フッサールの数理哲学（３）　：拡張不可能性　ヒルベルトとの比較

その他（別言語等）のタイトル	Husserls Philosophie der Mathematik (3) : Unerweiterbarkeit : Ein Vergleich mit Hilbert Husserl's Philosophy of Mathematics (3) : Inextensibility : comparing with Hilbert
著者	二宮　公太郎
雑誌名	室蘭工業大学紀要
巻	50
ページ	101-110
発行年	2000-11-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/139

室工大紀要第50号(2000)101～110

フッサールの数理哲学 (3) ー拡張不可能性：ヒルベルトとの比較ー

二宮公太郎*

Husserls Philosophie der Mathematik (3) —Unerweiterbarkeit : Ein Vergleich mit Hilbert—

Kohtaroh NINOMIYA

(原稿受付日　平成12年4月28日　　論文受理日　平成12年8月31日)

Kurzfassung

Husserl erklärt deutlich in "Ideen" und "FTL", daß die 'Definitheit' im Zusammenhang mit Hilberts 'Axiom der Vollständigkeit' steht. Diese Abhandlung untersucht die Bedeutung dieses Zusammenhang. Husserl nennt Hilberts Vollständigkeit 'die absolute' und seine eigene hingegen 'die relative'. Er sagt, daß die letztere innerhalb der ersteren bewege. Was bedeutet das ?

Schlüsselwörter : Axiomensystem, Erweiterung, definite Mannigfaltigkeit, Hilbert, Modell, Phänomenologie

1．はじめに

フッサールの「多様体」論が含む「確定性」概念について、R.シュミットは三つの意味を区別している。第一に「拡張不可能性」、第二に「決定可能性」、第三に「意味論的完全性」である。

筆者は、本『紀要』前々号において、フッサールの考え方の内には、第三の「意味論的完全性」の概念は存在しないこと、この概念は第二の「決定可能性」の概念に還元されること、を明らかにした。

筆者はまた、本『紀要』前号において、〈フッサールが主張する、第一の「拡張不可能性」と第二の「決定可能性」との「同値」〉の問題を扱った。そして、〈フッサールは、特定の〈領域〉に場面を限った上で、公理系のこれら二つの性質を考えていること〉、また、〈この場面の内では、これら両性質の「同値」は、容易に証示され得ること〉、を示した。

しかし、その際に現われてきた、ヒルベルトとの関係に関わる諸問題については、それらを示唆するに留まった。本稿は、この問題圏域について、フッサールの「拡張」理論を解明することの内で、考察することにしたい。

2．フッサールの著作から

公刊された著作の内で、フッサール自身が、ヒルベルトの名を挙げて、彼に言及している箇所を、まず見ておこう。

『イデーン』で、フッサールは、こう述べている。

＊共通講座

渡辺二郎による訳を、そのまま引用しよう。

……… 確定性という概念が、D.ヒルベルトによって算術の基礎づけのために導入された「完全性の公理」と、近い関係にあることは、数学者にならば誰にでも、直ちに領けるところであろう。[1]

降って『形式論理学と超越論的論理学』では、フッサールは、こう述べている。

私はここで“完全な(vollständig)公理系”という 元々私のものではない表現を一般に用いたが、この表現は、ヒルベルトに由来するものである。〈私の諸研究を規定した哲学的-論理的な諸考量〉によって導かれることは無しに、彼もまた、(未公刊のままになっている私の諸探求からはもちろん全く独立に)完全性(Vollständigkeit)という彼の概念に到達した。 すなわち、彼は、或る固有の“完全性の公理(Axiom der Vollständigkeit)”を通して一つの公理系を完成し(ergänzen)ようとする。 上に[先の諸節において]為された諸分析が明らかにした言ってよいであろうことは、〈彼を数学的に導いた内奥の諸動機が、顕在的にではないにせよ、確定的多様体という概念を規定した諸動機と、本質的なものにおいて同じ方向を進んでいた〉ということである。[2]

3．バシュラールの解釈から

S.バシュラールは、

我々は、確定性の概念が、〈ヒルベルトによって算術の公理論へ導入された………完全性の公理という意味における完全性の概念〉とは、フッサールの確言とは反対に、全く異なっている、ということを見るだろう。[3]

と予告し、フッサールの理論（として彼女が解するもの）とヒルベルトの理論とを比較した後に、

確定的に述べて、ヒルベルトの完全性公理とフッサールの確定性概念との間には、フッサールによって肯定される繋がりは存在しない、と言うことができる。[4]

