

レベルセット法による導波管 H 面回路の導体形状最適設計

仲 祐輔<sup>†</sup> (学生員) 平山 浩一<sup>†a)</sup> (正員)  
 安井 崇<sup>†</sup> (正員) 佐藤 慎悟<sup>†</sup> (正員)  
 辻 寧英<sup>††</sup> (正員) 山崎慎太郎<sup>†††</sup> (正員)  
 西脇 眞二<sup>†††</sup>

Optimization Design of Conductor Geometry in H-Plane Waveguide Circuit by Level Set Method

Yusuke TSUDUKI<sup>†</sup>, Student Member, Koichi HIRAYAMA<sup>†a)</sup>, Takashi YASUI<sup>†</sup>, Shingo SATO<sup>†</sup>, Yasuhide TSUJI<sup>††</sup>, Shintaro YAMASAKI<sup>†††</sup>, Members, and Shinji NISHIWAKI<sup>†††</sup>, Nonmember

<sup>†</sup> 北見工業大学, 北見市  
 Kitami Institute of Technology, 165 Koen-cho, Kitami-shi, 090-8507 Japan  
<sup>††</sup> 室蘭工業大学, 室蘭市  
 Muroran Institute of Technology, 27-1 Mizumoto-cho, Muroran-shi, 050-8585 Japan  
<sup>†††</sup> 芝浦工業大学, さいたま市  
 Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minumaku, Saitama-shi, 337-8570 Japan  
<sup>††††</sup> 京都大学, 京都市  
 Kyoto University, 36-1 Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, 606-8501 Japan  
 a) E-mail: hirakc@mail.kitami-it.ac.jp

あらまし レベルセット法を用いた導波管 H 面回路の導体形状最適設計を提案している。具体的に T 分岐回路の最適設計に適用し、Y 分岐回路よりも優れた特性を有する構造を得ていて、製作が容易な構造にすることも示している。

キーワード レベルセット法, 最適設計, 有限要素法, マイクロ波回路

1. ま え が き

マイクロ波回路の基本構造の設計においては、従来からある構造の改良や発見的な手法によるところが多いが、最近ではコンピュータの高速大容量化により電磁界解析を用いた最適化手法に基づく設計も報告されていて、その最適化手法の一つにレベルセット法がある。レベルセット法は、構造力学の分野や画像処理の分野で用いられている [1], [2] が、電磁界解析の分野でも逆散乱問題 [3] やアンテナ設計 [4] などに適用されている。筆者らはレベルセット法をマイクロ波回路設計に適用することを検討していて、既に導波管 H 面回路における誘電体形状最適設計 [5] について報告している。

ここでは、文献 [5] を拡張して、導波管 H 面回路における導体形状最適設計を提案する。文献 [5] では長

方形要素を用いたが、ここでは導体形状をより正確に表現するため、三角形要素を用いている。レベルセット法では、設計形状の変化を表す「速度」を、個々の問題ごとに、感度解析に基づいて新たに定式化する必要がある。ここでの感度解析では文献 [5] と同様に随伴変数法を用いているが、誘電体形状の場合には有限要素行列の評価式における被積分関数に現れるのに対し、導体形状は積分範囲に現れるので定式化を拡張している。数値例として、広帯域導波管 H 面 T 分岐回路 [6] を取り上げ、最適化によって得られた構造が Y 分岐構造よりも優れた特性を有することを示している。また、最適化によって得られる構造は複雑な形状を有するが、有限要素法による電磁界解析で得られた電界の値が設定したしきい値より小さい箇所については導体で埋めることで、特性をほとんど変化させることなく自動的に構造を単純化できている。なお、筆者らの一部によって、導波管 H 面回路における導体形状最適設計が報告されている [7] が、レベルセット関数を保持するオイラーメッシュの要素接続性を固定し、要素の節点を移動して導体形状に合わせたこと、感度解析の定式化が異なっていることなどの違いがあり、また、広帯域性を考慮した数値例は示されていない。

なお、ここでは、有限要素法汎用ソフトウェア COMSOL MULTIPHYSICS を利用し、レベルセット法を用いた導体形状最適設計の計算プログラムの作成を容易にしている。

