

数学教育における正負の数の指導について

その他（別言語等） のタイトル	Positive and negative numbers in the education of mathematics
著者	山口 格
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	45
ページ	43-55
発行年	1995-11-10
URL	http://hdl.handle.net/10258/610

数学教育における正負の数の指導について

山 口 格

Positive and negative numbers in the education of mathematics

by Kaku Yamaguchi

Abstract

The set of vectors on a line is a vector space of dimension 1. This vector space is a model of positive and negative numbers.

We study a method of education of mathematics on the positive and negative numbers.

1. はじめに

中学校における正負の数の指導には様々な方法が用いられている。現行の教科書ではどれも、温度で正負の数の導入をしている。民間教育団体の実践では多様な量の実例を用いることが多い。例えば財産を正の数、借金を負の数と考えることがある。この場合、財産2万円に借金3万円の時、合せて借金1万円を

$$(+2) + (-3) = (-1)$$

と表わしてわかりやすいのである。しかしこのやり方では

$$(-2) \times (-3) = (+6)$$

の説明に困難がある。乗法の意味づけ、特に負の数をかけることの意味が説明しにくい。他の量、例えば海拔、海面下の深度、最初の位置とそこからの変化の量等、正負の数を表わすもの、量は多様である。これらの量はたしかに正負の数の母胎ではあるが、これらの量を個別に考えると、単独では正負の数のモデルとしては不十分なものが多い。温度を例にとると加法ができない。それに -273.15°C 以下がない。そこでこれまでの実践プランの中には、正負の数の導入や演算の学習の節目節目に、その学習すべき内容にふさわしい量の例を個々に用いて、さまざまな量から抽象したものとして正負の数の概念をまとめようとしたものがある。^{1), 2)} もし出来ることなら1つの量のモデルで導入から演算までを通して教えることが教師の希望であらう。

数学の側から見ると正負の数の導入には少くとも2つの立場がある。1つは整数または有理数のレベルでの対称化（半群を群にすること）である。もう1つはベクトル空間の導入として考えてみる立場である。これまでの実践はほとんど前者の立場に意識するかどうかは別として立っているようである。

本稿は学問としての数学を教えるという立場³⁾から見て、後者の立場に立って、単一の量モデルで押し通す新しい実践の例を提出するものである。

2. 対称化について

一般に集合Aにおける算法を次のように定義する。AとAの直積 $A \times A$ を考え、 $A \times A$ からAへの写像 α をAにおける1つの算法という。 $A \times A$ の元 (x, y) の α による像を、 $x \alpha y$ と書く。また $A \times A \times A$ の任意の元 (x, y, z) に対して

$$(x \alpha y) \alpha z = x \alpha (y \alpha z) \quad (1)$$

となるならば、 α は結合的という。(1)のことを結合法則という。算法 α の与えられた集合Aを $(A; \alpha)$ と書く。Aにいくつかの算法 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の与えられた場合も考えられる。このようにいくつかの算法の与えられた集合のことを代数系という。代数系 $(A; \alpha)$ が結合的なとき、結合系または半群という。 $(A; \alpha)$ が $A \times A$ の任意の元 (x, y) に対し

$$x \alpha y = y \alpha x \quad (2)$$

をみたしているとき、 α は可換な算法であるといい、(2)を α についての可換法則とよんである。自然数全体の集合をNで表す。

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Nに0を付加した集合を \bar{N} で表すとき、 $(N; +)$, $(N; \times)$, $(\bar{N}; +)$, $(\bar{N}; \times)$ はいずれも半群である。そしてこれらはいずれも(2)をみたしているので可換結合系または可換半群とよぶ。小学校で学ぶ自然数の演算のなかに減法というものがある。例えば $2 - 3$ は自然数でないから、減法は $N \times N$ からNへの写像になっていない。減法はしたがってNにおける算法になっていないのである。一般に代数系 $(A; \alpha)$ でAの元eが算法 α の単位元であるとは、Aのすべての元xに対し、 $e \alpha x = x \alpha e = x$ となることである。単位元は存在すればそれは一意的に定まる。単位元をもつ半群を単位的半群という。 $(N; +)$ は単位的ではないが、 $(\bar{N}; +)$ は単位的な可換半群である。

