

## マルコフ確率場モデルによる画像修復問題における平均場アニーリングアルゴリズムの一定式化

その他（別言語等）のタイトル	A Formulation of Mean-Field Annealing Algorithm in Image Restoration Problem based on Markov Random Field Model
著者	田中 和之, 守田 徹
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	46
ページ	9-25
発行年	1996-11-08
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/595">http://hdl.handle.net/10258/595</a>

# マルコフ確率場モデルによる画像修復問題における 平均場アニーリングアルゴリズムの一定式化

田中和之† 守田徹††

## A Formulation of Mean-Field Annealing Algorithm in Image Restoration Problem based on Markov Random Field Model

Kazuyuki TANAKA † and Tohru MORITA ††,

† 室蘭工業大学情報工学科, 室蘭市

Department of Computer Science and Systems Engineering,  
Muroran Institute of Technology, Muroran 050, Japan

†† 日本大学工学部情報工学科, 郡山市

Department of Computer Science, College of Engineering,  
Nihon University, Koriyama 963, Japan

### 要旨

拘束条件付き変分原理の立場からマルコフ確率場モデルにおける平均場近似をもとにした画像修復アルゴリズムにおけるひとつの数学的枠組みを与え、マルコフ確率場モデルに現れるパラメータに対する統計力学的考察を行う。本論文では、多値画像において原画像における階調値の異なる最近接格子点対の総本数が正確にわかっているという前提に立って、その本数に対する拘束条件のもとで観測画像にできるだけ近い画像を修復画像として得ようという最小値問題を考えることにより、多値画像の修復に対するマルコフ確率場モデルを導出する。最適解の探索に対する統計力学的手法として平均場アニーリング法を適用する。

### Abstract

The Markov random field (MRF) model, which is a method in the image restoration, is formulated, based on the variational principle of the difference minimum between the restored and damaged image datas, under the constraints on the boundary length between different darkness. The mean field annealing algorithm is applied to the search of the optimal solution in the Markov random field model.

## 1. 序論

近年、多くの統計力学の概念あるいは手法が神経回路網理論をはじめとする計算機科学の分野に広く応用されつつある [1], [2]。そのなかでも平衡系の統計力学が最も素直な形で応用されているのがマルコフ確率場モデルをもとにした画像修復問題であろう。マルコフ確率場モデルを用いた画像修復において、シュミレーテッド・アニーリング、平均場アニーリング、繰り込み群の手法、クラスター変分法等これまで多くの統計力学的手法が導入されている [3] - [12]。このことはマルコフ確率場モデルが、統計力学における磁性体の物性を説明するモデルとして構築されたイジング模型 [13] のそれと多くの部分で共通していることに起因している。

マルコフ確率場モデルはもともとベイズ推定の立場から画像修復問題を評価関数の最小値問題に置き換えることにより導入されたものであるが、他方、事前知識をもとにした拘束条件のもとでの変分法により評価関数を導出する標準正則化理論が Poggio, Torre and Koch [14] により提唱されている。五十嵐, 川人 [9], [10] はこの標準正則化理論をもとに画像修復におけるマルコフ確率場モデルを導出している。マルコフ確率場モデルにおいて最も問題となるのは、パラメータの推定であり、様々の方法が提唱されている [6], [7], [8], [9], [10], [12]。Zhang [6], 工藤, 川内, 斎藤 [7], 渡部, 工藤, 斎藤 [8] は最適解の探索と最尤推定によるパラメータの決定を同時に行うパラメータ自動推定型の画像修復アルゴリズムをベイズ推定の立場で考案している。五十嵐, 川人 [9], [10] は標準正則化理論のもとで拘束条件付き変分によりマルコフ確率場モデルを導出し, Gidas [4] が画像修復問題に対して最初に導入した繰り込み変換の手法に従い, スケールの異なるマルコフ確率場モデルを構成し, この2つの確率モデルに対してその相違の度合いを表す量をカルバック情報量の形で定義し, 両者が一致するように最適パラメータを決定する手法を提唱している。これに対して, 守田, 田中 [12] は, 原画像における階調値の異なる最近接格子点対の総本数が正確にわかっているという前提で画像修復問題を考えたとして, その総本数に対する拘束条件のもとで観測画像にできるだけ近い画像を修復画像として得ようという最小値問題としてマルコフ確率場モデルをとらえる方が統計力学的立場に立つとむしろ自然であると結論している。すなわち, 標準正則化理論の枠組みでは拘束条件に対してラグランジュの未定係数を導入するとこれがそのままマルコフ確率場モデルのパラメータとなるが, もともと拘束条件付きの変分原理においてはラグランジュの未定係数はそれに対する拘束条件を満たすように決定するという前提で導入されたものであるためこのことは自然に理解できる。ここで, どのような拘束条件を修復画像に対して要請するかが, すなわち原画像に対する事前知識をどこまで持って画像修復を行うかに対応する。この立場において拘束条件の個数と同じだけパラメータが現れる。それらのパラメータは修復画像が原画像の満たすべき拘束条件を満たすように決めるのが最も自然である。

現実の問題においてこの異なる階調値を持つ最近接格子点対の本数, すなわち境界の長さも観測画像から推定することが要求される。守田, 田中 [12] は, 先入観念として,

(1) ノイズは各格子点で独立に与えられたものである。

(2) 原画像において 010 あるいは 101 といったパターンは存在せず、観測画像においてこのパターンが現れればこれはノイズである。

と仮定することにより、0 と 1 の 2 値画像に対してこの境界の長さも観測画像のみから確率的に推定することに成功している。

本研究では、文献 [12] の立場に立ち、原画像における階調値の異なる最近接格子点对、すなわち境界の総本数に対する拘束条件の下で画像修復のモデルを構築し、平均場アニーリングを用いて画像の修復を行うことを考える。ただし、画像修復アルゴリズムにおけるマルコフ確率場モデルの現れる部分の数学的枠組みを確立し、マルコフ確率場モデルにおける最適パラメータ推定に対する統計力学的考察を行うことを目的としており、観測画像から境界線の本数は正確にわかってことを前提として問題設定を行うものとする。更に、問題設定をできるだけ単純化し、この拘束条件がマルコフ確率場モデルにおいてどのような役割を果たしているかを明らかにする目的で、取り扱う画像およびノイズを限定して議論することとする。