2. 有限要素法を用いたレベルセット法最適化

2.1 導波管 H 面回路結合部の有限要素法解析

図 1 に示すような  $N$  ポートを有する導波管 H 面回路結合部を考え、解析領域  $\Omega$  を三角形二次要素で分割して有限要素法を適用すると、最終的に次式のような連立一次方程式が得られる [8]。

$$[P]\{\phi\} = \{Q\} \tag{1}$$

ここに  $\phi$  は電界の  $z$  成分を表す。上式を解くと、S パラメータは次式のように与えられる。

$$S_{n1} = -\delta_{n1} + \frac{1}{a_{\text{inc}}} \{\tilde{g}_n\}^T \{\phi\} \tag{2}$$

ここで、ポート 1 から振幅  $a^{\text{inc}}$  の  $\text{TE}_{10}$  モードが入射するとしており、 $\{\tilde{g}_n\}$  は第  $n$  ポートの  $\text{TE}_{10}$  モードに関する量からなる既知ベクトルである。 $T$  は転置することを意味し、 $\delta_{n1}$  はクロネッカーのデルタを表す。

2.2 レベルセット法に基づく最適化

レベルセット法では、最適化する物体の形状を表現

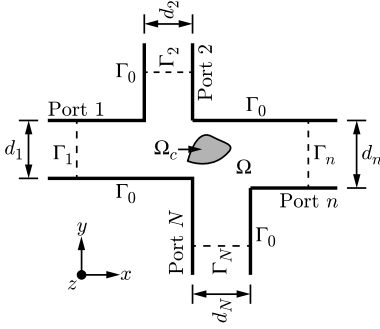


図1 導波管 H面回路結合部  
Fig. 1 H-plane waveguide junction circuit.

するために、設計領域にレベルセット関数  $w(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r}$  は位置ベクトル) を用いて、 $w(\mathbf{r}) = 0$  の等値線が物体形状を表すとする。仮想的な時間  $\tau$  を導入し、次式のレベルセット方程式に従って、最適化問題における目的関数を最小化するようにレベルセット関数を時間的に変化させることで、設計媒質形状の最適化を行う。

$$\frac{\partial w(\mathbf{r})}{\partial \tau} + V_N(\mathbf{r})|\nabla w(\mathbf{r})| = 0 \quad (3)$$

ここに  $V_N(\mathbf{r})$  はレベルセット関数  $w(\mathbf{r})$  の等値線に垂直な「速度」で、媒質形状の時間的な変形の大きさを表すものであり、目的関数の感度から決定される。

レベルセット関数として符号付き距離関数 [1] を採用すると  $|\nabla w| = 1$  となるので、式 (3) を用いて、微小時間  $\Delta\tau$  後のレベルセット関数の値を次式のようにオイラー法で求める。

$$w^{(\tau+\Delta\tau)}(\mathbf{r}) = w^{(\tau)}(\mathbf{r}) - V_N^{(\tau)}(\mathbf{r})\Delta\tau \quad (4)$$

この場合、レベルセット関数の変化分は  $\delta w^{(\tau)}(\mathbf{r}) = -V_N^{(\tau)}(\mathbf{r})\Delta\tau$  で与えられる。

### 2.3 随伴変数法による感度の定式化

最小化する目的関数  $C$  が S パラメータの絶対値の関数  $C = F(|S_{11}|, |S_{21}|, \dots, |S_{N1}|)$  であるとして、レベルセット関数の値が  $w(\mathbf{r})$  から  $w(\mathbf{r}) + \delta w(\mathbf{r})$  に変化したときの感度  $\delta C$  は、随伴変数法を用いると、文献 [5] と同様に次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta C &= \sum_{n=1}^N \frac{\partial F}{\partial |S_{n1}|} \operatorname{Re} \left( \frac{S_{n1}^*}{|S_{n1}|} \frac{1}{a^{\text{inc}}} \{\tilde{g}_n\}^T \{\delta\phi\} \right) \\ &= \operatorname{Re}[-\{\Phi\}^T \{[\delta P]\{\phi\}\}] \end{aligned} \quad (5)$$

ここに  $\operatorname{Re}(\cdot)$  は実部、 $*$  は複素共役を表し、

$$\{\Phi\} = ([P]^T)^{-1} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F}{\partial |S_{n1}|} \frac{S_{n1}^*}{|S_{n1}|} \frac{1}{a^{\text{inc}}} \{\tilde{g}_n\} \quad (6)$$