と断じている。

しかし、彼女の議論には、その前提からして、根本的に疑問が在る。 彼女は、フッサールの「確定性」を、基本的には「決定可能性」———彼女の言葉では「統辞論的完全性」———と解した上で、これと、ヒルベルトの「完全性公理」———モデルの拡張不可能性———とを、比較している。 比較しなければならないのは、フッサールの言う〈公理系の拡張不可能性〉と、ヒルベルトの考える〈モデルの拡張不可能性〉とを、である。

彼女が「完全性」概念を一般的な意味で定式化したもののうち、第二の定式を見よう。 彼女が、フッサールの「確定性」概念を、これに該当するとした、その定式である。

2．或る公理系は、当該の公理系の諸公理から導出され得ない表現を有った或る一つの公理の付加が、それら[新旧合わせた]諸公理を矛盾的なものにする、そういう場合、「完全である」(………‘統辞論的に完全である’）と呼ばれ得る。[5]

これは、実は「拡張不可能性」の規定である。 しかし、彼女は、なぜかこれを「決定可能性」にすり替えるのである。 もっとも、或る一定の領域に限定した上でならば、しかも、フッサールが考える意味での「決定可能性」———それは、当の領域において方程式が解を有する、という程度のものである。———とならば、公理系の「拡張不可能性」は同値である。 しかし、バシュラールが比較しているのは、一般的な意味での「決定可能性」と、ヒルベルトの「完全性公理」———モデルの拡張不可能性———とを、である。 これら両者間の「含意関係の内に幾つかの破れが存在する」[6]のは、現代の数学基礎論から見れば、当然のことである。

フッサールがヒルベルトに言及するのは、公刊された著作に限らない。 彼は、『草稿』[7]の内でもヒルベルトに言及していて、それどころか、そこでは、ヒルベルトの思想そのものや、自分の考え方とヒルベルトのそれとの間の関係にまで、或る程度立ち入って言及している。

「近い関係にある」ないし「本質的なものにおいて同じ方向を進んでいた」というフッサールの言葉について何かを判断するためには、『草稿』をこそ、我々は検討しなければならない。

4．「完結公理」に関して

まず、二人に共通する点を見よう。「完結公理」の排除である。

ヒルベルトは、どう言うだろう。

「拡張」と「完全性」に関するヒルベルトの考え方に関しては、まさにそれをフッサール自身が簡潔にま

とめている箇所が在る。ヒルベルトが第５回数学協会のために行なった講演に関する覚え書きである。

> ２）ところで、ひとは、或る与えられた公理系に添えて、〈完結する公理（das abschließende Axiom)〉をそれに付け加えるという仕方で、その公理系を完結しようと試みる。（他の諸客観と並んで）その公理系を満足する［公理系に適応する］如何なる新しい種類の客観 ε も、存在すべきではない、と。しかしこのことは、一般に、通用するものではない。特に言えば、算術の公理系は、(ヒルベルトの列挙に従えば）アルキメデスの公理の除外を伴っては（或いは、無理数的なものに付随する諸公理なしでは)、完結されて (geschlossen) いない。(8)

文脈に即して「完結公理」を説明すれば、それは例えば、アルキメデスの公理――無理数を基礎付ける「存在命題」の一形式――を除外して算術の公理系を立てた上で、「有理数の領域を越えては、数は存在しないこととする」と宣言する、というような機能を果たすものである。「しかし、このような公理系は、数領域の全てを尽くしてはいない」と、ヒルベルトは言っている訳である。

この覚え書きのすぐ後を見よう。

> ３）アルキメデスの公理を付け加えるならば、算術の体系は完結されている。〈新しい客観 ε の如何なる付加も、矛盾を導くだろう〉ということを、ひとは証示することができる。
>
> ヒルベルトは言う、そして更に、諸々の無理数の存在を当の領域の内で証示することができ、それ故、無限の手続き行程を初めから前提する必要はない、と。(9)

これによれば、アルキメデスの公理を含む算術の公理系は、「完結公理」に頼ることなく、公理系の本性に従って既に、それが支配するべき数領域――実数領域――の全てを尽くしている、とヒルベルトは言っていることになる。

次に、フッサールの主張を見よう。「完結公理」に頼るべきではないという考え方は、フッサールに共通である。

> ……… 完結公理とは、〈これこれの諸公理を通して当の領域が規定され、しかも他の諸公理は妥当しない〉というものである。……… 完全性についてのこの概念は、非真正(unecht)の完全性として、特記されるべきである。(10)