単位的半群 $(A; \alpha)$ において、Aの元xに対して、 $x' \alpha x = x \alpha x' = e$ （単位元）となる元 x' が存在すれば、 x' はxの逆元または対称元という。xの逆元が存在すれば、xは可逆であるという。単位元eはいつも可逆であって、その逆元もeである。 $(\bar{N}; +)$ では、単位元0のみが可逆元である。

単位的半群で、そのすべての元が可逆であるようなものを群という。 $(\bar{N}; +)$ は単位的可換半

群であるが、0以外の元は可逆でないから群ではない。 \bar{N} の元1, 2, 3…等の逆元となるべき、 $-1, -2, -3$ …等を付加して可換群にすれば、整数全体の集合 Z を得る。逆元を対称元ともよぶことからこの \bar{N} から Z を作ることを対称化といっている。数学教育（中学校での）における負の数の導入はこの対称化に相当することとも考えられる。しかし実際は単位的可換半群 $(\bar{N}; +)$ の対称化だけで話がすむわけではない。自然数の演算は加法だけでなく、乗法も扱われている。そうすると半群ではなく、半環を考える必要がある。もう一つ順序構造も考えに入れねばならない。そうすると順序半環を順序環に対称化することを考えねばならない。しかし現実には小学校や中学校で行なわれている数学教育ではこのような代数系の枠組みにとらわれず、たとえば $\frac{1}{2} \times (-3)$ などが中学校で扱われることからわかるように、整数の環をはみだして教授がなされている。したがってこれまでの数学教育の理論的枠組みは実数体を教えれば良いと、意識することもあまりなかったが、考えられているようである。そのことは、例えば自然数の乗法を教える小学校2年では、(1あたり量) \times (いくつ分) という形でかけ算の導入が行なわれることが多いことからいえる。1あたり量というのは内包量⁵⁾で分離量よりもむしろ連続量すなわち分数、小数の世界にふさわしいのである。それが自然数の乗法で登場するというのは、自然数の演算を実数の演算のレベルで考えているからなのである。だから「わかるさんすう2」の解説では次のように述べられている。⁵⁾

「数年前まで、教科書では、かけ算を $2 + 2 + 2 = 2 \times 3$ のように同じ数を何回か加えるたし算(累加)の簡単なやり方として導入していました。ところが、この考え方だと $\times 1, \times 0, \times$ 小数、 \times 分数の説明がつかなくなって、すぐにゆきづまってしまい、意味の切り換えを必要としました。

そこで、倍という概念をもち出し、「2個の3つ分を、2個の3倍といい、 2×3 と書きます。 2×3 の答えは、 $2 + 2 + 2$ で求められます」のように、「倍」を前面に押し出し、累加は答を求める手段に後退させました。しかし、倍による導入法も、1倍($\times 1$) 0倍($\times 0$)ということを理解させるのがむずかしいとか、倍は操作、つまり関数ですから、それを2年生にいきなり教えることは困難であるなどの欠点があります。

そこで、これらを乗り越える形として、「1あたり量 \times いくつ分(土台量) = 全体の量」という考え方でかけ算を扱いました。」

自然数、整数、有理数を実数の要素として統一的に見て行こうとするこのような見解は、傾聴すべき内容をもっているが、もともと自然数、整数には整列性など実数とは異なる性質もある。それについてはここでは深入りしないで、連続量と実数体の対応以外にも量と代数系の統一対応が考えられることを小論で示してみよう。⁶⁾

3. ベクトル空間

ここでベクトル空間という概念を定義しておこう。実数全体のつくる集合を R と書くことにして、考えるべき要素の全体の集合を V と書くことにしよう。集合 V の元を \mathbf{u} , \mathbf{v} のように太字で表わす。集合 V の元の間次のように2つの演算