である。

### 2.4 導体形状に対する感度の評価

行列  $[P]$  は有限要素行列  $[A]$  とポートの寄与を表す行列との和である [8] が、ポートを最適化領域に含めないとすれば後者は最適化に無関係となり、感度は  $[\delta P] = [\delta A]$  となる。有限要素行列  $[A]$  の評価式には積分範囲に導体形状が現れるので、レベルセット関数  $w(\mathbf{r})$  を引数とするヘビサイド関数  $H(w)$  を用いて次式のように表す。

$$[A] = \iint_{\Omega - \Omega_c} [a] dx dy = \iint_{\Omega} H(w)[a] dx dy \quad (7)$$

ここに  $\Omega_c$  は導体領域を表す。このとき感度  $[\delta A]$  は次式で与えられる。

$$[\delta A] = \iint_{\Omega} \delta(w) \delta w [a] dx dy \quad (8)$$

ここに  $\delta(w)$  はディラックのデルタ関数である。

$\delta w$  を離散的な値で求めるものとし、有限要素法の定式化に組み入れやすいように、要素内で次式のように近似する [5]。

$$\delta w = \{\tilde{N}\}^T \{\delta w\}_e \quad (9)$$

ここに  $\{\tilde{N}\}$  は三角形要素に対する一次形状関数ベクトルを表し、 $\{\delta w\}_e$  は要素の頂点での  $\delta w$  の値からなるベクトルを表す。このとき、式 (5) から次式を得る。

$$\delta C = \operatorname{Re}\{\{\Phi\}^T [W]\} \{\delta w\} \quad (10)$$

ここに

$$[W] = - \sum_e \iint_e \delta(w) ([a]_e \{\phi\}_e) \{\tilde{N}\}^T dx dy \quad (11)$$

$$\begin{aligned} [a]_e &= \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \\ &\quad - k_0^2 \{N\} \{N\}^T \end{aligned} \quad (12)$$

であり、 $k_0$  は自由空間波数、 $\{N\}$  は三角形要素の二次形状関数ベクトル、 $e$  は三角形要素に関する量であることを表す。目的関数  $C$  を最小化するため、感度  $\delta C$  が常に負の値をとるように、レベルセット関数の変化分を次式で与える。

$$\{\delta w\} = -\alpha \text{Re}(\{W\}^T \{\Phi\}) \quad (13)$$

ここに  $\alpha$  は正の定数であり、レベルセット関数の修正による導体形状の変形が後述の格子点間隔以内になるように設定される。

### 3. 導波管 H 面 T 分岐回路の導体形状最適設計

#### 3.1 H 面 T 分岐回路の最適化

図 2 に示すような導波管 H 面 T 分岐回路を考える [6]。ここでは 120 度回転対称構造の 3 端子 Y 分岐回路を空間利用効率の良い T 分岐回路に置き換え、Y 分岐と同等以上の周波数特性をもたせることを設計目標とする。すなわち、どの端子からの入力にも他の 2 端子に等分配し、反射電力を小さくして Y 分岐の特性に近づけるように最適化を行う。T 分岐は左右対称性を保持して導体形状を変形させる。導波管幅は  $W = 22.9 \text{ mm}$  とし、導波管幅  $W$  より  $d = 5 \text{ mm}$  大きく設計領域をとり、その拡張部分に初期構造として導体を配置するが、導波管壁からは  $0.1 \text{ mm}$  離している。これは拡張部分に重なるように導体を配置すると、導体形状更新後、導体が導波管壁からわずかに離れたときに導体と導波管壁の間に極端に小さな領域ができ、要素分割が困難になるためである。これは初期構造の導体の下側のような、電界の値が極めて小さく、感度による形状変化がごくわずかであるところで、導体が導波管壁に接触、非接触を繰り返すことで起こる。一方で、1 回の最適化における導体形状の変形を、最も大きなところでも後述の格子点間隔（ここでは  $0.1145 \text{ mm}$  である）以内であるように設定するので、初期構造の導体を導波管壁からは格子点間隔である  $0.1 \text{ mm}$  離しておけば、最適化を繰り返しても、ごくわずかな形状変化で導体が導波管壁に接触することは起こらなくなる。

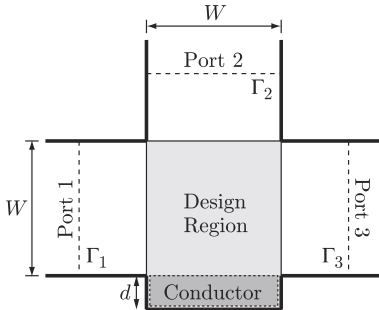


図 2 導波管 H 面 T 分岐回路の初期構造  
Fig. 2 Initial structure in H-plane T-junction.