「完結公理」は、言わば規約的に付加される「公理」である。それの基底には、一定の形式の式は「この領域で解を有たない」と「決定」した上で、既に在る操作に関して「新しい操作法則を導入しない」こととする、といった考え方が在る。要するに、言わば人為的な仕方で拡張を禁ずる、という考え方である。

この「規約的」な性格を、フッサールは、こう表現する。

> ［非真性］と言うのはすなわち、この完全性は、何ら諸々の公理系において特殊に特徴的なものなのではない、ということである。なぜならば、如何なる公理系 ……… をも、我々は、一つの このような否定的な完結公理を通して、似て非ながら完全 (quasi vollständig) に為し得る、からであって、それ故にまた、この完全性は、ここでは我々にとって、全く何の役にも立たないことになる。(11)

続けて、フッサールは、こう断ずる。

> 我々が或る公理系を拡張するという場合の観点においては、我々は、自明のことながら、完結の諸公理 (Schließungsaxiome) を放棄する。………
> 拡張という概念は、否定的な完結公理が［他の諸公理と］共に思いなされているのではない、ということを前提する。(12)

公理系の拡張不可能性を考える際には、あくまでも当の公理系に固有の本性に従って――先の引用中の表現を借りれば、当の「公理系において特殊に特徴的なもの」に即して――考えて行こう、とフッサールは言っているのである。

ところで、ここで注意すべきは、新しく付け加えることを「完結公理」が禁ずるものについて、ヒルベルトは〈客観〉の面から語り、フッサールは〈公理〉の面から語っている、ということである。このことは、―― 後述することを先取りして言えば ―― もともと〈拡張〉そのものに関して、ヒルベルトは「モデル」(領域) のレベルで考え、フッサールは領域を規定する〈公理系〉のレベルで考える、ということに由来する。両者が〈拡張〉そのものを考える際のアプローチの違いが、排除すべき「完結公理」を語る際にも、その表現を規定しているのである。

いずれにしても、両者にとって、人為的に拡張を終わらせるような「外的」な完結ではなく、公理系に内在する本性に従って、領域ないし公理系の拡張が不可能になる、そういう「内的」な完結の場面こそが、問題なのである。

5．フッサールの「拡張」理論

フッサールの確定性とヒルベルトの完全性とを比較するのに先立って、ここで我々は、フッサールの「拡張」に関する考え方を、それ自体として見ておこう。

5．1．「想像的なるもの」

「想像的なるもの」という概念は、フッサールの「多様体」理論を導いた概念である。 或る一定の数領域において、そこでの数概念によっては把握し得ない数が、数学における「想像的なるもの」である。それの端的なものは「虚数」だが、フッサールの探求の構えからすれば、それは領域ごとに現われる。 フッサールは、次の引用に見る通り、この概念を広く採っている。

> 当然ながら私はここで、“想像的”という表題を、可能な限り広く把えている。 これに従えば、負数も、実に分数・無理数やこれらに類するものさえも、想像的な数として妥当する。(13)

この「想像的なるもの」にフッサールが何故にこだわるのか、その問題意識がよく分かる記述を見よう。

> 諸客観の或る領域 ―― そこにおいては、〈或る一定の公理系Aの内で言い表わされる、結合と関係の諸形式〉が、諸客観の特殊な本性によって規定されている、そういう一つの領域 ―― が、与えられているとする。 この体系に基づいて、従って諸客観の特殊な本性に基づいて、一定の結合諸形式は、如何なる実在的な意味をも有たない。言い換えると、反意味的な結合諸形式が、存在する。(14)

我々は、最も単純な場面で考えよう。 例えば〈自然数を定義し、四則演算と相等・大小の諸公理を含む、極く普通の公理系〉において、方程式 $a+x=c$ や $c-a$ という操作は、$a>c$ の場合には、意味を有たない。 引用の内では、ことがらが結合形式の面から語られているが、それは、結合の所産という面から見られてもよい。 $c-a$ という形式は、操作そのものをも、また操作によって形成されるべき一つの「数」をも、ともに意味する。 この「数」こそ、拡張された公理系の内で負数が定義される以前には、まさに、「想像的なるもの」なのである。

これに続く記述を見よう。

> 如何なる権利を以つて、反意味的なものが、計算の上で処理されて構わないのか？ それ故また、如何なる権利を以つて、反意味的なものが、演繹的な思惟の内で、あたかも［有意味なものと］調和するものであるかの如くに、用立てられ得るのか？ 〈反意味的なものを以って、規則に従って操作され得る〉ということ、また〈諸々の命題の内から反意味的なものが現われ出てきた場合に、得られていたそれら諸命題が正当なものである〉ということ、これらのことは、如何にして説明され得るのか？(15)