ベクトルの和 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$)

ベクトルのスカラー倍 $a\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in V, a \in R$)

が定義され、 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $a\mathbf{u}$ がまた V 元であって、次の(1)~(8)の性質をみたしているとしよう。 \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{w} \in V$ に対して

- (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- (3) $(\mathbf{u} + \mathbf{o}) = \mathbf{o} + \mathbf{u}$ となる元 \mathbf{o} が V の中に存在する。
- (4) $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$ ($a, b \in R$)
- (5) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$
- (6) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
- (7) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
- (8) $\mathbf{o}\mathbf{u} = \mathbf{o}$

このとき V を R 上のベクトル空間であるといい、 V の元をベクトルという。

正負の数の授業にはいろいろな量が用いられていることは、すでに述べたとうりである。これらの量の中で一番すぐれていると考えられるのが「直線上にあるベクトル」である。直線上のベクトルの全体は上に述べたベクトル空間を作っている。直線(平面上の) l の上で単位の長さを定めると、 l 上の線分の長さは数で表わされる。いま l 上の線分に向きを考え、位置を無視して l 上のベクトルを考えよう。



すなわち l 上のベクトルとは「向きをもつ長さ」のことで、 l 上のどの位置にあっても、向きと長さが等しければベクトルは等しいと考えよう。これは l 上の平行移動と同一視することができる。

直線 l 上で単位の長さと共に基準となる向きを指定して、これを正、反対の向きを負とよべば、正または0ベクトルが小学校での数概念と重ねられる。負のベクトルに対応して負の数も導入される。このようにして得られた数 a, b の和 $a + b$ は平行移動の合成に相当する。加法の法則

- (1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (結合法則)

$$(2) a + 0 = 0 + a = a$$

$$(3) a + b = b + a \text{ (交換法則)}$$

$$(4) a + c = b + c \Rightarrow a = b \text{ (簡約法則)}$$

が正負の数について直ちに確認される。

積についてはベクトルのスカラー倍を考える。 ℓ 上のベクトル x に対して a を実数とすれば
 $x \rightarrow ax$

として、 a は ℓ 上のベクトル空間に作用する。これがスカラー倍である。 x という ℓ 上のベクトルが正の数とする。 a が正の数であれば、 ax は正の数で大きさは $|x|$ の $|a|$ 倍である。 a が負の数であれば、 ax は負の数で大きさは $|x|$ の $|a|$ 倍である。負の数を作用させることは x の逆向きのベクトルを考えることとするのである。

ここで作用という概念を用いたが、ベクトルのかけ算は作用という概念になるのである。一つの対象 a と集合 S が与えられたときに a に S の変換を対応させることを

a を S に作用させる

という。直線上のベクトルの集合 S に a という数を作用させることは、 S の各元(すなわち直線上のベクトル)に、そのベクトルを他のベクトルに写す変換を対応させることで、これが通常ベクトルのスカラー倍といている変換である。

ここでマイナスの数をかけると符号が変わることは、 x を逆向きのベクトルに写す変換を対応させることになる。

この作用という概念は、多次元の場合には、行列の積が1次変換と考えられることとも符号して、積の本質的な概念であると言える。

4. 減法について

いわゆる減法は小学校では重要な題材であるが、代数の入口である正負の数では加法のみで済んでしまう。即ち $x + a = b$ のとき、この式の両辺に a の逆元 $-a$ を加える。

$$x + a + (-a) = b + (-a)$$

これは $x + 0 = b + (-a)$

したがって $x = b + (-a)$

この右辺を $b - a$ と略記するのである。この考えは現場の教師にはなかなか受け入れられないようであるが、代数としては当然のことであろう。そこで $(+5) + (-3)$ を $5 - 3$ と書くと教えればよい。つまり加法記号の省略である。文字式、正負の数の授業で代数和として教えられている内容である。

