

グラフの変化過程

その他（別言語等） のタイトル	A Graph Stochastic Process
著者	山口 忠
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	42
ページ	95-101
発行年	1992-11
URL	http://hdl.handle.net/10258/593

グラフの変化過程

山口 忠

A Graph Stochastic Process

Tadasi YAMAGUCHI

Abstract

The graph G_{t+1} is defined recursively from G_t by some stochastic rules. We call this sequence $\{G_t\}$ a graph stochastic process.

The rules are described in the following two cases:

(1) an edge is chosen at random, and then its destination is changed at random, (2) some edges are cut with a probability and some edges occur between some vertices pairs with the same probability. In both cases, the processes are characterized by finite Markov chains. In this paper, the way of deriving these transition matrices is reported.

1. はじめに

グラフ・ネットワークが何等かの要因でその構造を変えたり、時間的経過に伴って変化したりすることがある。例えば、通信網・道路網は初めは比較的単純な構造をしていたものが社会・経済・時間的要因でその構造を変える。一方、グラフ論では、グラフの性質を調べるために、グラフに変化を与え、その性質がどう変わるかをみることがある(グラフの丈夫さ、辺・頂点の除去によるグラフ的緒性質の変化)。しかし、グラフを単純に変化過程の対象とみでの研究は多くはない。例えば、対象を木グラフに限定した議論ではあるが組織構造の変化過程の研究はその代表であろう¹⁾。又、小集団における均衡過程の研究²⁾もこの範疇とみなせるが、変化の要因をグラフの均衡化におき、グラフの構造の変化自身を扱っているわけではない。

本報告では、グラフの頂点の増減はないものとし、2つの場合に分けて議論する。まず、(1) 辺の数の増減も無い場合の変化を考える。この仮定のもとでの辺の変化として基本的なものは、辺の交換、辺の付け換えなどがあるが、辺の交換は辺の付け換えの合成とみなせる。ここでは、ランダムな辺の付け換えを扱う。(2) 次に、グラフのいくつかの辺がランダムに切れ、辺の無かったいくつかの頂点对にランダムに辺が生ずるようなケースを扱う。いずれの場合も、ランダムな辺の変化のもとでのグラフの変化はマルコフ連鎖としてモデル化でき、その推移確率の決め方について述べる。

2. 辺の数が一定の場合⁴⁾

2.1 モデルの設定と推移確率

無向グラフ（以下，単にグラフという）を $G = (V, E)$ で表わす。 V は頂点集合， E は辺集合である。頂点 u, v 間の辺は (u, v) で表わす。頂点数 n ， 辺の数 m のグラフ全体を $G(n, m)$ で表わす。グラフに関する用語・概念は文献3) に従う。

定義1. 辺の付け換え $F(u; v, w)$ とは， $E - (u, v) + (u, w)$ 但し， $(u, v) \in E, (u, w) \notin E$ 。この操作を単に F とも記す。グラフ G の頂点 u, v, w に操作 F を施した結果のグラフを $F(u; v, w)(G)$ 又は単に $F(G)$ と記す。この操作（頂点は必ずしも同じではない）を k 回適用した結果を $F^k(G)$ で表わす。 $F^0(G) = G$ とする。

命題1. 任意の $G, H \in G(n, m)$ に対して， $H = F^k(G)$ なる整数 $k \geq 0$ が存在する。即ち， ある k と $(u_i, v_i, w_i) (i = 1, 2, \dots, k)$ が存在して， $H = F(u_k; v_k, w_k) \dots F(u_2; v_2, w_2) F(u_1; v_1, w_1)(G)$ である。

証明：グラフ G, H の頂点に各々適当にラベルをふり， その隣接行列を M_G, M_H とする。 M_G と M_H のハミング距離， 即ち， M_G と M_H の異なる成分の個数を $d(M_G, M_H)$ で表わす。 $d = d(M_G, M_H) = 2k'$ とする。 $k' = 0$ ならば， G と H は等しい。 $k' \geq 1$ とする。 $(u, v) \in E_G \setminus E_H, (w, z) \in E_H \setminus E_G$ なる辺が存在する。ここで， E_G, E_H はグラフ G, H の辺集合である。(1) $u = w$ のとき；このときは $v \neq z$ 。 $F(u; v, z)(G)$ を G' とすると， $d(M_{G'}, M_H) = 2(k' - 1)$ を得る。(2) $u \neq w$ のとき； $v = z$ なら， 上と同様。 $v \neq z$ とする。(イ) $(u, w) \in E_G$ の場合： (u, v) を (u, w) に換え， (w, u) を (w, z) に換える。即ち， $F(w; u, z)F(u; v, w)(G)$ を G' とすると $d(M_{G'}, M_H) = 2(k' - 1)$ を得る。(ロ) $(u, w) \in E_G$ の場合： (w, u) を (w, z) に， (u, v) を (u, w) に換える。即ち， $F(u; v, w)F(w; u, z)(G)$ を G' とすると $d(M_{G'}, M_H) = 2(k' - 1)$ を得る。いずれの場合も対称差の2減少したグラフを得る。この手続きを繰り返して H と対称差が0のグラフを得る。□

