

有限円筒の3次元応力問題について

その他（別言語等） のタイトル	On Three Dimensional Stress Problems of Finite Hollow Cylinder
著者	松岡 健一, 能町 純雄
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	9
号	2
ページ	465-478
発行年	1977-12-10
URL	http://hdl.handle.net/10258/3664

有限円筒の 3 次元応力問題について

松岡 健一・能町 純雄

On Three Dimensional Stress Problems of Finite Hollow Cylinder

Kenichi Matsuoka and Sumio Nomachi*

Abstract

The purpose of this paper is first to present the general solutions of the three dimensional stress problems of a finite hollow cylinder submitted to forces on its boundaries. These solutions are obtained from the equations of equilibrium of forces in cylindrical co-ordinates by means of finite Fourier-Hankel transforms.

Then making use of the solutions, the numerical calculations are carried out for the case when the hollow cylinder is subjected to a pair of tractions which are partially distributed on the inner surface. The results are compared with those in the case of an infinitely long hollow cylinder carrying the same forces, and the results of Sibahara, et al, obtained from another method, are also shown in the figures for reference sake.

1. ま え が き

著者らはこれまで円柱座標で表わされる 3 次元応力問題として、静的弾性問題では、多層弾性体の問題¹⁾²⁾、無限および有限円柱の問題³⁾、円孔を有する無限および半無限体の問題⁴⁾⁵⁾を取扱ってきた。これらはいずれも解法として Fourier-Hankel 変換を用いるものであり、数値計算も数多く行なわれている。しかし円柱座標で表わされる 3 次元応力問題としては最も一般的な有限円筒の問題に関しては、曲げを受ける両端単純支持された厚肉円筒の問題⁶⁾を取っているのみで、任意の境界条件に対する解析は行なっていない。この問題に対する著者ら以外の研究としても、軸対称問題を取扱った柴原らの研究⁷⁾や奥村の研究⁸⁾があるくらいで、非軸対称問題に関してはその一般解も示されていないようである。

本論文では、まず、有限円筒の非軸対称問題をこれまでと同様に Fourier-Hankel 変換を用いて解析し、その一般解を示した。この解は文献 6) に示したのとは別の核関数を用いて積分変換してえられたものであるが、文献 6) の解に比較して境界条件の取扱いが一般的になっている。次に、得られた解を用い若干の数値計算を行ない、軸対称の場合に対して柴原らの結果との比較を行なった。また一部無限円筒の結果との比較も行なった。

* 北海道大学工学部教授 工博

2. 基礎方程式

円柱座標におけるつり合い式は、座標軸を r , θ , z とし, σ_r , σ_θ , σ_z をそれぞれ r , θ , z 方向の直応力度, $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, τ_{zr} をせん断応力度とすれば, 物体力を無視して

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

となる。また弾性応力問題を対象とするので Hooke の法則は

$$\sigma_r = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = (2\mu + \lambda) \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\sigma_z = (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \right), \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad (7) \quad \tau_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (8)$$

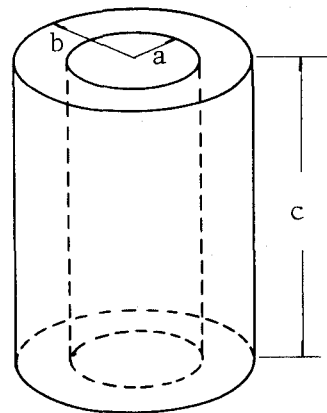
$$\tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (9)$$

となる。ここで u , v , w はそれぞれ r , θ , z 方向の変位であり, μ , λ は Lamé の弾性定数である。

3. 各変位成分の Fourier-Hankel 変換値

有限円筒の一般解は, 式(1)~(3)の連立偏微分方程式を解くことにより得られるが, ここでは積分変換の一種である Fourier 変換と Hankel 変換を用いる方法によって解く。

今図一1に示すような内径 a , 外径 b , 長さ c の有限円筒を考える。ここで積分変換の核関数として $L_1 = \cos m\theta X$, $L_2 = \sin m\theta X$, $L_3 = \cos m\theta X_0$ を式(1)~(3)に対して選ぶ。ここで $m = 0, 1, 2, \dots$ である。こうして θ に関して $(0, 2\pi)$ の間で有限 Fourier 変換を行ない, r に関して (a, b) , z に関して $(0, c)$ の間で X , X_0 を核として積分変換を行なう。このとき式(4)~(9)の Hooke の法則を考慮して応力を変位で表わし積分を行なう。次に r 方向の有限変換を実際に行なうために, 次のよう



図一1 有限円筒

におく

$$C_m[u] = A_{mzr} + B_{mzr}, \quad S_m[v] = A_{mzr} - B_{mzr}, \quad (10)$$

$$C_m[\tau_{rz}] = T_{mzr}^a + T_{mzr}^b, \quad S_m[\tau_{\theta z}] = T_{mzr}^a - T_{mzr}^b, \quad (11)$$

式(1), (2)を積分変換してえられた結果に式(10), (11)を代入し, 辺々相加えて $X = X_1 = rH_{m+1}(\xi_i r) \cos Nz$ とおき, r, z に関する変換を完成させる。次に辺々相減じて $X = X_2 = rH_{m-1}(\xi_i r) \cos Nz$ とおき変換を続行する。さらに式(3)を積分変換して得られた結果に, 式(10), (11)を代入し, $X_0 = rH_m(\xi_i r) \sin Nz$ として積分を行なう。ただし上の説明中

$$C_m[f] = \int_0^{2\pi} f \cos m\theta d\theta, \quad S_m[f] = \int_0^{2\pi} f \sin m\theta d\theta, \quad (a)$$

$$H_j(\xi_i r) = J_j(\xi_i r) Y_m(\xi_i a) - J_m(\xi_i a) Y_j(\xi_i r), \quad j = m-1, m, m+1$$

で, $\xi_i, i = 1, 2, \dots$ は $H_m(\xi_i b) = 0$ の根を小さいものから順に並べたものであり, J, Y は第1種および第2種の Bessel 関数である。また $N = n\pi/c, n = 0, 1, 2, \dots$ である。

