室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

伝搬演算子を用いた効率的な光導波路デバイスの有限要素法解析に関する研究

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2021-06-23
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 森本, 佳太
	メールアドレス:
	所属:
URL	https://doi.org/10.15118/00010402

令和２年度　博士論文

伝搬演算子を用いた効率的な光導波路デバイスの有限要素法解析に関する研究

室蘭工業大学 大学院 工学研究科
工学専攻 先端情報電子工学コース
森本　佳太

目 次

第 1 章　序論 **1**

第 2 章　有限要素法の定式化 **4**

2.1　まえがき 4

2.2　基本式方程式 5

2.2.1　マクスウェルの方程式 5

2.2.2　構成関係式 5

2.2.3　2 次元導波路解析のための基本式 6

2.2.4　3 次元導波路解析のための基本式 8

2.3　固有モード解析 9

2.3.1　2 次元導波路問題における一般化固有値方程式 9

2.3.2　3 次元導波路問題における一般化固有値方程式 15

2.3.3　逆反復法 23

2.3.4　固有モード伝送パワーの評価式 24

2.4　導波路伝搬解析 26

2.5　ビーム伝搬解析 32

2.6　完全整合層 34

第 3 章　伝搬演算子を用いた光導波路不連続問題の効率的な解析法 **36**

3.1　まえがき 36

3.2　基礎理論および定式化 37

3.2.1　伝搬演算子法 37

3.2.2　DBI 法 40

3.3　数値解析例 41

3.3.1　2 次元スラブ弱導波路の突合せ接続 41

3.3.2　2 次元導波路端面における不連続 45

3.3.3　誘電体導波路とプラズモニック導波路の突合せ接続 50

3.3.4　埋め込み型導波路端面からの光の放射 56

3.3.5　リブ導波路端面からの光の放射 59

第 4 章　伝搬演算子を用いた複数の不連続点を有する光導波路の効率的な解析法 **67**

4.1　まえがき 67

4.2　基礎理論および定式化 68

4.2.1　POM と BPM の結合解法 68

4.2.2　線形フィルタによる不要モードの抑圧 69

4.3　数値解析例 71

4.3.1 テーパ導波路の突合せ接続 71
4.3.2 エアギャップを有する導波路構造 73
4.3.3 誘電体導波路とプラズモニック導波路の多段接続 80

第 5 章 伝搬演算子を用いた任意構造を有する光導波路の効率的な解析法 84
5.1 まえがき 84
5.2 基礎理論および定式化 86
5.2.1 伝搬演算子による境界条件 86
5.2.2 散乱演算子法 89
5.3 数値解析例 91
5.3.1 導波路の軸ずれ接続 91
5.3.2 導波路端における光の放射 96
5.3.3 T 分岐導波路 101
5.3.4 エアギャップを有する導波路構造 105
5.3.5 1 次元フォトニック結晶 Fabry-Pérot キャビティフィルタ 108

第 6 章 結 論 110

参考文献 111

謝 辞 119

研究業績 120

付 録 123

第1章　序論

情報通信技術 (ICT: Information and Communication Technology) は，FTTH(Fiber To The Home) やモバイル端末の普及に伴い，今や我々の生活に欠くことのできない技術となっている．特に計算機における各種プロセッサの高性能化や，メモリ容量の増大に伴い，ビッグデータや AI(Artificial Intelligence) を利用したサービスに関心が高まっている．また第 5 世代移動通信システム (5G) との連動により，今後は IoT(Internet of Things) 化がより一層進展することも予想されている．これらの高度に発展する ICT を支える基盤となる光通信システムは，基幹通信路に利用される光ファイバと，光信号を処理するための各種機能を実現する光回路で構成されている．そのため，通信のさらなる高速・大容量化の要求に応えるためには，光通信システムの機能的役割を担う光回路の高性能化が不可欠である．

光回路は光が伝搬する道 (光導波路) を適切に設計することで，曲がり [1][2][3] や交差 [4][5][6] による省スペース化が可能なほか，偏波分離 [7]∼[11]，偏波回転 [12]∼[17]，モード合分波 [18]∼[21] などのさまざまな機能を実現することができる．光導波路を設計するために設計者は光波の振る舞いを定量的に評価し，所望の特性が得られるような構造を導き出すことが必要になるが，とりわけ近年では，電磁界シミュレーション技術の発達とともに，問題に応じて効率的な数値解析手法が多岐にわたって開発されており，これらは効率的に光導波路設計を進める上で欠かせないツールとなっている [22][23]．さらに計算機の高性能化に伴って，自由度の高い設計の実装性が高まり，寸法や形状だけでなく構造のトポロジーまでを含めた最適設計例も数多く報告されている [24]∼[38]．これらの設計は，所望の特性と設計条件を満足するような構造を探索する，いわゆる逆設計問題を解くことを目的とし，設計者の経験や知識に依存せず，これまでのアプローチでは実現できなかった優れたデバイス性能を示す新構造を発見する可能性がある．しかしながら，設計時の所要時間やメモリ容量による制約のために，自由度の高い複雑な構造や 3 次元大規模回路の設計が困難となる場合も多く，実用レベルの設計法として確立するためには，設計に適したより効率的な光導波路の解析手法が求められる．