先の例を続ければ、拡張された整数の公理系の内では、負数の定義とともに、操作（演算）に付随する「操作法則」が、自然数 a, b を基に、$(-a)+(-b)=-(a+b)$, $(-a)\times(-b)=a\times b$ 等々として、付加されるだろう。 そうなると、以前には「想像的なるもの」であった負数は、通常の四則演算に従うようになり、しかも、それら演算は、以前の自然数のための諸操作と同じものである。

このようなことは、既に我々が慣れ切ってしまっていることである。 しかし、その際には、不条理なはずのものが、それを不条理として排斥した際に働いていた当の思考形式の内で、あたかも条理に適うものとして、通用するものとなる。 まさにこのような事態こそが、その際に機能しているに違いない思考の概念的転換とともに、フッサールの関心事なのである。

5．2．「拡張」の過程

フッサールは、この「想像的なるもの」を「通って」、領域を拡張して行く。 拡張を導く思考の筋道を、フッサールは、「想像的なるものを通る通路」(der Durchgang durch das Imaginare)(16) と名付ける。 そして実は、拡張とは、「想像的なるもの」が、その幻影性を失い、現実性を獲得して行く、そういう一連の過程なのである。

公理系の拡張とは、領域の拡張に応じて新しい〈演算〉を付加する、というのではない。 算術の公理系は、加減乗除の「結合」ないし「操作」そのものを表現する諸公理と、相等・大小の「関係」を表現する諸公理とを、初めから有っている。 「想像的なるもの」は、このことの一般性と、領域を規定する数概念の限定性とから、生じてくるのである。 だから、公理系の拡張は、新しい客観を規定する「存在命題」と、操作を詳細に規定する「操作法則」とに、関わっている。

このことを前提した上で、自然数から整数ないし有理数への拡張の過程を、辿ってみよう。

フッサールには、特に‘Anzahl’という語を、‘Zahl(数)’という語から 区別して用いることが、時として在る。 この語によって〈自然数〉を意味させるのは、彼による用法の一つである。 ここでは、この語を、仮に「数え数」と訳しておこう。

３＋ｘ＝５ は、〈数え数〉によっては解を有ち得ない。 自然数の領域と公理系にとって、〈負数〉は「想像的なるもの」である。 負数を定義し、領域を〈整数〉へと拡張するときに、同時に、「数」の概念そのものが変質する。 それは、「いくつ？」に答える語ではなくなる。

このことを先鋭化して、フッサールは、次のようにさえ記す。

> 我々が〈数え数〉ということで‘いくつ？’という問いへの答えを理解するならば、諸数の系列は、〈‘いくつ？’という概念の圏域の内において可能な、諸々の特殊なもの〉の完結した多様体である。……… しかし、或る一定の操作諸結果は、‘いくつ？’の観念に矛盾し、もし 私がこれを定義すれば、私はまさに矛盾する諸数を定義したことになる。 ……… しかしそれでもやはり私が定義するのであれば、私は不条理な諸概念を定義するのであり、またもし、これら不条理な諸概念が計算の上で許容されるべきであり、それらの不条理さにも拘わらず、それらを以つて思惟の内で操作するということが許容されるべきである、というのであれば、そのような諸操作の権利が、証示されなければならない。(17)

〈整数〉―――さし当たって、〈正〉に限ってもよい―――の領域にとって、分数は「想像的なるもの」である。 〈有理数〉領域への拡張とともに、 数概念は、〈分割し得る量〉へと、変質を被る。

> ……… 諸々の分数が 実在的な意味を得るのは、〈数え数概念を保持したまま、分割し得るものとして諸単位を前提する〉ということによってではなく、〈数え数の領域をおよそ離れて、一つの新しい概念すなわち《分割し得る量》という概念を根底に置く〉ということによってである………。(18)

拡張が諸々の領域を経て為されるにしても、このように、個々の領域が各々に個性を有しているということを、フッサールは強調する。 「拡張」は、単に領域が量的に広がるというだけではない。 また、単に新しい公理が併置されるというのでもない。 拡張は、その段階ごとに、「数」について概念的な区別を生ぜしめるのである。