以上の計算により, 各変位成分の有限 Fourier-Hankel 変換値を含む 3 元連立方程式が導かれ, これを解くことにより変位成分の積分変換値が次のように求められる。

$$\begin{aligned} H_{m+1} C_n[A_{mzr}] &= \int_a^b \int_0^c A_{mzr} r H_{m+1}(\xi_i r) \cos Nz dr dz \\ &= \frac{1}{2\mu} \frac{1}{N^2 + \xi_i^2} \left[\left\{ C_m C_n[\sigma_r] + S_m C_n[\tau_{r\theta}] + 4\mu \frac{m+1}{r} C_n[A_{mzr}] + \mu N C_m S_n[w] \right\} \right. \\ &\quad \times r H_{m+1}(\xi_i r) \Big|_a^b - \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \cdot \frac{\xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \left[\left\{ C_m C_n[\sigma_r] + 2\mu \left(\frac{m+1}{r} C_n[A_{mzr}] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \frac{m-1}{r} C_n[B_{mzr}] \right) + 2\mu N C_m S_n[w] \right\} r H_{m+1}(\xi_i r) \Big|_a^b + \frac{1}{2\mu} \frac{1}{N^2 + \xi_i^2} \right. \\ &\quad \times \left[\left\{ \frac{3\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} H_{m+1}[T_{mzr}^a] + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} H_{m-1}[T_{mzr}^b] - \mu \xi_i H_m C_m[w] \right\} \cos Nz \Big|_0^c \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \cdot \frac{N^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \left[\left\{ H_{m+1}[T_{mzr}^a] - H_{m-1}[T_{mzr}^b] + 2\mu \xi_i H_m C_m[w] \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \cos Nz \Big|_0^c \right] \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{m-1} C_n[B_{mzr}] &= \int_a^b \int_0^c B_{mzr} r H_{m-1}(\xi_i r) \cos Nz dr dz \\ &= -\frac{1}{2\mu} \frac{1}{N^2 + \xi_i^2} \left[\left\{ C_m C_n[\sigma_r] - S_m C_n[\tau_{r\theta}] - 4\mu \frac{m-1}{r} C_n[B_{mzr}] + \mu N C_m S_n[w] \right\} \right. \\ &\quad \times r H_{m-1}(\xi_i r) \Big|_a^b + \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \cdot \frac{\xi_i^2}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \left[\left\{ C_m C_n[\sigma_r] + 2\mu \left(\frac{m+1}{r} C_n[A_{mzr}] \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m-1}{r} C_n[B_{mzr}] + 2\mu N C_m S_n[w] \left. \right\} r H_{m-1}(\xi_i r) \Big|_a^b + \frac{1}{2\mu} \frac{1}{N^2 + \xi_i^2} \left[\left\{ \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \right. \\
& \times \left. \left. H_{m+1}[T_{mzr}^a] + \frac{3\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} H_{m-1}[T_{mzr}^b] + \mu \xi_i H_m C_m[w] \right\} \cos Nz \right]_o^c - \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \\
& \times \frac{N^2}{(N^2 + \xi_i^2)} \left[\left\{ H_{m+1}[T_{mzr}^a] - H_{m-1}[T_{mzr}^b] + 2\mu \xi_i H_m C_m[w] \right\} \cos Nz \right]_o^c, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_m C_m S_n[w] &= \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^c w r H_m(\xi_i r) \cos m\theta \sin Nz r dr d\theta dz \\
&= \frac{\xi_i}{N^2 + \xi_i^2} \left[C_m S_n[w] r H_{m+1}(\xi_i r) \right]_a^b - \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} \frac{N \xi_i}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \left[C_m C_n[\sigma_r] \right. \\
&+ 2\mu \left(\frac{m+1}{r} C_n[A_{mzr}] + \frac{m-1}{r} C_n[B_{mzr}] + 2\mu N C_m S_n[w] \right) \left. \right\} r H_{m+1}(\xi_i r) \Big|_a^b \\
&- \frac{N}{N^2 + \xi_i^2} \left[H_m C_m[w] \cos Nz \right]_o^c - \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} \frac{N \xi_i}{(N^2 + \xi_i^2)^2} \left[\left\{ H_{m+1}[T_{mzr}^a] \right. \right. \\
&\left. \left. - H_{m-1}[T_{mzr}^b] + 2\mu \xi_i H_m C_m[w] \right\} \cos Nz \right]_o^c \quad (14)
\end{aligned}$$

式(12)~(14)中の $C_m C_n[\sigma_r]$, $S_m C_n[\tau_{r\theta}]$, ……などは σ_r , $\tau_{r\theta}$, ……の積分変換値を記号で示したものであるが, その意味は式(a)および式(12)~(14)の最初に示した式から明らかであろう。

4. 有限円筒の変位の一般解

有限円筒の各変位成分の一般解は, 式(12)~(14)を逆変換することにより与えられるが式(14)をそのまま逆変換して得られる w は円筒の偶部 (たとえば $r = a$, $c = 0$) で常に 0 となり一般的には好ましくない。そこで以下に述べるような補正を加える。

まず式の表現を簡単にするため, 式(12)~(14)中の $C_m C_n[\sigma_r]$, $S_m C_n[\tau_{r\theta}]$, ……などを次のよう

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_{mnr} &= S_m C_n[\tau_{r\theta}], & \beta_{mnr} &= C_m C_n[\sigma_r], & A_{mnr} &= C_n[A_{mzr}], \\
B_{mnr} &= C_n[B_{mzr}], & \gamma_{miz} &= H_{m+1}[T_{mzr}^a], & \delta_{miz} &= H_{m-1}[T_{mzr}^b],
\end{aligned} \right\} \quad (b)$$

また w の補正により生ずる値も簡単化し,

$$\left. \begin{aligned}
C_{mnr} &= C_m C_n[\partial u / \partial r], & D_{miz} &= H_{m+1}[\partial A_{mz} / \partial z], \\
E_{miz} &= H_{m-1}[\partial B_{mzr} / \partial z],
\end{aligned} \right\} \quad (c)$$

とおく。ここで式(4)を $\cos m\theta \cdot \cos Nz$ を核関数として θ について $(0, 2\pi)$, z について $(0, c)$ で積分変換を行ない, 式を整理すれば

$$\begin{aligned} C_m S_n[w] = & -\frac{1}{N} \left[C_m[w] \cos Nz \right]_o^c - \frac{m+1}{Nr} A_{mnr} - \frac{m-1}{Nr} B_{mnr} \\ & - \frac{2\mu+\lambda}{\lambda} \frac{1}{N} C_{mnr} + \frac{1}{\lambda N} \beta_{mnr}, \end{aligned} \quad (15)$$

次に式(8)を $\sin m\theta$ 、式(9)を $\cos m\theta$ で積分変換し、得られた式を辺々相加え $rH_{m+1}(\xi_i r)$ で積分変換を行ない、式を整理すれば

$$H_m C_m[w] = \frac{1}{\xi_i} \left[C_m[w] rH_{m+1}(\xi_i r) \right]_a^b + \frac{2}{\mu\xi_i} (\mu D_{miz} - \gamma_{miz}), \quad (16)$$

また相辺相減じ $rH_{m-1}(\xi_i r)$ で積分変換を行ない、式を整理すれば

$$H_m C_m[w] = \frac{1}{\xi_i} \left[C_m[w] rH_{m+1}(\xi_i r) \right]_a^b - \frac{2}{\mu\xi_i} (\mu E_{miz} - \delta_{miz}), \quad (17)$$

