λ と主問題の解 \mathbf{x} の関係は、式(2-11)と同じ形で次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} C_{0t} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{0tn}} &= \sigma_{0t} \lambda_{0t} \sigma_Z(\lambda); t = 1, \sim, T_0 \\ C_{mt} \prod_{n=1}^N x_n^{a_{mtm}} &= \left(\frac{\lambda_{mt}}{\lambda_{m0}} \right) \sigma_{mt}; t = 1, \sim, T_m, m = 1, \sim, M \end{aligned} \right\} \quad (2-11)'$$

3. 近似解法

前述のように、幾何計画法は、係数の符号に関係なく困難度が0の場合は、従来の非線形計画法よりも有利な手法であるといえる。つまり、非線形問題である主問題を式(2-4), (2-5),あるいは、式(2-4)', (2-5)'の線形連立方程式を解く問題に変換でき、かつ全体的最適解を得ることができる。また、困難度が少ない場合は、問題は多少複雑になるが、制約条件が式(2-6), (2-8),あるいは式(2-6)', (2-8)'で表現される線形式であり、一般的に主問題よりも双対問題の方が簡単になる。

ところが、困難度が大きく、かつ負の係数を含む場合には、逆に双対問題の方が難しくなり、また、目的関数、制約条件式に多項式以外の関数を含む場合は適用できなくなる等の問題点がある。

そこで、ここでは近似解法として、与えられた関数をテイラー展開し2次以降の項を無視して困難度を下げる方法、および、負の係数を含む問題を正多項式の問題に凝縮し、かつ困難度を下げる方法を説明する。

3-1 繰り返し幾何計画法

この方法は、目的関数あるいは制約条件式を、ある点 $\mathbf{x}^{(1)}$ のまわりでテイラー展開し、2次

以降の項を無視し、1項よりなる正項式に近似してから幾何計画法を適用して、逐次解を改良して行く方法で、繰り返し線形計画法(SLP)と考え方は同じである。

近似すべき関数を $h_m(\mathbf{x})$ とし、 $\mathbf{x}^{(1)}$ のまわりでテイラー展開して2次以降の項を無視すると、 $h_m(\mathbf{x})$ は次の多項式で近似される。

$$h_m(\mathbf{x}) \doteq h_m(\mathbf{x}^{(1)}) \prod_{j=1}^N \left(\frac{x_j}{x_j^{(1)}} \right)^{a_j} \quad (3-1)$$

ここで、

$$a_j = \left(\frac{x_j}{h_m} \cdot \frac{\partial h_m}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)}}$$

このように、例えば $h_m(\mathbf{x})$ が多項式であれば、 T_m 個あった項数が1となり、困難度を減少させることができる。

3-2 一般的な多項式の正多項式への近似

式(2-1)、(2-2)で表わされる問題は、次のようにも表現できる。

制約条件式

$$h_m(\mathbf{x}) \leq \sigma_m; m = 0, 1, \sim, M \quad (3-2)$$

のもとで、 x_0 を最小にする \mathbf{x} の決定。

ここで、

$$h_m(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} C_{mt} \prod_{n=0}^N x_n^{a_{mnt}}; m = 0, 1, \sim, M \quad (3-3)$$

式(3-3)で表わされる $h_m(\mathbf{x})$ は負の係数を含むものとする、式(3-2)は次のようにも考えることができる。

$$h_m(\mathbf{x}) = h_m^+(\mathbf{x}) - h_m^-(\mathbf{x}) \leq \sigma_m \quad (3-4)$$

$h_m^+(\mathbf{x})$, $h_m^-(\mathbf{x})$ は、それぞれ m 番目の制約条件式の中の正、負の係数の項の集合を表し、それぞれ正多項式である。式(3-4)の制約条件式は、次のようにも表現できる。

$$\frac{Q_m(\mathbf{x})}{P_m(\mathbf{x})} \leq 1 \quad (3-5)$$

$Q_m(\mathbf{x})$, $P_m(\mathbf{x})$ は、 σ_m の正負により次のように定義される。

i) $\sigma_m = +1$ の場合

$$Q_m(\mathbf{x}) = h_m^+(\mathbf{x}), P_m(\mathbf{x}) = 1 + h_m^-(\mathbf{x}) \quad (3-6)$$

ii) $\sigma_m = -1$ の場合

$$Q_m(\mathbf{x}) = 1 + h_m^+(\mathbf{x}), P_m(\mathbf{x}) = h_m^-(\mathbf{x}) \quad (3-7)$$