定義2. $G_0 \in G(n, m)$ に対して， $G_{t+1} = F(G_t) (t = 0, 1, 2, \dots)$ で与えられる系列 $\{G_t\}$ をグラフ変化過程という。

定義3. (グラフ変化過程にランダム性の導入) 操作 F を次の様に解釈する：グラフ G の1つの頂点 u をランダムに， 即ち， 等確率で選ぶ。次に， その頂点 u に付随する辺 (u, v) を1つランダムに選ぶ。更に， この u に隣接していない頂点 w をやはりランダムに選び辺 (u, w) を加える。即ち， $H = F(u; v, w)(G)$ とする。但し， 上で， (u, v) または (u, w) が存在しなければ， $H = G$ とする。

命題2. 与えられたグラフ G に対して， 定義3で得られるグラフを H とすると， G から H への推移確率は次式で与えられる：

$$\sum (n \cdot r(u))^{-1}$$

但し， $r(u) = d(u) \cdot (n - 1 - d(u)) (0 < d(u) < n - 1), = 1 (d(u) = 0 \text{ 又は } n - 1)$ で与えられる。

グラフの変化過程

$d(u)$ は u の次数である。和は、 $F(u;v,w)(G) = H$ なる $v,w \in V$ の存在する u についてとる。

証明：任意の頂点 u が選ばれる確率は $1/n$ である。その u に対して、 $F(u;v,w)(G) = H$ なる $v,w \in V$ の存在するとき、 v,w の選ばれる確率は $1/r(u)$ である。従って、1組の u,v,w の選ばれる確率は $1/(n \cdot r(u))$ となる。 u の次数が 0 又は $n-1$ のときは G に変化はないので、 $F(u)(G) = G$ であることに注意して、 $F(u;v,w)(G) = H$ となる u について上で得た確率を加えれば上式を得る。□

命題 3. 頂点数 n ，辺数 m のグラフのクラス $G(n,m)$ を番号づけし、 p_{ij} を、命題 2 によって決まるグラフ G_i からグラフ G_j への推移確率とする。このとき、グラフ変化過程 $\{G_t\}$ は $[p_{ij}]$ を推移行列とするマルコフ連鎖になる。

従って、マルコフ連鎖の知識をかりて種々のことが導きだせる。例えば、命題 1 と合わせて、次の命題を得る。

命題 4. グラフ変化過程 $\{G_t\}$ はエルゴード連鎖である。

エルゴード連鎖は定常分布を持つことから、過程 $\{G_t\}$ において、どのグラフがどの程度観察されるかなどの知識が得られる。これらのことを例を通じて説明する。

2.2. 例題

$G(5,3)$ でのグラフ変化過程を例示する。 $G(5,3)$ のクラスのグラフは図 1 の 4 個である。例として、 G_2 からの推移確率を求める。 G_2 から G_1 への推移は表 1 にあるように 2 通りで、確率 p_{21} は $1/20 + 1/20 = 1/10$ である。 G_2 から G_2 への推移は 7 通りで、確率 p_{22} は $2/15 + 4/20 + 1/5 = 8/15$ である。以下同様にして、図 2 のような推移図を得る。

ちなみに、推移行列 $P = [p_{ij}]$ より、 $xP = x$ なる定常分布を求めると、 $x = (1/12, 1/2, 1/6, 1/4)$ を得る。即ち、 G_2 が最もよく観察され、 G_1 はその $1/6$ 程度である、等のことがわかる。

