

逐次検定による逐次抜取検査と累積和管理図

その他（別言語等） のタイトル	Sequential Sampling Inspection and Cumulative Sum Chart Based on Sequential Analysis Procedure
著者	渡辺 治夫, 小幡 英二, 向井田 健一
雑誌名	室蘭工業大学紀要
巻	50
ページ	71-82
発行年	2000-11-30
URL	http://hdl.handle.net/10258/136

逐次検定による逐次抜取検査と累積和管理図

渡辺 治夫*¹, 小幡 英二*², 向井田健一*³

Sequential Sampling Inspection and Cumulative Sum Chart Based on Sequential Analysis Procedure

Haruo WATANABE, Eiji OBATA and Ken-ichi MUKAIDA

(原稿受付日 平成12年4月28日 論文受理日 平成12年8月31日)

Abstract

While 3-sigma control chart in quality-control procedure takes into account only type-I error, sequential sampling plan and cumulative-sum chart are derived from the sequential analysis, developed by Wald's criteria using likelihood-ratio and both the type-I error and the type-II error. The viewpoint of hypothesis-test procedure in rejecting defective lots is introduced into the investigation of the sequential sampling inspection and the CUSUM chart. V-mask is useful to detect the change of manufacturing process with smaller samples than the samples employed in the 3-sigma control chart.

Keywords: CUSUM chart, QC, Sequential sampling inspection.

1. はじめに

3シグマ管理図や抜取検査は1930年代にアメリカで発表され、その後1950年代には逐次抜取検査規格の制定に続いて累積和管理図が開発され、品質管理の発展に寄与してきた。これは尤度関数比と第1種と第2種の過誤の確率すなわち抜取検査という生産者危険と消費者危険を関連させてウォルド(Wald)が1945年に発表した逐次検定の判定ルールに基礎をおいている。

ここでは先ず逐次検定の基本となるウォルドの判定ルールを仮説の検定に関連させて検討し、ついでこれに基づく計数規準と計量規準の逐次抜取検査方式の概要および累積和管理図の簡単な基礎と実際を述べる。

2. 抜取検査

設計仕様にしたがって生産されるすべての製品を製品規格に厳密に一致させようといくら努力しても、全

く同一の品物だけを得るのは実現不可能である。例えば、箱入り洗剤の正味質量が必ずしも表示量と一致しないのは、容器と洗剤の質量や密度、その他にばらつきがあるためである。このような場合、母数(パラメタ)未知の母集団を想定し、完成品が仕様標準に適合しているか否か、すなわち合格品か否かを判定することになるが、それにはなんらかの形の検査が不可欠である。例えば箱入りの製品の集合を母集団とし、その中に存在する量自不足の箱を不良品とするなら不良個数特性が対象となる。母集団は一般に有限で、例えば特定充填装置の1直分の箱の全個数とか、取扱や輸送に都合のよいようにコンテナに詰めた箱の総個数などがある。このような層別により均質な母集団が得られると想定する。この検査対象の母集団をロット、バッチ、仕切りなどと呼んでいる。

不良を検出するために実施されるのが検査である。製品仕様に決められた具備条件のうちのどれかひとつでも欠けていれば不良品と判定される。品物が設計仕様に一致しているか否かは、ロットの全数を検査しなければ分からないが、一般に、1) 破壊検査が必要な場合、全数検査をすれば売るものがなくなる、2) 全

*1 名誉教授、 *2 応用化学科、
*3 材料物性工学科

数検査をするには熟練検査員が不足している、3) 検査の直接費が大きく、あるいは全数検査をすると生産に遅れを生ずる、4) 不良率が小さく、ロットサイズが大きくて不良品をすべて検出できない、などの場合には全数検査は現実的でない。したがって各ロット中の不良品をすべて除去しなくてもよい場合には、なんらかの形の抜取検査が導入される。各ロットを全数検査して不良品をすべて除去するという大変な作業をする代わりに、抜取検査によりサンプルから得られる情報に基づいてロットの合否を判定し悪いロットだけを除くようにする。このような考え方は受入検査に大変革をもたらすことになった。サンプルの抜取には抜取誤差の入る危険を伴うが、それをカバーするために生産者と消費者の両者が生産者危険と消費者危険の導入について同意しなければならない。このような目的を達成するための基準として各種の抜取検査規格が制定されている。

3. 生産者危険と消費者危険

計数規準 1 回抜検査を例にとると、不良率 p のロットから抜き取った n 個のサンプル 1 組中の不良個数 r が合格判定個数 c 以下 ($r \leq c$) のときにこのロットを合格と判定することになるから、 $r \leq c$ で不良率 p のロットの合格確率 $L(p)$ は、サンプル n 個中の不良個数 r 個の確率密度関数 $f(r)$ について、 $r=0, 1, 2, \dots, c$ となる確率を加え合わせ次式で表される。

$$L(p) = \sum_{r=0}^c f(r|p) \quad (2.1)$$

また $r > c$ すなわち $r \geq c+1$ のときこのロットは不合格になるから、不良率 p のロットの不合格確率は次式で与えられる。

$$1 - L(p) = \sum_{r=c+1}^n f(r|p) \quad (2.2)$$

サンプル n 個中の不良個数 r は $0 \sim n$ 個間の値をとる確率変数で、その確率分布は n と p をパラメタとする 2 項確率関数にしたがい、さらに n が大で p が小なら $np = m$ をパラメタとするポアソン分布に近似される。

抜取検査でロットの良否を判定するのは仮説の検定問題といえる。合格させたいロットの不良率 (許容不良率) を p_0 とすると、この場合の検定したい帰無仮説は $H_0: p=p_0$ 、すなわち「ロットの不良率は p_0 である」であり、これを対立仮説の $H_1: p > p_0$ にたいし有意水準 α で判定することである。 $r \leq c$ で $p=p_0$ のときロットを合格させる確率は $L(p_0)$ で、(2.1)式より、

次式で与えられる。

$$L(p_0) = \sum_{r=0}^c f(r|p_0) \quad (2.3)$$

一方、 $r > c$ すなわち $r \geq c+1$ となって $p=p_0$ のように生産者側としては合格させたい良いロットなのに検査の結果誤って不合格としてしまう危険の確率は (2.2) 式から $1-L(p_0)=\alpha$ である。 α は第 1 種の過誤 (あわて者の誤り) をおかす危険の確率で、抜取検査方式では一般に $\alpha=0.05$ (=5%) とし、これを生産者危険という。またロット不良率 p が p_1 ($p_1 > p_0$) で、消費者側としては本来合格させたくないような悪いロットであるにもかかわらず検査の結果 H_0 が採択されて合格させてしまう確率は $L(p_1)=\beta$ だけある。これは第 2 種の過誤 (ぼんやり者の誤り) をおかす危険の確率であり、抜取検査方式では一般に $\beta=0.10$ (=10%) にとり、 β を消費者危険という。 α, β とも抜取検査方式に不可欠のものである。 $p \leq p_0$ の判定条件を満足するロットを良いロットとし、一方において判定条件を外れた $p \geq p_1$ のロットを悪いロットとするという点で生産者側と消費者側が合意していることが抜取検査方式の前提である。 $p_0 < p < p_1$ のロットは中間品質ロットと呼ばれる。

4. 尤度比法による逐次検定

母集団からの n 個のランダムサンプルの実測値を (x_1, x_2, \dots, x_n) とし、変数 x にたいする確率密度関数が母数 θ に依存し、 $f(x|\theta)$ で表されるとする。例えば、2 項分布の母数は n, p 、ポアソン分布の母数は m 、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は母平均 μ と母分散 σ^2 の複数の母数を有する。 (x_1, x_2, \dots, x_n) は $f(x|\theta)$ からのサンプルの値で互いに独立であれば、このサンプルにたいする同時確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)\dots f(x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$$