式(16)、(17)から次の式が得られる。

$$H_m C_m[w] = \frac{1}{\xi_i} \left[C_m[w] rH_{m+1}(\xi_i r) \right]_a^b + \frac{1}{\xi_i} (D_{miz} - E_{miz}) - \frac{1}{\mu\xi_i} (\gamma_{miz} - \delta_{miz}), \quad (18)$$

$$\mu(D_{miz} + E_{miz}) - (\gamma_{miz} + \delta_{miz}) = 0 \quad (19)$$

式(12)~(14)に式(15)~(18)の関係を代入し逆変換を行なうことにより各変位成分を求めることができる。上の誘導では $m \neq 0$ 、 $n \neq 0$ の場合について述べているが $n = 0$ 、 $m = 0$ の式は、上に述べた各式で $m = 0$ とすれば良い。 $n = 0$ のときは別な形となるが、誘導の方法は上の場合と同様である。また $i = 0$ に相当する初期項も必要となるが、これも途中の積分変換で $rH_{m+1}(\xi_i r)$ の代りに r^{2-m} 、 $rH_{m-1}(\xi_i r)$ の代りに r^{2+m} を用いて積分を行ない同様に求めることができる。従って各変位成分の一般式は

$$u = \frac{1}{\pi} A_{0zr} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{mzr} + B_{mzr}) \cos m\theta, \quad (20)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{mzr} - B_{mzr}) \sin m\theta, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} A_{mzr} = & \frac{2ma^{2m}b^{2m}}{b^{2m}-a^{2m}} \frac{1}{r^{m+1}} \int_a^b \left\{ \frac{1}{C} \int_o^c A_{mzr} dz + \frac{2}{C} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [A_{mzr}] \cos Nz \right\} r^{-m} dr \\ & + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{m+1}(\xi_i r)}{\Theta_{mi}^2} \left\{ \frac{1}{C} \int_o^c H_{m+1} [A_{mzr}] dz + \frac{2}{C} \sum_{n=1}^{\infty} H_{m+1} C_n [A_{mzr}] \cos Nz \right\} \\ = & \sum_{k=1}^2 \left[(-1)^{k-1} \frac{2ma^{2m}b^{2m}}{b^{2m}-a^{2m}} \cdot \frac{1}{cr^{m+1}} \left\{ \frac{1}{4m(3\mu+\lambda)} a_k^{2-m} (\beta_{mok} + \alpha_{mok}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\mu}{3\mu+\lambda} - \frac{\mu+\lambda}{2m(3\mu+\lambda)} \right) a_k^{1-m} A_{mok} - \frac{\mu+\lambda}{2m(3\mu+\lambda)} a_k^{1-m} B_{mok} - \frac{\lambda}{4m(3\mu+\lambda)} \right. \right. \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot a_k^{2-m} (W_{mk_1} - W_{mk_2}) - \frac{\lambda}{2m(3\mu+\lambda)} D_{mok} + \frac{\mu+\lambda}{2m\mu(3\mu+\lambda)} \gamma_{mok} \Big\} + \frac{1}{(2\mu+\lambda)c} \\
& \cdot f_{mp}^{(k)}(r) \Big\{ \frac{1}{2} \beta_{mok} + \frac{2\mu+\lambda}{2\mu} \alpha_{mok} + (3\mu+\lambda) \frac{m+1}{a_k} A_{mok} + (\mu+\lambda) \frac{m-1}{a_k} B_{mok} \\
& - \frac{\lambda}{2} (W_{mk_1} - W_{mk_2}) \Big\} + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \Big\{ \frac{1}{2N} \chi_{mp}^{(k)}(Nr) \Big(\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda} \beta_{mnk} + \frac{1}{\mu} \alpha_{mnk} \\
& + \frac{3(m+1)}{a_k} A_{mnk} + \frac{m-1}{a_k} B_{mnk} - \frac{2\mu+\lambda}{\lambda} C_{mnk} \Big) - \frac{\mu+\lambda}{4\mu\lambda N} \omega_{mp}^{(k)}(Nr) (\beta_{mnk} \\
& - 2\mu C_{mnk}) \Big\} + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{m+1}(\xi_i r)}{\theta_{mi}^2} \Big\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \cdot \frac{1}{\xi_i} \phi^{(k)}(\xi_i z) (D_{mik} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda} (3\gamma_{mik} + \delta_{mik})) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{1}{\xi_i} (\phi^{(k)}(\xi_i z) - \phi^{(k)}(\xi_i \bar{z})) (D_{mik} \\
& - \frac{1}{4\mu} (3\gamma_{mik} + \delta_{mik})) \Big\} + \frac{2ma^2 b^2 m}{b^{2m} - a^{2m}} \cdot \frac{(-1)^k}{2r^{m+1}} \Big\{ f_1 \Big(\frac{z}{c} \Big) \Big(W_{mk_2} - \frac{1}{\mu} \gamma'_{mk_2} \Big) \\
& - f_1 \Big(1 - \frac{z}{c} \Big) \Big(W_{mk_1} - \frac{1}{\mu} \gamma'_{mk_1} \Big) \Big\} \Big] \Big] \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{mzr} &= \frac{2m}{b^{2m} - a^{2m}} r^{m-1} \int_a^b \Big\{ \frac{1}{c} \int_0^c B_{mzr} dz + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [B_{mzr}] \cos Nz \Big\} r^m dr \\
&+ \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{m-1}(\xi_i r)}{\theta_{mi}^2} \Big\{ \frac{1}{c} \int_0^c H_{m-1} [B_{mzr}] dz + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} H_{m-1} C_n [A_{mzr}] \Big\} \\
&= \sum_{k=1}^2 \Big[(-1)^{k-1} \frac{2m}{b^{2m} - a^{2m}} \cdot \frac{r^{m-1}}{c} \frac{1}{4m(3\mu+\lambda)} \Big\{ a_k^{m+2} (\alpha_{mok} - \beta_{mok}) \\
&+ 2(\mu+\lambda) a_k^{m+1} A_{mok} + (4\mu m + 2(\mu+\lambda)) a_k^{m+1} B_{mok} + \lambda E_{mok} \\
&- \frac{\mu+\lambda}{\mu} \delta_{mok} + \lambda a_k^{m+2} (W_{mk_1} - W_{mk_2}) \Big\} + \frac{1}{(2\mu+\lambda)c} f_{ms}^{(k)}(r) \Big\{ \frac{1}{2} \beta_{mok} \\
&- \frac{2\mu+\lambda}{2\mu} \alpha_{mok} - (\mu+\lambda) \frac{m+1}{a_k} A_{mok} - (3\mu+\lambda) \frac{m-1}{a_k} B_{mok} - \frac{\lambda}{2} (W_{mk_1} - W_{mk_2}) \Big\} \\
&+ \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \Big\{ \frac{1}{2N} \chi_{ms}^{(k)}(Nr) \Big(\frac{\mu+\lambda}{\mu\lambda} \beta_{mnk} - \frac{1}{\mu} \alpha_{mnk} - \frac{m+1}{a_k} A_{mnk} \\