従来の光波の伝搬解析手法としては，有限要素法 (Finite Element Method: FEM)[24]∼[31]，時間領域有限差分 (Finite Difference Time Domain: FDTD) 法 [32][33]，周波数領域有限差分 (Finite Difference Frequency Domain: FDFD) 法 [34] が広く利用され，光導波路デバイスの最適設計に適用されている．特に FEM は，任意形状への適合性に優れた要素が各種開発され [39]，分割の細かさや要素次数を任意に設定可能であり [40]，また不均質・異方性の問題の取扱いが容易 [41][42] であるといった優れた特徴を有することから，最適設計の効率化に大きく寄与できるものと考えられる．ただしこれらの手法は解析領域を直接離散化するため，メッシュ分割を細分化することで高精度解析が可能となるが，一般に膨大なメモリと計算時間を要する．一方，ビーム伝搬法 (Beam Propagation Method: BPM) は伝搬方向に緩慢変化する電磁界のみを未知変数とすることで，FEM などと比較して伝搬方向の離散化を大幅に低減することが可能であり，近年 BPM を使用したトポロジー最適設計についても報告がある [35]∼[38]．しかし，BPM は反射波や伝搬角度が非常に大きくなるような光波を扱うことができないため，光デバイスの小型化を目的とした屈折率差の

大きい強導波路の設計においては，反射波や放射波の影響を無視できないことが多いため，BPM の適用が難しくなる．反射を含めた任意の電磁界を効率的に解析する方法として，伝搬演算子法 (Porpagation Operator Method: POM)[43]∼[51] が提案されている．POM は不連続断面のみの解析で反射・透過特性の評価が可能であり，解析の次元を 1 次下げることができること，モード整合法 [52][53][54] とは異なり導波路断面の任意の電磁界を扱うための固有モード算出を行う必要がないことが大きな特徴である．POM は導波路断面の光波の伝搬特性を，すべてのモードの伝搬を考慮した伝搬演算子の計算により評価するため，強導波路問題に対しても精度のよい解析を行うことが可能であり，エバネッセントモードが伝搬に寄与するプラズモニック導波路と誘電体導波路の接続 [55]∼[65] にも適用可能である．また，伝搬演算子を導波路断面のみならず，長手方向の伝搬特性の評価にも適用することで，導波路系全体の入出力応答を効率的に解析を行う，双方向ビーム伝搬法 (BiBPM) と呼ばれる解析手法も提案されている [66]∼[75]．POM ならびに BiBPM は，従来の FEM や FDTD，FDFD などに比べ，比較的新しい解析手法として，近年その解析精度や安定性に関する研究がなされているが，これらの手法は導波路の不連続断面構造と伝搬方向に一様な構造の組み合わせで表現できる構造のみ解析可能であり，導波路設計などの多くの実用的な問題の解析を行うためには，自由度の高い構造変化に対応した解析法を構築する必要がある．

本研究では POM と FEM を組み合わせた新しい解析法を提案する．POM に関する先行研究では解析領域を階段状メッシュにより離散化する有限差分法 (Finite Difference Method: FDM) が広く解析に利用されている [43][44][47]∼[51] が，ここでは汎用性と解析効率の向上のために有限要素メッシュを使用する．また，伝搬演算子の算出に必要となる平方根行列の計算に Denman-Beavers Iterative(DBI) 法 [51] を適用することにより，POM による効率的な導波路不連続問題の解析法を開発する．さらに光回路全体の効率的な解析法を構築するため，従来の BPM および FEM 解析法と本手法を組み合わせた解析法を提案する．提案手法は従来の BiBPM とは異なり，伝搬方向の連続的な構造変化を許容するため，より自由度の高い解析が可能となる．

本論文の構成は，以下の通りである．

第 2 章では，FEM による光導波路解析を行うため，導波モード解析のための一般化固有値方程式，導波路伝搬解析のための連立一次方程式の定式化およびその解法について示す．また BPM による効率的な伝搬解析のための定式化を行う．