この関数を θ の関数とみて $q(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ で表し、与えられたサンプルの値 x_1, x_2, \dots, x_n にたいする θ の尤度関数と呼ぶ。

母数 θ が θ_0 のときの確率密度関数 $f(x_i|\theta_0)$ を $f_0(x_i)$ 、 $\theta=\theta_1 > \theta_0$ のときの $f(x_i|\theta_1)$ を $f_1(x_i)$ で表すことにすれば、尤度関数の比 (尤度比、確率比) λ は次式ようになる。

$$\lambda = \frac{q(\theta_1|x_1, x_2, \dots, x_n)}{q(\theta_0|x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{f_1(x_1)\dots f_1(x_n)}{f_0(x_1)\dots f_0(x_n)} \quad (3.1)$$

1 回ないし 2 回抜取検査方式では、母集団 (工程、

ロット、バッチ) から抜き取られるサンプルの大きさ n 個 (サンプルサイズ n) と合格判定個数 c をあらかじめ決めておいてロットの合否を判定するのにたいし、抜き取られるサンプルの大きさをあらかじめ固定しておかず、サンプル 1 個を抜き取る毎に検査し、それが良品か不良品かを調べていき、ある時点における累積不良品の到達個数をロットの合否判定に役立てようとする方式がある。この方式は逐次検定法 (逐次抜取検査) と呼ばれる。

第 1 種の過誤 α および検出力 $1-\beta$ による仮説の棄却域を最大にするような検定法に尤度比が用いられる。尤度比として $\theta_1 > \theta_0$ のとき $\lambda > 1$ なら、帰無仮説 $H_0: \theta = \theta_0$ の成立を疑うのが自然であるから、尤度比を仮説の検定に用いようとする考え方が生まれてくる。

逐次検定のためには (i) ロットの受入、(ii) ロットの廃棄、(iii) サンプルングの継続、の判定ルールを決める必要がある。合否が判定された時点で検査は終了し、その時点までに取られたサンプルの個数がサンプルの大きさになる。これは明らかに確率変数で、この逐次抜取検定方式にウォルド (Wald, 1945) の基準⁽⁴⁾が用いられる。

抜取サンプルの大きさをあらかじめ固定せずにロットの合否を調べるのに仮説検定の尤度比法が用いられる。この場合の仮説は、

帰無仮説 H_0 : 母集団の確率分布は $f(x | \theta_0) = f_0(x)$, すなわち $\theta = \theta_0$ である、

対立仮説 H_1 : 母集団の確率分布は $f(x | \theta_1) = f_1(x)$, すなわち $\theta = \theta_1$ ($\theta_1 > \theta_0$) である、

であり、 H_0 を H_1 にたいし有意水準 α (第 1 種の過誤、生産者危険) で検定することになる。したがって帰無仮説 H_0 が真であるにもかかわらず誤って H_0 を棄却し H_1 を採択する危険は α である。また、対立仮説 H_1 を採択する危険を β とする。 β は第 2 種の過誤 (消費者危険、 $1-\beta$ は検出力) である。尤度比法による検定の手順を次に示す。

独立なサンプルを 1 個ずつ抜き取り、実測値列 x_1, x_2, \dots を得る。各実測値を取る毎に次の三つの決定のうちどれか一つを選ぶ。すなわち第 n 番目のサンプル実測値 ($n = 1, 2, \dots$) が得られた時点で、それまでの n 個のデータについて (3.1) 式の尤度比 λ (尤度関数の比) を求め、その都度 H_0 と H_1 の採択、棄却もしくは保留の三つにつき検定すればよい。 λ がある限界値より大きければ H_1 を採択し、 λ がある限界値より小さければ H_0 を採択し、 λ がその中間なら判定を保留してそのまま測定を継続し、 λ が大きくなるかあるいは小さくなるか経過を追うようにする。

λ にたいする限界値は、 H_0 が真で工程 (ロット) が正常であるにもかかわらず工程が異常であると誤って判断し H_1 を採択する確率 α (第 1 種の過誤、生産者危険) と、工程 (ロット) が異常で H_1 が成立している状態になっているにもかかわらず工程は正常であると誤って判断し H_0 を採択する確率 β (第 2 種の過誤、消費者危険) の両者を小さくするように選ぶ。これが逐次検定方式である。この場合の判定基準としてウォルドは、 α と β の値が通常実際に用いられている 5% とか 10% 程度の小さな値なら、次式が良い近似として用いられることを示した。

- 1) $\lambda \leq \beta / (1-\alpha)$ なら、その時点で測定を止めて H_0 を採択し、 H_1 を棄却する。
- 2) $\lambda \geq (1-\beta) / \alpha$ なら、その時点で測定を止めて H_0 を棄却し、 H_1 を採択する。
- 3) $\beta / (1-\alpha) < \lambda < (1-\beta) / \alpha$ なら、さらに観測を継続し $n+1$ 番目のサンプルを取って測定する。

これが逐次検定にたいするウォルドの判定ルールである。逐次抜取検査方式は仮説成立の可否が抜取の各時点毎に決定され、その選択に消費者保護の観点を加味して数式化されたウォルドの判定ルールを適用するものであり、通常は抜取サンプル個数が 1 回ないし 2 回抜取検査よりも少ないので、破壊検査やロットの合否をできるだけ早く決めたいような場合に極めて都合のよい方式であり、計数もしくは計量規準の逐次抜取検査方式の設計から累積和管理図による管理にいたるまで広い範囲に応用されている。

5. 計数規準型逐次抜取検査方式 JIS Z 9009-1962

ロットサイズ N がサンプルサイズ n にくらべて極めて大きく $N \gg n$ なら、不良率 p の母集団 (ロット、バッチ、工程) から一定時間間隔毎にランダムにサンプル 1 個を抜き取り、それが良品であるか不良品であるかを記録していく。抜き取ったサンプル合計が n 個に到達した時点においてサンプル n 個中に含まれる不良品個数 r は計数値の確率変数で、その分布は次式の 2 項確率関数に近似できる。

$$f(r | p) = \frac{n!}{r! (n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} \quad (4.1)$$

$$r=0, 1, \dots, n$$

ロット不良率 $p=p_0$ のときの 2 項分布を $f(r | p_0) = f_0(r)$, $p=p_1$ のとき、 $f(r | p_1) = f_1(r)$ と表し $p_1 > p_0$ とすると、このときの尤度関数 $q(p_0)$, $q(p_1)$ は、それぞれ $q(p_0) = f_0(r)$, $q(p_1) = f_1(r)$ とおけるから、(3.1) 式にしたがって尤度比をとると、次式が得られる。

$$\lambda = q(p_1) / q(p_0) = f_1(r) / f_0(r) \\ = \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \right)^r \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right)^n \quad (4.2)$$

この場合の検定に関する仮説は、 H_0 :母集団(ロット)の母不良率は $p=p_0$ で $f_0(r)$ にしたがう、および H_1 :母集団(ロット)の母不良率は $p=p_1$ で $f_1(r)$ にしたがう、である。ウォルドの判定ルールによれば、 $\lambda \leq \beta/(1-\alpha)$ なら H_0 を採択し、 $\lambda \geq (1-\beta)/\alpha$ なら H_1 を採択することになるから、はじめの条件から次式が得られる。

$$\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \right)^r \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right)^n \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$$

両辺の常用対数をとると次式が得られる。

$$r \log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} + n \log \frac{1-p_1}{1-p_0} \leq \log \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (4.3)$$