表 1 G_2 からの推移

u	v	w	G_j	$1/(n \cdot r(u))$
1	2	3	G_3	1/15
1	2	4	G_2	
1	2	5	G_4	
2	1	4	G_1	1/20
2	1	5	G_2	
2	3	4	G_2	
2	3	5	G_4	
3	2	1	G_2	1/20
3	2	5	G_4	
3	4	1	G_1	
3	4	5	G_2	
4	3	1	G_2	1/15
4	3	2	G_3	
4	3	5	G_4	
5			G_2	1/5

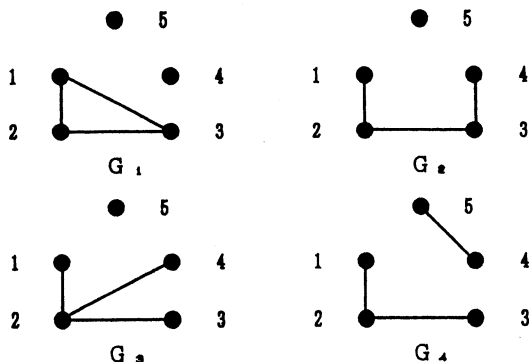


図1 G(5,3)のグラフ

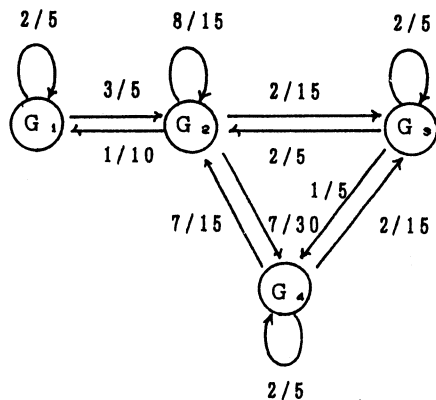


図2 G(5,3)の推移図

3. 辺の数に増減のある場合^{5, 6)}

3.1 モデルの設定

辺の無い点对を補辺ということにする（辺の無い点对は補グラフの辺であるから）。各辺、各補辺がある離散時間（一定）ごとに、そのままの状態（辺は辺のまま、補辺は補辺のまま）か、辺から補辺に、あるいは、補辺から辺にある確率で変化するとし、この確率は、点对によらず一定 p とする。即ち、

$$p = \Pr(\text{辺} \rightarrow \text{補辺}) = \Pr(\text{補辺} \rightarrow \text{辺}), \quad q = 1 - p = \Pr(\text{辺} \rightarrow \text{辺}) = \Pr(\text{補辺} \rightarrow \text{補辺}).$$

この辺、補辺の確率ルールから、グラフをラベルなしグラフとみるとき（即ち、頂点を区別しない）、あるグラフがあるグラフへ変化する確率がどう表わされるかを調べたい。

3.2 ラベルなしのグラフの変化確率

例えば、図3のような変化を考える。この変化は、長さ2のパスと1個の孤立点をもつグラフ G から長さ1のパスと2個の孤立点をもつグラフ G' へ変化している。この素過程は、 G をラベルつきグラフと考えこれが確率的に ${}_4C_2$ 個の G' に対応するラベルつきグラフへの変化過程である。具体的にこの確率を求めてみる： G の2個の辺うちの1つが補

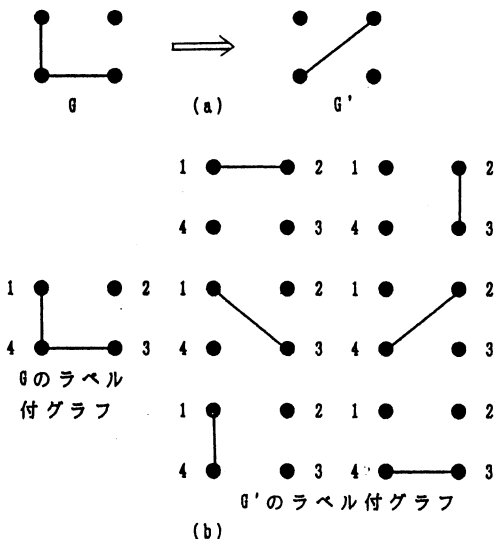


図3 説明図

辺に変化したという事象の確率は $2pq^5$, G の 2 個の辺が共に補辺に変わり, G の 4 個の補辺の 1 つが辺に変化するという事象の確率は $4p^3q^3$ である。従って, $\Pr(G \rightarrow G') = 2pq^5 + 4p^3q^3$ となる。

