

軸対称鈍頭物体を過ぎる微粒子を含む気体の超音速流に対する一数值解析法

著者	杉山 弘
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	10
号	5
ページ	675-686
発行年	1983-11-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/3746

軸対称鈍頭物体を過ぎる微粒子を含む気体の 超音速流に対する一数值解析法

杉 山 弘

A Numerical Method for Gas-Particle Supersonic Flow past Axisymmetric Blunt Bodies

Hiromu Sugiyama

Abstract

A numerical method (inverse method) was developed for gas-particle supersonic flow past axisymmetric blunt bodies. This method is based on two transformations (von Mises and an additional one), which are convenient for determining the shock layer flow fields and the body shapes.

In using the present method, the pure gas flow field around a sphere was first solved numerically for the freestream Mach number $M_\infty=2.0$. This was found to be in very good agreement with the result of Van Dyke and Gordon. Then the gas-solid particle flow in the shock layer around blunt bodies (nearly spheres) was solved for the freestream Mach number $M_\infty=2.0$, with particle diameter $\bar{d}_p=2\mu\text{m}$ and freestream loading ratios $\alpha=0, 0.2, 0.5$ and 1.0 , respectively. The effect of freestream loading ratio on the shock stand-off distance, the body surface pressure and the flow quantities along the stagnation streamline is shown.

1. ま え が き

微粒子（固体粒子あるいは液滴）を含む高速気流の研究は、例えば、固体推進を用いたロケット・ノズル内の流れ、銃道内の衝撃波伝ば、微粒子を含む大気中を飛行する物体まわりの流れの問題等と関連し、近年多く研究されている^{1) 2)}。このような混相流においては、気体の流れは、気体と粒子の間に生じる抗力と熱伝達による干渉の結果、微粒子を含まないいわゆる純粋気体の場合の流れとは様相がかなり異なってくる。

本研究では、鈍頭物体を過ぎる微粒子を含む超音速気流を取扱うが、これに関連する研究としては Chang³⁾の研究がある。彼は、大気（エアロゾル）中を飛行する放物体まわりの流れ（飛

行マッハ数 $M_\infty=10^4$ を調べ、衝撃層内の流れに及ぼす一様流の loading ratio (粒子相の質量流量/気相の質量流量) の影響を初めて明らかにした。

さて、著者は、以前に、微粒子を含まない純粋気体の超音速流中に置かれた物体まわりの流れに対する数値解析法を展開した^{4) 5)}。この方法は、予め衝撃波の形状を与え、その背後の流れと物体形状を求める逆解法 (inverse method) である。本報告では、この方法を、微粒子を含む超音速気流の場合に拡張した結果について述べる。また、具体的な数値計算例も示される。

2. 基礎方程式

衝撃層内の微粒子を含む気体の運動を定式化するために、次の仮定がなされる⁶⁾。

- (1) 粒子の占める体積は非常に小さいので、個々の粒子間の衝突は無視される。
- (2) 気体と粒子の間の干渉は、気体と粒子の間の抗力と両相間の熱伝達のみである。
- (3) 粒子は、一様な大きさの球である。
- (4) 粒子の数は非常に大きいので、粒子相は連続体として取扱われる。

本報告では、諸量の上の符号 (―) は有次元量を、この符号のない場合には、無次元量を意味するとする。 u, v は x, r 方向の速度成分 (図1)、 ρ, T, P は気体の密度、温度、圧力を、 u_p, v_p, ρ_p, T_p は対応する粒子相の値をそれぞれ意味する。粒子相の密度 ρ_p は、 $\rho_p = \bar{\rho}_p / \bar{\rho}_\infty = \bar{n} \cdot \bar{m} / \bar{\rho}_\infty$ である。ここに \bar{n} は単位体積当りの粒子数、 \bar{m} は粒子1個の質量である。すべての長さは衝撃波の先端の曲率半径 \bar{R}_s で、速度は一様流の速度 \bar{U}_∞ で、密度は一様流中の気体の密度 $\bar{\rho}_\infty$ で、圧力は $\bar{\rho}_\infty \bar{U}_\infty^2$ で、温度は $\bar{U}_\infty^2 / \bar{C}_p$ で無次元化される。ここに、 \bar{C}_p は気体の定圧比熱である。