## 2. 拘束条件付き変分とマルコフ確率場モデル

周期境界条件を持つ  $L=M \times N$  の正方格子を考え、各格子点を  $(i, j)$  ( $i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, N$ ) で表すことにする。 $i$  は  $x$ -方向の、 $j$  は  $y$ -方向の位置を表す。周期境界条件を仮定しているので、 $i=M$  の場合には  $i+1=1$ 、 $i=1$  の場合には  $i-1=M$ 、 $j=N$  の場合には  $j+1=1$ 、 $j=1$  の場合には  $j-1=N$  と規約する。その上で  $Q$  値画像を考え、白い状態を 0 で表し、黒い状態を  $Q-1$  で表すことにする。原画像はノイズにより各格子点で互いに独立に他の階調値へと確率  $p$  で反転されることにより乱されているとし、その観測画像から原画像を修復することを考える。すなわち、観測画像も  $Q$  値画像に限定する。原画像、観測画像および修復画像における格子点  $(i, j)$  の状態を  $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$  および  $z_{i,j}$  で表すことにする。すなわち、原画像、観測画像および修復画像は、

$$\mathbf{x}_I = \{x_{i,j} | i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N\}$$

$$\mathbf{y}_I = \{y_{i,j} | i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N\}$$

$$\mathbf{z}_I = \{z_{i,j} | i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N\}$$

でそれぞれ表され、各格子点において  $x_{i,j}$ 、 $y_{i,j}$ 、 $z_{i,j}$  は  $0, 1, 2, \dots, Q-1$  の  $Q$  種類の値のみを取り得るものとする。

原画像  $\mathbf{x}_I$  から以下の式で定義される量  $\sigma_2$  を導入する。

$$\sigma_2 \equiv \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{2L} [1 - \delta(x_{i,j}, x_{i,j+1})] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{2L} [1 - \delta(x_{i,j}, x_{i+1,j})] \quad (1)$$

$\sigma_2$  は異なる濃度の間の境界線の長さを表しているおり、ここで、観測画像  $y_I$  から何らかの方法で  $\sigma_2$  が評価できるとすると、修復画像において  $z_I$  は次の式を満たしている必要がある。

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(z_{i,j}, z_{i+1,j})] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(z_{i,j}, z_{i,j+1})] = 2L\sigma_2 \quad (2)$$

この拘束条件の下で修復画像として観測画像に最も近い画像を探索することを考える。すなわち、

$$\min_{z_I} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(y_{i,j}, z_{i,j})] \quad (3)$$

拘束条件 (2) に対してラグランジュの未定係数  $J$  を導入すると、式 (3) は次のような最小値問題に置き換えられる。

$$\min_{z_I} \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(y_{i,j}, z_{i,j})] + J \left( \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(z_{i,j}, z_{i+1,j})] \right) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(z_{i,j}, z_{i,j+1})] - 2L\sigma_2 \right\} \quad (4)$$

ここで、 $\delta(x,y)$  はクロネッカーのデルタである。最小値問題 (3) は拘束条件 (2) を満たす  $z_I$  の集合の中で  $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(y_{i,j}, z_{i,j})]$  を最小にする  $z_I$  を探索する問題であったのに対して、式 (4) は、あらゆる  $J$  のに対して式 (4) の最小値問題を満足する  $z_I$  の集合の中で式 (2) で与えられた拘束条件を満たす  $z_I$  を探す問題である。

式 (4) の最小値問題を満足する  $z_I$  の集合の中に拘束条件 (2) を正確に満たす  $z_I$  が含まれているとは限らず、その場合には式 (4) では拘束条件付きの最小値問題 (2) の解を求めることができないことになってしまう。すなわち、 $J$  を1つ固定したとき、式 (4) を満たす  $z_I$  を  $z_I^{(M)}$  で表すことにすると、 $z_I^{(M)}$  を用いて計算した式 (2) の左辺は  $J$  と共に変化するが、これらは整数値のみを取る不連続関数で、式 (2) を正確に満たすように  $J$  を決めるのは難しい。そこで、次のように定義される  $R_2$  が  $\sigma_2$  にできるだけ近い値を与える  $J$  を式 (4) の最適パラメータとして採用することとする。

$$R_2 \equiv \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{2L} [1 - \delta(z_{i,j}^{(M)}, z_{i,j+1}^{(M)})] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{2L} [1 - \delta(z_{i,j}^{(M)}, z_{i+1,j}^{(M)})] \quad (5)$$

式(4)の最小値問題は次の  $H(z_I)$  を最小にする状態  $z_I^{(M)}$  を探索する問題に帰着される。

$$H(z_I) \equiv - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [\delta(y_{i,j}, z_{i,j}) + J\delta(z_{i,j}, z_{i+1,j}) + J\delta(z_{i,j}, z_{i,j+1})] \quad (6)$$

この最小値問題をアニーリングを用いて探索するために、温度  $T$  および確率変数  $z_I$  に対する確率分布  $\rho(z_I)$  を導入する。

$$\rho(z_I) = \frac{\exp[-\frac{1}{T}H(z_I)]}{\sum_{z_I} \exp[-\frac{1}{T}H(z_I)]} \quad (7)$$

ここで、 $\sum_{\mathbf{z}_I} \equiv \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N \sum_{z_{i,j}=0}^{Q-1}$  はすべて格子点  $(i,j)$  における確率変数  $z_{i,j}$  についての可能な状態の和をとることを意味する。ギブス分布 (7) が次のような規格化条件を満たすことは明らかである。

$$\sum_{\mathbf{z}_I} \rho(\mathbf{z}_I) = 1 \quad (8)$$

式 (4) で与えられた最小値問題は式 (7) で与えられた確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  における出現確率最大の状態  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  を探索する MAP (事後確率最大, Maximum A Posteriori) 推定問題に同等である。

MAP 推定問題の最適解法に対する代表的な統計力学的手法としてシミュレーテッドアニーリング法 [3] と平均場アニーリング法 [5] があげられるが本論文では平均場アニーリング法を採用する。このために、式 (7) で与えられる確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  から格子点  $(i,j)$  における周辺分布  $\rho_{ij}(z)$  を導入する。すなわち、

$$\rho_{i,j}(z) \equiv \sum_{\mathbf{z}_I} \rho(\mathbf{z}_I) \delta(z, z_{i,j}) \quad (9)$$