&- \frac{3(m-1)}{a_k} B_{mnk} - \frac{2\mu+\lambda}{\lambda} C_{mnk} \Big) - \frac{\mu+\lambda}{4\mu\lambda N} \omega_{ms}^{(k)}(Nr) (\beta_{mnk} - 2\mu C_{mnk}) \Big\} \\
&+ \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{m-1}(\xi_i r)}{\theta_{mi}^2} \Big\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{1}{\xi_i} \phi^{(k)}(\xi_i z) \Big(E_{mik} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda} (\gamma_{mik} + 3\delta_{mik}) \Big) \\
&- \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \frac{1}{\xi_i} (\phi^{(k)}(\xi_i z) - \phi^{(k)}(\xi_i \bar{z})) \Big(E_{mik} - \frac{1}{4\mu} (\gamma_{mik} + 3\delta_{mik}) \Big) \Big\} \\
&+ \frac{2m}{b^{2m} - a^{2m}} r^{m-1} \frac{(-1)^k}{2} \Big\{ f_1 \Big(\frac{z}{c} \Big) \Big(W_{mk_2} - \frac{1}{\mu} \delta'_{mk_2} \Big) - f_1 \Big(1 - \frac{z}{c} \Big) \\
&\Big(W_{mk_1} - \frac{1}{\mu} \delta'_{mk_1} \Big) \Big\} \Big] \Big] \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{ozr} &= \frac{r^{-1}}{\log b/a} \int_a^b \Big\{ \frac{1}{c} \int_0^c A_{ozr} dz + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} C_n [A_{ozr}] \cos Nz \Big\} dr \\
&+ \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_1(\xi_i r)}{\theta_{1i}^2} \Big\{ \frac{1}{c} \int_0^c H_1 [A_{ozr}] dz + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} H_1 C_n [A_{ozr}] \cos Nz \Big\} \\
&= \sum_{k=1}^2 \Big[\frac{1}{\log b/a} \frac{(-1)^{k-1}}{cr} \cdot \frac{1}{2(2\mu+\lambda)} \Big\{ -\frac{a_k^2}{4} \log \frac{a_k^3}{ab} \beta_{ook} + ((\mu+\lambda) \log \frac{a_k^2}{ab} \\
&+ 2\mu+\lambda) a_k A_{ook} + 2\lambda D_{ook} - \frac{2(\mu+\lambda)}{\mu} \gamma_{ook} + \frac{\lambda}{2} a_k (\log \frac{a_k^2}{ab} + 1) \Big\} \Big] \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left(\mathbf{W}_{ok_1} - \mathbf{W}_{ok_2} \right) \right\} + \frac{1}{2\mu + \lambda} \frac{1}{c} f_{op}^{(k)}(r) \left\{ \beta_{ook} + \frac{2\mu}{a_k} A_{ook} - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{W}_{ok_1} - \mathbf{W}_{ok_2}) \right\} \\
& + \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \cos Nz \left\{ \frac{1}{2N} \chi_{op}^{(k)}(Nr) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu\lambda} \beta_{onk} + \frac{2}{a_k} A_{onk} \right) - \frac{\mu + \lambda}{4\mu\lambda N} \omega_{op}^{(k)}(Nr) \beta_{onk} \right\} \\
& + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_1(\xi_i r)}{\Theta_{oi}^2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{1}{\xi_i} \phi^{(k)}(\xi_i z) \left(D_{oik} - \frac{2(\mu + \lambda)}{\mu\lambda} \gamma_{oik} \right) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \cdot \frac{1}{\xi_i} \right. \\
& \left. (\phi^{(k)}(\xi_i z) - \psi^{(k)}(\xi_i z)) \left(D_{oik} - \frac{1}{\mu} \gamma_{oik} \right) \right\} + \frac{r^{-1}}{\log b/a} \frac{(-1)^k}{2} \left\{ f_1\left(\frac{z}{c}\right) \left(\mathbf{W}_{ok_2} - \frac{2}{\mu} \gamma'_{ok_2} \right) \right. \\
& \left. - f_1\left(1 - \frac{z}{c}\right) \left(\mathbf{W}_{ok_1} - \frac{2}{\mu} \gamma'_{ok_1} \right) \right\} \left. \right\}, \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{4}{b^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_o(\xi_i r)}{\Theta_{oi}^2} \mathbf{H}_o \mathbf{C}_o \mathbf{S}_n[w] + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_m(\xi_i r)}{\Theta_{mi}^2} \right. \\
& \left. \cos m\theta \mathbf{H}_m \mathbf{C}_m \mathbf{S}_n[w] \right\} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e_m \cos m\theta \left[\frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \sin Nz \left\{ \frac{1}{N} G_m^{(k)}(Nr) \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{1}{\lambda} \beta_{mnk} - \frac{2}{a_k} A_{mnk} - \frac{2\mu + \lambda}{\lambda} C_{mnk} \right) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu\lambda N} F_m^{(k)}(Nr) (\beta_{mnk} - 2\mu C_{mnk}) \right\} \right. \\
& \left. + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_m(\xi_i r)}{\Theta_{mi}^2} \left\{ \frac{1}{\xi_i} Q^{(k)}(\xi_i z) \left(D_{mik} - E_{mik} - \frac{1}{\mu} (\gamma_{mik} - \delta_{mik}) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \frac{1}{\xi_i} p^{(k)}(\xi_i z) \left(D_{mik} - E_{mik} - \frac{\mu + \gamma}{2\mu^2} (\gamma_{mik} - \delta_{mik}) \right) \right\} \right. \\
& \left. + g_m^{(k)}(r) \left\{ \frac{z}{c} \mathbf{W}_{mk_1} + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \mathbf{W}_{mk_2} \right\} \right] \left. \right\}, \quad (25)
\end{aligned}$$