〈実数〉への領域の拡張においても、事情は同様である。 ｘ・ｘ＝２ を満足する数――〈無理数〉――は、有理数領域にとって「想像的なるもの」である。

もっとも、無理数を含んだ実数一般に関するフッサールの態度は、或る意味で二義的である。 彼は、無限個のものの「総体」を扱った論文草稿（「総体の理説について」(19)）において、カントールの集合論に関わっている。 フッサールは、数の〈構成〉の仕方という観点においてのみカントールを評価していた、と見られるフシが在る。 全ての有理数を構成する仕方は知られても、全ての無理数を―――従って全ての実数を―――構成する仕方を、我々は知らない。 構成の仕方を部分的にしか知らない数の〈概念〉を、ポジティヴに規定することが、はたしてできるだろうか？ この意味では、実数領域の扱いには、それ以前の領域の扱いとの間に、フッサールは何らかの差異を置くはずである。 この限りでは、直観主義に通づるものを、彼は有っている。 しかし他面、多様体論においては、公理系が含む操作・関係の諸対象・諸項に関して、有理数領域と実数領域との間に、彼は何らの差異をも置いていないように見える。 この問題圏域についての詳細は、筆者に能力と機会が在る限りで、別稿に譲るしかない。

さて、〈複素数〉への領域の拡張が、考察されるべく次に控えている。 本『紀要』前号で示唆したように、この拡張をめぐるヒルベルトとフッサールとの関係は、一つの問題である。 しかし、我々は、まず実数までのレベルで考察を進めよう。 算術の公理系において実数モデルを最大とするヒルベルトの考え方が、我々の考察に一つの枠を与えるのだから。

６．フッサールとヒルベルトとの比較
―――両者の「拡張」理論―――

さて、いよいよ我々は、フッサールとヒルベルトとの考え方の相違する点を見て行こう。

フッサールの『草稿』の内には、フッサール自身がヒルベルトの名そのものを挙げて彼に言及している箇所が、いくつか在る。 フッサールとヒルベルトとの

関係に関する我々の検討は、それらから出発するべきであろう。

6.1. ヒルベルトの考え方

ヒルベルトの考え方に関する先のフッサールの覚え書きには、実は、「拡張」を巡るもっと本質的な記述が在る。

1）或る公理系は、当の公理系が自ら支配する思惟諸客観を次のような仕方で規定する場合、完結されている(abgeschlossen)（私は、残念ながら、ヒルベルトの表現について、これ以上は憶えていない）。　それは、――― 如何なる新しい（新しい種類の）客観も、〈この公理系が、いまや、その拡張された領域をも支配する（のに、矛盾が生じることなく、そうする)〉という具合いには、補い加えられ得ない。――― という仕方で、である。(20)

ここで、ヒルベルトによって、「完結」―――すなわち「完全性」――― は公理系に関して言われ、「付加し得ない」という性質は「客観」に関して言われている、ということに注意しなければならない。

先の引用に在った算術の公理系に即して具体的に言えば、こうなる。 ――――― アルキメデスの公理を含んだ算術の公理系にとって、例えば有理数モデルは、実数モデルへと拡張され得る。　しかし実数モデルは「最大のモデル」であり、これを越えてモデルを拡張することはできない。　ヒルベルト独自の「完全性の公理」が算術の公理系に付加されたもとでは、このことこそ、〈実数モデルが、「完全性の公理」を満たす〉ということに他ならない。　それはまた、〈算術の公理系が、実数領域を支配する公理系として、完全である〉というのと、同じことを意味する。

6.2. フッサール自身による比較

『草稿』の内には、フッサール自身が、自分とヒルベルトとを比較して、各々の「完全性」の性格を或る程度立ち入って規定している、極めて重要な箇所が、いくつか在る。

6.2.1. 「本質的」と「本質外的」

まず、フッサールが、「本質的」という語と「本質外的」という語とを使って、ヒルベルトと自分とを対比している、大いに興味の惹かれる箇所を見よう。

………我々は今や容易に、ヒルベルト氏の意味における「完全な公理系」へと到る。　これまでの意味における公理系を、私は「確定的」と呼んできた。　私はそれを今度は、「本質外的(außerwesentlich)に完全な[公理系]」と呼ぼう。　ヒルベルト的な意味における「完全な」に対する区別において、そうしよう。　そして、こちらを私は、「本質的(wesentlich)に完全な[公理系]」と呼ぼう。　この後者の概念は、――― 私は自分の目的のために「本質外的」ということによって全てを導いてきたのだから、――― 私にとって隠されたままである。(21)

フッサールは、ヒルベルトの「完全」性を「本質的」と呼び、却って自分の「確定」性を「本質外的」と呼ぶ。　我々が、この「本質外的」ということで、フッサールの考える完全性を何か価値的に劣るようなものとして考えたとすれば、それは全くの見当外れである。