同様に, 一般の場合を考える。 n 点ラベルなしグラフの全体を $G(n)$ で表わす。

$G, G' \in G(n)$ について, $\Pr(G \rightarrow G')$ の決定, およびその性質を調べる。

1) G の頂点に $1 \sim n$ の番号を付し固定する。

2) G' のラベルつきグラフを $G'_1, G'_2, G'_3, \dots, G'_s$ とする。以下, グラフ G, G'_i の辺集合も同じ G, G'_i で表わすことにする。

3) 各 G'_i に対して, 次のように置く: $a_i = |G \setminus G'_i|$, $b_i = |G'_i \setminus G|$ 。

但し, $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$ 。

このとき, 次のことが成立する:

命題 5 G から G' への推移確率は次式で与えられる:

$$\Pr(G \rightarrow G') = \sum_i p^{a_i+b_i} q^{e-(a_i+b_i)}; e = {}_n C_2 = n(n-1)/2$$

証明: G から G'_i への変化を考える。 $a_i = |G \setminus G'_i|$ 個の辺が補辺に変わり, この確率は p^{a_i} , $b_i = |G'_i \setminus G|$ 個の補辺が辺に変わり, この確率は q^{b_i} である。その他の $(e - (a_i + b_i))$ 個の辺および補辺は今までの状態のまま, この確率は, $q^{e-(a_i+b_i)}$ である。

従って, $\Pr(G \rightarrow G'_i) = p^{a_i+b_i} q^{e-(a_i+b_i)}$. (*)

グラフ G'_i について加えて, 上式を得る。□

例題: 3点グラフ $G(3)$ (図 4) 間の推移確率を求める。例えば, G_2 から G_3 への推移は図 5 の様になる。従って, $\Pr(G_2 \rightarrow G_3) = pq^2 + p^3 + pq^2 = 2pq^2 + p^3$ となる。他のグラフ間も同様に求めて, 推移行列は図 6 となる。

一般の $G(n)$ についての推移確率を求めるには, 命題 5 の式を用いざるをえず, 計算が煩雑になるが, 次の命題により, 推移行列の約 4 分の 1 だけを求めればよいことになり, 計算の手間はやゝ軽減される。

命題 6 $\Pr(G \rightarrow G') = f(p, q)$ とおくと,

$$\Pr(G \rightarrow \bar{G}') = f(q, p)$$

$$\Pr(\bar{G} \rightarrow G') = f(q, p)$$

但し, \bar{G} は G の補グラフを表わす。

証明: 第 1 式について示す。 G の頂点に $1 \sim n$ の番号を付し固定する。 G' のラベルつきグラフを $G'_1, G'_2, G'_3, \dots, G'_s$ とする。

$\Pr(G \rightarrow \bar{G}')$ を求める。 G と各 G'_i, \bar{G}'_i との関係に着目すると,

点対の全体 = $E \cup \bar{E} = (G \setminus G'_i) + (G'_i \setminus G) + (G \setminus \bar{G}'_i) + (\bar{G}'_i \setminus G)$ (直和)。

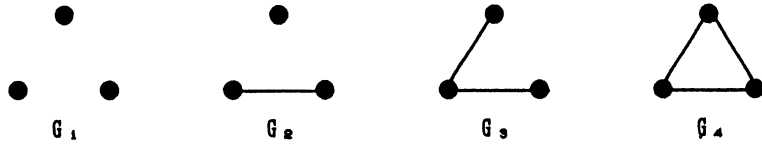


図4 G(3)のグラフ

 G_2	 G_{31}	 G_{32}	 G_{33}
	$a_1=0, b_1=1$	$a_2=1, b_2=2$	$a_3=0, b_3=1$

図5 G_2 から G_3 への変化

右辺の各項の位数を、それぞれ a_i, b_i, c_i, d_i で表わすと、 G から \bar{G}' への確率は、

$$\begin{aligned} \Pr(G \rightarrow \bar{G}') &= p^{c_i + d_i} q^{e - (c_i + d_i)} \\ &= p^{e - (a_i + b_i)} q^{a_i + b_i}. \end{aligned}$$

これは、(*) 式で、 p と q を交換した項になっている。従って、

$$\Pr(G \rightarrow \bar{G}') = \sum_i \Pr(G \rightarrow \bar{G}'_i) = f(q, p) \text{ が成り立つ。} \square$$