ここで上式を簡単にするために、

$$\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} = D, \quad \frac{1}{D} \log \frac{1-p_1}{1-p_0} = s \quad (4.4)$$

および $(1/D) \log \{(1-\alpha)/\beta\} = h_0$ とおくと、仮説成立の条件は次のようになる。

$$r_c \leq -h_0 + s n \quad (4.5)$$

H_0 成立域 等号は合格判定限界線。

$p_1 > p_0$ であり、 s は n の傾きで $0 < s < 1$ で、 h_0 はこの直線の $n=0$ 軸の切片となることが知られる。

λ の第2の条件についても同様に、

$$\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \right)^r \left(\frac{1-p_1}{1-p_0} \right)^n \geq \frac{1-\beta}{\alpha}$$

が得られるから、両辺の対数を取り、 $D' \log \{(1-\beta)/\alpha\} = h_1$ とおき、(4.4) 式と併せて次式が得られる。

$$r_d \geq h_1 + s n \quad (4.6)$$

H_1 成立域。 等号は不合格判定限界線。

(4.5), (4.6) 式は、グラフの横軸にサンプル測定個数(サンプルサイズ) n および縦軸にサンプル n 個中の不良個数の累積和 r をとれば、 $n=0$ 軸の切片が $-h_0$ および h_1 で、それぞれ傾き s が正の2本の平行な直線が引け、これが判定限界線として図1のように与えられる。

サンプル n 個中に見出される不良個数 r をサンプル点 (n, r_n) , ($n=1, 2, \dots$) として図上にプロットした点を次々に線で結んで得られるランダムウォーク状系列が2直線に挟まれる帯状領域の中にある間は検査を継続し、判定限界線に到達したところで検査を終了する。 r が r_c より小になりサンプル点が右下の限界線の下側域に入れば、測定を止めて H_0 を採択し、 H_1

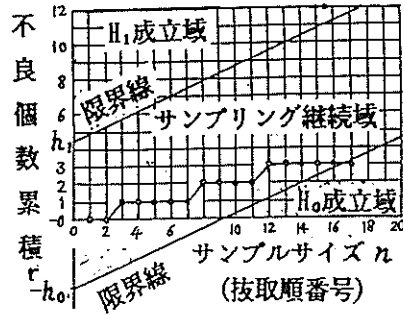


図1 計数規準型逐次抜取検査による合否判定。

を棄却してこのロットを合格と判定する。

また、サンプル点が r_c より大になって左上側の領域に入ったら測定を止めて H_0 を棄却し H_1 を採択してこのロットを不合格と判定する。図1では、不良個数が17個に達したときにロットは $p=p_0$ で合格と判定される。合格判定限界値を表す(4.5)式の n に1, 2, ...を代入し小数点以下を切り捨てれば r_c (合格)の個数、また H_1 成立域の判定限界線(4.6)式についても同様に、小数点以下を切り上げれば不合格個数 r_d の値をあらかじめ求めておくことができる。

【例】 工程(母集団)からランダムサンプルを取って検査し発生不良品の個数を調べている。この工程の不良率は未知である。ここで生産者側が帰無仮説 $H_0: p=p_0=0.02$ を、対立仮説 $H_1: p=p_1=0.05$ にたいし、有意水準(第1種の過誤、生産者危険) $\alpha=0.047$ および $p=p_1$ にたいする第2種の過誤(消費者危険)の確率を $\beta=0.248$ ($p=p_1$ のときの検出力= $1-\beta$) とするような逐次抜取検査方式を考えてみよう。

(4.4) 式および h_0, h_1 の諸量を求める。

$$\log(p_1/p_0) = \log(0.05/0.02) = 0.3979$$

$$\log\{(1-p_0)/(1-p_1)\} = \log(0.98/0.95) = 0.0135 = Ds$$

$$\log\{p_1(1-p_0)/p_0(1-p_1)\}$$

$$= \log(p_1/p_0) + \log\{(1-p_0)/(1-p_1)\} = 0.4114 = D$$

$$\log\{(1-\alpha)/\beta\} = \log(0.953/0.248) = 0.5846 = Dh_0$$

$$\log\{(1-\beta)/\alpha\} = \log(0.752/0.047) = 1.2041 = Dh_1$$

$$\therefore s = 0.0135/0.4114 = 0.0328, \quad h_0 = 0.5846/0.4114$$

$$= 1.421, \quad h_1 = 1.2041/0.4114 = 2.927$$

$$H_0 \text{ 成立域} \quad r_c \leq -1.421 + 0.0328 n$$

$$H_1 \text{ 成立域} \quad r_d \geq 2.927 + 0.0328 n$$

n に1, 2, ...の値を代入すると合格判定個数と不合格判定個数を次のようにあらかじめ求めておくことができ、とくにグラフに表さなくてもすませられる。

サンプル 番号、 n	0-3	4-32	33- 43	44- 63	64- 73	74- 93	94- 104	105- 124
H_0 成立限界 個数 r_c	-	-	-	0	0	1	1	2
H_1 成立限界 個数 r_d	-	4	5	5	6	6	7	7

6. 計量規準型逐次抜取検査方式 JIS Z 9010-1979

標準偏差既知で母平均未知の正規母集団（ロット、バッチ）から抜き取ったサンプルのデータ（実測値） x は計量値の確率変数である。計量値にたいしても逐次検定法を適用することができる。JIS Z 9010 計量規準型逐次抜取検査は、標準偏差既知でロットの不良率を保証するのに用いられる。

実測値 x は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう連続変数（確率変数）で、 σ は既知であるが μ は未知であるとする。逐次抜取により確率変数 x の値を調べ、母集団について帰無仮説 H_0 : 工程は正常で工程平均は $\mu = \mu_0$ の正規母集団である、を対立仮説 H_1 : 工程は異常で工程平均は $\mu = \mu_1 > \mu_0$ の正規母集団に変化している、にたいし検定することを考える。それにはサンプリングの各時点までに得られる n 個の実測値についてその都度尤度比を求め、ウォルドの判定ルールにより仮説を検定すればよい。検定の有意水準については、 H_0 が真で工程が安定しているにもかかわらず工程は変化したとして H_1 を採択してしまう第1種の過誤を α とし、また工程平均が μ_1 に変化して H_1 が成立する状態になっているにもかかわらず工程は変化していないとして誤って H_0 を採択し H_1 を棄却する第2種の過誤の確率を β として選ぶ。この場合は $\mu_1 > \mu_0$ なので片側検定となる。

x の確率密度関数 $N(\mu, \sigma^2)$ は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{x-\mu}{\sigma} \right\}^2\right)$$

$f(x | \mu_0) = f_0(x)$, $f(x | \mu_1) = f_1(x)$ と表すことにすると、 n 個のサンプル実測値 x_1, x_2, \dots, x_n にたいする尤度比 λ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \prod_{i=1}^n f_1(x_i) / \prod_{i=1}^n f_0(x_i) \\ &= \exp[-(2\sigma^2)^{-1} \{ \sum (x_i - \mu_1)^2 - \sum (x_i - \mu_0)^2 \}] \\ &= \exp\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{ \sum x_i - \frac{(\mu_1 + \mu_0)n}{2} \right\}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ウォルドの判定ルールを適用すると、帰無仮説の成立について次式を得る。

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left(\sum x_i - \frac{(\mu_1 + \mu_0)n}{2} \right) \leq \log_c \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\therefore \sum x_i - \frac{(\mu_1 + \mu_0)n}{2} \leq -\frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{1-\alpha}{\beta}$$