この周辺分布も確率分布と同様に次の規格化条件を満たす。

$$\sum_{z=0}^{Q-1} \rho_{i,j}(z) = 1 \quad (10)$$

もし、確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  における出現確率最大の状態  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  が唯一つだけ存在するとすれば、 $T=0$  において  $\rho(\mathbf{z}_I)$  および  $\rho_{ij}(z_{i,j})$  は次のように与えられる。

$$\rho(\mathbf{z}_I) = \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N \delta(z_{i,j}, z_{i,j}^{(M)}), \quad \rho_{i,j}(z) = \delta(z, z_{i,j}^{(M)}) \quad (11)$$

このことは、 $T=0$  においては、確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  における出現確率最大の状態  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  を探索することと、各格子点において  $\rho_{ij}(z)$  の出現確率最大の状態から  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  を決めることが等価であることを意味する。(ただし、有限温度においてはこの両者は異なる。) 従って、観測画像  $y_I$  が与えられた時、十分小さい  $T(>0)$  に対して次の式で定義される  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  をその原画像として最も確率の高い画像とみなすことができる。

$$\rho_{i,j}(z_{i,j}^{(M)}) = \max_{\{z=0,1,\dots,Q-1\}} \rho_{i,j}(z) \quad (12)$$

このようにして式 (7) で与えられる確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  の出現確率最大の状態を探索する MAP 推定問題は、式 (9) で導入された周辺分布  $\rho_{ij}(z)$  から各格子点ごとに出現確率最大の状態を探索しながらアニーリングを行う MPM (Maximum Posterior Marginal) 推定に置き換えられることが可能となる。

### 3. 平均場アニーリングによる探索

統計力学において、式 (6) と式 (7) で与えられる確率分布に対して、周辺分布  $\rho_{ij}(z_{i,j})$  を近似的に計算する様々の近似法が考案されている [13]。この節では、その中で最も簡単な方法である平

均場近似により

$$\{\rho_{i,j}(z) \mid i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N; z=0,1,\dots,Q-1\}$$

を近似的に計算することを考える。ここでは、パラメータ  $J$  を固定して平均場近似によりマルコフ確率場モデルの最適解の探索を行い、パラメータ  $J$  の様々な値に対して得られた最適解に対して拘束条件を最もよく満足するものを選び、これを修復画像として採用することとする。

平均場近似では、確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  を確率変数  $z_{i,j}$  の周辺分布  $\rho_{i,j}(z_{i,j})$  の積の形で次のように表せる関数に制限する。

$$\rho(\mathbf{z}_I) = \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N \rho_{i,j}(z_{i,j}) \quad (13)$$

確率分布  $\rho(\mathbf{z}_I)$  は規格化条件 (8) を拘束条件とした次の最小値問題に対する変分原理を満たしている (付録A 参照)。

$$\min_{\rho} [E\{\rho\} - TS\{\rho\}] \quad (14)$$

$$E\{\rho\} \equiv \sum_{\mathbf{z}_I} H(\mathbf{z}_I) \rho(\mathbf{z}_I) \quad (15)$$

$$S\{\rho\} \equiv - \sum_{\mathbf{z}_I} \rho(\mathbf{z}_I) \ln \rho(\mathbf{z}_I) \quad (16)$$

式 (13) を式 (14) - (16) に代入することにより、自由エネルギーを周辺分布  $\rho_{i,j}(z_{i,j})$  のみを用いて以下のように表すことができる。

$$F = \min_{\{\rho_{i,j}\}} (E\{\rho_{i,j}\} - TS\{\rho_{i,j}\}) \quad (17)$$

$$E\{\rho_{i,j}\} \equiv - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{z_{i,j}=0}^{Q-1} \rho_{i,j}(z_{i,j}) (\delta(y_{i,j}, z_{i,j}) + J\rho_{i+1,j}(z_{i,j}) + J\rho_{i,j+1}(z_{i,j})) \quad (18)$$

$$S\{\rho_{i,j}\} \equiv - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{z_{i,j}=0}^{Q-1} \rho_{i,j}(z_{i,j}) \ln \rho_{i,j}(z_{i,j}) \quad (19)$$

拘束条件 (10) の下での  $E\{\rho_{i,j}\} - TS\{\rho_{i,j}\}$  の  $\rho_{i,j}(z_{i,j})$  に関する変分をとることにより、

$$\{\rho_{i,j}(z) \mid i=1,2,\dots,M; j=1,2,\dots,N; z=0,1,\dots,Q-1\}$$

に対する方程式は次のように与えられる (付録B 参照)。

$$\rho_{i,j}(z) = \frac{\exp[-\frac{1}{T} H_{i,j}(z)]}{\sum_{z=0}^{Q-1} \exp[-\frac{1}{T} H_{i,j}(z)]} \quad (20)$$

$$H_{i,j}(z) \equiv -\delta(z, y_{i,j}) - J[\rho_{i+1,j}(z) + \rho_{i-1,j}(z) + \rho_{i,j+1}(z) + \rho_{i,j-1}(z)] \quad (21)$$

ここで、周期境界条件から

$$\begin{aligned} \rho_{0,j}(z) &= \rho_{M,j}(z), & \rho_{M+1,j}(z) &= \rho_{1,j}(z), \\ \rho_{i,0}(z) &= \rho_{i,N}(z), & \rho_{i,N+1}(z) &= \rho_{i,1}(z) \end{aligned} \quad (22)$$

であるとする。  $J$  および  $T$  が 1 組与えられたとき、この連立非線形方程式は反復法により数値的

に解くことが可能である。

ここで、平均場方程式 (20) - (22) を数値的に解くためのアルゴリズムについての更に詳しい解説を与える。周辺分布  $\rho_{ij}(z)$  は

$$\sum_{z=0}^{Q-1} \Phi_n(z) \Phi_{n'}(z) = \delta(n, n'), \quad (n, n' = 0, 1, 2, \dots, Q-1) \quad (23)$$