ポート 1 から  $\text{TE}_{10}$  モードが入射するときに、 $8 \sim 12 \text{ GHz}$  の周波数帯域でポート 2 と 3 に電力が等分配されるように、目的関数を次式とする。

$$\text{Minimize } C = \sum_{m=1}^9 (|S_{21}^{(m)}| - |S_{31}^{(m)}|)^2 \quad (14)$$

ここに  $S_{21}^{(m)}$ ,  $S_{31}^{(m)}$  は  $m$  番目の周波数における透過係数であり、評価する周波数は  $8 \text{ GHz}$  から  $0.5 \text{ GHz}$  間隔で  $12 \text{ GHz}$  までの 9 点である。ここでは設計領域の左半分（縦  $W + d$ , 横  $W/2$ ）を縦、横方向ともに 100 個の格子に刻み、格子点でのレベルセット関数  $w(\mathbf{r})$  の値を用いて、 $w(\mathbf{r}) = 0$  の等値線、すなわち導体形状を決定する。更に導体形状を表す点の間隔が格子点の間隔と同程度になるようにし、スプライン補間をして導体形状を滑らかにする。なお、この問題では、S 行列の対称性とユニタリ性により、各ポートでの反射電力の下限は入射電力の  $1/9$  であることが知られている [9]。初期構造に対してレベルセット法最適化を繰り返し行い、最適化後の導体形状及び S パラメータ、目標とする Y 分岐回路の周波数特性を合わせて図 3 に示す。最適化構造は周波数帯域全体でおおむね  $|S_{21}| = |S_{31}|$  となり、Y 分岐回路の周波数特性と比較すると、使用周波数帯の低域と高域の両端で透過電力が改善され、良好な特性を有しており、目標とする  $8 \sim 12 \text{ GHz}$  の周波数帯で反射電力が小さく、また平坦な特性をもつ T 分岐回路を設計することができた。

次に、式 (14) の目的関数に、ポート 1 の反射電力が下限の  $1/9$  に近づくようにする項を加える。

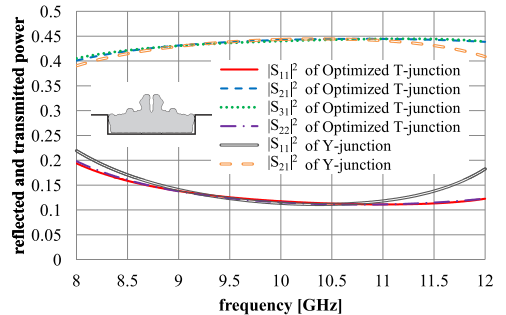


図 3 Y 分岐回路と最適化構造に対する規格化反射、透過電力の周波数特性

Fig. 3 Frequency characteristics of normalized reflected and transmitted powers for H-plane Y-junction and optimized T-junction.

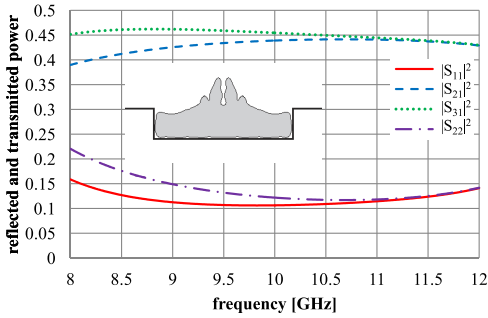


図 4 反射電力を目的関数に加えたときの最適化構造に対する規格化反射，透過電力の周波数特性

Fig. 4 Frequency characteristics of normalized reflected and transmitted powers for H-plane optimized T-junction under the objective function including a term of a reflected power.

$$\text{Minimize } C = \sum_{m=1}^9 \left[ (|S_{21}^{(m)}| - |S_{31}^{(m)}|)^2 + \left( \frac{1}{3} - |S_{11}^{(m)}| \right)^2 \right] \quad (15)$$