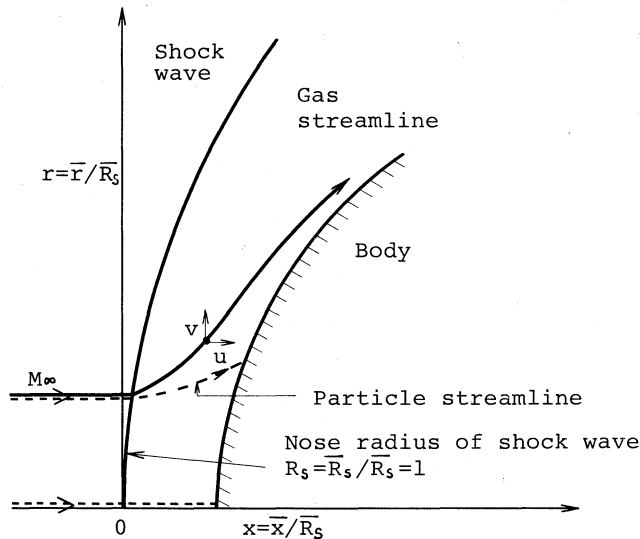


図1 円筒座標系 (x, r)

上述の仮定の下では、微粒子を含む気体の定常、軸対称流に対する基礎方程式は次のようになる^{3) 6)}。気相に対しては、

$$\text{連続の式: } \frac{\partial}{\partial x}(r\rho u) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{運動量の式: } \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_{px} \quad (2.2)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + F_{pr} \quad (2.3)$$

$$\text{エネルギーの式: } \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial r} - u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial r} = Q_p + (u_p - u)F_{px} + (v_p - v)F_{pr} \quad (2.4)$$

$$\text{状態方程式: } P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho T \quad (2.5)$$

粒子相に対しては、

$$\text{連続の式: } \frac{\partial}{\partial x}(r\rho_p u_p) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho_p v_p) = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{運動量の式: } \rho_p u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + \rho_p v_p \frac{\partial u_p}{\partial r} = -F_{px} \quad (2.7)$$

$$\rho_p u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + \rho_p v_p \frac{\partial v_p}{\partial r} = -F_{pr} \quad (2.8)$$

$$\text{エネルギーの式: } \rho_p u_p c_s \frac{\partial T_p}{\partial x} + \rho_p v_p c_s \frac{\partial T_p}{\partial r} = -Q_p \quad (2.9)$$

ここに、 c_s は粒子物質の比熱である。 F_{px} 、 F_{pr} は、粒子による単位体積の気体に作用する力(抗力)の x 、 r 方向成分である。 Q_p は、粒子から気体に伝達される熱量である。式(2.4)より、気体(相)の温度 T は、両相間の熱交換と粒子が気体中を通過する際に気体になす仕事により変化することが分る。また、式(2.9)より、粒子の温度 T_p は両相間の熱伝達のみによって変化することが分る。

式(2.2)と(2.3)より、

$$\rho \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\frac{u^2 + v^2}{2} \right] = -u \frac{\partial p}{\partial x} - v \frac{\partial p}{\partial r} + u F_{px} + v F_{pr} \quad (2.10)$$

同様に、式(2.7)と(2.8)より、

$$\rho_p \left[u_p \frac{\partial}{\partial x} + v_p \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[\frac{u_p^2 + v_p^2}{2} \right] = -u_p F_{px} - v_p F_{pr} \quad (2.11)$$

この式より、粒子の運動エネルギーは、抗力による仕事によってのみ変わることが分る。

前述の抗力 F_{px} 、 F_{pr} は次式

$$F_{px} = n \frac{1}{8} (\pi d_p^2) C_D \rho W (u_p - u) \quad (2.12)$$

$$F_{pr} = n \frac{1}{8} (\pi d_p^2) C_D \rho W (v_p - v) \quad (2.13)$$

によって与えられる。ここに、 W は気体と粒子の間の相対速度で、 $W = [(u - u_p)^2 + (v - v_p)^2]^{\frac{1}{2}}$ である。 n は単位体積中に含まれる粒子数で、 d_p は粒子の直径で、 C_D は抗力係数である。現在のところ、微粒子を含む気流中の抗力係数はよく分っていないが¹⁾、ここでは次式⁷⁾

$$C_D = 0.48 + 28/R_e^{0.85} \quad (2.14)$$

のように仮定しよう。ここに、 R_e は \bar{W} と \bar{d}_p に基づいたレイノルズ数、すなわち $R_e = \bar{\rho} \cdot \bar{W} \cdot \bar{d}_p / \bar{\mu}$ である。