除法についても逆元をかけると考える必要がある。

5. 積の交換則について

$R \times R \rightarrow R$ が積の定義であるから $(a, x) \rightarrow ax$ で a と x の役割を交代させるとよい。つまり a を x に作用させていたのを、 a に x を作用させると考えることもできる。それが

$$ax = xa$$

である。つまり R と R^* の同一視がここにある。")

6. 正負の数の授業

前節までに述べた方針で行なわれた授業の報告を以下に記す。室蘭市立北辰中学校で近藤忠義教諭が1991年7月と1994年6月に授業を行った。以下は近藤によるレポートである。

正の数・負の数 …… 数の世界の広がり ……

近 藤 忠 義 (室蘭市立北辰中学校)

0. はじめに

3年前、山口格氏(室蘭工業大学)より提案があり、正・負の数の計算をベクトルを使って教えてみた。(このときは乗法からベクトルを使った。)3年ぶりの1年生の数学の担当になったので、再度、ベクトルで指導してみようと思い実践してみた。(加減法についてはトランプによる指導も捨て難かったのですが)。負の数の指導にあたっては、数の世界の広がりを重視して指導してみたつもりです。

1. 「0ある」という表現

(1) 皿の上りんごが何個ありますか



3個ある



2個ある



1個ある



なにもない。……しばらくして、「0個ある」

- (2) 「0」という数を使うことにより、「ある」、「ない」の2つの表現から「ある」という表現だけでよくなった。

2. 「プラス」、「マイナス」

- (1) 「マイナス」という言葉を見たり、聞いたりしたことがあると思うけれど、どんなところで使っていた？

温度 ゴルフ マージャン 借金

電気 磁石 ドライバ（これは今は関係ない）

- (2) どのように使っているの？

① 温度のときは？

- ・0度より低いとき、マイナス何度という
- ・0度というのは
- ・水が凍るときの温度
- ・そのときの温度を0度にして、それより低いときは「マイナス」、それより高いときは「プラス」を使うのだね。

② ゴルフのときは？

- ・パーより少ない回数でカップインしたとき、マイナスを使う。
- ・パーというのは…
- ・やはりあるものを基準にして多ければ「プラス」、少なければ「マイナス」で表すのですね。

以下、「マージャン」、「借金」についてまとめる。（「人生にマイナスになるようなことをするな」というときにも使われる。このときの意味は？）

③ これらに共通する考え方は？

- ・基準となるものがある
- ・基準となるものを中心にして、大きい方を「プラス」、小さい方を「マイナス」で表している。

3. 「負の数」の誕生

- (1) あるものを基準にして、大きいか（多いか）、小さいか（少ないか）

① 自然界の基準（人為的ともいえるが）

温度, 海拔

② 人為的な基準

ゴルフのスコア, マージャンの得点

(2) 反対の意味を表す (基準の0がない)

・利益と損失・勝ちと負け・上がると下がる・増えると減る

※特定の大きさを基準にしないという意味で「基準の0がない」

(3) 反対の方向を表す

・上へ(下へ)・右へ(左へ)・東へ(西へ)・進む(戻る)

(4) 表現を一つの言葉で統一できる

「プラス」と「マイナス」を用いることにより, 反対の意味の言葉を一方の言葉で表現できる。そのことにより, 表などに記載するのが便利になる。さらに, 後で理解されることではあるが, 立式が楽になる。

4. 正負の数とベクトル

(1) 3の(1)~(3)に共通する要素

・反対の意味(方向)

・大きさ

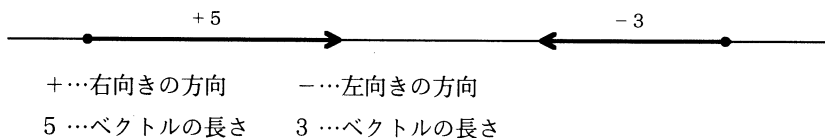
※この2つの要素を表すものとして, 直線上のベクトルがあり, 正負の数を表すシェーマとして適当である。