結局、最初の問題は、式(3-5)の制約条件式のもとで x_0 を最小にするという問題に置換された。ここで、 $P_m(\mathbf{x})$, $Q_m(\mathbf{x})$ は、

$$P_m(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T'_m} p_{mt}(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T'_m} C_{mt} \prod_{n=0}^N x_n^{a_{mnt}} \quad (3-8)$$

; $m = 0, \sim, M$

$$Q_m(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T'_m} q_{mt}(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T'_m} C_{mt} \prod_{n=0}^N x_n^{a_{mnt}} \quad (3-9)$$

と定義される。式(3-8)より、算術平均と幾何平均の関係を考慮すると、次の関係が導かれる。

$$P_m(\mathbf{x}) \geq P_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}) = \prod_{t=1}^{T'_m} \left[\frac{(C_{mt} \prod_n x_n^{a_{mnt}}) \times P_m(\mathbf{x}^{(1)})}{C_{mt} \prod_n (x_n^{(1)})^{a_{mnt}}} \right] \frac{P_m(\mathbf{x}^{(1)})}{P_m(\mathbf{x}^{(1)})} \quad (3-10)$$

上式より、

$$\frac{Q_m(\mathbf{x})}{P_m(\mathbf{x})} \leq \frac{Q_m(\mathbf{x})}{P_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)})}$$

なる関係が成立し、これより、

$$\frac{Q_m(\mathbf{x})}{P_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)})} \leq 1 \quad (3-11)$$

を制約条件式として得られた解は、式(3-5)を満足することになる。

式(3-11)の左辺は、式(3-9)、(3-10)より正多項式であり、最初の負の係数を含む多項式は、正多項式に近似された。計算のアルゴリズムは、式(3-11)を繰り返し適用する収束計算になる。

4. 幾何計画法の応用例および計算例

幾何計画法の応用例として、Spunt が彼独自の方法で解いている⁽⁶⁾ 構造設計の問題2題と、単純支持変断面桁の最小重量設計の例、計算例として、局所的最適解を有する問題で繰り返し幾何計画法とSUMTの計算時間と精度を比較してみる。

4-1 曲げモーメントを受けるH形断面桁の最小重量設計

右図のH形断面が曲げモーメントを受ける場合の問題である。これは前述のように、Spunt が独自の方法で解いているものであるが、幾何計画法を応用してみる。

目的関数、制約条件式は次のようになる。

目的関数

$$f = \rho t h (1 + 2 k_1 k_2) \quad (4-1)$$

制約条件

作用最大垂直応力 σ_A は、

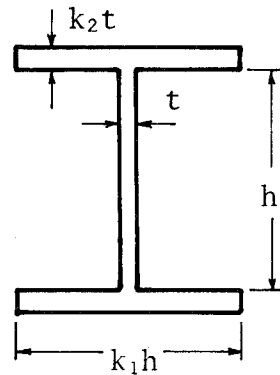


図-1 H形断面

$$\sigma_A = \frac{6M}{th^2(1+6k_1k_2)} \quad (4-2)$$

i) 降伏応力 (σ_p ; 降伏応力度)

$$\sigma_A \leq \sigma_p \quad (4-3)$$

ii) フランジの局部座屈

$$\sigma_A = \sigma_{Lf} \quad (4-4)$$

iii) ウェブの局部座屈

$$\sigma_A \leq \sigma_{Lw} \quad (4-5)$$

ここで、Eをヤング率とすると、

$$\sigma_{Lf} = 0.385 E \left(\frac{2k_2 t}{k_1 h} \right)^2 \quad (4-6)$$

$$\sigma_{Lw} = 21.7 E \left(\frac{t}{h} \right)^2 \quad (4-7)$$

フランジに余裕をもたせると、

$$\sigma_{Lw} \leq \sigma_{Lf} \quad (4-8)$$

となり、式(4-6)~(4-8)より

$$k_2 \geq 3.75 k_1 \quad (4-9)$$

結局、式(4-1)を最小にし、式(4-3)、(4-5)、(4-9)の制約条件のもとで、設計変数 k_1 , k_2 , t , h を決定するという問題になる。このままでは、幾何計画法を応用できないので、

$$K = 1 + 6k_1k_2 \quad (4-10)$$

なる新しい設計変数を導入すると、目的関数式(4-1)は、

$$f = \frac{2\rho}{3} th + \frac{\rho}{3} Kth \quad (4-1)'$$

式(4-3)、(4-5)、(4-9)はそれぞれ以下のようにになる。

$$\frac{6M_b}{\sigma_p} K^{-1} t^{-1} h^{-2} \leq 1 \quad (4-3)'$$

$$\frac{0.2765M_b}{E} K^{-1} t^{-3} \leq 1 \quad (4-5)'$$

$$K^{-1} + 22.5K^{-1}k_1^2 \leq 1 \quad (4-9)'$$

これは正多項式の問題であり、困難度は1である。2-1に従って解くと以下のようになる。

直交条件, 正規条件より,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{02} - \lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{31} - \lambda_{32} &= 0 \\ 2\lambda_{32} &= 0 \\ \lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{11} - 3\lambda_{21} &= 0 \\ \lambda_{01} + \lambda_{02} - 2\lambda_{11} &= 0 \\ \lambda_{01} + \lambda_{02} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