気体と粒子の間の熱伝達は、次式⁸⁾

$$Q_p = n N_u \pi d_p k (T_p - T) \quad (2.15)$$

で与えられる。ここに、 Pr はプラントル数であり、 $Pr = \bar{\mu} \bar{c}_p / \bar{k}$ である。 \bar{k} は気体の熱伝導係数である。 Nu はヌセルト数で、これは次式のように与えた。

$$Nu = 2.0 + 0.6 Pr^{\frac{1}{3}} Re^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

気体の粘性係数は、本解析では、次式

$$\bar{\mu} = 1.71 \times 10^{-4} \times \left[\frac{\bar{T}}{273} \right]^{0.77} \text{ poise} \quad (2.17)$$

で与えた。

3. 流線関数座標系 (Ψ, Y) での運動方程式

まず、気相および粒子相に対する流れ関数 $\Psi(x, r)$ および $\Psi_p(x, r)$ 、すなわち

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = r \rho u, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -r \rho v \quad (3.1 \text{ a, b})$$

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial r} = r \rho_p u_p, \quad \frac{\partial \Psi_p}{\partial x} = -r \rho_p v_p \quad (3.2 \text{ a, b})$$

を導入しよう。これらは、連続の式(2.1)と(2.6)を自動的に満す。次に、von Mises 変換を適用し⁹⁾、円筒座標系 (x, r) での流れの基礎方程式を流れ関数座標系 (Ψ, Y) でのそれに変換しよう。ここに、 $Y = r$ である。すると、変換演算子は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \Psi_x \frac{\partial}{\partial \Psi} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial Y} + \Psi_r \frac{\partial}{\partial \Psi} \quad (3.4)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r} = v \frac{\partial}{\partial Y} \quad (3.5)$$

となる^{4) 5)}。逆変換を行うと、

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} = \frac{\partial x}{\partial \Psi} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.7)$$

が得られる。式(3.5)と(3.6), および式(3.3)と(3.7)を比較すると、

$$\frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{u}{v} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Psi} = -\frac{1}{r\rho v} \quad (3.9)$$

が得られる。式(3.3) - (3.5)を用いると、基礎方程式(2.1) - (2.9)は次のようになる。気相に対しては、

$$\Psi_x \frac{\partial u}{\partial \Psi} + \Psi_r \frac{\partial v}{\partial \Psi} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial Y} + \frac{v}{Y} = 0 \quad (3.10)$$

$$\rho v \frac{\partial u}{\partial Y} = -\Psi_x \frac{\partial p}{\partial \Psi} + F_{px} \quad (3.11)$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial Y} - \Psi_r \frac{\partial p}{\partial \Psi} + F_{pr} \quad (3.12)$$

$$\rho v c_p \frac{\partial T}{\partial Y} - v \frac{\partial p}{\partial Y} = Q_p + (u_p - u)F_{px} + (v_p - v)F_{pr} \quad (3.13)$$

$$P = \frac{r-1}{r} \rho T \quad (3.14)$$

粒子相に対しては、

$$\Psi_x \frac{\partial u_p}{\partial \Psi} + \frac{\partial v_p}{\partial Y} + \Psi_r \frac{\partial v_p}{\partial \Psi} + \frac{1}{\rho_p} \{u_p \Psi_x + v_p \Psi_r\} \frac{\partial \rho_p}{\partial \Psi} + \frac{v_p}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial Y} + \frac{v_p}{Y} = 0 \quad (3.15)$$

$$\rho_p (u_p \Psi_x + v_p \Psi_r) \frac{\partial u_p}{\partial \Psi} + \rho_p v_p \frac{\partial u_p}{\partial Y} = -F_{px} \quad (3.16)$$

$$\rho_p (u_p \Psi_x + v_p \Psi_r) \frac{\partial v_p}{\partial \Psi} + \rho_p v_p \frac{\partial v_p}{\partial Y} = -F_{pr} \quad (3.17)$$

$$\rho_p (u_p \Psi_x + v_p \Psi_r) c_s \frac{\partial T_p}{\partial \Psi} + \rho_p v_p c_s \frac{\partial T_p}{\partial Y} = -Q_p \quad (3.18)$$