この引用の少し前を見よう。

………いまや、二つの場合が可能である。 一方では、〈確かに可能的な諸々の操作-被形成者は未だ開かれたままであるが,しかし他面,我々が定義した範囲では当の公理系は確定的である〉というふうに、まさにこういう具合いに、我々が、或る一連の確立されたものを有つ、という場合。　或いは他方では、如何なる操作-諸所産も ――― 注意すれば、〈普遍的な諸原則および既に定義された特殊的な諸原則と調和･両立する 可能的な 如何なる操作-諸所産も〉ということであり、従ってまた〈当の公理系の全体が同一的に保持されたもとで、その領域の全体にとって〉ということである ――― 、もはや開かれたままではいない、という場合。こちら[後の方のもの]が、絶対的な 或いは〈本質的に完全な〉諸公理系の場合である。(22)

前者がフッサールのものである。　例えば、負数を定義し終えた公理系において、操作の結果は、それが整数である限りで有意味である。　しかし、この公理系において意味を有ち得ないもの（例えば分数）は、未だ現われ得る。　フッサールの考えている完全性は、あくまでも「我々が定義した範囲で」のみ確定的であるということなのである。

後者がヒルベルトのものである。　言わば、最大に採られた公理系のもとで、操作結果の全てについて、それらが有意味であり妥当する、ということである。なお、この完全性についてフッサールが「絶対的」という語をも用いていることに、注意されたい。

この後者を、少し後でフッサールは、こう言い換えている。

> それ故また、或る本質的に完全な操作体系とは、次のようなものである。 すなわち、その操作体系が一般に根底に置くところの、関係と結合の諸形式に関して、如何なる可能性をも開かれたままにしておかない、そういう操作体系である。 言い換えると、このような操作体系は、普遍的および特殊的な諸法則によって、次のように定義されている。 すなわち、あらゆる形式的におよそ可能な設定が既に言い当てられている、という具合いにであり、或いは、より良くは、気ままな如何なる形式的設定も、操作による何らか諸々の被形成者に関して、これまでの諸公理を傷つける（それら諸公理の、現実存在する領域全体への、一般的適用可能性において）こと無しには、もはや言い当てられ得ない、という具合いにである。(23)

ここでフッサールは、「本質的に完全な」公理系の属性を、〈関係・結合が具体化される際の在り得る全ての場合について、当の公理系が、その詳細を余すところ無く予め規定している〉こと、という面から規定しているのである。

さて、フッサールが自らの「確定」性を「本質外的に完全」と呼ぶ際の その意味は、〈操作によって形成された結果が有意味であり公理系の内で妥当するのは、あくまでも「我々の定義した範囲で」である〉ということである、ということが分かった。 この意味を、もう少し明確にして行こう。

6.2.2.「絶対的」と「相対的」

フッサールは、別の箇所では、「相対的」ないし「制限されて」ということと、「絶対的」——— この語は、先の引用中にも用いられていた ——— ということとで、自分とヒルベルトを対比している。

> 1） 公理系は、それに従って意味を有する何れの命題も、それの領域への制限の内で決定されている という場合には、〈相対的に確定的〉である。公理系は、それに従って意味を有する何れの命題も およそ一般に 決定されている、という場合には、〈絶対的に確定的〉である。

従って、〈絶対的に確定的な〉とは、ヒルベルト的な意味における〈完全な〉に等しい。(24)

「相対的」と「絶対的」との相違は、公理系が「領域」に言わば縛られているか否か、ということに関わる。 ここでは、そのことが「決定可能」の面から語られている。

「相対的」に確定的という規定が、フッサール自身が考えている完全性の規定である。 それは、一定の「領域への制限」が付されているという限りで、「相対的」なのである。

他方、ヒルベルトのものである「絶対的」に確定的とは、当の公理系の本性に従って「およそ一般に」決定可能という意味である。

これに続く記述は、「絶対的」ということを更に解説したものである。

> 2） ただ、当の領域の諸対象に対して、（既に与えられた諸公理を通して意味を受け取る）如何なる公理も付け加えられ得ない、というだけではなくて、およそ一般に、如何なる公理も付け加えられ得ない、という場合[である]。(25)

ここでは、同じことが「拡張不可能」の面から語られているのである。

この相違を、フッサールは、これら二つの引用の少し後で、次のようにも言い換えている。

> 以上から、何れの公理系も、それは如何なる可能的な操作結果をも開かれたままにしておかないが、このことが、それの諸定義の指標に従ってである、という場合には、〈制限されて完全(beschränkt komplett)〉であると言われる。 公理系はまた、それが、およそ一般に如何なる可能的な操作結果も開かれたままではいないという程度に広く定義を張り渡す、という場合には、〈絶対的に完全(absolut komplett)〉であると言われる。(26)