(2) 正負の数とベクトル

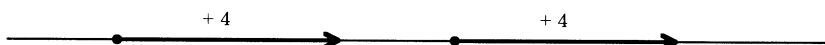
① ベクトル…大きさと方向をもった矢印



② 正負の数をベクトルで表す。

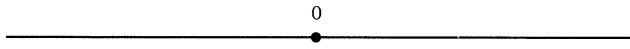


※起点がちがっても同じ向きと同じ長さのベクトルは同じ数を表す。



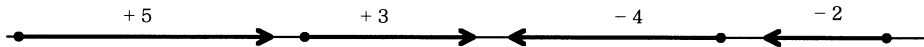
※ベクトルの長さを絶対値という。+5の絶対値は5, -3の絶対値は3

※「0」を表すベクトル…直線上の点

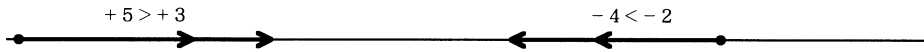


(3) 正負の数の大小と数直線

① 同符号の数の大小



起点をそろえる。

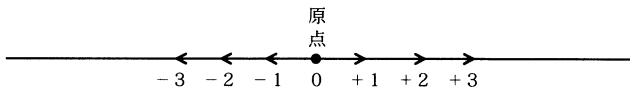


② 異符号の数の大小

正の数 (+) > 負の数 (-)

③ 数直線

- ・ 起点を原点にそろえる。
- ・ 終点はその数の位置



5. 加 法

(1) 正負の数を用いて立式する。

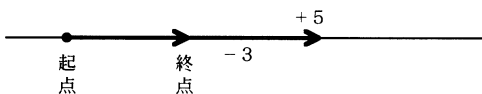
「ゲームをして、1回目は5円もうけて2回目は3円そんした。何円もうけたか。」

$$(+5) + (-3)$$

「ゲームをして、1回目は()円もうけて2回目は()円もうけた。何円もうけたか。」

(2) ベクトルで表す

$$(+5) + (-3) = + (5 - 3) = +2$$



$$\begin{aligned} & ※(+5) + (+3) = + (5 + 3) = + 8 \\ & (-5) + (-3) = - (5 + 3) = - 8 \\ & (+5) + (-3) = + (5 - 3) = + 2 \\ & (-5) + (+3) = - (5 - 3) = - 2 \end{aligned}$$

(3) 加法の計算方法を発見しよう

- ・ 同じ符号の加法は、同じ符号がついている。
- ・ ちがう符号の加法は、ひきざんをしている。
- ・ 同じ符号の加法は、たしざんをしている。
- ・ ちがう符号の加法は、プラスになったりマイナスになったりしている。
- ・ たしざんをしたのに、答えが大きくなったり小さくなったりしている。

……

〈まとめ〉同符号の加法は、同じ符号にして絶対値の和を書けばよい。異符号の加法は絶対値の大きいほうの符号にして絶対値の差を書けばよい。

※正負の数の世界では、加法なのに「ひきざん」をしたり、和が加えられる数より小さくなったりする。

(4) 加法の交換法則，結合法則

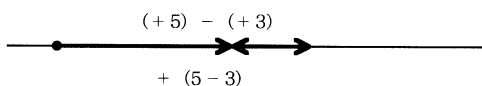
ベクトルで説明（省略）

6. 減 法⁸⁾

(1) 式で表そう

- ① りんごを5個もっていました。友達に3個あげたので残りは何個でしょう。
- ② 借金が5円ありました。借金を3円返しました。残りは何円でしょう。
- ③ お母さんは3円もっています。5円の買い物をしたので、何円残っているでしょう。
- ④ お母さんは5円の借金があります。子供が3円ほしいといったので、なんとかして3円あげました。お母さんは何円もっているでしょう。
- ⑤ 海拔5mの高さの山と、3mの深さの海との差は何mでしょう。