となる。ここで $a_1 = b$, $a_2 = a$, $a_0 = a$, $c_1 = c$, $c_2 = 0$ として

$$\left. \begin{aligned}
& \alpha_{mnk} = \alpha_{mnr}|_{r=a_k}, \quad \beta_{mnk} = \beta_{mnr}|_{r=a_k}, \quad A_{mnk} = A_{mnr}|_{r=a_k}, \\
& B_{mnk} = B_{mnr}|_{r=a_k}, \quad C_{mnk} = C_{mnr}|_{r=a_k}, \quad \mathbf{W}_{mkj} = \mathbf{C}_m[w]|_{r=a_k, z=c_j}
\end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$$\left. \begin{aligned}
& D_{mik} = \{ D_{miz}|_{z=0} + (-1)^{k-1} D_{miz}|_{z=c} \} / 2, \\
& E_{mik} = \{ E_{miz}|_{z=0} + (-1)^{k-1} E_{miz}|_{z=c} \} / 2, \\
& \gamma_{mik} = \{ \gamma_{miz}|_{z=0} + (-1)^{k-1} \gamma_{miz}|_{z=c} \} / 2, \\
& \delta_{mik} = \{ \delta_{miz}|_{z=0} + (-1)^{k-1} \delta_{miz}|_{z=c} \} / 2,
\end{aligned} \right\} \quad (e)$$

$$\left. \begin{aligned}
& D_{mok} = \int_a^b r^{2-m} \frac{\partial}{\partial z} A_{mzr}|_{z=c_k} dr, \quad E_{mok} = \int_a^b r^{2+m} \frac{\partial}{\partial z} B_{mzr}|_{z=c_k} dr, \\
& \gamma_{mok} = \int_a^b r^{2-m} T_{mzr}^a|_{z=c_k} dr, \quad \delta_{mok} = \int_a^b r^{2+m} T_{mzr}^b|_{z=c_k} dr, \\
& \gamma'_{mkj} = \int_a^b [r^{-m} T_{mzr}^a \cos Nz]_{z=c_j} dr, \quad \delta'_{mkj} = \int_a^b [r^m T_{mzr}^b \cos Nz]_{z=c_j} dr, \\
& D_{ook} = \int_a^b \frac{r^2}{4} \log \frac{r^2}{ab} \frac{\partial}{\partial z} A_{mzr}|_{z=c_k} dr, \quad \gamma_{ook} = \int_a^b \frac{r^2}{4} \log \frac{r^2}{ab} T_{ozr}^a|_{z=c_k} dr, \\
& \gamma'_{vki} = \int_a^b [T_{mzr}^a \cos Nz]_{z=c_j} dr,
\end{aligned} \right\} \quad (f)$$

とおいたものであり, $e_0 = 1/2$, $e_m = 1$ ($m \neq 0$) である。また

$$\Theta_{mi}^2 = \{H_{m+}(\xi_i b)\}^2 - \frac{a^2}{b^2} \{H_{m+1}(\xi_i a)\}^2 \quad (g)$$

である。式(22)~(25)中の α , β , ...などは境界の応力や変位の積分変換値で与えられる一種の積分定数で, 変位の適合条件や境界条件により決定されるものである。また各応力成分は Hooke の法則式(4)~(9)から求められる。

式(22)~(25)中の関数は Fourier 変換および Hankel 変換の逆変換により得られるもので結果のみを示せば次のようである。

$$G_m^{(k)}(Nr) = \frac{R_{mm}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{ms}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)},$$

$$F_m^{(k)}(Nr) = N[R_{mm}^{(k)}(Na_k)\{rR_{m-1,m}^{(k)}(Nr) - a_{k-1}R_{m,m+1}^{(k)}(Nr)\} \\ - R_{mm}^{(k)}(Nr)\{a_kR_{m-1,m}^{(k)}(Na_k) - a_{k-1}R_{m,m+1}^{(k)}(Na_k)\}]/\{R_{mm}^{(k)}(Na_k)\}^2,$$

$$\omega_{mp}^{(k)}(Nr) = N[R_{mm}^{(k)}(Na_k)\{rR_{mm}^{(k)}(Nr) - a_{k-1}R_{m+1,m+1}^{(k)}(Nr)\} - \\ - R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)\{a_kR_{m-1,m}^{(k)}(Na_k) - a_{k-1}R_{m,m+1}^{(k)}(Na_k)\}]/\{R_{mm}^{(k)}(Na_k)\}^2,$$

$$\omega_{ms}^{(k)}(Nr) = N[R_{mm}^{(k)}(Na_k)\{rR_{mm}^{(k)}(Nr) - a_{k-1}R_{m-1,m-1}^{(k)}(Nr)\} \\ - R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)\{a_kR_{m+1,m}^{(k)}(Na_k) - a_{k-1}R_{m,m-1}^{(k)}(Na_k)\}]/\{R_{mm}^{(k)}(Na_k)\}^2,$$

$$R_{i,j}^{(k)}(Nr) = I_i(Nr)K_j(Na_{k-1}) - (-1)^{i+j}I_j(Na_{k-1})K_i(Nr),$$

I, K は第 1 種および第 2 種の変形 Bessel 関数

$$g_m^{(k)}(r) = \frac{a^m b^m}{b^{2m} - a^{2m}} \left\{ \left(\frac{r}{a_{k-1}} \right)^m - \left(\frac{a_{k-1}}{r} \right)^m \right\},$$

$$f_{mp}^{(k)}(r) = \frac{a^m b^m}{b^{2m} - a^{2m}} \left\{ \frac{a_{k-1}}{2(m+1)} \left(\frac{r}{a_{k-1}} \right)^{m+1} - \frac{a_{k-1}}{2} \left(\frac{a_{k-1}}{r} \right)^{m-1} \right\} \\ + \frac{1}{r^{m+1}} \left[\frac{2ma^3 b^3 m}{(b^{2m} - a^{2m})^2} \left\{ \frac{a^2 - b^2}{4(m+1)} a_{k-1}^{-m} + \frac{a_{k-1}^m}{4(m+1)} (a^{-2m+2} - b^{-2m+2}) \right\} \right],$$

$$f_{ms}^{(k)}(r) = \frac{a^m b^m}{b^{2m} - a^{2m}} \left\{ \frac{a_{k-1}}{2} \left(\frac{r}{a_{k-1}} \right)^{m+1} + \frac{a_{k-1}}{2(m-1)} \left(\frac{a_{k-1}}{r} \right)^{m-1} \right\} \\ + r^{m-1} \left[\frac{2ma^m b^m}{(b^{2m} - a^{2m})^2} \left\{ \frac{a_{k-1}^{-m}}{4(m+1)} (a^{2m+2} - b^{2m+2}) + \frac{a_{k-1}^m}{4(m-1)} (a^2 \right. \right. \\ \left. \left. - b^2) \right\} \right], \quad f_1(z) = 1 - \frac{z}{C}$$

$$\phi^{(k)}(\xi_i z) = \frac{\sinh \xi_i(C-z) + (-1)^k \sinh \xi_i z}{\cosh \xi_i C - (-1)^k},$$

$$Q^{(k)}(\xi_i z) = \frac{\cosh \xi_i(C-z) - (-1)^k \cosh \xi_i z}{\cosh \xi_i C - (-1)^k},$$

$$\psi^{(k)}(\xi_i z) = \xi_i \frac{z \cosh \xi_i(C-z) + (-1)^k (C-z) \cosh \xi_i z}{\cosh \xi_i C - (-1)^k},$$

$$P^{(k)}(\xi_i z) = \xi_i \frac{z \sinh \xi_i (c-z) - (-1)^k (c-z) \sinh \xi_i z}{\cosh \xi_i c - (-1)^k}$$