λ_{02} を未知量とすると, 他の変数は次のように表わされる。

$$\lambda_{01} = 1 - \lambda_{02}, \quad \lambda_{11} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{21} = \frac{1}{6}, \quad \lambda_{31} = \lambda_{02} - \frac{2}{3}, \quad \lambda_{32} = 0 \quad (4-12)$$

式(4-12)より, λ_{02} の許容範囲としては,

$$\frac{2}{3} \leq \lambda_{02} \leq 1 \quad (4-13)$$

双対関数は,

$$z(\lambda_{02}) = \frac{2\rho}{3} \left(\frac{6M_b}{\sigma_p} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{0.2765M_b}{E} \right)^{\frac{1}{6}} 2^{-\lambda_{02}} (1 - \lambda_{02})^{-(1-\lambda_{02})} \lambda_{02}^{-\lambda_{02}} \quad (4-14)$$

となる。ここで,

$$z'(\lambda_{02}) = (2\lambda_{02})^{-\lambda_{02}} (1 - \lambda_{02})^{-(1-\lambda_{02})}$$

とおくと,

$$L(\lambda_{02}) = \log z' = -\{\lambda_{02} \log(2\lambda_{02}) + (1 - \lambda_{02}) \log(1 - \lambda_{02})\}$$

λ_{02} と L の関係を示すと図-2 のようになり, 式(4-13)の範囲で, L を最大にする λ_{02} は,

$$\lambda_{02} = \frac{2}{3}$$

となり, 式(4-12)の関係より

$$\lambda_{01} = \frac{1}{3}, \quad \lambda_{31} = 0$$

となる。また, 目的関数, 各設計変数は,

$$f_{min} = z_{max} = 1.569 \frac{\rho M_b^{\frac{2}{3}}}{\sigma_p^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{6}}}$$

式(2-11)より,

$$K = 4$$

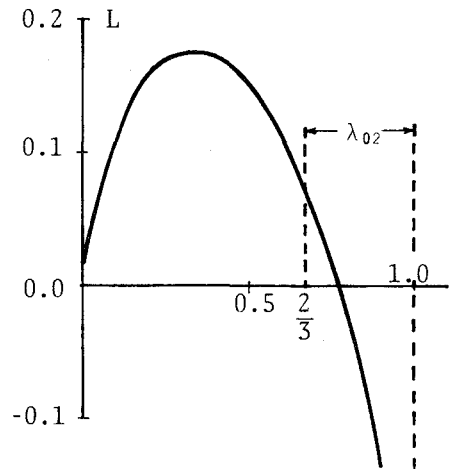


図-2

つまり、

$$k_1 k_2 = 0.5, \quad t = 0.4104 \left(\frac{M_b}{E} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad h = 1.912 \frac{M_b^{\frac{1}{3}} E^{\frac{1}{6}}}{\sigma_p^{\frac{1}{2}}}$$

となり、Spunt の結果と一致する。

4-2 等分布軸圧縮力を受ける波形板

これもやはり Spunt が解いているが、右図の波形板が等分布荷重 q を受ける時、重量を最小にするような幅 b 、板厚 t 、傾き θ を決めるという問題である。

Spunt は、作用応力 σ_A を目的関数としてゐるが、ここでは、単位幅当りの面積式 (4-15) を目的関数とする。

$$f = \frac{2t}{1 + \sin\theta} \quad (4-15)$$

作用応力は、次式のようにになる。

$$\sigma_A = \frac{q(1 + \sin\theta)}{2t} \quad (4-16)$$

制約条件式は、次のようになる。

i) オイラー座屈

$$\sigma_A \leq \frac{\pi^2 \eta_T E}{(cL/r)^2} \quad (4-17)$$

ここで、 r は断面二次半径であり、

$$r^2 = \frac{b^2 \cos^2 \theta}{6}$$

となるので、式 (4-17) は次のようになる。

$$\frac{3qc^2 L^2}{\pi^2 \eta_T E} \times \frac{1}{b^2 t (1 - \sin\theta)} \leq 1 \quad (4-18)$$

ここで、 cL は端部の条件で決まる有効座屈長、 $\eta_T E$ は接線弾性係数である。

ii) 局部座屈

$$\sigma_A \leq 3.62 \eta_T^{\frac{1}{2}} E \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (4-19)$$