を満たす直交関数系  $\{\Phi_n(z) \mid n, z = 0, 1, 2, \dots, Q-1\}$  を用いて以下のように直交関数展開することが可能である。

$$\rho_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{Q-1} m_{i,j}^{(n)} \Phi_n(z) \quad (24)$$

$$m_{i,j}^{(n)} \equiv \sum_{z=0}^{Q-1} \Phi_n(z) \rho_{i,j}(z) \quad (25)$$

すなわち、式(24)の周辺に  $\Phi_n(z)$  を掛け、 $z$  に関して和をとり、正規直交関係 (23) を用いることにより、式 (25) を得ることができる。式 (23) を満たす直交関数系としては以下の漸化式を用いて生成される離散型のチェビシェフ多項式がある。

$$\Phi_n(z) \equiv \frac{\Psi_n(z)}{\sqrt{\sum_{z=0}^{Q-1} \Psi_n(z)^2}} \quad (26)$$

$$(n+1)(Q-1-n)\Psi_{n+1}(z) = -(2z-Q+1)(2n+1)\Psi_n(z) - n(Q+n)\Psi_{n-1}(z), \quad (27)$$

$$(z = 0, 1, 2, \dots, Q-1)$$

$$\Psi_0(z) = 1, \quad \Psi_1(z) = 1 - \frac{2}{Q-1}z \quad (28)$$

$Q=2,3,4$  に対して  $\Phi_n(z)$  は具体的に次のように与えられる。

$$Q=2: \quad \Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Phi_1(z) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - z\right) \quad (29)$$

$$Q=3: \quad \Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-z), \quad \Phi_2(z) = \sqrt{\frac{3}{2}}\left((z-1)^2 - \frac{2}{3}\right) \quad (30)$$

$$Q=4: \quad \Phi_0(z) = \frac{1}{2}, \quad \Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(z - \frac{3}{2}\right), \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2}\left(\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right), \quad (31)$$

$$\Phi_3(z) = \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{3}{2} - z\right)\left(\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{41}{20}\right)$$



式 (24) を式 (20)-(22) に代入することにより平均場方程式は

$$\mathbf{m}_I = \{m_{i,j}^{(n)} | i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N; n = 0, 1, 2, \dots, Q-1\}$$

に対する方程式として以下のように書き換えられる。

$$m_{i,j}^{(n)} = f_{i,j}^{(n)}(T, J, y_{i,j}; \mathbf{m}_I),$$

$$(n = 0, 1, \dots, Q-1; i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N) \quad (32)$$

$$f_{i,j}^{(n)}(T, J, y_{i,j}; \mathbf{m}_I) = \frac{1}{Z_{\text{mf}}} \sum_{z=0}^{Q-1} \Phi_n(z)$$

$$\times \exp\left[\frac{1}{T} \left\{ \delta(z, y_{i,j}) + J \sum_{n'=0}^{Q-1} (m_{i,j+1}^{(n')} + m_{i,j-1}^{(n')} + m_{i+1,j}^{(n')} + m_{i-1,j}^{(n')}) \Phi_{n'}(z) \right\}\right] \quad (33)$$

$$Z_{\text{mf}} \equiv \sum_{z=0}^{Q-1} \exp\left[\frac{1}{T} \left\{ \delta(z, y_{i,j}) + J \sum_{n'=0}^{Q-1} (m_{i,j+1}^{(n')} + m_{i,j-1}^{(n')} + m_{i+1,j}^{(n')} + m_{i-1,j}^{(n')}) \Phi_{n'}(z) \right\}\right] \quad (34)$$

$$m_{0,j}^{(n)} = m_{M,j}^{(n)}, \quad m_{M+1,j}^{(n)} = m_{1,j}^{(n)}, \quad m_{i,0}^{(n)} = m_{i,N}^{(n)}, \quad m_{i,N+1}^{(n)} = m_{i,1}^{(n)} \quad (35)$$

式(26)および式 (28) より  $\Phi_0(\mathbf{z}) = 1/\sqrt{Q}$ , すなわち  $m_{i,j}^{(0)} = 1/\sqrt{Q}$  であることは明らかである。平均場方程式 (32) - (35) に対する反復法のアルゴリズムは

$$\mathbf{m}_I(k) \equiv \{m_{i,j}^{(n)}(k) | i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N; n = 0, 1, 2, \dots, Q-1\}$$

に対する漸化式を用いて以下のように与えられる。

$$m_{i,j}^{(n)}(k+1) = f_{i,j}^{(n)}(T, J, y_{i,j}; \mathbf{m}_I(k)), \quad (n = 1, 2, \dots, Q-1),$$

$$m_{i,j}^{(0)}(k) = 1/\sqrt{Q},$$

$$m_{0,j}^{(n)}(k) = m_{M,j}^{(n)}(k), \quad m_{M+1,j}^{(n)}(k) = m_{1,j}^{(n)}(k),$$

$$m_{i,0}^{(n)}(k) = m_{i,N}^{(n)}(k), \quad m_{i,N+1}^{(n)}(k) = m_{i,1}^{(n)}(k), \quad (n = 0, 1, 2, \dots, Q-1),$$

$$(i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N) \quad (36)$$

反復操作は次の式で定義される  $\varepsilon(k)$  に対して  $\varepsilon(k) < 10^{-6}$  が成り立つまで行うものとする。

$$\varepsilon(k) \equiv \frac{1}{QL} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^{Q-1} |m_{i,j}^{(n)}(k) - m_{i,j}^{(n)}(k+1)| \quad (37)$$

$T$  は十分大きな値 (例えば  $T=10.0$ ) から出発し,  $T$  を固定して平均場方程式 (20) を (36) に従う反

復法により数値的に解き、その解  $\mathbf{m}_I$  を次に小さい  $T$  に対する平均場方程式 (20) の反復法の初期値に用いる操作を繰り返して行くというアニーリングを行うことにより、十分小さな  $T$  に対する  $\mathbf{m}_I$  が得られ、これを式 (24) に代入し、式 (12) を用いることにより、各温度  $T$  に対して  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  を決定することができる。