フッサールの完全性概念 ———「制限されて完全」——— に関しては、「諸定義の指標に従って」という条件が付せられている。 この表現は、先に「本質外的」完全性に関して言われていた「我々が定義した範囲内で」という表現に、呼応している。 そして、この「定義」とは、公理系が一定の〈領域〉を画定するということに他ならないのである。

これに対して「絶対的に完全」な公理系は、初めから全ゆる領域を覆うほどに「広く定義を張り渡す」公理系である、ということになる。

さて、ここで我々には、フッサールに固有の「本質外的」という奇妙な言葉に修飾された「完全性」の意

味が分かる。 それは、一定の領域に関わるという意味で「相対的」であり、その限りで一定の領域に「制限されて」いる、そういう「完全性」なのである。

6.3. 両者の連関

「完全性」についての二人の概念は、対比されるだけで、それらの内的連関は存在しない、ということになるのだろうか？ 仮にそうだとすれば、先の S.バシュラールの主張が、必ずしも彼女の言う意味と同じではないせよ、基本的には妥当する、ということになるだろう。 しかし、両概念の緊密な連関を示す、短いが 極めて注目すべき 次の記述が在る。

> さてそこで、本質的に完全な諸公理系――また、本質的に閉じられた[完結した](geschlossen) 操作諸体系というふうにも、我々は言えるであろうか―― が 最も大きい領域を形成し、その内部で、最初の公理系が保持されつつも、本質外的な[諸公理] の拡張が、運動し得ることになる。(27)

「拡張」に関するヒルベルトとフッサールとの具体的な活きた関係が、フッサール自身によって、ここに明きらかにされている。 フッサールの拡張理論は、言わば、ヒルベルト的な思考方法で限界付けられた枠の中で機能するのである。

ヒルベルトは、公理系を初めから最大に採る。 いま我々の関心である算術に話を限れば、具体的には、実数領域を支配するものとして設定された公理系――アルキメデスの公理を含む――である。 フッサールの考える「領域」は、ヒルベルトでは「モデル」として処理される。 「拡張」や「拡張不可能」は、公理系のそれらではなく、「モデル」のそれらである。

フッサールは、ヒルベルトが「モデル」を以って考えたレベルにも、公理系を持ち込む。 ヒルベルトにとって「モデル」だったもの――領域――は、フッサールにとっては、その各々が、各々に個性を有った数概念とともに、固有の公理系によって規定されているのである。 フッサールは、恒に〈領域－公理系〉のセットで考える。 拡張についても同様である。「拡張」や「拡張不可能」は、彼に固有の「相対的」な意味では、一定の領域を定義している当の公理系のそれらである。

要するに、ヒルベルトにとっての「モデル」の拡張は、フッサールにとって、領域の拡張に伴った〈公理系〉の拡張なのである。

このように、フッサールは、「相対的完全性」を通して為される自らの方法による公理系の拡張を、ヒルベルト的な完全性の内に、すなわち「絶対的完全性」の内に、はっきりと位置付けている。 これだけを見ても、バシュラールのような解釈の方向を我々が採るべきでないことは、明らかであろう。

さらにまた、「近い関係にある」ないし「本質において同じ方向を進んでいた」というフッサールの言明は、もっと別の場面においても、重要な意味を有っている。

ヒルベルトにおいても、完全性公理を導入するのは、最大のモデル以外のモデルを 排除するためである。 算術の公理系は、実数領域を、言わば初めから狙っている。 実際、実数を限定する公理系の内で、ヒルベルトの「完全性」とフッサールの「確定性」とは、一致した〈領域〉を見いだすのである。 それどころか、ヒルベルトの算術の〈公理系〉は、それが一定の領域を規定するという意味でも、またそれが拡張し得ないという意味でも、フッサール の「確定的多様体」と、本質的に同じものなのである。

更に、ヒルベルトの「完全性公理」は、本質的には領域拡張の限界を指し示すものに他ならないから、それの概念的な内容からすれば、フッサールの拡張理論にとっても必要なものである。 〈拡張の止むところ〉――それは、フッサールの表現を用いれば、「最も低いスペチェス」に達したところ、である。――は、フッサールにも存在しなければならないのである。