が得られる。

4. 規格化された流線関数座標系 (ξ, η) での運動方程式

衝撃層内の微粒子を含む気体の流れを逆解法 (inverse method), すなわち衝撃波の形状を予め与え, その背後の流れと物体形状を求める方法で解析しよう。

衝撃波前方の一樣流における両相の流れ関数を、

$$\Psi = \frac{r^2}{2}, \quad \Psi_p = \frac{r^2}{2} \quad (4.1), (4.2)$$

と選ぼう。衝撃層内の流れの解析を容易にするために、独立変数を次のように

$$\xi = \frac{Y^2}{2}, \quad \eta = \frac{2\Psi}{Y^2} \quad (4.3), (4.4)$$

と選ぶ。すると、この座標系 (ξ, η) では、衝撃波面と物体表面は、それぞれ $\eta = 1.0$ と 0 に対応する。変換演算子は、式 (4.3) と (4.4) より

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Psi} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.6)$$

となる。純粋気体の場合の解析⁴⁾ にならって、従属変数を v, v_p から V, V_p , すなわち

$$V = \frac{v}{Y}, \quad V_p = \frac{v_p}{Y} \quad (4.7), (4.8)$$

に変換しよう。すると、支配方程式 (3.10) - (3.18) は次のようになる。気相に対しては、

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\eta}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{\xi}{\rho} \left\{ \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{\rho} \quad (4.9)$$

$$\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \eta} = \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{F_{px}}{2\rho V} \quad (4.10)$$

$$\eta \frac{\partial V}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \xi \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{2\rho V} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{V}{2} - \frac{F_{pr}}{\sqrt{2\xi}} \frac{1}{2\rho V} \quad (4.11)$$

$$\eta c_p \frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \xi c_p \frac{\partial T}{\partial \xi} - \xi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{Q_p}{2\rho V} - \frac{u_p - u}{2\rho V} F_{px} - \frac{V_p - V}{2\rho V} F_{pr} \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad (4.13)$$

粒子相に対しては、

$$\frac{\partial u_p}{\partial \eta} - 2\xi \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial V_p}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_p} \left\{ u_p - 2\xi V_p \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \frac{\partial \rho_p}{\partial \eta} = \frac{\xi}{\rho} \left\{ \frac{1}{V} \frac{\partial V_p}{\partial \xi} + \frac{V_p}{V} \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{V_p}{V} \quad (4.14)$$

$$\rho_p \left\{ u_p - 2\xi V_p \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \frac{\partial u_p}{\partial \eta} = \xi \frac{\rho_p V_p}{\rho V} \frac{\partial u_p}{\partial \xi} + \frac{F_{px}}{2\rho V} \quad (4.15)$$

$$\rho_p \left\{ u_p - 2\xi V_p \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} \frac{\partial V_p}{\partial \eta} = \xi \frac{\rho_p V_p}{\rho V} \frac{\partial V_p}{\partial \xi} + \frac{\rho_p V_p}{\rho V} \frac{V_p}{2} + \frac{F_{pr}}{\sqrt{2\xi}} \frac{1}{2\rho V} \quad (4.16)$$

$$\rho_p \left\{ u_p - 2\xi V_p \frac{\partial x}{\partial \xi} \right\} C_s \frac{\partial T_p}{\partial \eta} = \xi \frac{\rho_p V_p}{\rho V} C_s \frac{\partial T_p}{\partial \xi} + \frac{Q_p}{2\rho V} \quad (4.17)$$