#### 4. 数値実験

図1に与えられた  $Q=2, M=N=32$  の正方格子上的 E という文字から成る原画像  $x_I$  を考える。観測画像  $y_I$  は、閉区間  $[0,1]$  における一様分布に従い、すべての格子点  $(i,j)$  に対して乱数  $a_{ij}$  を発生させ、 $a_{ij} < p$  ならば、その格子点  $(i,j)$  の状態を白黒反転させることにより生成する。このことは、各格子点に対して確率  $p$  で白黒反転させることを意味している。 $p=0.1, 0.2, 0.3$  に対して生成した観測画像  $y_I$  を図2に与える。図1の原画像  $x_I$  から式 (2) における  $\sigma_2$  は式 (1) で与えられる。図1の原画像  $x_I$  および図2の観測画像  $y_I$  から  $\sigma_1$  を次のように定義する。

$$\sigma_1 \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(x_{i,j}, y_{i,j})] \quad (38)$$

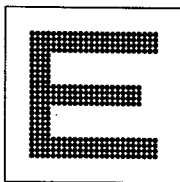


図1：原画像 ( $Q=2$ )

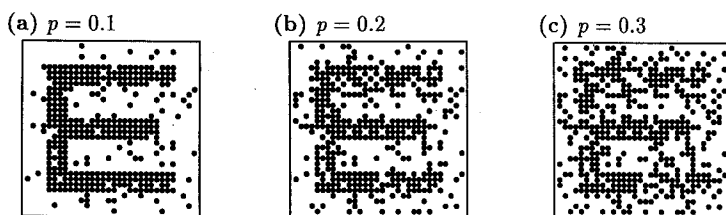


図2：観測画像 ( $Q=2$ )

$\sigma_1$  は各格子点においてノイズにより状態が反転されてしまった確率を表している。

今、原画像そのものはわからないとしても、 $\sigma_2$  は何らかの方法で知ることができたとするとき、式 (5) で定義された  $R_2$  が  $\sigma_2$  にそれぞれできるだけ近い値を与えるパラメータ  $J$  を最適パラメータとして選び、そのときの  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  を修復画像として採用することにする。実際には、上の2つの等式を完全に成り立たせるように  $J$  を選ぶことは難しいので  $R_2$  が  $\sigma_2$  にできるだけ近くなるように選ぶものとする。ここで、以下のように定義される  $R$  および  $R_1$  に対して、 $R$  ができる限り小さく、かつ  $R_1$  が  $\sigma_1$  に如何に近くなるかが画像修復の精度となる。

$$R \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(z_{i,j}^{(M)}, x_{i,j})] \quad (39)$$

$$R_1 \equiv \frac{1}{L} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [1 - \delta(z_{i,j}^{(M)}, y_{i,j})] \quad (40)$$

図 2(b) で与えられた  $p=0.2$  の時の観測画像に対する修復過程を図 3 に与える。各温度  $T$  に対して得られた  $R, R_1, R_2$  の値を表 1 に与える。  $0.5 \leq J \leq 1.5$  における様々のパラメータ  $J$  の値に対して  $T=0.15$  の時の修復画像  $z_1^{(M)}$  を平均場アニーリングにより求めた結果を図 4 に与える。図 4 において与えられた修復画像に対して評価した  $R_2$  の値を表 2 に与える。これらの計算結果から  $R_2$  は  $J$  の不連続関数であり、  $R_2 = \sigma_2$  を正確に満足するように  $J$  を決定することは難しいことがわかる。そこで  $|R_2 - \sigma_2|$  を最小にするという基準で最適パラメータ  $J$  を決定することとする。図 2 で与

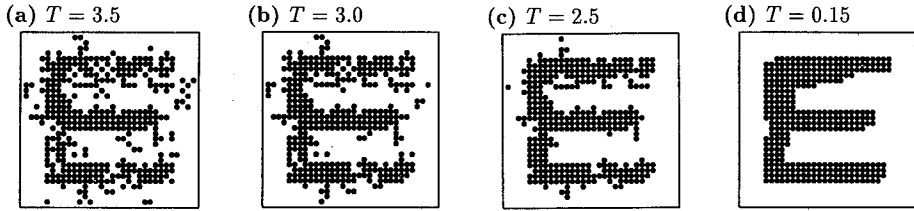


図 3：平均場アニーリングによる画像修復過程 ( $Q=2, p=0.2, J=1.1$ )

$T$	$R$	$R_1$	$R_2$
4.00	0.190430	0.000000	0.341797
3.50	0.153320	0.037109	0.267578
3.00	0.124023	0.068359	0.210938
2.50	0.082031	0.110352	0.152344
2.00	0.056641	0.141602	0.121094
1.50	0.043945	0.167969	0.094727
1.00	0.043945	0.177734	0.084961
0.75	0.043945	0.183594	0.082031
0.50	0.045898	0.183594	0.081055
0.25	0.045898	0.183594	0.081055
0.15	0.045898	0.183594	0.081055
		$\sigma_1 \simeq 0.190430$	$\sigma_2 \simeq 0.083008$

表 1：平均場アニーリングによる文字 E の画像修復過程における  $R, R_1, R_2$  ( $Q=2, p=0.2, J=1.1$ )。

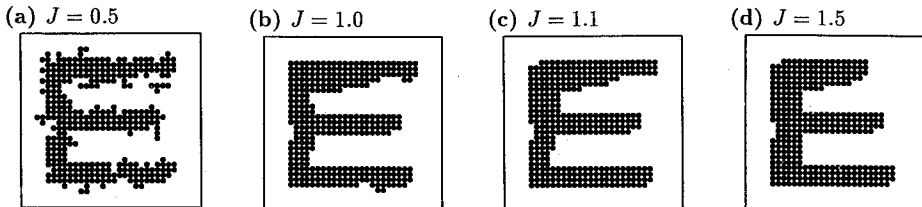


図 4：平均場アニーリングによる修復画像  $z_1^{(M)}$  の  $J$  - 依存性 ( $Q=2, p=0.2$ )

$J$	$R_2$		
	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.3$
0.5	0.105469	0.143555	0.181641
0.6	0.085938	0.089844	0.114258
0.7	0.085938	0.088867	0.107422
0.8	0.085938	0.086914	0.101563
0.9	0.085938	0.086914	0.094727
1.0	0.085938	0.085938	0.089844
1.1	0.082031	0.081055	0.073242
1.2	0.082031	0.075195	0.069336
1.3	0.082031	0.075195	0.069336
1.4	0.082031	0.073242	0.060547
1.5	0.081055	0.073242	0.058594