ここで上式を簡単に表すのに次のような記号を導入し (5.3) 式を得る。

$$\frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{1-\alpha}{\beta} = h_0, \quad (\mu_1 + \mu_0)/2 = s \quad (5.2)$$

$$\therefore \sum x_i \leq -h_0 + sn \quad (5.3)$$

H_0 成立域。等号は合格限界線。

ついで、 H_1 の採択条件は $\lambda \geq (1-\beta)/\alpha$ であるから、(5.1) 式より次式を得る。

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left(\sum x_i - \frac{(\mu_1 + \mu_0)n}{2} \right) \geq \log_c \frac{1-\beta}{\alpha}$$

ここで次式の記号を導入し (5.5) 式を得る。

$$\frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{1-\beta}{\alpha} = h_1 \quad (5.4)$$

$$\sum x_i \geq h_1 + sn \quad (5.5)$$

H_1 成立域。等号は不合格限界線。

グラフの縦軸に x の累積値 $\sum x_i$ をとり、横軸にサンプル採取順の番号として n をとれば、(5.3)、(5.5) 式は $n = 0$ 軸の切片がそれぞれ h_1 と $-h_0$ で、ともに正の傾き s をもつ2本の平行な直線として表される。

$(n, \sum x)$ のプロット ($n=1, 2, \dots$) がこの両直線の間の領域にある限りサンプルを取って測定を継続し、下方の判定限界線を横切ったら H_0 を採択して観測を止め、上方の判定限界線を横切ったら H_0 を棄却し H_1 を採択して測定を止める。

【例】 従来法と新しい強化法の両法で作成した糸の引張り強さを調べたら、その差は次のようになった。

サンプル 番号 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
強度 差 x_i	7	5	8	-11	10	8	-9	6	-7

従来法の標準偏差は $\sigma=10$ である。強化法により平均の真の差が 10 以上増加したかどうかを逐次検定法により、有意水準 $\alpha=0.05$, $\beta=0.10$ で検定してみよう。この場合、 $H_0 : \mu_0=0$, $H_1 : \mu_1=10$ である。

(5.3), (5.5) 式中の s , h_0 , h_1 を (5.2), (5.4) 式から求める。

$$s = (\mu_1 + \mu_0)/2 = (10+0)/2 = 5$$

$$h_0 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{1-\alpha}{\beta} = 10 \log_c (0.95/0.10) = 22.51$$

$$h_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{1-\beta}{\alpha} = 10 \log_c (0.90/0.05) = 28.90$$

$$\therefore H_0 \text{ 成立域 } \sum x_i \leq -h_0 + sn = -22.51 + 5n$$

$$H_1 \text{ 成立域 } \sum x_i \geq h_1 + sn = 28.90 + 5n$$

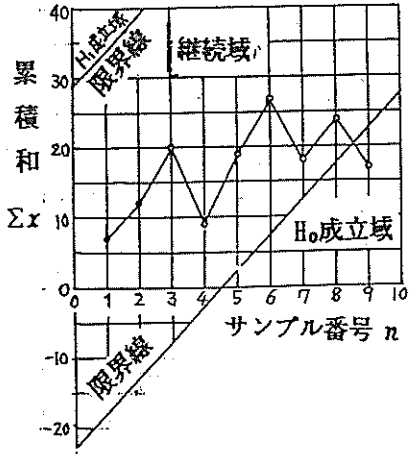


図2 計量規準型逐次抜取検査による合否判定。

以上の結果をまとめて次表に示す。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_i	7	5	8	-11	10	8	-9	6	-7
Σx_i	7	12	20	9	19	27	18	24	17
H_0 成立限界	-	-	-	-	2.49	7.49	12.49	17.49	22.49
H_1 成立限界	33.90	38.90	43.90	48.90	53.90	58.90	63.90	68.90	73.90

前表の最終列のNo.9で、 $\Sigma x_i = 17$ はNo.9の3行下の判定限界値 22.49 より小さいから H_0 が採択され、新強化法は強度の増加をもたらしたとはいえないと判定される。図2 はこれらの結果を図示したものである。

7. 累積和管理図 CUSUM, BS 5703

ウォルドの判定ルールの逐次検定法を管理図に応用して開発されたのが累積和管理図 (Cumulative-sum Control Chart, CUSUM Chart) と呼ばれるもので、ユニークな特徴をもっており、ある時点までに取った一定数のサンプルだけを検定の対象として扱い、さらに過去および現在のすべてのデータを特殊な管理図上に表すようにしたものである。

7.1 基礎理論⁽²⁾

正規母集団 (ロット、バッチ、工程) から一定時間間隔において1個ずつサンプルを取り、サンプルを取る都度品質特性値を測定し、これを x とする。 x は連続変数で計量値であり正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうものとする。いま、工程の母分散 σ^2 が既知のとき、未知の工程平均 μ を管理することを考える。工程の目標値を μ_0 とし、この工程にたいする帰無仮説を $H_0: \mu$

$= \mu_0$ 、その対立仮説を $H_1: \mu = \mu_1 = \mu_0 + u\sigma$ ($u > 0, \mu_1 > \mu_0$)、 $H_{-1}: \mu = \mu_1 = \mu_0 - u\sigma$ ($u > 0, \mu_1 < \mu_0$) とする。 μ_1 は不適切な工程平均である。ここで $|\mu_1 - \mu_0| = u\sigma = \delta$ とおくと、 μ_1 は $\mu_0 \pm \delta$ のいずれか一方の値をとるので両側検定となる点を考慮し、 H_0 が真で工程は変化していないにもかかわらず工程が変化したと誤って H_0 を棄却 (否定) し H_1 を採択してしまう第1種の過誤の確率、すなわち有意水準 α を $\alpha/2$ に置き換えて考えることにする。工程が μ_1 に変化していて H_1 が成立する状態になっているにもかかわらず変化していないとして H_0 を採択し H_1 を棄却する第2種の過誤の確率 β はこれまでの通りとする。

1回に1個ずつ連続して抜き取ったサンプルの合計 n 個にたいする実測値 x_i と目標値 μ_0 との差を加え合わせた累積和を y_n で表すと、 y_n は次式で定義されるランダム変数である。

$$y_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) = \Sigma x_i - n\mu_0 \quad (6.1)$$

x_i は $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう正規確率変数で $f(x_i | \mu_0, \sigma) = f_0(x_i)$ 、 $f(x_i | \mu_1, \sigma) = f_1(x_i)$ のように μ の添字にしたがって f の添字を変えて表すと、 n 個の x_i についての尤度比 λ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{f_1(x_1) f_1(x_2) \cdots f_1(x_n)}{f_0(x_1) f_0(x_2) \cdots f_0(x_n)} \\ &= \frac{(\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\{-\Sigma(x_i - \mu_1)^2 / (2\sigma^2)\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\{-\Sigma(x_i - \mu_0)^2 / (2\sigma^2)\}} \\ &= \exp\{-\{\Sigma(x_i - \mu_1)^2 - \Sigma(x_i - \mu_0)^2\} / (2\sigma^2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{しかるに } \{ &= \Sigma \{-2(\mu_1 - \mu_0)x_i + (\mu_1^2 - \mu_0^2)\} \\ &= -2(\mu_1 - \mu_0) \Sigma \{x_i - (\mu_1 + \mu_0)/2\} \\ &= -2(\mu_1 - \mu_0) \{\Sigma x_i - (\mu_1 + \mu_0)n/2\} \end{aligned}$$

であるから、これを用いて λ は次のようになる。

$$\lambda = \exp\left[\sigma^{-2}(\mu_1 - \mu_0) \{\Sigma x_i - (\mu_1 + \mu_0)n/2\}\right] \quad (6.1)$$