また、式 (3.9) は

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\rho V} \quad (4.18)$$

となる。なお、上述の方程式系を導く際、次の関係式

$$\frac{\psi_x}{\xi} = -2\rho V \quad (4.19)$$

$$\frac{\psi_r Y - Y^2 \eta}{\xi} = 2(\rho u - \eta) = 4\rho V \xi \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (4.20)$$

が使用された。

以上で最終的に解くべき方程式は整った。すなわち、未知数 $x, u, V, \rho, T, p, u_p, V_p, \rho_p$ および T_p の10個に対し、解くべき方程式は、式 (4.9) - (4.18) の10式である。

5. 初期条件

衝撃波直後の流れの諸量は、気体に対しては、通常の跳びの条件 (Rankine-Hugoniot の関係式)、粒子に対しては、凍結の条件、すなわち、衝撃波直後の粒子相の諸量は、衝撃波直前のそれと等しいとする条件、より求まるとする。

衝撃波の形状を

$$x = S(r) \quad (5.1)$$

とすると、衝撃波直後の諸量は、気体に対しては、

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 - \frac{1-\varepsilon}{N^2}, \quad V = \frac{1-\varepsilon}{N^2} \frac{S_r}{r}, \quad \rho = \frac{1}{\varepsilon} \\ P &= \frac{1}{r M_\infty^2} + \frac{1-\varepsilon}{N^2}, \quad T = \frac{r}{r-1} \frac{P}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

となり、粒子に対しては、

$$\left. \begin{aligned} u_p &= 1, \quad V_p = 0, \quad \rho_p = \alpha \\ T_p &= \frac{r}{r-1} \frac{1}{M_\infty^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

となる。ここに、

$$\varepsilon = \frac{r-1}{r+1} + \frac{2}{r+1} \frac{N^2}{M_\infty^2}, \quad N^2 = 1 + S_r^2$$

であり, r , M_∞ , および α は, 気体の比熱比, 凍結音速に基づいた一様流のマッハ数 (凍結マッハ数), および一様流の loading ratio である。

なお, 衝撃波前方の平衡流れにおける微粒子を含む気体の比熱比 r_e と平衡マッハ数 M_e は

$$\alpha_e = \frac{r + \alpha \cdot \beta}{1 + \alpha \cdot \beta}, \quad M_e = M_\infty \sqrt{\frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha\beta)}{1 + \alpha\beta/r}} \quad (5.4), (5.5)$$

となる。ここに, β は両相の比熱の比, $\beta = C_s/C_v$ である。

6. 数値計算法

前述の支配方程式 (4.9) - (4.18) は, 衝撃波直後 ($\eta = 1.0$) の点から, 物体表面 ($\eta = 0$) 上まで, 積分進行法 (forward integration method)¹⁰⁾ によって数値的に解かれる。

数値計算の手順は次のようになる。

1. 式 (5.2), (5.3) を使って, $\eta = 1$ 面で初期値 $f^{(m)}$ を計算する。ここに, $f^{(m)}$ は任意の流れの諸量である。
2. 数値微分によって, $f^{(m)}$ の ξ に関する微分 $f_\xi^{(m)}$ を計算する (ここでは, Lagrange の 5 点微分公式が使われた)。
3. 支配方程式 (4.9) - (4.18) から $f^{(m)}$ の η に関する微分 $f_\eta^{(m)}$ を計算する。
4. η の次の小さな値 ($\eta - \Delta\eta$) における $f^{(m+1)}$ を次式

$$f^{(m+1)} = f^{(m)} - \Delta\eta \cdot f_\eta^{(m)} \quad (6.1)$$

より計算する。

5. ステップ 2 と同様に $f_\xi^{(m+1)}$ を計算する。
6. ステップ 3 と同様に $f_\eta^{(m+1)}$ を計算する。
7. f_η の平均値を使って $f^{(m+1)}$ を次式

$$f^{(m+1)} = f^{(m)} - \frac{\Delta\eta}{2} \{ f_\eta^{(m)} + f_\eta^{(m+1)} \} \quad (6.2)$$

より再び計算する。

8. η の次の小さな値に対し, ステップ 2 から 7 を繰り返す。この操作を $\eta = 0$ まで行う。きざみ巾として, $\Delta\xi = 0.005, 0.01, \Delta\eta = 0.1, 0.2$ が採られた。数値計算は, トロント大学航空宇宙研究所 (UTIAS) の電子計算機 IBM 1130 を使用して行われた。