(2) 減法の計算方法



$(+5) - (+3)$ 右へ5進んで、右の反対(左へ)3進む。すなわち
 $- (+3)$ は向きを変えて足すことにします。

$$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = +2$$

〈まとめ〉減法の計算は、引く数の符号を変えてたす。

※⑤は生徒にとって理解しやすいが、②は難しい。

※減法の計算方法が生徒に納得されたか？

7. 加減混合算

$$\begin{aligned} & (+5) + (-4) - (+2) - (-7) \\ & = (+5) + (-4) + (-2) + (+7) \\ & = (+5) + (-4) + (-2) + (+7) \\ & = +5 - 4 - 2 + 7 \\ & = 5 - 4 - 2 + 7 \\ & = (5 + 7) - (4 + 2) \\ & = 12 - 6 \\ & = 6 \end{aligned}$$

減法は加法になおす

全部加法になったので+はなくてもよい

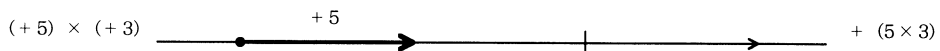
() も必要なくなる

一番前の+も必要ない

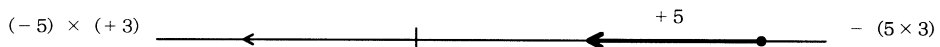
※正負の数の世界では、加法だけでよい

8. 乗法

(1) $(+5) \times (+3)$ +5のベクトルを同じ方向に3倍する



$(-5) \times (+3)$ -5のベクトルを同じ方向に3倍する



$(+5) \times (-3)$ +5のベクトルを反対の方向に3倍する

$(-5) \times (-3)$ -5のベクトルを反対の方向に3倍する

※定義による計算の結果が、実際の例の答えと合うことを確かめながら進めた。

〈まとめ〉

$(+) \times (+) = (+)$ 同符号の乗法の積は $(+)$

$(-) \times (-) = (+)$

$(+) \times (-) = (-)$ 異符号の乗法の積は $(-)$

$(-) \times (+) = (-)$

※乗法の交換法則，結合法則もベクトルで説明

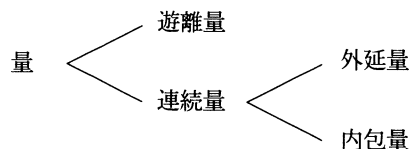
※除法も乗法と同じように説明

8. 感想

- (1) 正負の数の意味を考えると，ベクトルをシェーマにして計算方法を考えるのは分かりやすい。(生徒が自分で図を書いて考えられる。)
- (2) ベクトルは抽象的なシェーマなので，具体的な問題にもどったときに，生徒の混乱は少ない。
- (3) $-(-3) = +3$ は， $(-1) \times (-3)$ と見ることができるようになると，理解されやすい。(乗法や文字式の約束のあとに)
- (4) 負の数を導入することにより，計算方法や計算結果に，今までにないことが発見でき，数学の世界が広がった。

注

- 1) 木村稔子：中学数学 I 正の数・負の数 ほるぷ 教育システム
- 2) 福田義人：心に広がる楽しい授業6 (正負の数) 新算数・数学教育実践講座刊行会 1989年
- 3) 山口格・須田勝彦：「数学教育の観点から見たアルキメデスの公理」北海道大学教育学部紀要 第49号 1987年
- 4) 遠山啓は量を次の様に分類した。内包量は加法性がなりたない連続量とした。



- 5) 遠山啓監修：「わかるさんすう2」むぎ書房指導ノート (79年改訂版) 1987年
- 6) 山口格：「自然数の除法と整列性について」北海道大学教育学部「教授学の探究」

第9号 1991年

- 7) $R \rightarrow R$ 線形写像の全体を R^* と書く
- 8) 近藤は2則でなく4則で実践した