式 (4-16) を代入すると。

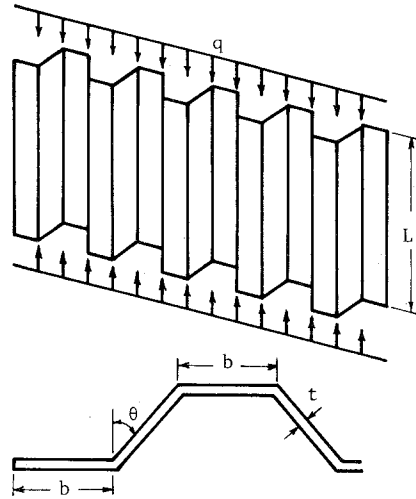


図-3 波形板

$$\frac{q}{7.24\eta_T^{\frac{1}{2}}E} \cdot \frac{b^2(1+\sin\theta)}{t^3} \leq 1 \quad (4-20)$$

iii) 降伏応力

$$\sigma_A \leq \sigma_y \quad (4-21)$$

式(4-16)を代入すると,

$$\frac{q}{2\sigma_y} \cdot \frac{1+\sin\theta}{t} \leq 1 \quad (4-22)$$

結局, 式(4-18), (4-20), (4-22)のもとで, 式(4-15)も最小にする設計変数の決定という問題になるが, このままでは, 幾何計画法の適用が難しいので,

$$S = 1 + \sin\theta$$

なる設計変数を導入すると, 式(4-15), (4-18), (4-20), (4-22)は以下のようになる。

$$f = 2tS^{-1} \quad (4-15')$$

$$\frac{3qc^2L^2}{2\pi^2\eta_T E} \cdot b^{-2}t^{-1} + \frac{1}{2}S \leq 1 \quad (4-18')$$

$$\frac{q}{7.24\eta_T^{\frac{1}{2}}E} \cdot b^2t^{-3}S \leq 1 \quad (4-20')$$

$$\frac{q}{2\sigma_y} \cdot t^{-1}S \leq 1 \quad (4-22')$$

直交条件, 正規条件は,

$$\left. \begin{aligned} -2\lambda_{11} + 2\lambda_{21} &= 0 \\ \lambda_{01} - \lambda_{11} - 3\lambda_{21} - \lambda_{31} &= 0 \\ -\lambda_{01} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{31} &= 0 \\ \lambda_{01} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

λ_{21} を未知量とすると, 他の変数は次のようになる。

$$\lambda_{01} = 1, \quad \lambda_{11} = \lambda_{21}, \quad \lambda_{12} = 3\lambda_{21}, \quad \lambda_{31} = 1 - 4\lambda_{21} \quad (4-24)$$

式(4-24)より, λ_{21} の許容範囲は,

$$0 \leq \lambda_{21} \leq \frac{1}{4} \quad (4-25)$$

となる。

双対関数は,

$$z(\lambda_{21}) = \frac{q}{\sigma_y} \cdot \left(\frac{3.929 \sigma_y^4 c^2 L^2}{\pi^2 \eta_T^{\frac{3}{2}} q^2 E^2} \right) \lambda_{21} \quad (4-26)$$

両辺の対数をとると,

$$L(\lambda_{21}) = \log z = \log \frac{q}{\sigma_y} + \lambda_{21} \cdot \log \left[\frac{3.929 \sigma_y^4 c^2 L^2}{\pi^2 \eta_T^{\frac{3}{8}} q^2 E^2} \right] \quad (4-27)$$

式(4-27)は、 λ_{21} に関して線形であり、式(4-25)の範囲では、 λ_{21} の係数の正負により L の最大を与える λ_{21} は両端の値をとる。つまり、

$$i) \quad \sigma_y \geq 0.710 \eta_T^{\frac{3}{8}} \left(\frac{\pi q E}{c L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-28)$$

この時、

$$\lambda_{21} = \frac{1}{4}$$

となり、他の変数は、式(4-24)より次のように計算される。

$$\lambda_{11} = \frac{1}{4}, \quad \lambda_{12} = \frac{3}{4}, \quad \lambda_{31} = 0 \quad (4-29)$$

各設計変数、目的関数の最小値は、

$$f_{min} = 1.408 \eta_T^{\frac{3}{8}} \left(\frac{q c L}{\pi E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{3}{2}$$

ゆえに、

$$\theta = 30^\circ, \quad t = 1.056 \eta_T^{\frac{3}{8}} \left(\frac{q c L}{\pi E} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b = 2.384 \eta_T^{-\frac{5}{16}} \left(\frac{q c^3 L^3}{\pi^3 E} \right)^{\frac{1}{4}}$$