7. 数値計算例

7.1 純粋気体の場合

本数值計算結果の妥当性を調べるために、最初に、微粒子を含まない、いわゆる純粋気体の超音速流中に置かれた鈍頭物体（球）まわりの流れが解かれた。

滑らかな鈍頭物体前方の衝撃波形状は、次式

$$r^2 = 2\bar{R}_s \bar{x} - B_s \bar{x}^2 \tag{7.1a}$$

すなわち

$$r^2 = 2x - B_s x^2 \tag{7.1b}$$

によって記述されよう¹⁰⁾。ここに、 \bar{R}_s は衝撃波先端の曲率半径で、 B_s は bluntness で、 $r = \bar{r}/\bar{R}_s$ 、 $x = \bar{x}/\bar{R}_s$ である。

与えられた衝撃波形状（7.1）に対応する物体形状は、次式

$$r^2 = 2\bar{R}_b (\bar{x} - \bar{d}) - B_b (\bar{x} - \bar{d})^2 \tag{7.2a}$$

すなわち

$$r^2 = 2R_b (x - d) - B_b (x - d)^2 \tag{7.2b}$$

によって記述されよう^{10) 11)}。ここに、 $R_b = \bar{R}_b/\bar{R}_s$ は物体の無次元曲率半径で、 B_b は物体の bluntness で、 $d = \bar{d}/\bar{R}_s$ は無次元衝撃波離脱距離である。

図2に、一様流マッハ数 $M_\infty = 2$ の場合の、仮定された衝撃波形状 ($B_s = -0.06$) と計算で求めた物体形状 (球)、音速線および流線を示す。比較のために、Van Dyke-Gordon¹⁰⁾の数值計算結果も示される。本計算で求めた物体形状および音速線は、Van Dyke-Gordon のそれとよく一致する。

物体（球）表面上の圧力分布を図4 ($\alpha = 0$ の場合) に示す。本計算結果は、よどみ点近くの領域では Van Dyke-Gordon のそれとよく一致するが、物体上の音速点の近くでは Van Dyke-Gordon の結果と少しずれてくる傾向を示す。

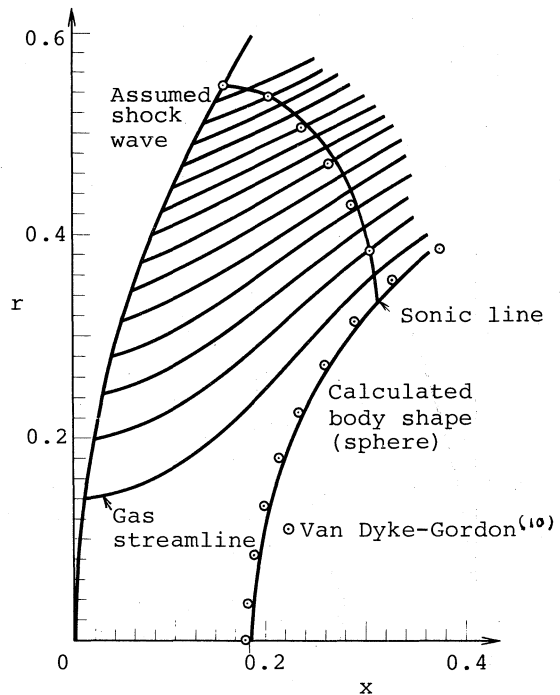


図2 球のまわりの衝撃波、音速線および流線 (純粋気体の場合、 $M_\infty = 2$, $r = 1.4$)

7.2 微粒子を含む気体の場合

微粒子を含む気体として、ガラス球 ($\bar{\rho}_s=2.5 \text{ g/cm}^3$) を含む空気 ($\gamma=1.4$, ガス定数 $\bar{R}=287 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$) が選ばれた。衝撃波形状は、微粒子を含む場合も、式 (7.1) で与えられると仮定した。具体的に数値計算は、次のような条件、