(6.1) 式の $\Sigma x_i = y_n + n\mu_0$ を上式に代入すると、

$$\lambda = \exp\left\{\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{y_n + n\mu_0 - \frac{n\mu_1 + n\mu_0}{2}\right\}\right\}$$

$$\therefore \lambda = \exp\left\{\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{y_n - \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2}\right\}\right\} \quad (6.2)$$

両側検定であるから α を $\alpha/2$ とみなしてウォルドの判定ルールを適用すると、 $\lambda \leq \beta / (1 - \alpha/2)$ なら H_0 が成立し、 $\lambda \geq (1 - \beta) / (\alpha/2)$ なら H_0 を棄却して H_1 が成立するから、(6.2) 式の λ について、

$$\exp\left\{\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{y_n - \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2}\right\}\right\} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha/2} \quad H_0 \text{ 成立}$$

$$\exp\left\{\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{y_n - \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2}\right\}\right\} \geq \frac{1 - \beta}{\alpha/2} \quad H_1 \text{ 成立}$$

両辺の自然対数をとって両仮説の成立域を求めると、

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{ y_n - \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2} \right\} \leq \log_c \frac{\beta}{1 - \alpha/2} \quad H_0 \text{ 成立}$$

$$\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \left\{ y_n - \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2} \right\} \geq \log_c \frac{1 - \beta}{\alpha/2} \quad H_1 \text{ 成立}$$

これより次の関係が得られる。

$$y_n \leq \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{\beta}{1 - \alpha/2} + \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2} \quad (6.3)$$

H_0 成立域、等号は合格判定限界線。

$$y_n \geq \frac{\sigma^2}{\mu_1 - \mu_0} \log_c \frac{1 - \beta}{\alpha/2} + \frac{(\mu_1 - \mu_0)n}{2} \quad (6.4)$$

H_1 成立域、等号は不合格判定限界線。

グラフの縦軸に x の偏差累積和 y_n 、横軸にサンプル番号(採取順番) n をとると、(6.3)、(6.4) 式による直線の傾きは $(\mu_1 - \mu_0)$ の符号によってきまり、 $\mu_1 > \mu_0$ なら傾き $(\mu_1 - \mu_0)/2 > 0$ で正の右上がりの2本1組の平行線を表し、 $H_1: \mu = \mu_1 < \mu_0$ なら傾き $(\mu_1 - \mu_0)/2 < 0$ で負の右下がりの2本1組の平行線を表すから、これがそれぞれの仮説成立域の判定限界線となる。この様子を図3に示す。

この4本の判定限界線のうちで我々が必要とするのは(6.4)式による H_0 不成立 (H_1 および H_{-1} 成立) の判定限界線を与える外側の2本だけである。その理由は、工程平均 μ の変化による異常発生の可能性すなわち H_1 と H_{-1} の両者が成立するような状態だけを考慮していればよいからである。この場合の管理図は図4のようにV字型のものになる。これが累積和管理図と呼ばれるものである。

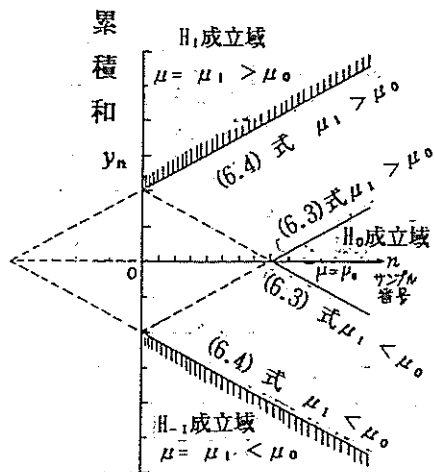


図3 累積和管理図における(6.3)、(6.4)式の仮説成立域。

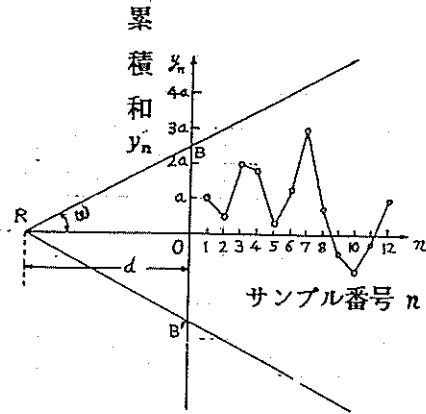


図4 累積和管理図例。

縦軸の目盛りのスケールを横軸の目盛りスケールの a 倍にとれば、縦軸の y_n の1単位の目盛りの長さは横軸の n の1単位の目盛りの長さの a 倍になる。図4の H_0 不成立 (H_1 成立) の判定限界線の傾きは、

$$OB/OR = \tan \omega = (\mu_1 - \mu_0)/2 a$$

$$OB = OB' = h = \frac{\sigma^2}{a(\mu_1 - \mu_0)} \log_c \frac{1 - \beta}{\alpha/2}$$

の関係があるから、 $OR = d$ は次のように求められる。

$$d = OR = OB \cot \omega = - \frac{2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \log_c \frac{\alpha/2}{1 - \beta}$$

図4はサンプル番号 n にたいし累積和 $y_n = \sum (x_i - \mu_0)$ の各時点における実測値をプロットして得られたもので、サンプル点 (n, y_n) 、 $(n = 1, 2, \dots)$ を線で結んでいくとランダムウォーク状経路になる。この累積和管理図の作成手順を次に示す。

通常では β は小さいので、 $1 - \beta \approx 1$ とみなし、

$$|\mu_1 - \mu_0| = v \sigma = \delta \text{ とおくと、}$$

$$|OR| = d = -2 (\sigma/\delta)^2 \log_c (\alpha/2),$$

$$|\tan \omega| = \delta/2 a$$

となり、これが次に示すVマスクの諸元となる。

7.2 Vマスク⁽³⁾⁽⁴⁾

累積和 y_n の出発点は任意に定めてよいから、V字型の累積和管理図での連続プロット点を素早く参照するには工夫を要する。しかしこれは簡単な方法で達成できる。図4の管理図に透明なシートをあて、重要な箇所としてまず中央部に引いた横軸上に参照点Aを決め、A点から d の距離にある頂点Rの位置を求め、頂点Rから角度 ω の2本の直線を写しとって引く。図5に示すように、管理限界線外側の H_0 不成立域(異常域)の部分に斜線を書き入れておく

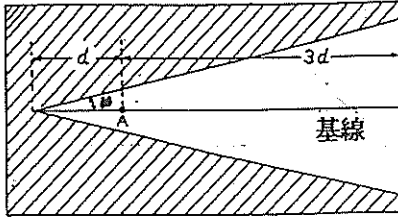


図5 累積和管理図のVマスク。

と便利である。こうして作られたのがVマスクと呼ばれるものである。マスク全体の長さは次に示す理由で $4d$ 程度が必要である。

マスク全長を $4d$ 程度にとる理由： 管理図にプロットしたサンプル測定点 (n, y_n) を次々に線で結んでいって得られるランダムウォーク状経路図上のひとつの点にVマスクのA点を合わせ、かつマスクの基線が管理図の横軸 (n 軸) に平行になるようにVマスクを重ねる。最終のプロット点 (N とする) が $3d$ 以上のところにくるようになったら、VマスクのA点を $n = N - 3d$ 程度のところの点まで戻し、その後は一度に1点ずつ右方へずらせていくようにする。 $N < 3d$ なら出発点の位置を $n = 0$ のところに合わせる。