この結果は、Spunt と一致するが、Spunt は式(4-28)の条件式を導いていないので不十分といえる。

$$ii) \quad \sigma_y < 0.710 \eta_T^{\frac{3}{8}} \left(\frac{\pi q E}{c L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

この時、

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_{12} = 0, \quad \lambda_{31} = 1$$

となる。

目的関数の最小値は、

$$f_{min} = \frac{q}{\sigma_y}$$

各設計変数は、

$$\frac{1 + \sin\theta}{t} = \frac{2\sigma_y}{q}$$

より決定され、 b は任意となる。

4-3 単純支持変断面桁の設計

右図に示す、長方形断面を有する単純支持変断面桁が、スパン中央に集中荷重を受ける時の例である。これは、 $p=5t$ 、 $l=5m$ 、 $\alpha=\frac{1}{3}$ 、曲げ許容応力度 $\sigma_a = 1300 \text{ kg/cm}^2$ の場に、SLPにより解かれている⁽⁷⁾が、この問題の一般解を幾何計画法により誘導し、最後に最適な変断面位置を与える α について考察してみる。

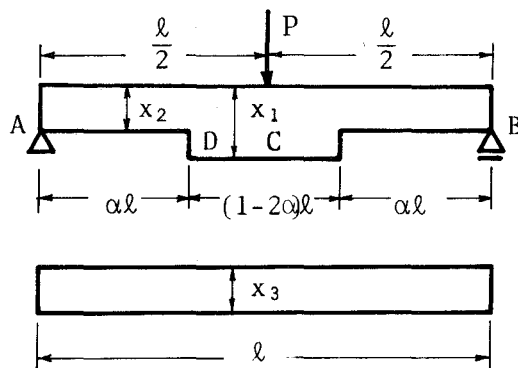


図-4 単純支持変断面桁

$$f = \{(1 - 2\alpha)x_1x_3 + 2\alpha x_2x_3\}l \quad (4-30)$$

制約条件式は、点 C、D で応力度と寸法に関する 2 式を考慮すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 1.5 \frac{Pl}{\sigma_a} x_1^{-2} x_3^{-1} &\leq 1 \\ 3\alpha \frac{Pl}{\sigma_a} x_2^{-2} x_3^{-1} &\leq 1 \\ 10x_2^{-1} &\leq 1 \\ 0.5x_2x_3^{-1} &\geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4-31)$$

これは、困難度 2 の問題となる。

$$x_1 = \sqrt{0.3Pl/\sigma_a} X_1, \quad x_2 = 10X_2, \quad x_3 = 5X_3 \quad (4-32)$$

と変数を変換すると、

$$F = \frac{f}{100\alpha l} = K_2 X_1 X_3 + X_2 X_3 \quad (4-33)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1^{-2} X_3^{-1} &\leq 1 \\ K_1 X_2^{-2} X_3^{-1} &\leq 1 \\ X_2^{-1} &\leq 1 \\ X_2 X_3^{-1} &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4-34)$$

ここで、

$$K_1 = 0.006\alpha \frac{Pl}{\sigma_a}, \quad K_2 = \frac{1-2\alpha}{20\alpha} \sqrt{\frac{0.3Pl}{\sigma_a}} \quad (4-35)$$

直交条件, 正規条件より,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{01} - 2\lambda_{11} &= 0 \\ \lambda_{02} - 2\lambda_{21} - \lambda_{31} + \lambda_{41} &= 0 \\ \lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} &= 0 \\ \lambda_{01} + \lambda_{02} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4-36)$$

以上より,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{02} &= 1 - \lambda_{01} \\ \lambda_{11} &= 0.5\lambda_{01} \\ \lambda_{31} &= -1.5\lambda_{01} - 3\lambda_{21} + 2 \\ \lambda_{41} &= 1 - 0.5\lambda_{01} - \lambda_{21} \end{aligned} \right\} \quad (4-37)$$

よって, λ_{01} と λ_{21} の許容範囲は,

$$0 \leq \lambda_{01} \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_{21} \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\lambda_{01} \quad (4-38)$$

式(4-38)を図示すると図-5となる。

双対関数は,

$$z(\lambda) = \left(\frac{K_2}{\lambda_{01}}\right)^{\lambda_{01}} (\lambda_{02})^{-\lambda_{02}} (K_1)^{\lambda_{21}} \quad (4-39)$$

両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned} L(\lambda_{01}, \lambda_{21}) &= \log z = \lambda_{01}(\log K_2 - \log \lambda_{01}) \\ &\quad - (1 - \lambda_{01})\log(1 - \lambda_{01}) + \lambda_{21}\log K_1 \end{aligned} \quad (4-40)$$