最適化後の導体形状及び S パラメータの周波数特性を図 4 に示す。図 3 と比較すると，低い周波数側でポート 1 の反射電力は小さくなっているが，ポート 2 と 3 への透過電力に差が生じている。そのため，S 行列の対称性 ( $S_{21} = S_{12}$ ) 及び構造の左右対称性 ( $S_{12} = S_{32}$ ) によって

$$\begin{aligned} & |S_{22}|^2 - |S_{11}|^2 \\ &= (1 - |S_{12}|^2 - |S_{32}|^2) - (1 - |S_{21}|^2 - |S_{31}|^2) \\ &= |S_{31}|^2 - |S_{21}|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

であることから，ポート 2 の反射電力が増加している。このことから，この最適化の目的関数は式 (14) とし，初期構造としてはポート 1 の反射電力が小さな，図 2 の T 分岐回路基本構造とすることは妥当であると判断する。

ここまでの最適化では，初期構造に対する三角形要素の大きさを 12 GHz における自由空間波長の 1/10 と指定して COMSOL で自動分割している。分割に対する最適化の収束性を調べるため，要素の大きさを 12 GHz における自由空間波長の 1/5 及び 1/20 と指定して自動分割し，最適化を行った。最適化後の導体形状をそれぞれ図 5 (a) 及び (b) に示す。どちらも図 3 のものと同様の，中央部に二つの大きな凸形をもつ構造になっている。また，S パラメータの値は示してい

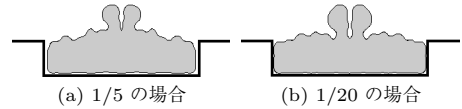


図 5 初期構造に対する三角形要素の大きさを 12 GHz の自由空間波長の 1/5, 1/20 と指定して自動要素分割した場合の最適化構造

Fig. 5 Optimized structures for the case where the size of triangular elements in the initial structure is specified as (a) one fifth or (b) one twentieth as large as the wavelength in vacuum at 12 GHz.

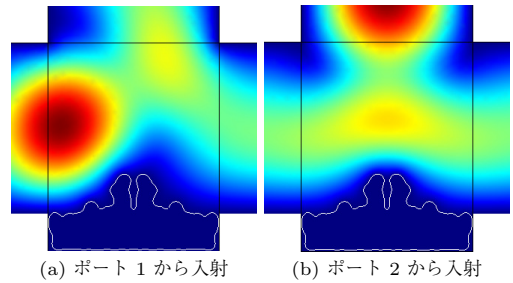


図 6 最適化構造の電界分布 (10 GHz)

Fig. 6 Electric field distribution for optimized structure at 10 GHz; (a) Incidence from port 1 (b) Incidence from port 2.

ないが，図 3 のものとはほぼ同じで，グラフでは差は分からなかった。これらのことから，この最適化では要素分割に対する依存性は小さいことが分かる。

### 3.2 H 面 T 分岐回路の簡単化

前節で得られた T 分岐最適化構造は Y 分岐回路より優れた特性をもつ構造であるが，中央部分に凹みがあるなど導体形状が複雑で，作製するには向いていない。そこで周波数特性を劣化させずに導体形状の簡単化を考える。図 3 の構造の 10 GHz における電界分布を図 6 に示す。図 6 (a), (b) はそれぞれポート 1, ポート 2 からの入射に対する電界分布である。図 6 (a), (b) の電界分布を見ると，中央の大きな凹みの部分は電界の値が小さく，導体を配置しても周波数特性に影響がないと考えられる。そこで，有限要素法による電磁界解析で得られた電界の値が，設定したしきい値より小さい箇所については導体で埋めることで自動的に構造を簡単化する。10 GHz での入射電力が 1 W であるとき入射電界振幅は  $a^{\text{inc}} = 295 \text{ V/m}$  になるが，その約 1/300 に相当する 1 V/m から始めて 1 V/m 刻みに 20 V/m までしきい値を変化させたところ，2 V/m で式 (14) の目的関数の値が最小となった。しきい値を 2 V/m に設定して簡単化した構造とその

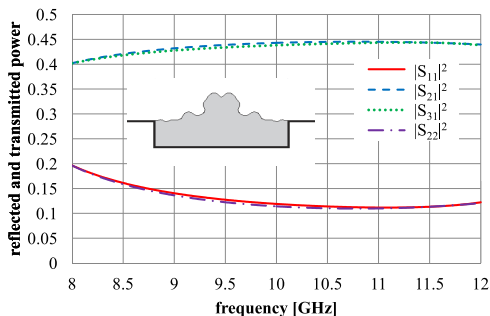


図 7 単純化構造に対する規格化反射，透過電力の周波数特性

Fig. 7 Frequency characteristics of normalized reflected and transmitted powers for simplified structure.