5. 境界条件および適合条件

式(22)~(25)中の未知定数のうち、 A_{mn} 、 B_{mn} については、これらが円筒の外面および内面の変位を表わすものであるから次の条件を満足しなければならない。これは境界の状態に無関係に成立しなければならない。すなわち

$$\left. \begin{aligned} A_{mzr}|_{r=a_j} &= \frac{1}{C} A_{m0j} + \frac{2}{C} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mnj} \cos Nz \\ B_{mzr}|_{r=a_j} &= \frac{1}{C} B_{m0j} + \frac{2}{C} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mnj} \cos Nz \end{aligned} \right\} (j=1,2) \quad (26)$$

上式の左辺は式(22)および(23)で与えられる。

次に境界条件であるが、今図-2に示すように、外力の作用を円筒の $z=c/2$ に対して対称変形を生じさせるものと逆対称変形を生じさせるものとに分けて考えるものとすれば

a) $z=c/2$ に対して対称変形をなすとき

i) $z=0$ および $z=c$ において

$$\sigma_z|_{z=0} = \sigma_z|_{z=c} = p_1(r, \theta) \quad (27)$$

$$\tau_{z\theta}|_{z=0} = -\tau_{z\theta}|_{z=c} = q_1(r, \theta),$$

$$\tau_{zr}|_{z=0} = -\tau_{zr}|_{z=c} = q_2(r, \theta)$$

$$\therefore D_{mi1} = E_{mi1} = \gamma_{mi1} = \delta_{mi1} = \dots = 0 \quad (28)$$

$$\gamma_{mi2} = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} (q_1 \sin m\theta + q_2 \cos m\theta)$$

$$\cdot r H_{m+1}(\xi_i r) dr d\theta \quad (29)$$

$$\delta_{mi2} = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} (-q_1 \sin m\theta + q_2 \cos m\theta)$$

$$\cdot r H_{m-1}(\xi_i r) dr d\theta, \quad (30)$$

ii) $r=b$ において

$$\sigma_r|_{r=b} = p_2(\theta, z),$$

$$\therefore \beta_{mn1} = \int_0^c \int_0^{2\pi} p_2(\theta, z) \cos m\theta \cos Nz d\theta dz, \quad (31)$$

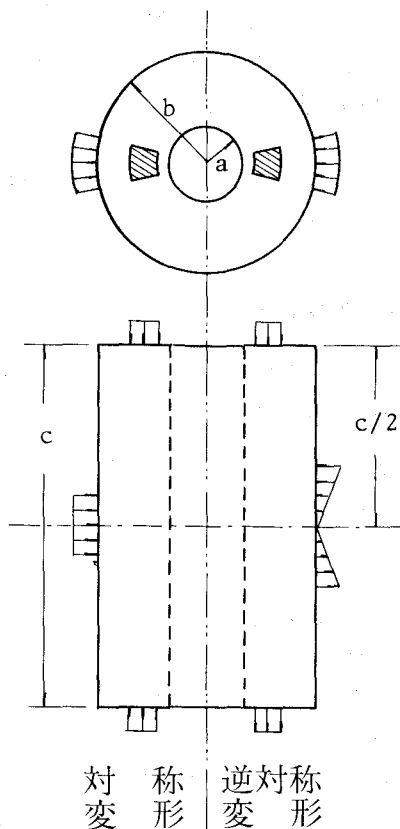


図-2 変形の状態の区分

$$\tau_{r\theta})_{r=b} = q_3(\theta, z), \quad \therefore \alpha_{mn1} = \int_0^{2\pi} \int_0^c q_3(\theta, z) \sin m\theta \cos Nz d\theta dz, \quad (32)$$

$$\tau_{rz})_{r=b} = q_4(\theta, z), \quad (33)$$

iii) $r=a$ において

$$\sigma_r)_{r=a} = p_3(\theta, z), \quad \therefore \beta_{mn2} = \int_0^{2\pi} \int_0^c p_3(\theta, z) \cos m\theta \cos Nz d\theta dz, \quad (34)$$

$$\tau_{r\theta})_{r=a} = q_5(\theta, z) \quad \therefore \alpha_{mn2} = \int_0^{2\pi} \int_0^c q_5(\theta, z) \sin m\theta \cos Nz d\theta dz, \quad (35)$$

$$\tau_{rz})_{r=a} = q_6(\theta, z), \quad (36)$$

ただし $p_1 \sim p_3, q_1 \sim q_6$ は各面に作用する直応力およびせん断応力である。

b) $z=c/2$ に対して逆対称変形をなすとき

i) $z=0$ および $z=c$ において

$$\sigma_z)_{z=0} = -\sigma_z)_{z=c} = p_1(r, \theta) \quad (37)$$

$$\tau_{zr})_{z=0} = \tau_{zr})_{z=c} = q_1(r, \theta), \quad \tau_{z\theta})_{z=0} = \tau_{z\theta})_{z=c} = q_2(r, \theta)$$

$$\therefore D_{mi2} = E_{mi2} = \gamma_{mi2} = \delta_{mi2} = \dots = 0 \quad (38)$$

$$\gamma_{mi1} = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} (q_1 \sin m\theta + q_2 \cos m\theta) r H_{m+1}(\xi_i r) dr d\theta \quad (39)$$

$$\delta_{mi1} = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} (-q_1 \sin m\theta + q_2 \cos m\theta) r H_{m-1}(\xi_i r) dr d\theta \quad (40)$$

ii) $r=b$ および $r=a$ において

この場合は外力の分布形状が $a)$ の場合と異なることを考慮すれば条件としては $a)$ の場合と全く同様である。

また D, E, γ, δ の間には式 (19) の関係が存在する。式 (28)~(32), (34), (35) によ、 $\gamma, \delta, \alpha, \beta$ は定まり、残りの A, B, C, E, W は式 (26), (27), (33), (36) から求めることとなる。

6. 数値解析例

以上の理論により、図一3のような外力が作用した場合の計算例を示す。この場合5で述べた境界条件において

$$p_1(r, \theta) = p_2(\theta, z) = 0$$

で、せん断外力 q は全て0である。従って、 α, γ, δ は全て0であり $B_{mn1} = 0, D_{mi1} = E_{mi1} = 0, D_{mi2} = -E_{mi2}$ となる。また $p_3(\theta, z)$ は円周方向には等分布する軸対称内圧を考えるものとし、軸方向に図に示すような部分分布外力とすれば

$$p_3(\theta, z) = \begin{cases} p_0, & c_1 - c_0 < z < c_1 + c_0, \\ & c - c_1 - c_0 < z < c - c_1 + c_0 \\ 0, & z < c_1 - c_0, \quad c_1 + c_0 < z < c - c_1 - c_0, \\ & c - c_1 + c_0 < z \end{cases}$$

となる。式(34)から

$$\beta_{mnz} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{c_1-c_0}^{c_1+c_0} p_0 \cos Nz dz + \int_{c-c_1-c_0}^{c-c_1+c_0} p_0 \cos Nz dz \right\} d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{N} \left\{ 1 + (-1)^n \right\} p_0 \cos Nc_1 \sin Nc_0, (\text{for } m=0) \quad (41)$$