Vマスクのそれぞれの位置毎にその右方にあるプロット点の並び方を点検する。Vマスクの斜線域に点が1個以上入ったなら、工程がどこかの点でVマスクのパラメタの d と θ を求めたもとの母集団の工程水準から外れて異常な状態になったことを示すと判定する。品質水準が変化していないのに変化したとして誤って判断する確率 (第1種の過誤、あわてものの誤り) は α である。プロット点が斜線域に入って隠れるようになるときのA点の位置を求め、次にVマスクを右方にずらす。これで先に隠れたプロット点が現れてくるようになることがあるが、そのときには、このプロット点が最初に隠れたときのA点の位置付近で異常が発生しはじめたことを示すものとなる。プロット点がVマスクの上半部に集まるのは工程水準の上昇に対応し、下半部に集まるのは工程水準の下降に対応することになる。工程水準が $\mu = \mu_0$ のとき、プロット点は n 軸の上下にランダムに散らばるはずであるが、図6に示すように、ある時点Pで工程水準が $\mu = \mu_1$ に変化したとすると、P以降の点について

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1 + \mu_1 - \mu_0) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_1) + n(\mu_1 - \mu_0) \end{aligned}$$

となるが、 μ_1 のまわりのランダム変動は $\sum (x_i - \mu_1) = 0$

となって無視され、 $y_n = n(\mu_1 - \mu_0)$ となるから、 $\mu_1 > \mu_0$ でP時点で変化が始まったとすると、プロット点の時系列は $(\mu_1 - \mu_0)$ の傾きを有する右上がりの直線とみなせるようになり、プロット点はこの直線のまわりにばらつくはずである。このとき、プロット点は図6のようになると考えられる。

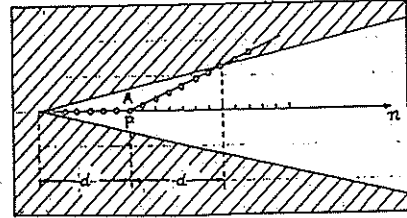


図6 累積和管理図。; 工程水準変化の始まり。

管理限界線の傾きは(6.3), (6.4) 式に示したように $(\mu_1 - \mu_0)/2$ であるから、参照点AをP点におくと、プロットが d になった時点で管理限界線の外に出るようになる。これは工程変化がマスクで検出されるまでに $\delta = |\mu_1 - \mu_0|$ の大きさの変化の開始に伴って期待されるプロット点の数が d であり、 d が変化に伴う連の平均長さにほぼ等しくなっていることを示す。

プロット点は d を中心にして変動するが、工程が最初に变化した点がA点から $3d$ 以上離れた距離のところから始まっているなら、この示唆を疑うようにすべきであると思われる。以上述べたような理由でマスクの全長を約 $4d$ にとるようにするのである。

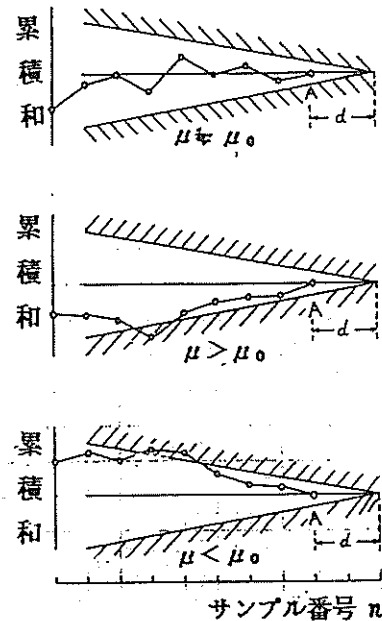


図7 累積和管理図におけるVマスクの 180° 回転使用例とプロット点の傾向。

μ : 工程平均、 μ_0 : 目標値。

異常の判定： 累積和管理図に新しい点を追加してプロットしていくと、明らかにトラブルが発生しているような場合等には、実際にほんの僅かのプロット点を見るだけで異常発生の特徴が認められる。いずれにしてもプロット点がすべてマスクで隠れるようになるのは時間の問題である。

使用方法： 累積和管理図の解説文献中には図7に示すように、これまで述べた方法を逆にして、マスクを180度回転し、参照点Aを最終プロット点に合わせるようにしているものがある⁽⁴⁾。3d以内の距離にある先行プロット点がマスクに隠れたら、どこかの点で工程が異常になったと考える。これは以前のプロット点を見るか、または以降のプロット点を見るかの違いで、同じ結果が得られる。

xの平均の使用： これまでは各時点で1回に1個のサンプルを取って測定する場合だけについて述べてきたが、日常的な工程管理では一定時間間隔毎に毎回k個のサンプルを採取して x_j ($j = 1, 2, \dots, k$)を求め、さらに各k個のサンプルの平均 $\bar{x}_i = \sum x_j / k$ ($i = 1, 2, \dots, n$)を求めていることがある。この場合にはxの代わりにその平均 \bar{x} を用い、さらに $\sigma(x)$ の代わりに $\sigma(\bar{x}) = \sigma(x) / \sqrt{k}$ を用いるようにすればよい。またこの場合のnは時系列のサンプル番号とすればよい。

ARL (連の平均長さ)： 工程水準が変化しても目標の水準に戻すために調整を加えるのがよいとは限らない。しかし、水準変化の発生時期と変化の程度を知るのが大切なことはいまでもない。管理図で工程異常や水準の変化を検出するのに連が用いられる。

変化が $\sigma(\bar{x})$ (xの平均の標準偏差)の1/2ないし1倍程度の大きさであれば、工程水準変化の検出には、累積和管理図の方がシューハートの3シグマ管理図よりも有効である。先の例に示したように、サンプルの大きさkと検定有意水準 α (危険率、第1種の過誤、あわてものの誤り)を同一にした場合について $\Delta = u \sqrt{k} = \delta / (\sigma(x) / \sqrt{k})$ を変えた場合の両管理図のARL (Average run length, 連の平均長さ)を比較してみよう (§10参照)。

検定の仮説は帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ にたいし対立仮説 $H_1: \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta = \mu_0 + u\sigma$ であるから、3シグマ管理図の片側検定のARLは、 $\{1 - F(3 - \Delta)\}^{-1}$ で与えられる。ただし{ }内は次式で与えられる。

$$1 - F(3 - \Delta) = P$$

$$= \int_{\mu_0 + 3\sigma/\sqrt{k}}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{k(\bar{x} - \mu_0 - u\sigma)^2}{2\sigma^2}\right) d\bar{x}$$

また、累積和管理図では、3シグマにたいし $\alpha/2 = 0.00135$ として、 $d = -(2/\Delta^2) \log_e(\alpha/2) = 13.215/\Delta^2$ で与えられる。表1にその値を比較して示す。

表1 3シグマ法と累積和図法のARL

Δ	ARL	
	3シグマ法	累積和図法
0.2	391	330
0.5	161	53
1.0	44	13
1.5	15	6
2.0	6	3

シューハートの3シグマ管理図の連の平均長さは、測定値1個にたいする誤差の確率に基づいているのにたいし、累積和管理図における連の平均長さは完全な逐次検定法によっている点に注意が必要である。

8. 累積和管理図例題

【例題】 家庭用洗剤16オンス缶の充填工程から一定時間毎に取った4個のサンプルの正味内容を測定した結果は表2のようになった。表2左のデータxは実測値wから16.2オンスを差引き、それを8倍した換算値である。

充填機運転中は常に調整して目標水準を維持するようにしているが、工程水準が0.0625=1/16オンス以上変化したときだけ係長に報告することになっている。この期間中にこのような調整が1回以上発生したことが分かっており、サンプル平均値の累積和管理図による発生時刻検出法を検討することになった。過去の経験から正味充填量の標準偏差は $\sigma(w) = 0.09375$ オンス、第1種の過誤の確率は $\alpha = 0.0027$ であることが知られている。

(解) 計算表を表2右に示す。

換算値xの標準偏差 $= \sigma(x) = 8\sigma(w) = 8 \times 0.09375 = 0.75$ で、帰無仮説 $H_0: \mu_0 = 0$ であるから、任意のnにたいし、

$$y_n = \sum (x_i - \mu_0) = \sum x_i$$

である。サンプルの大きさは $k = 4$ であるから、換算値xの平均の標準偏差 $= \sigma(\bar{x}) = \sigma(x) / \sqrt{k} = 0.75 / \sqrt{4} = 0.375$ となり、報告限界値は $w - 16.2 > 0.0625$ で、 $\delta = 8(w - 16.2) = 8 \times 0.0625 = 0.5$ となるから、 $\Delta = \delta / (\sigma(x) / \sqrt{k}) = 0.5 / 0.375 = 1.33$ より $d = -(2/\Delta^2) \log_e(\alpha/2) = (2/1.33^2) (6.608) = 7.47$ が得られる。

表2 正味内容量の測定結果の換算と計算表。

換算値 $x = 8 (w - 16.2)$.