このことが実際に意味を有ってくるのは、実数を越えて領域を〈複素数〉へと拡張する、という場面においてである。 公理系が、そこではもはや拡張し得ないというのであれば、それは「変更」されなければならない。 それが〈拡張〉され得るというのであれば、こんどは、複素数領域を規定する公理系が、「絶対的」な意味で〈拡張不可能〉な公理系であるのか否か、ということが問題となってくる。

この問題圏域を考えるためには、公理系の「変様」諸様態を考察すること、またフッサールに固有の「スペチェス」という概念を解明すること、が必要である。これらは、別稿に譲らざるを得ない。

7. おわりに

ヒルベルトは数学者である。 現代数学の到達した最終段階を前提して数学理論を形成すること、従ってまた、アルキメデスの公理を含めて実数領域を定義する公理系を初めから設定することは、数学者として当然の態度である。

フッサールは哲学者である。 数領域拡張の歴史に即して、各々の段階の概念的な意味を探っていくことこそが、彼にとっては、為さなければならないことである。 その際、各々の段階に現われる「想像的なるもの」に直面したときの思考の転換そのものが、フッサールにとって重要なのであり、更には、それが現実的なものに転化された際に、以前にはそれが「想像的なるもの」であった元の思考形式の内でも、あたかも現実的なものであるかの如くに、それが通用することになる、そのことの意味が、フッサールにとっては重要なのである。

ヒルベルトの「完全性公理」は、理論全体の内部に占めるそれの〈資格〉からすれば、もともとはモデルに対する評価として〈メタ〉に属する言明を、公理系の内へ言わば埋め込んだものである。 これに対してフッサールは、〈メタ〉を〈メタ〉として維持し、拡張を遂行する〈思惟〉の内に、これを確保するのである。 更に言えば、このレベルにこそ、〈概念〉が働く場を、或いは、もっと言えば、概念〈作用〉――従って、〈意識〉――が機能する場を、フッサールは見いだすのだろう。 現象学が存立する場も、まさに ここなのである。

(にのみや こうたろう・哲学)

注

1. 渡辺二郎訳『イデーンⅠ-Ⅱ』(みすず書房)32頁
   Husserliana,Bd.3, S.168, Anm.1
2. Husserliana,Bd.17, S.100,Z.39−S.101,Z.11
   [ ]内は二宮による補充(以下同様)。
   なお、山口等澍訳『形式的論理学と超越論的論理学』(和広出版) 124頁−125頁
3. Suzanne BACHELARD, A Study of Husserl's Formal and Transcendental Logic, 1968 (La logique de Husserl: Etudes sur "Logique formell et logique transcendentale", 1957), pp.58-59
4. ibid., pp.62-63
5. ibid., p.59
6. ibid., p.63
7. L.エーライ編集の HUSSERLIANA 第12巻には、『算術の哲学』の後 (S.340−S.500) に、出版に至らなかった数理哲学に関する10篇の論文が収められている. これを筆者は、本『紀要』前々号から『数理哲学草稿』(『草稿』と略) と呼び、考察の対象としている。
8. Husserliana,Bd.12, S.445,Z.7-Z.13
9. ibid., Z.14-Z.19
10. ibid., S.442,Z.4-Z.11
11. ibid., Z.12-Z.17
12. ibid., Z.17-Z.21
13. ibid., S.432,Z.38−S.433,Z.1
14. ibid., S.433,Z.11-Z.17
15. ibid., Z.17-Z.22
16. ibid., S.440,Z.6 & S.443,Z.35
17. ibid., S.434,Z.30−S.435,Z.9
18. ibid., S.436,Z.21-Z.26
19. ibid., S.385−S.407
20. ibid., S.445,Z.1-6
21. ibid., S.455,Z.30-Z.37
22. ibid., S.454,Z.33−S.455,Z.4
23. ibid., S.455,Z.9-Z.18
24. ibid., S.440,Z.9-Z.13
25. ibid., Z.14-17
26. ibid., S.444,Z.28-32
27. ibid., S.455,Z.4-Z.8

Husserl's Philosophy of Mathematics (3)

―― Inextensibility : comparing with Hilbert ――

Kohtaroh NINOMIYA *

Husserl declares in "Ideen" and "FTL" the relation of the 'definiteness' with Hilbert's 'axiom of completeness'. This treatise investigates the meaning of this relation. Husserl calls Hilbert's completeness 'the absolute' and his own 'the relative'. He says that the latter moves in the former. What does it mean ?

Key words : axiom-system, extension, definite multiplicity, Hilbert, model, phenomenology

* Common Subject Division