他の未知定数は前述のように式(26), (27), (33), (36)から求めることになるが、詳しい式はここでは省略する。

まず初めに柴原らの結果と比較するためポアソン比 $\nu=0.3$ $b/a=4.0$, $c/a=8.0$ の円筒で軸対称外力が円筒内面中央部に作用する場合の解析を行なった。この計算に用いた級数項は i は 15 項, n については偶数項のみ 15 項である。結果を図-4 に示す。図-4(a)(b)とも実線は著者らの計算結果を示し、点線は柴原らの結果を示している。(a)は σ_r を比較したものであるが両者はかなり一致している。(b)は σ_z を示したものであるが両者の間にはかなりの差がみられる。特に $r=a$ においてその差は著しい。すなわち著者らの結果では $z/a=4$ で $\sigma_z/\rho_0 \approx 0.4$ か。

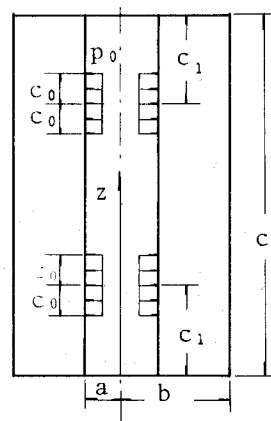
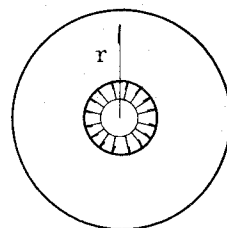


図-3 荷重状態

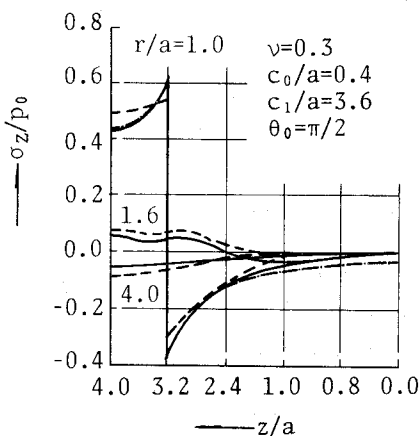
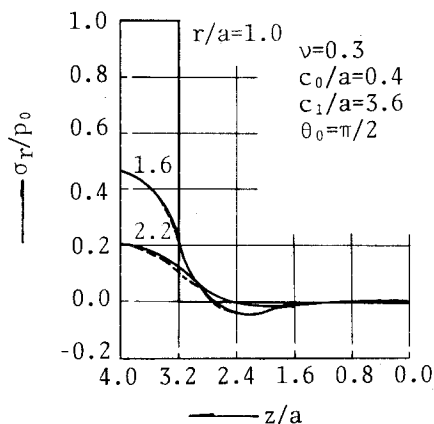


図-4 柴原らの結果との比較

ら、 z が中央から離れるに従い増加し $z/a = 3.2 + \epsilon$ で $\sigma_z/p_0 \doteq 0.6$ となり、この点で大きな不連続性を示し、 $z/a = 3.2 - \epsilon$ (ϵ はごく小さな値) で $\sigma_z/p_0 \doteq -0.4$ となり z の減少に従い σ_z も 0 に近づいている。これに対し柴原らの結果は傾向として著者らの値に一致するものの数値的にはかなり異なる。特 $z/a = 3.2$ で示す不連続値が $0.8 p_0$ 位で小さな値となっている。著者らの理論によれば、境界条件式において、 $n \rightarrow \infty$ としたとき、未知定数に含まれる荷重項の影響は、それぞれについて最低次のもののみを示せば

$$A_{mn1} \approx B_{mn1} \approx C_{mn1} \approx 0$$

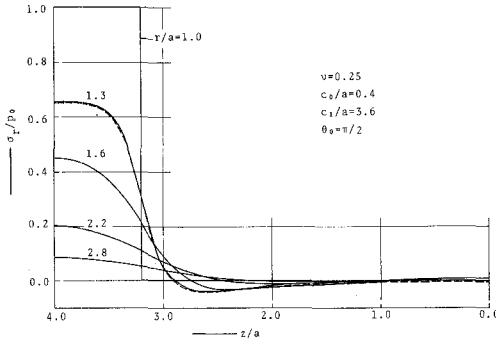
$$A_{mn2} = B_{mn2} \approx -\frac{\mu + \lambda}{4\mu\lambda N} \beta_{mn2}, \quad C_{mn2} \approx \frac{1}{2(\mu + \lambda)} \beta_{mn2}$$

となる。これから σ_z に及ぼす荷重項の影響を検討すれば

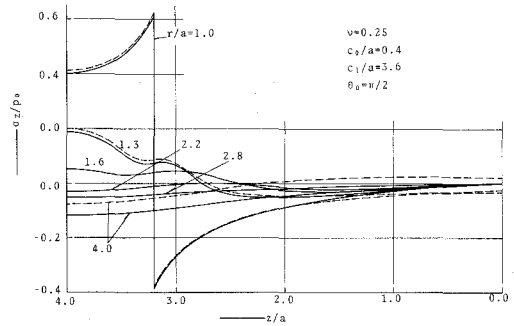
$$\sigma_z)_{r=a} = \sum_n \beta_{mn2} \cos Nz + \sigma_z \text{ red} = p_3(\theta, z) + \sigma_z \text{ red.}$$

と表わせる。従って σ_z は $z/a = 3.2$ において外力と同様の不連続性を示さなければならず、柴原らの結果は問題がある。このようなことは σ_θ にも起り、著者らの理論では σ_θ は $z/a = 3.2$ の不連続量は $\lambda/(\mu + \lambda)$ であるが柴原らの値はやはり小さな値となっている。以上の理由また後の例で示すように無限円筒としての値との比較などから著者らの理論は妥当なものと思う。

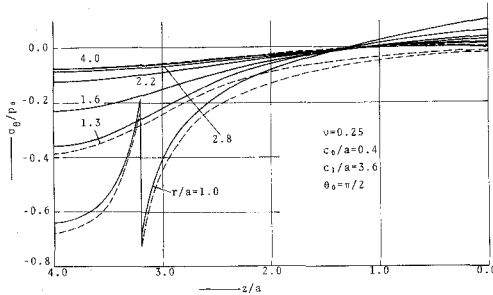
次にポアソン比 $\nu = 0.25$, $b/a = 4.0$, $c/a = 8.0$ として外力を円筒内面の中央部および両端



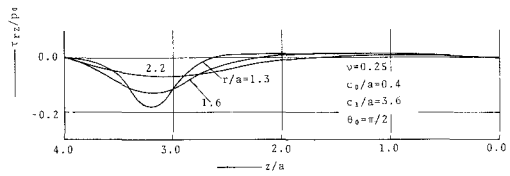
図一五 σ_r の z 方向の分布 ($C_1/a = 3.6$)