表2：平均場アニーリングによる文字Eの画像画像  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  における  $R_2$  の  $J$ -依存性 ( $Q=2, \sigma_2 \simeq 0.083008$ )

$p$	$J$	$\sigma_1$	$R$	$R_1$	$R_2$
0.1	1.1	0.090820	0.011719	0.090820	0.082031
0.2	1.1	0.190430	0.045898	0.183594	0.081055
0.3	1.0	0.282227	0.107422	0.247070	0.089844
					$\sigma_2 \simeq 0.083008$

表3：様々の観測画像に対する平均場アニーリングによる文字Eの修復画像  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  における  $R, R_1, R_2$  ( $Q=2$ )

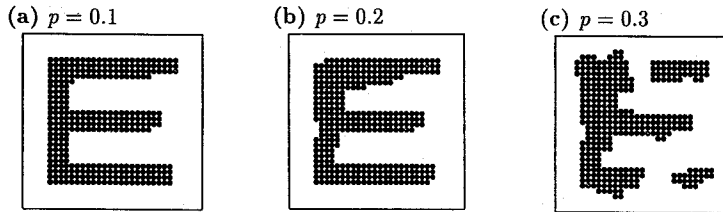


図5：様々の観測画像に対する平均場アニーリングによる修復画像  $\mathbf{z}_I^{(M)}$  ( $Q=2$ )

えられた  $p=0.1, 0.2, 0.3$  の時のそれぞれの観測画像に対して得られた最適パラメータ  $J$  の値をその修復画像に対して評価された  $R, R_1, R_2$  の値と共に表3にそれぞれ与える。また、その最適パラメータに対する修復画像を図5に与える。

多値画像については原画像が図6で与えられる3値画像を例にとり、実験を行う。観測画像  $y_I$  は、閉区間  $[0,1]$  における一様分布に従い、すべての格子点  $(i,j)$  に対して乱数  $a_{ij}$  を発生させ、 $a_{ij} < p$  ならば、その格子点  $(i,j)$  の状態を  $x_{ij}$  以外の状態に等確率で反転させることにより生成する。これを  $p=0.1, 0.2, 0.3$  として図7に与えられるような観測画像を作成し、上と同様の解析により最

適パラメータを決定し修復を行うこととする。図 7 (b) で与えられた  $p=0.2$  の時の観測画像に対する修復過程を図 8 に与える。各温度  $T$  に対して得られた  $R, R_1, R_2$  の値を表 4 に与える。  $0.5 \leq J \leq 1.5$  における様々のパラメータ  $J$  の値に対して  $T=0.2$  の時の修復画像  $z_1^{(M)}$  を平均場アニーリングにより求めた結果を図 9 に与える。図 9 において与えられた修復画像に対して評価した  $R_2$  の値を表 5 に与える。この場合も  $|R_2 - \sigma_2|$  を最小にするという基準で最適パラメータ  $J$  を決定することとすると、表 5 から  $p=0.1, 0.2, 0.3$  の時のいずれの場合に対しても  $J = 1.2$  が最適パラメータであると結論される。図 7 で与えられた  $p=0.1, 0.2, 0.3$  の時のそれぞれの観測画像に対して得られた最適パラメータ  $J$  の値をその修復画像に対して評価された  $R, R_1, R_2$  の値と共に表 6 にそれぞれ与える。また、その最適パラメータに対する修復画像を図 10 に与える。

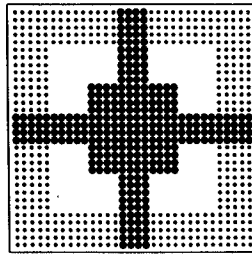
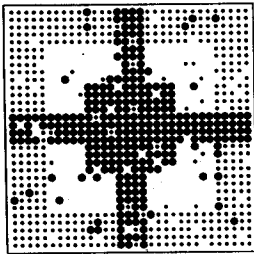
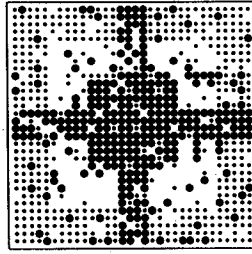


図6：原画像 ( $Q=3$ )

(a)  $p = 0.1$



(b)  $p = 0.2$



(c)  $p = 0.3$

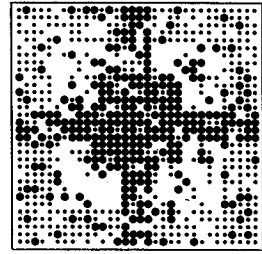


図7：観測画像 ( $Q=3$ )

## 5. 結論

本論文では、原画像における階調値の異なる最近接格子点対の総本数に対する拘束条件のもとで観測画像にできるだけ近い画像を修復画像として得ようという最小値問題を考えることにより、多値画像の修復に対するマルコフ確率場モデルを導出し、平均場アニーリングを適用することにより、その有効性を確認した。

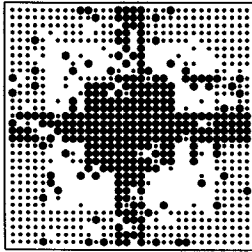
本論文では、もともとは、白黒画像において異なる濃度の間の境界線の長さ  $\sigma_2$  が正確にわかっているという前提の下で、まず、式 (2) で与えられた拘束条件を正確に満たす画像の集合に限定し、

その中から観測画像に最も近い画像を探索するという問題設定で出発した。しかし、最終的には平均場アニーリング法により最適解を探索しようという目的で、拘束条件 (2) に対するラグランジュの未定係数  $J$  を導入し、式 (4) で与えられた最小値問題を満足する画像の集合の中で、それぞれの画像に対して式 (5) により与えられた  $R_2$  を