式(4-40)において, λ_{01} を任意の値に固定すると, 式(4-40)は λ_{21} に関して線形であるから, 図-5より L を最大にするためには, $\log K_1$ の正負により λ_{21} は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \log K_1 \geq 0; \lambda_{21} &= \frac{2}{3} - \frac{\lambda_{01}}{2} \\ \log K_1 < 0; \lambda_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-41)$$

i) $\log K_1 < 0$ つまり $\alpha \leq \frac{\sigma_a}{0.006Pl}$

式(4-41)を考慮して, 式(4-40)を λ_{01} に関して微分し0とおくと, $\lambda_{01}, \lambda_{02}$ は次のように求まる。

$$\lambda_{01} = \frac{K_2}{1 + K_2}, \quad \lambda_{02} = \frac{1}{1 + K_2} \quad (4-42)$$

f_{min} および設計変数は次のように求まる。

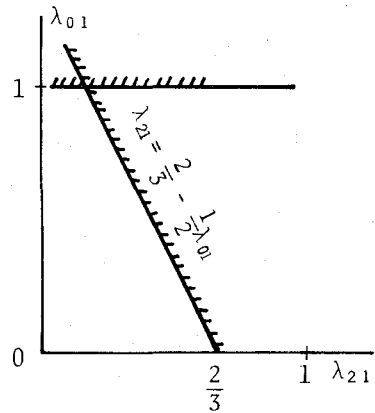


図-5

$$x_1 = \sqrt{0.3Pl/\sigma_a}, \quad x_2 = 10^{cm}, \quad x_3 = 5^{cm} \quad (4-43)$$

$$f_{min} = 25\sqrt{2} l \{ 2(\sqrt{2} - \sqrt{0.006Pl/\sigma_a}) \alpha + \sqrt{0.006Pl/\sigma_a} \} \quad (4-44)$$

式(4-44)は α に関して線形である。

$$\text{ii) } \log K_1 \geq 0 \quad \text{つまり} \quad \alpha > \frac{\sigma_a}{0.006Pl}$$

上と同様に λ_{01} , λ_{02} を求めると,

$$\lambda_{01} = \frac{1}{1+A}, \quad \lambda_{02} = \frac{A}{1+A} \quad (4-45)$$

ここで,

$$A = \frac{2\sqrt{2} \alpha \sqrt{\alpha}}{1-2\alpha}$$

f_{min} および設計変数は, 次のように求まる,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{0.3Pl/\sigma_a} (0.006\alpha Pl/\sigma_a)^{-\frac{1}{6}} \\ x_2 &= 10(0.006\alpha Pl/\sigma_a)^{\frac{1}{3}} \\ x_3 &= 5(0.006\alpha Pl/\sigma_a)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (4-46)$$

$$f_{min} = 25\sqrt{2} l (0.006Pl/\sigma_a)^{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{1}{6}} (2\sqrt{2} \alpha \sqrt{\alpha} - 2\alpha + 1) \quad (4-47)$$

式(4-47)は, α に関して単調増加関数である。

次に, 以上の結果より f を最小にする α を求めてみる。

最適な変断面位置を示す α_{opt} は, 式(4-44)の α の係数の正負より, 次のように求まる。

$$\text{i) } \sigma_a \geq 0.003Pl; \alpha_{opt} = 0 \quad (4-48)$$

この時,

$$f_{min} = 50l\sqrt{0.003Pl/\sigma_a} \quad (4-49)$$

$$\text{ii) } \sigma_a < 0.003Pl; \alpha_{opt} = \sigma_a/(0.006Pl) \quad (4-50)$$

この時,

$$f_{min} = 50l \left\{ \left(1 - \sqrt{\frac{0.003Pl}{\sigma_a}} \right) \frac{\sigma_a}{0.003Pl} + \sqrt{\frac{0.003Pl}{\sigma_a}} \right\} \quad (4-51)$$

$p = 5^+$, $l = 5^m$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\sigma_a = 1300^{kg/cm^2}$ の時, 式(4-46), (4-47)より

$$x_1 = 19.2cm, \quad x_2 = 15.7cm, \quad x_3 = 7.8cm, \quad f_{min} = 65,967cm^3$$