図一七 σ_z の z 方向の分布 ($C_1/a = 3.6$)



図一六 σ_θ の z 方向の分布 ($C_1/a = 3.6$)



図一八 τ_{rz} の z 方向の分布 ($C_1/a = 3.6$)

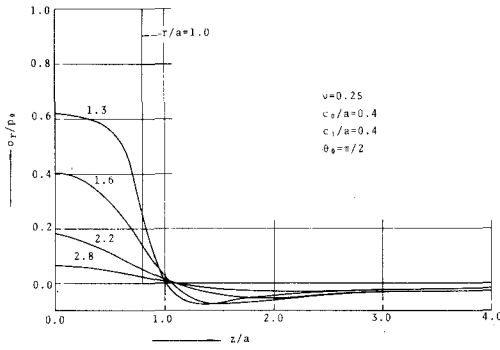


図-9 σ_r のz方向の分布 ($C_1/a=0.4$)

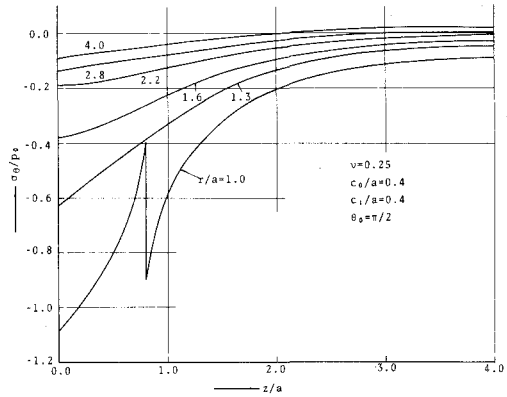


図-10 σ_θ のz方向の分布 ($C_1/a=0.4$)

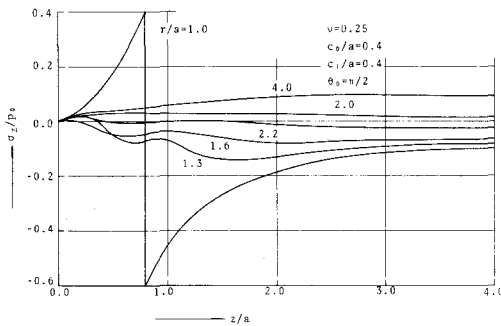


図-11 σ_z のz方向の分布 ($C_1/a=0.4$)

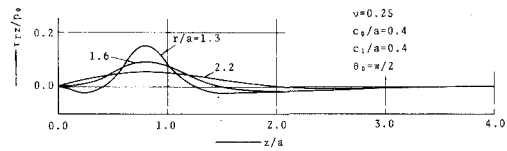


図-12 τ_{rz} のz方向の分布 ($C_1/a=0.4$)

部に作用させた場合の計算を行なって得た結果を図-5~12に示す。これらの計算では級数項は $i=30$, n は偶数項のみ 30 項まで集めた。外力を中央部分に作用させた場合の結果に対しては、無限円筒の内面に同様の外力が作用した場合の結果も合せて点線で示した (図-5~8)。図-5は σ_r の分布を示したものであるが無限円筒と比較したとき $z/a=0$ 付近では当然多少異なるものの他の部分ではかなりよく一致している。 σ_θ, σ_z の分布を図-6, 7に示しているが、これらの応力は無限円筒と比べれば全体としてわずかに異なり特に $z/a=0$ ではかなり異なる。しかし分布の傾向としては両者同様である。 τ_{rz} は図-8に示してあるが、有限円筒の値と無限円筒の値はほとんど一致している。 σ_r, τ_{rz} は円筒外面における条件が有限円筒も無限円筒も同様であるため従って全体としても一致してくるが、 σ_θ, σ_z は $z=0$ および $z=c$ の影響が大きく有限円筒と無限円筒は一致はしない。しかし外力の作用中に比較して有限円筒の長さが長いいためそれほど大きな違いはない。このことから著者らの理論の正当性が明らかである。

図-9~12は両端部に外力を作用させた場合である。この結果、外力の作用位置を中心に考えれば、 σ_r (図-9), τ_{rz} (図-12) は中央部分に外力を作用させた場合と比較して、各断面とも多少小さな値となっているが傾向は非常によく似ている。 σ_θ (図-10) は内面において $z=0$ で $-1.085 p_0$ と作用外力とは逆符号の大きな値となり z の増加に従って急激に減少し $z/a=0.8+\epsilon$ で再び大きな値を示している。 σ_z の分布は図-11に示したがこれも中央に外力を作用さ

せた場合とかなり異なった分布をしている。この場合 $z=0$ で $\sigma_z=0$ であるから、 $r=a$ では z の増加とともに σ_z も増加し $z/a=0.8-\varepsilon$ で $\sigma_z \doteq 0.4p_0$ となり、 $z/a=0.8+\varepsilon$ で $\sigma_z \doteq -0.6p_0$ となっている。この σ_z の分布は、円孔を有する半無限体の円孔面上端部に軸対称内圧が作用するときの σ_z の分布に非常に良く似ている。

7. む す び

有限円筒の非軸対称 3 次元応力問題の一般解を有限 Fourier-Hankel 変換を用いて求め、任意の境界条件に適用可能な形に一部修正した解を示した。この解は積分変換による解の特徴として、積分定数が各境界の変位や応力の積分変換値で与えられ、境界条件の取扱いが容易になる。

数値解析は、軸対称内圧が作用した場合について行ない、円筒中央部に内圧が作用したものについては、無限円筒としてえられる値や、別な方法で解析している柴原らの結果と比較検討を行なった。なお本計算は北海道大学大型計算機センターの FACOM-M-230-75 で行なったものである。

終りに本論文は、桶田謙一氏の室蘭工業大学卒業論文に依るところが多い。また本論文の作成にあたり、本研究室の教務職員田中功氏並びに技術員渡部良和氏の御助力を得た。記して深く感謝の意を表します。

(昭和 52 年 5 月 21 日受理)

参考文献

- 1) 松岡健一・能町純雄：土木学会論文報告集 **241**, 1 (1975)
- 2) 松岡健一・能町純雄：室工大研報 **8**, 611 (1975)
- 3) 松岡健一・能町純雄：室工大研報 **9**, 169 (1976)
- 4) 松岡健一・能町純雄：土木学会論文報告集 **229**, 11 (1974)
- 5) 松岡健一・能町純雄・杉田修一：土木学会北海道支部論文報告集 **33**, 85 (1977)
- 6) Matsuoka, K. G. S. G. Nomachi: THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, **22**, 199 (1974)
- 7) 柴原正雄・尾田十八：日本機械学会論文集 **34**, 388 (1968)
- 8) 奥村 勇：土木学会北海道支部論文報告集 **31**, 261 (1975)