計算表

No. n	サンプル				和 Σx_j	平均 \bar{x}_j	累積和 $\Sigma \bar{x}_j$
	1	2	3	4			
1	0	0	1	0	1	0.25	0.25
2	1	0	0	0	1	0.25	0.50
3	0	0	0	2	2	0.50	1.00
4	2	1	0	0	3	0.75	1.75
5	0	-1	-1	-1	-3	-0.75	1.00
6	0	-1	-2	-1	-4	-1.00	0.00
7	0	0	2	-1	1	0.25	0.25
8	0	-2	0	0	-2	-0.50	-0.25
9	0	-1	0	1	0	0.00	-0.25
10	-1	0	0	1	0	0.00	-0.25
11	-1	1	0	0	0	0.00	-0.25
12	0	2	0	-1	1	0.25	0.00
13	-1	0	0	0	-1	-0.25	-0.25
14	-2	0	0	0	-2	-0.50	-0.75
15	0	0	1	0	1	0.25	-0.50
16	1	0	1	1	3	0.75	0.25
17	2	-2	2	0	2	0.50	0.75
18	0	0	2	1	3	0.75	1.50
19	0	3	0	0	3	0.75	2.25
20	2	2	-1	0	3	0.75	3.00
21	-1	1	1	-1	0	0.00	3.00
22	-1	0	0	1	0	0.00	3.00
23	-1	0	0	0	-1	-0.25	2.75

$\sigma(w) = 0.09375$ オンス, $\alpha = 0.0027$.

縦軸 y の 1 目盛り長さを横軸 n の 1 目盛り長さの 2 倍にとり、 $a = 1/2$ として図 8 のように累積和管理図の目盛りを決める。管理限界線の傾きは $\tan \theta = (\delta/a)/2 = 1/2$ となるから、これらを用いて V マスクを作成することができる。管理図上にデータをプロットし、それに V マスクを重ねて移動していくと、図示のように参照点 A を $n = 14$ のプロット点に合わせた時に $n = 20$ のプロット点が上方の斜線域に隠れるようになることが分かる。V マスクの A 点をさらに右方向に移動させても、それ以前のプロット点が隠れることはない。以上から、工程水準が換算値で 0.5 を越えるような大きな変化をもたらした増量調整は 14 番目の測定点の付近で行われたと結論される。実際にそのような調整が 15 番目のプロット点の時点で行われていた。また、これとは逆の減量調整が 21 番目のプロット時点で行われたが、図 8 ではプロット点が少なく、これを検出するには至っていない。

このデータを用いた 3 シグマ管理図を図 9 に比較のために示してあるが、これでは異常はどこにも認められない。

$\alpha = 0.0027$ は 3 シグマ管理図における危険率 (有意水準) に合わせて選んだものである。経済的観点から、

例えば $\alpha = 0.05$ に取ると、 $\log_e(\alpha/2) = \log_e(0.025) = -3.689$ となり、 $d = 4.17$ となって、先の 7.47 より小さくなる。これを V マスクの参照点 A にとって上述と同じ操作をすると、 $n = 11$ のプロット点に A 点を合わせたときに $n = 20$ のプロット点が隠れ、 $n = 13$ のプロット点に A 点を合わせたときに $n = 19$ のプロット点が隠れ、 $n = 14$ のプロット点に A 点を合わせたときに $n = 18$ のプロット点が隠れる。これより先の点は隠れないから、 $n = 14$ の時点で調整が実施されたことが確認される。

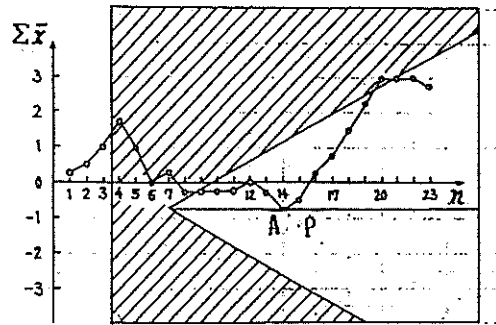


図 8 例題の累積和管理図。充填機の調整。

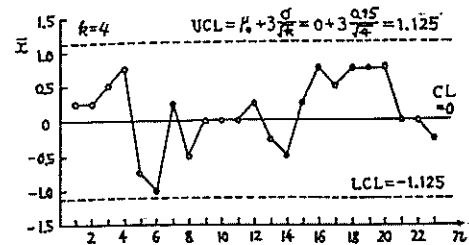


図 9 例題の 3 シグマ管理図。

9. 各種の累積和管理図

これまででは工程の標準偏差が既知で平均 μ が不明のときの累積和管理図について述べたが、逆に μ が既知で標準偏差が不明のとき、サンプリングの都度観測される実測値 x について、帰無仮説 $H_0: \sigma = \sigma_0$ を、対立仮説 $H_1: \sigma = \sigma_1$ にたいし逐次検定法を適用することができ、この場合の同時確率尤度関数は次式で与えられる。

$$q(\sigma | x_j) = \prod f(x_j) = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left(-\frac{\sum (x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$q(\sigma_0 | x_j) = f_0(x_j), \quad q(\sigma_1 | x_j) = f_1(x_j)$$

と表すことにすると、尤度比 λ は次式で与えられる。

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f_1(x_i)}{\prod_{i=1}^n f_0(x_i)} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum (x_i - \mu)^2\right)$$

ウォルドの判定ルールによれば、 $\lambda \leq \beta/(1-\alpha)$ なら H_0 を採択し、 $\lambda \geq (1-\beta)/\alpha$ なら H_1 を採択するから、 H_0 採択域は次式で表される。

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum (x_i - \mu)^2\right) \leq \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$n \log_e \frac{\sigma_0}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \sum (x_i - \mu)^2 \leq \log_e \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$\therefore \sum (x_i - \mu)^2 \leq \frac{2[\log_e(\beta/(1-\alpha)) - n \log_e(\sigma_0/\sigma_1)]}{(1/\sigma_0^2) - (1/\sigma_1^2)}$$

H_0 成立域、等号は判定限界線。

問題になるのは H_1 成立限界であるが、 H_1 採択域は上式と同様に次式から求められる。

$$\sum (x_i - \mu)^2 \geq \frac{2[\log_e((1-\beta)/\alpha) - n \log_e(\sigma_0/\sigma_1)]}{(1/\sigma_0^2) - (1/\sigma_1^2)}$$

H_1 成立域、等号は判定限界線。

上式は $\sum (x_i - \mu)^2$ 対 n のプロットが直線となり、その傾きは $\{\log_e(\sigma_0/\sigma_1)\}/\{(1/\sigma_0^2) - (1/\sigma_1^2)\}$ により与えられることを示している。 H_1 が $\sigma_1 > \sigma_0$ のとき、直線の傾きは正で右上がりの上方管理限界線となる。また、 H_1 として $\sigma_1 < \sigma_0$ をとると、直線の傾きは負で右下がりの下方管理限界線となる。