となり, すでに得られている結果⁽⁷⁾と一致する。

さらに, この条件での最適な α は, 式(4-50)より0.087であり, この時 f_{min} は,

$$f_{min} = 53,973cm^3$$

となる。

4-4 繰り返し幾何計画法と SUMT の比較

ここでは、3-1 で説明した繰り返し幾何計画法と SUMT の計算時間と解の精度を比較してみる。

問題は、制約条件、

$$h_1(\mathbf{x}) = \frac{x_1^{-1}x_2^2}{4.5} - \frac{x_1^{-1}x_2}{0.75} + 3x_1^{-1} \leq 1 \quad (4-52)$$

$$h_2(\mathbf{x}) = -2x_1^{-1}x_2^2 + 6x_1^{-1}x_2 - 2x_1^{-1} \leq 1 \quad (4-53)$$

のもとで、目的関数

$$h_0(\mathbf{x}) = x_1 + 0.5x_2 \quad (4-54)$$

を最小にするような \mathbf{x} の決定というになる。これを図示すると、図-6 のように局所的最適解のある問題となる。点 A, B の座標の厳密解および対応する目的関数の値は次のようになる。

点 A ; $x_1 = 1.0976, x_2 = 2.3374, h_0 = 2.2663$

点 B ; $x_1 = 1.9224, x_2 = 0.9626, h_0 = 2.4037$

この問題は、制約条件式に負の係数を含み、幾何計画法を用いると困難度は 5 となり、このままでは主問題を解く方が楽である。そこで、式 (4-52)~(4-54) を式 (3-1) に従って次式で近似する。

$$\left. \begin{aligned} h_0(\mathbf{x}) &\doteq h_0(\mathbf{x}^{(1)}) [x_1^{(1)}]^{-a_{01}} [x_2^{(1)}]^{-a_{02}} x_1^{a_{01}} x_2^{a_{02}} \\ h_1(\mathbf{x}) &\doteq h_1(\mathbf{x}^{(1)}) [x_1^{(1)}]^{-a_{11}} [x_2^{(1)}]^{-a_{12}} x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \\ h_2(\mathbf{x}) &\doteq h_2(\mathbf{x}^{(1)}) [x_1^{(1)}]^{-a_{21}} [x_2^{(1)}]^{-a_{22}} x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \end{aligned} \right\} \quad (4-55)$$

適当な $\mathbf{x}^{(1)}$ のまわりで式 (4-55) の係数・指数を計算し幾何計画法により \mathbf{x} を決定して、 $\mathbf{x}^{(1)}$ と \mathbf{x} の収束を検討して、収束していなければ \mathbf{x} を $\mathbf{x}^{(1)}$ として以上の過程を収束まで繰り返すことになる。

SUMT については他に詳しいので⁽⁸⁾ 詳細は省略するが、式 (4-56) の SUMT 変換を行ない、制約条件の無い最適化は、パウエル の直接探策法を用いた。

$$H(\mathbf{x}, r_j) = h_0(\mathbf{x}) + r_j \sum_{i=1}^2 \frac{1}{1 - h_i(\mathbf{x})} ; j = 1, \sim, J \quad (5-56)$$

ここで r_j は次のように与えた。

$$r_j = 10^{\kappa - j + 1} \quad (4-57)$$

数値計算の結果を表-1~4 に示す。() 内の数字は、初期値 (x_1^0, x_2^0)、J、 κ は式 (4-57) に定義してある。 x_1, x_2 は最終的な結果、f は目的関数の値、t は計算時間 (m sec) である。上の 4 欄は SUMT の結果であり、最下欄の SGP が繰り返し幾何計画法の結果である。

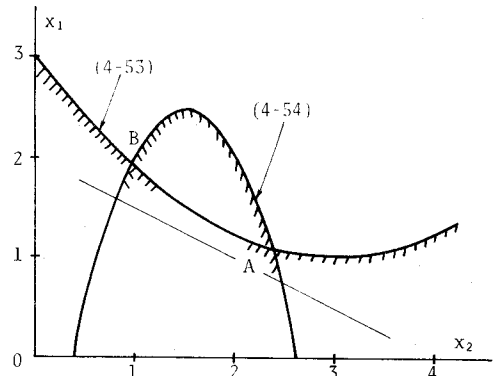


図-6 局所的最適解のある問題

(2,3)

J	κ	x_1	x_2	h_0	t
6-2		1.1279	2.3172	2.3134	40
6-1		1.1130	2.3458	2.2859	108
6-0		1.1391	2.3321	2.3051	67
8-1		1.2040	2.3062	2.3570	43
SGP		1.0976	2.3374	2.2663	13

表-1

(5,0.5)

J	κ	x_1	x_2	h_0	t
6-2		1.1244	2.4190	2.3339	135
6-1		1.1095	2.3475	2.2832	136
6-0		1.9299	0.9615	2.4106	48
8-1		1.0982	2.3465	2.2685	129
SGP		1.0976	2.3374	2.2663	20

表-2

(4,4)