衝撃波前方の気体の温度: $\bar{T}_\infty=300 \text{ K}$

衝撃波前方の気体の圧力: $\bar{P}_\infty=101.3 \text{ kPa}$

一様流のマッハ数: $M_\infty=2$

基準長さ (衝撃波先端の曲率半径): $\bar{R}_s=1 \text{ cm}$

粒子の直径: $\bar{d}_p=2 \mu\text{m}$

粒子の比熱: $C_s=C_v$ (C_v は気体の定積比熱)

一様流における loading ratio: $\alpha=0, 0.2, 0.5, 1.0$ で行われた。

図3に、仮定された衝撃波形状 ($B_s=-0.06$) と計算で求めた物体形状を示す。衝撃波離脱距離は、一様流の loading ratio α とともに減小することが分る。

図4に、図3に示す物体の表面圧力 P_b を示す。 P_b は α とともに増大する。

図5に、岐点流線に沿う気体の速度 u と温度 T および粒子の速度 u_p と温度 T_p の変化を示す。図から分るように、気体の速度は物体上でゼロとなっているが、粒子の速度は有限である。すなわち、粒子は有限の速度で物体に衝突していることが分る。両相の速度および温度は等しくない。すなわち、本衝撃層内の流れは速度、温度に関し、非平衡状態にあることが分る。