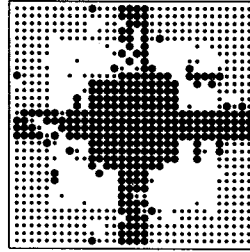
$T$	$R$	$R_1$	$R_2$
4.0	0.190430	0.000000	0.375488
3.0	0.158203	0.032227	0.311035
2.5	0.099609	0.092773	0.201660
2.0	0.050781	0.152344	0.125488
1.5	0.031250	0.182617	0.095215
1.0	0.017578	0.182617	0.090820
0.7	0.017578	0.182617	0.090820
0.5	0.018555	0.182617	0.090820
0.4	0.016602	0.184570	0.089844
0.3	0.016602	0.184570	0.089844
0.2	0.016602	0.184570	0.089844
		$\sigma_1 \simeq 0.190430$	$\sigma_2 \simeq 0.089844$

表4：平均場アニーリングによる3値画像修復過程における  $R, R_1, R_2$  ( $Q=3, p=0.2, J=1.2$ )

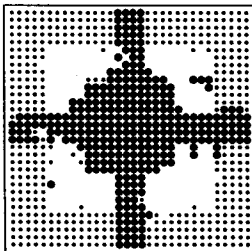
(a)  $T = 3.0$



(b)  $T = 2.5$



(c)  $T = 2.0$



(d)  $T = 0.2$

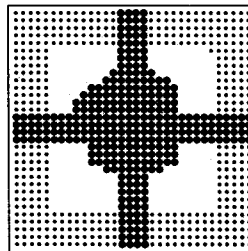


図8：平均場アニーリングによる3値画像における画像修復過程 ( $Q=3, p=0.2, J=1.2$ )

$J$	$R_2$		
	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.3$
0.5	0.108887	0.125977	0.147949
0.6	0.092285	0.093750	0.111328
0.7	0.092285	0.093750	0.103027
0.8	0.092285	0.091797	0.095703
0.9	0.092285	0.091797	0.094238
1.0	0.091797	0.091309	0.094238
1.1	0.089844	0.089844	0.089355
1.2	0.089844	0.089844	0.089355
1.3	0.089844	0.089844	0.089355
1.4	0.089844	0.089355	0.089355
1.5	0.089844	0.089355	0.087891
1.6	0.089844	0.088867	0.086914
1.7	0.089844	0.088867	0.086914
1.8	0.089355	0.088867	0.086914
1.9	0.089355	0.088379	0.086914
2.0	0.089355	0.086914	0.085449

表 5：平均場アニーリングによる3値画像の修復画像  $z_1^{(M)}$  における  $R_2$  の  $J$ -依存性 ( $Q=3, \sigma_2 \simeq 0.089844$ )

$p$	$J$	$\sigma_1$	$R$	$R_1$	$R_2$
0.1	1.2	0.090820	0.007813	0.087891	0.089844
0.2	1.2	0.190430	0.016602	0.184570	0.089844
0.3	1.2	0.282227	0.037109	0.272461	0.089355
					$\sigma_2 \simeq 0.089844$

表 6：様々の観測画像に対する平均場アニーリングによる3値画像の修復画像  $z_1^{(M)}$  における  $R, R_1, R_2$  ( $Q=3$ )

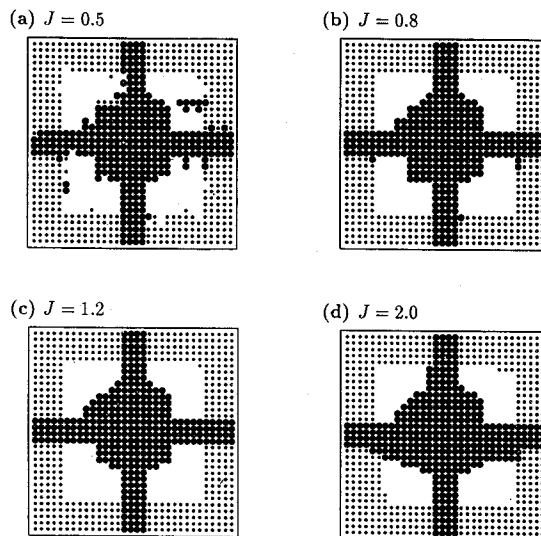


図 9：平均場アニーリングによる3値画像の修復画像  $z_1^{(M)}$  の依存性 ( $Q=3, p=0.2$ )

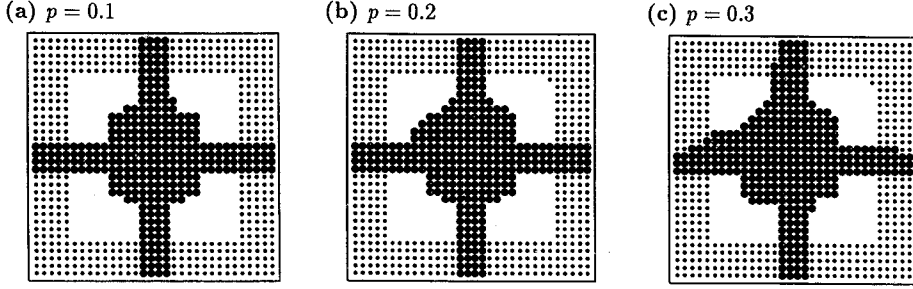


図 10：平均場アニーリングによる3値画像の修復画像  $z_1^{(M)}$  ( $Q=3$ )

計算し、この  $R_2$  が  $\sigma_2$  に正確に等しくなる画像と最適パラメータ  $J$  を選び出す問題に置き換えてしまった。この両者は  $R_2$  が  $J$  の連続関数であれば等価であるが、表 2 および表 5 に示されたように不連続関数であるが故に、異なる問題設定に置き換わってしまったことになる。前者の問題設定に立ち帰って得られる結果が、本論文で得られた結果とどの程度異なるのか比較検討することは残された今後の問題のひとつである。また、その場合どのような探索法で最適解を探索するかについても興味ある問題である。

本論文においては何らかの方法で  $\sigma_2$  が正確にわかっているとして画像修復を行った。しかし、実際にはこの量すら正確に知ることができないことの方が多い。原画像を用いずに観測画像だけから  $\sigma_2$  を評価できることが報告されている [12]。

統計力学において平均場近似を越える近似法の 1 つにクラスター変分法がある [15]。我々はマルコフ確率場モデルに対してクラスター変分法を適用することに成功している [11]。

### 付録 A

拘束条件 (8) に対してラグランジュの未定係数  $\lambda$  を以下のような形で導入する。

$$\mathcal{L}\{\rho\} \equiv E\{\rho\} - TS\{\rho\} + \lambda[\sum_{z_I} \rho(z_I) - 1] \quad (41)$$