J	κ	x_1	x_2	h_0	t
6-2		1.1351	2.3944	2.3323	61
6-1		1.1060	2.3486	2.2803	89
6-0		1.9296	0.9613	2.4103	39
8-1		1.0982	2.3390	2.2678	69
SGP		1.0976	2.3374	2.2664	21

表-3

(4.1)

J	κ	x_1	x_2	h_0	t
6-2		1.1337	2.4398	2.3536	217
6-1		1.1060	2.3486	2.2803	88
6-0		1.9296	0.9613	2.4103	39
8-1		1.0982	2.3396	2.2678	68
SGP		1.9224	0.9626	2.4037	10

表-4

まず最初に厳密解を参考にして、SGP と SUMT の解の精度を比較すると、SGP の結果は初期値が (4, 1) の時に局所最適解へ収束しているが、それにしても点Bの厳密解と一致している。一方 SUMT は、全域的最適解を得られやすい方法といわれているが、16 の計算例の内3つで局所最適解へ収束し、また、解自身の精度も最大で10%程度の誤差を持っている。

次に計算時間を比較する。SGP の4つの例の平均時間は16m secであるのに対し、SUMT の16例の平均時間は86m sec、計算時間の少ない4例の平均は39m secであり、計算時間の点でもSGPはすぐれている。

以上のように、この問題に関してはSGPがすぐれているという結果になった。表-4のように、局所最適解へ収束する場合があるが、局所最適解を有する問題では、初期値を適当に変えて解を検討するというを行わなければならない、その際計算時間が少ないというのは、大きな利点の1つである。

5. あとがき

幾何計画法の、他の非線形計画法にない大きな長所として、困難度が0の場合は、線形連立方程式へ問題を置換できると、計算例の最後に記述したように、得られた解が全域的最適解であるかどうかは、一般的な非線形計画法の大きな問題点の1つであるが、幾何計画法で

は、係数の正負に関係なく、全域的最適解が得られることがあげられる。

一方、欠点としては、困難度の増加に伴ない双対問題を解くのが難しくなり、さらに、係数に負を含むと、ほとんどの場合で主問題を他の非線形計画法で解く方が容易になることがあげられる。そのために、本論文で説明した近似解法が研究されているが、今後収束性などをさらに検討する必要がある。

しかしながら、本論文の応用例 4-1, 4-2 で筆者の示した K, S なる変数の変換, あるいは, 4-3 の実行可能領域の考察より最適値を求める方法など, 困難度が少ない範囲では, 工夫によって閉じた解を得られることを示しており, さらに, 最後の計算例では繰り返し幾何計画法 (SGP) と SUMT を比較してみたが, 計算精度, 計算時間とも SGP の方がすぐれており, 従来 SUMT, SLP 等が占めていた最適化問題のある部分に幾何計画法が有効に応用できることを示している。

本論文の 4-4 の数値計算は, 北海道大学大型計算機センターの Facom 230-75 を使用した。本論文の図の作成に, 室蘭工業大学技官昆野茂氏の協力を得たことを付記し謝意を表する。

(昭和 52 年 5 月 13 日受理)

6. 参 考 文 献

- (1) Charles S. Beightler, Don T. Phillips, "Applied Geometric Programming", John Wiley & Sons, 1976.
- (2) Duffin, Peterson, Zener, "Geometric Programming", John Wiley & Sons, 1967.
- (3) C. S. Beightler, Ta-Chen Lo, H. G. Rylander, "Optimum Design by Geometric Programming", Transactions of the ASME, 1970, 2.
- (4) A. G. Walvekar, K. C. Mehta, C. E. Teske, "Optimal Design of Indeterminate Truss Using Geometric Programming", J. A. S. I., 1972, 5.
- (5) A. B. Templeman, "Optimum Truss Design Using Approximating Functions", Optimization In Structural Design, Springer-Verlag, 1975.
- (6) Leonard Spunt, "Optimum Structural Design", Prentice Hall, 1971.
- (7) 長 尚, "構造物の最適設計", 朝倉書店, 1971.
- (8) 例えば, A. V. Fiacco, G. P. Mc Cormick, "Nonlinear Programming ; Sequential Unconstrained Minimization Techniques", John Wiley & Sons, 1968.
- (9) 杉本博之, "トラス構造物の実用的最適設計に関する研究", 土木学会論文報告集, No. 208, 1972, 12.
- (10) 杉本博之, "有限変形を考慮したトラス構造物の最適設計", 土木学会北海道支部論文報告集, No. 31, 1975, 2.
- (11) 杉本博之, 土居博史, 中村作太郎, "部分構造分割による長大トラス橋の最適設計に関する研究", 土木学会論文報告集, No. 261, 1977, 5.