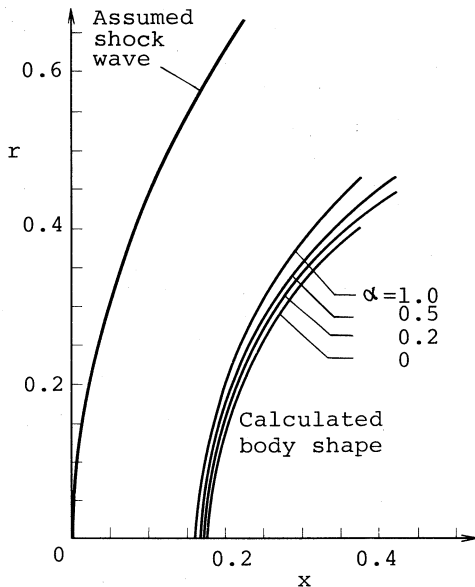


図3 仮定された衝撃波形状と計算で求めた物体形状

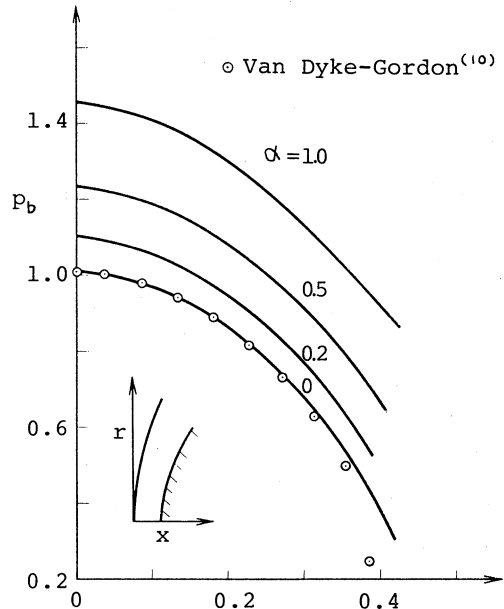


図4 物体表面の圧力分布 P_b

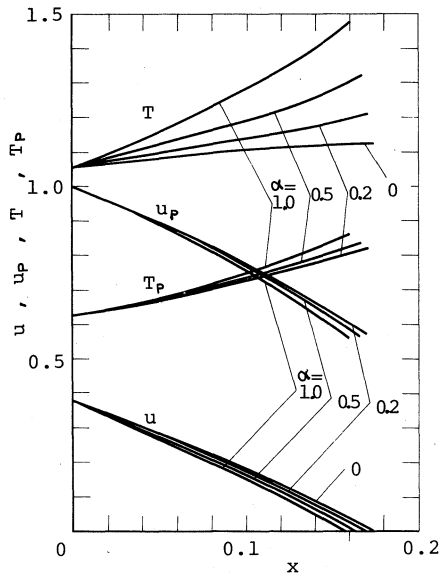


図5 岐点流線に沿う気体および粒子の速度と温度の変化

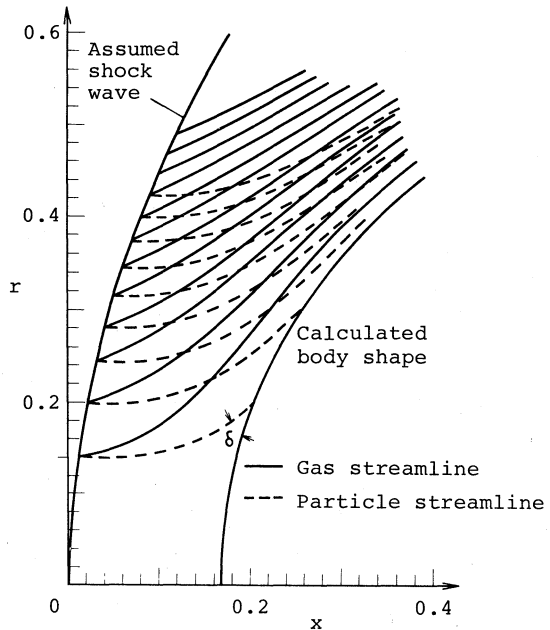


図6 衝撃層内の気体および粒子の流線

図6に、衝撃層内の気体と粒子の流線を示す。粒子は、衝撃波直後では直進するが、物体に近づくにつれて転向し、衝撃角 δ (図6に示す) で物体に衝突することが分る。

8. ま と め

軸対称物体を過ぎる微粒子を含む気体の超音速流に対する一数值解析法(逆解法)が展開された。この解析法の特徴は、衝撃層内の解析に便利な流線関数座標系と規格化された流線関数座標系を採用している点にある。

続いて、本解析法を用いて、一様流マッハ数 $M_\infty=2$ の純粋気体の超音速流中に置かれた球まわりの流れが解かれた。この結果は、Van Dyke-Gordon¹⁰⁾ の計算結果とよく一致することが示された。次に、鈍頭物体(球に近い)まわりの固体微粒子(ガラス球)を含む空気の流れが、一様流マッハ数 $M_\infty=2$ 、粒子径 $\bar{d}_p=2\mu\text{m}$ の場合に対して解かれた。その結果、衝撃波離脱距離、物体表面圧力分布および岐点流線に沿う流れの諸量に及ぼす一様流の loading ratio α の影響が明らかにされた。

本研究の一部は、著者が文部省在外研究員として、トロント大学航空宇宙研究所(UTIAS)に滞在している間(昭和56年9月~昭和57年8月)になされたものである。本研究を進めるに当たり、有益な示唆を与えられた、また本研究結果に対し熱心に議論していただいた UTIAS

の I. I. Glass 教授に深く謝意を表します。また、在外研究員の機会を与えて下さった関係者各位、いろいろ支援していただいた本学の教職員の皆様および機械系学科の皆様に謝意を表します。
(昭和58年5月19日 受理)

文 献

- 1) Rudinger, G., *Fundamentals of Gas-Particle Flow* (Elsevier, Amsterdam, 1980).
- 2) 高野・小林, 日本航空宇宙学会誌, **30**-342, p. 370 (昭57).
- 3) Chang, S. S-H., *Physics of Fluids*, **18**-4, p. 446 (1975).
- 4) 本田・杉山, 東北大学高速力学研究所報告, **36**-348, p. 89 (昭50).
- 5) Sugiyama, H., *Bulletin of the JSME*, **20**-144, p. 711 (1977).
- 6) Marble, F. E., *Dynamics of Dusty Gases*, "Annual Review of Fluid Mechanics", Vol. 2 (Annual Reviews, Palo Alto., Cal., 1970).
- 7) Gilbert, M., et al., *Jet Propulsion*, Vol 25, p. 26 (1955).
- 8) Knudsen, J. G. and Katz, D. L., *Fluid Dynamics and Heat Transfer* (McGraw-Hill, New York. 1958).
- 9) von Mises, R., *ZAMM* **7**, p. 425 (1927).
- 10) Van Dyke, M. D. and Gordon, H. D., *NASA Tech. Rep. R-1* (1959).
- 11) Hamilton, H. H. II, *NASA Tech. Paper 1154* (1978).