μ が不明でその推定値として \bar{x} を用いるときは、 $\sum (x_i - \mu)^2$ を $\sum (x_i - \bar{x})^2$ に、および n を $n-1$ に置き換えることになる。

この他の n 個の変数の累積和を用いる代表的な累積和管理図を表3にまとめて示す。

表3 代表的な累積和管理図の変数

管理図の種類	累積和 $i = 1 \sim n$
1 目標値 μ_0 からの偏差	$\sum (x_i - \mu_0)$
2 期待値の絶対値からの偏差の絶対値	$\sum [x_i - \bar{x} - E(x_i - \bar{x})]$
3 移動範囲	$\sum D_i, \quad D_i = x_j - x_{j-1}, \quad j = 1 \sim k$
4 移動範囲絶対値とその期待値との差	$\sum (D_i - E(D_i))$
5 範囲とその期待値との差	$\sum (R_i - E(R_i))$

10. 連とARL

§6で触れた連の平均長さ (ARL, Average run

length) について補足する。管理図における「連(run)」とは中心線のいずれか一方の片側に連続して出現する実測値 x のプロット点をいい、このプロット点の個数を「連の長さ」という。プロット点が中心線のいずれか一方の側に入ってからその側の管理限界線に到達して工程が異常と判定され、アクションをとらなければならないまでに要するプロット点の個数の平均を「連の平均長さ、略称ARL」という。プロット点が最初に管理限界線を突破するまでのARLについて考えてみよう。有意水準 α 、すなわち信頼度 $1-\alpha$ では、点がいずれかの管理限界線の外にでる確率が $\alpha/2$ であるから、最初の第1点が上下管理限界線 $\mu \pm u(\alpha/2)\sigma$ のどちらかの線上に乗る確率は $\Pr(1) = \alpha/2$ であり、第1点は限界線内にある(この確率は $1 - \alpha/2$)、第2点目で管理線外に飛び出すようになる確率は $\Pr(2) = (1 - \alpha/2)(\alpha/2)$ である。

連続2点が限界線内にある(この確率は $(1 - \alpha/2)^2$) 第3点目で初めて管理線外に飛び出すようになる確率は $\Pr(3) = (1 - \alpha/2)^2(\alpha/2)$ であり、一般に第 i 番目の点が初めて外に飛び出すようになる確率は $\Pr(i) = (1 - \alpha/2)^{i-1}(\alpha/2)$ の幾何分布となるから、点が初めて管理線外に飛び出すようになるまでの点の数の期待値 $E(n)$ は次式で与えられる。

$$E(n) = \sum_{i=1}^{\infty} i \Pr(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i (1 - \alpha/2)^{i-1} (\alpha/2)$$

上式両辺に $(1 - \alpha/2)$ を掛けて上式から差し引くと、

$$\begin{aligned} E(n) - (1 - \alpha/2)E(n) &= (\alpha/2)E(n) \\ &= (\alpha/2) \sum [i (1 - \alpha/2)^{i-1} - i (1 - \alpha/2)^i] \\ &= (\alpha/2) \sum [(1 - \alpha/2)^{i-1}] = (\alpha/2) / \{1 - (1 - \alpha/2)\} = 1 \\ \therefore \text{ARL} = E(n) &= 1 / (\alpha/2) = 2/\alpha \end{aligned}$$

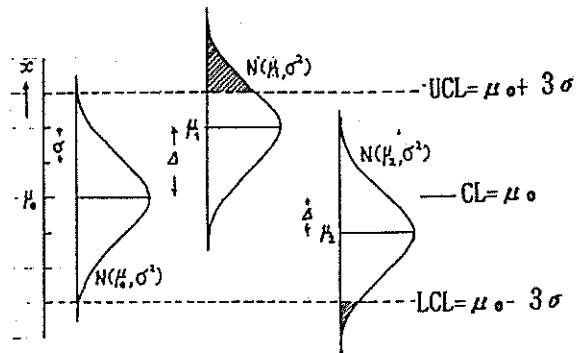


図10 3シグマ管理図において工程平均 $\mu = \mu_0$ の安定状態から $\mu = \mu_1 = \mu_0 + 2\sigma$ または $\mu = \mu_2 = \mu_0 - \sigma$ に変化したとき、プロット点がもとの管理限界をとびだす割合。

図 10 に示すように 3 シグマ管理図では $u(\alpha/2) = 3$ であるから、 $\alpha = 0.0027$ より $\alpha/2 = 0.00135$ となるから、工程が変化しないとき $ARL = 1/0.00135 = 740$ である。工程が $\mu_0 \pm 3\sigma$ の安定状態から工程平均が $\mu_1 = \mu_0 + 2\sigma$ ($\Delta = 2$ に相当) に突然変化した場合、 $K_c = 3 - 2 = 1$ でこれに相当する $\varepsilon = \alpha/2 = 0.1587$ で $ARL = 1/0.1587 = 6.3 \rightarrow 6$ となる。これが表 1 の $\Delta = 2$ の行の値である。また、同様に工程平均が $\mu_1 = \mu_0 + \sigma$ ($\Delta = 1$ に相当) に突然変化した場合 $K_c = 3 - 1 = 2$ で、これに相当する $\varepsilon = \alpha/2 = 0.2275$ で $ARL = 1/0.2275 = 44$ となる。これが表 1 の $\Delta = 1$

の行の値である。

11. おわりに

逐次抜取検査と累積和管理図は、母集団から 1 個ずつサンプルを取り、その累積和についてウォルドの判定ルールにより仮説を逐次検定しようとするもので、その歴史は 3 シグマ管理図より新しくあまり普及するに至っていないが、さまざまなユニークな点がある。とくに管理限界線を突破するまでの連の平均長さが 3 シグマ管理図より短いので、工程管理や工程の解析に威力を発揮しそうであり、今後の発展が期待される。

使用記号：

ARL	連の平均長さ	N	ロットの大きさ	Δ	正規化統計量
a	グラフ目盛りスケール比	$N(\mu, \sigma^2)$	正規分布	δ	母平均差
c	合格判定個数	$Pr(\)$	確率	ε	$N(0, 1)$ の外側確率
d	V マスクのパラメタ	p	母不良率	θ	母数
D	定数、移動範囲	r	不良個数 (計数值)	λ	尤度比
$E(\)$	期待値	r_c	H_0 成立限界個数	μ	母平均
$f(\)$	確率密度関数	r_d	H_1 成立限界個数	σ	母標準偏差
H_0	帰無仮説	R	範囲	ω	角度
H_1	対立仮説	s	判定線方向係数	添字：	
h_0	定数、切片	u	正規化統計量	0	帰無仮説
h_1	定数、切片	x	変数 (計量値)	1	対立仮説
K_c	標準正規分布の ε 点	y	累積和	i, j	番号
k	サンプル組数	α	有意水準		
$q(\)$	尤度関数		第 1 種の過誤の確率		
$L(p)$	ロット合格確率		H_0 棄却確率		
m	ポアソン分布母数	β	第 2 種の過誤の確率		
n	サンプルの大きさ		H_1 採択確率		

参考文献：

- 1 石井、堀訳：ガットマン、ウィルクス、統計概論、培風館 (1968)。
- 2 Belz, M. H. : Statistical methods for the process industries, Macmillan (1973)。
- 3 van Dobben de Bruyn, C. S. : Cumulative tests, Charles Griffin (1968)。
- 4 清水徹訳：品質管理のための累積和法、培風館 (1973)。