この命題は図6でいうと、左上の 2×2 のブロックが決まると残りの成分は p と q の交換して計算した結果から決まることを主張している。

3.3 定常分布

以上で、ここで扱うグラフ過程の推移確率行列の求め方を得た。この行列から種々の性質を引き出せるが、定常分布に関しては、この素過程に戻って、次のことを得る：

命題7 定常分布は、各ラベルなしグラフに対応するラベルつきグラフの個数にのみ依存し、変化確率 p によらない。

証明： n 点ラベルつきグラフの全体集合上で考える。その個数は 2^e である。但し、 $e = n(n-1)/2$ 。任意のラベルつきグラフ G'_i を考える。変化する点対の集合 T を1つ決めると、変化後のグラフ G'_j が定まり、逆にこの G'_j とこの T が与えられると、 G'_i がただ1つ定まる。 $p = \Pr(\text{辺} \rightarrow \text{補辺})$

	G_1	G_2	G_3	G_4
G_1	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3
G_2	pq^2	$q^3 + 2p^2q$	$2pq^2 + p^3$	p^2q
G_3	p^2q	$2pq^2 + p^3$	$q^3 + 2p^2q$	pq^2
G_4	p^3	$3p^2q$	$3pq^2$	q^3

図6 推移確率行列

$= \Pr(\text{補辺} \rightarrow \text{辺})$ より, T 内の点対が変化し, 他の点対が変化しない確率は, T 内の点対が辺か補辺かによらないため, 推移確率は $q_{ij} = q_{ji} = p^t q^{e-t}$, $t = |T|$. 即ち, 推移確率行列 Q は対称になる. このとき, 平衡方程式 $\pi Q = \pi$, $\sum \pi_i = 1$ において, Q が対称より, Q の行和, 列和が 1 になる. 従って, $\pi_i = 2^{-e} = \text{一定}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^e$) が解になる. ラベルなしグラフ G_i の定常確率 w_i は, G_i に対応するラベルつきグラフ G'_j ($j = 1, 2, \dots, s_i$) の定常確率の総和であり, $w_i = s_i / 2^e$ となる. \square

例えば, $G(4)$ の場合, $w = (1/64)[1, 6, 3, 12, 4, 12, 4, 12, 3, 6, 1]$ となる. ここで, 成分は図 7 のグラフの順である.

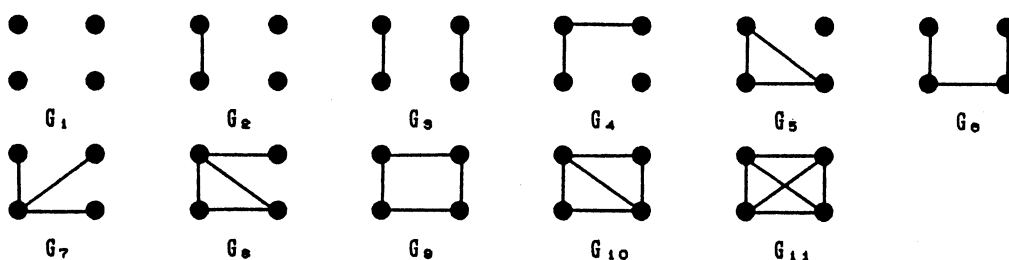


図 7 $G(4)$ のグラフ

4. むすび

本報告では, グラフの変化を把握する試みとして, 辺の付け換えおよび辺と補辺の変化という単純な確率モデルを導入した. そのとき, このグラフ変化過程はマルコフ連鎖として定式化ができ, 辺および辺・補辺の変化確率からグラフ間の推移確率を求める方法を得た. また, 辺・補辺の変化過程についてその定常確率は辺の変化確率によらないことを得た. この変化過程は, 例えば, 符号グラフ過程²⁾への応用などが考えられる. 今後, 他の操作の導入 (例えば, 頂点数の変化するもの), グラフ文法との関係, 具体的問題への適用, など考察を進めたい.

謝辞 命題 7 の証明は, 北大・工 栗原正仁氏のご教示による. 記して感謝します.

参 考 文 献

- 1) L. A. Tenenbaum : Investigation of One Class of Graph-Dynamic System, Automation and Remote Control,(1978)
- 2) C. Flament : グラフ理論と社会構造, 紀伊国屋, (1963)
- 3) F. Harary : グラフ理論(池田訳, 共立)(1968)
- 4) 山口 : グラフの変化過程, 平成元年電気関係学会北海道支部連合大会, (1989)
- 5) 山口 : グラフの辺変化過程, 1990年電子情報通信学会春季全国大会, (1990)
- 6) 山口 : グラフの辺の変化による推移確率, 1991年電子情報通信学会春季全国大会, (1991)