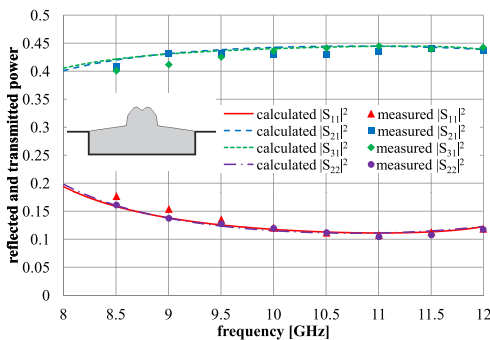


図 8 単純化構造に対する規格化反射，透過電力の周波数特性

Fig. 8 Frequency characteristics of normalized reflected and transmitted powers for simplified structure consisting of straight lines.

周波数特性を図 7 に示す。図 3 と比べ，周波数特性には変化が見られず，また，中央の大きな凹みは小さくなったが，構造全体の凹凸の形状にはあまり変化が見られなかった。そこで，更に導体形状の単純化を考える。導体形状の曲線部分を少しずつ直線に置き換え，周波数特性に変化がないことを確認する。最終的に得られた構造とその周波数特性を図 8 に示す。得られた構造は 10 本の線分からなる簡単な構造となり，図 3 の最適化構造とほぼ同じ周波数特性をもつ単純化した構造を得ることができた。

図 8 の単純化構造を試作し，その写真を図 9 に示す。S パラメータの測定値は図 8 に示している。単純化構造に対する S パラメータの計算値と測定値はおおむね一致しており，レベルセット法に基づく最適化によって得られた最適化構造の妥当性を確認することができた。

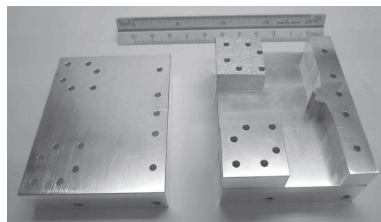


図 9 試作した導波管 H 面 T 分岐回路  
Fig. 9 Measured sample of H-plane T-junction.

#### 4. むすび

文献 [5] の定式化の拡張により，レベルセット法による導波管 H 面回路の導体形状最適設計を提案した。文献 [5] と併せて，同じような感度解析に基づくレベルセット法で誘電体，導体どちらの最適設計も可能となった。今後，三次元マイクロ波回路の最適設計に取り組み予定である。

謝辞 導波管 H 面 T 分岐回路を試作して頂いた (株) 関東電子応用開発に深謝する。

#### 文 献

- [1] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer, New York, 2003.
- [2] 山崎慎太郎, 西脇真二, 泉井一浩, 吉村允孝, “レベルセット法に基づく機械構造物の構造最適化,” *機械学論 (C)*, vol.73, no.725, pp.72–79, Jan. 2007.
- [3] R. Ferrayé, J.-Y. Dauvignac, and C. Pichot, “An inverse scattering method based on contour deformations by means of a level set method using frequency hopping technique,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol.51, no.5, pp.1100–1113, May 2003.
- [4] S. Zhou, W. Li, and Q. Li, “Level-set based topology optimization for electromagnetic dipole antenna design,” *J. Comp. Phys.*, vol.229, no.19, pp.6915–6930, Sept. 2010.
- [5] K. Hirayama, Y. Tsuji, S. Yamasaki, and S. Nishiwaki, “Design optimization of H-plane waveguide component by level set method,” *IEICE Trans. Electron.*, vol.E94-C, no.5, pp.874–881, May 2011.
- [6] 辻 幹男, 新川雅也, 繁沢 宏, “広帯域導波管 H 面回路素子の合成と実験的検討,” *信学論 (C-I)*, vol.J80-C-I, no.4, pp.168–176, April 1997.
- [7] S. Yamasaki, T. Nomura, A. Kawamoto, and S. Nishiwaki, “A level set-based topology optimization method targeting metallic waveguide design problems,” *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol.87, no.9, pp.844–868, Sept. 2011.
- [8] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2nd ed., Ch. 11, Wiley-IEEE Press, New York, 2002.
- [9] 黒川兼行, *マイクロ波回路入門*, 第 6 章, 丸善, 1963.  
(平成 23 年 12 月 20 日受付, 24 年 3 月 6 日再受付)