式 (15) と式 (16) を代入することにより、 $L\{\rho(z_I)\}$  は以下のように書き換えられる。

$$\mathcal{L}\{\rho\} = \sum_{z_I} \left( H(z_I) + T \ln \rho(z_I) + \lambda \right) \rho(z_I) - \lambda \quad (42)$$

$L\{\rho(z_I)\}$  の極値をとるための必要条件は変分原理により以下のように与えられる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}\{\rho\}}{\partial \rho} = H(z_I) + T \ln \rho(z_I) + \lambda + T = 0, \quad (43)$$

すなわち、

$$\rho(z_I) = \exp\left[-\frac{\lambda}{T} - 1\right] \exp\left[-\frac{1}{T} H(z_I)\right] \quad (44)$$



式(44)を式(8)に代入することにより、 $\lambda$  は以下のように決定される。

$$\exp\left[-\frac{\lambda}{T} - 1\right] = \left(\sum_{\mathbf{z}_I} \exp\left[-\frac{1}{T} H(\mathbf{z}_I)\right]\right)^{-1} \quad (45)$$

これを式(44)に代入することにより、式(7)で与えられたギブス分布が得られる。

### 付録B

拘束条件(10)に対してラグランジュの未定係数  $\lambda_{i,j}$  を以下のような形で導入する。

$$\mathcal{L}\{\rho_{i,j}\} \equiv E\{\rho_{i,j}\} - TS\{\rho_{i,j}\} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} \left[ \sum_{z_{i,j}=0}^{Q-1} \rho_{i,j}(z_{i,j}) - 1 \right] \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\rho_{i,j}\} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{z_{i,j}=0}^{Q-1} & \left( -\delta(y_{i,j}, z_{i,j}) - J\rho_{i+1,j}(z_{i,j}) - J\rho_{i,j+1}(z_{i,j}) \right. \\ & \left. + T \ln \rho_{i,j}(z_{i,j}) + \lambda_{i,j} \right) \rho_{i,j}(z_{i,j}) - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \lambda_{i,j} \end{aligned} \quad (47)$$

$\mathcal{L}\{\rho_{i,j}\}$  の極値をとるための必要条件は変分原理により以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}\{\rho_{i,j}\}}{\partial \rho_{i,j}} &= -\delta(y_{i,j}, z_{i,j}) - J\rho_{i-1,j}(z_{i,j}) - J\rho_{i,j-1}(z_{i,j}) \\ & - J\rho_{i+1,j}(z_{i,j}) - J\rho_{i,j+1}(z_{i,j}) + T \ln \rho_{i,j}(z_{i,j}) + \lambda_{i,j} + T = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}(z_{i,j}) = \exp\left[-\frac{\lambda_{i,j}}{T} - 1\right] \exp\left[\frac{1}{T} \left( \delta(y_{i,j}, z_{i,j}) + J\rho_{i-1,j}(z_{i,j}) + J\rho_{i,j-1}(z_{i,j}) \right. \right. \\ \left. \left. + J\rho_{i+1,j}(z_{i,j}) + J\rho_{i,j+1}(z_{i,j}) \right) \right] \end{aligned} \quad (49)$$

式(49)を式(10)に代入することにより、 $\lambda_{i,j}$  を決定し、これを式(49)に代入することにより、式(20)-(22)で与えられた  $\rho_{i,j}(z)$  に対する平均場方程式が得られる。

(平成8年6月7日 受理)

### 参考文献

- [1] 篠本滋：情報の統計力学（丸善株式会社，1990）
- [2] Hertz, J., Krogh, A. and Palmer, R. G. : Introduction to the Theory of Neural Computation (Addison-Wesley, 1991); 笹川辰弥, 呉勇訳：ニューラルコンピュータ—統計物理学からのアプローチ—（アジソン・ウェスレイ・トッパン，1994）
- [3] Geman S. and Geman D. : “Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images”, IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intel., PAMI-6, pp.721-741 (1984).
- [4] Gidas B. : “A renormalization group approach to image processing problems”, IEEE Trans. Pattern

- Anal. & Mach. Intel., PAMI-11, pp.164-180 (1989).
- [ 5 ] Geiger D. and Girosi F. "Parallel and Deterministic algorithms from MRF's: surfacereconstruction", IEEE Trans. Pattern Anal. & Mach. Intel., PAMI-13, pp.401-412 (1991).
  - [ 6 ] Zhang J. : "The mean field theory in EM procedures for Markov random fields", IEEE Trans. Signal Process., 40, pp.2570-2582 (1992).
  - [ 7 ] 工藤博幸, 川内道子, 斎藤恒雄 : "マルコフ確率場モデルを用いた画像のエッジ検出—平均場アニーリングによる最適化とパラメータ推定—", 信学論 (A) J77-A,12, pp.1747- 1757 (1994).
  - [ 8 ] 渡部秀一, 工藤博幸, 斎藤恒雄 : "統計モデルを用いたパラメータ自動推定型画像セグメンテーション", 信学論 (D-II) J78-D-II, 2, pp.281-291 (1995).
  - [ 9 ] 五十嵐治一, 川人光男 : "標準正則化理論の2層確率場モデルへの拡張", 信学論(D-II) J75-D-II, 1, pp.157-161 (1992).
  - [10] 五十嵐治一, 川人光男 : "2層確率場モデルによる逆問題の解法—エッジ情報を用いた画像修復への応用—", 信学論 (D-II) J77-D-II, 6, pp.1104-1113 (1995).
  - [11] Tanaka K. and Morita T. : "Cluster variation method and image restoration problem", Phys. Lett. A, 203A, pp.122-128 (1995)..
  - [12] Morita T. and Tanaka K. : "Determination of parameters in an image recovery by statistical-mechanical means", Physica A, 223A, pp.244-262 (1996).
  - [13] 宮下精二 : 熱・統計力学 (培風館, 1993).
  - [14] Poggio T., Torre V. and Koch C.: "Computational vision and regularization theory", Nature, 317, pp.314-319 (1985).
  - [15] 守田徹 : "フラストレートした磁性体の統計力学", 新しい物性 (石原明, 和達三樹編著, 共立出版, 1990).