第 3 章では，FEM に基づく POM の定式化および手法の妥当性について検討を行う．本手法は誘電体導波路の不連続面の解析を行うため，2 次元スカラ波解析，3 次元フルベクトル波解析の場合で定式化を行い，特に，伝搬演算子の算出法の効率と安定性，プラズモニック導波路との突合せ接続の解析に適用した場合の有用性について示す．

第 4 章では，POM と有限要素ビーム伝搬法 (FE-BPM) を組み合わせた効率的な解析手法について示す．本手法は複数の不連続点を有し，伝搬方向にも比較的緩やかな構造変化を伴う導波路構造に適用可能であり，入出力の反射・透過特性を伝達行列法を使用して評価，および手法の妥当性について検討を行う．また，プラズモニック導波路の場合で生じる解析精度の劣化に対して，伝搬に寄与しないモードを減衰させるための線形フィルタを使用することで，解析精度が向上することについて示す．

第 5 章では，FEM の境界条件に伝搬演算子を適用することによる伝搬解析の効率化について検討を行う．本手法は入出力ポートを終端するために要した PML 領域を省くことで計算規模を縮小することができる．さらに最終的に解くべき FEM の連立一次方程式を散乱行列化する方法を示し，任意構造に対して領域分割を行い効率的に解析を行うための散乱演算子法を提案し，2 次元導波路構造に対して入出力特性の評価を行い，その妥当性と有用性について検討を行う．

第 6 章では，本研究で得られた結果をまとめる．

第2章　有限要素法の定式化

2.1　まえがき

本章では，まず光波のふるまいを記述するマクスウェル方程式および構成関係式を示し，本研究で扱う光導波路解析の目的に応じて，導波モード解析，導波路伝搬解析，ビーム伝搬解析の3つの解析手法に大別し，有限要素法による具体的な定式化を示す．

導波モード解析は伝搬方向に構造が一様な導波路に対して，その断面を解析領域として，ある動作周波数において存在しうる固有モードの電磁界振幅 (固有ベクトル) および伝搬方向の位相定数 (固有値) を求めるものである．ここでは導波路の固有モード解析のための一般化固有値方程式について，2次元光導波路問題では1次要素から3次要素までを使用した離散化方法を示す．また3次元導波路問題では，スプリアス解を除去するために開発されているエッジ/ノーダルハイブリッド要素を使用した離散化方法について示す．加えて一般化固有値方程式より，導波モードを効率的に算出する方法として逆反復法について述べる．

導波路伝搬解析は任意の不連続箇所を含む領域全体を対象として，入射波に対する散乱電磁界も含めた光波の振る舞いを解析するものである．ここでは2次元導波路に対して，1次，2次三角形要素を使用した有限要素法の定式化を示す．解析方法は最終的に連立一次方程式を解く問題に帰着し，疎行列直接解法による効率的な計算が可能である．

ビーム伝搬解析は，導波路構造が伝搬方向に緩やかに変化し，反射波を無視できる場合に有効な，緩慢変化包絡線近似に基づく解析手法であり，光波を伝搬方向とそれに垂直な面とに分け，伝搬方向には逐次的に計算を進めていくため，解析領域全体を離散化する伝搬解析法に比べて計算負荷を大幅に削減することができる．ここでは従来のフレネル近似よりも伝搬方向に対する傾斜角が広い場合にも適用可能なパデ近似を利用した広角の有限要素ビーム伝搬法の定式化を示す．

また導波路伝搬解析，ビーム伝搬解析の際には，導波路構造によって生じる放射波が解析領域端まで到達する開放系の領域を取り扱う場合，解析領域端からの非物理的な反射を抑圧する必要があり，完全整合層 (Perfectly Matched Layer: PML) がよく利用されている．本章ではその実装方法についても示す．

2.2 基本式方程式

2.2.1 マクスウェルの方程式

光や電波は電磁波であり，その電磁界は空間座標 (x, y, z) と時間 t の関数である四つの電磁界ベクトル，すなわち電界 $\boldsymbol{E}$[V/m]，磁界 $\boldsymbol{H}$[A/m]，電束密度 $\boldsymbol{D}$[C/m^2]，磁束密度 $\boldsymbol{B}$[Wb/m^2] で表され，これらはマクスウェルの方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \text{(ファラデーの法則)} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \qquad \text{(アンペア・マクスウェルの法則)} \tag{2.2}$$

に従う．ここに $\boldsymbol{J}$[A/m^2] は電流密度で，電荷密度 ρ[C/m^2] との間に電荷保存の法則に対応する電流連続の式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.3}$$

が成り立つ．式 (2.1)～(2.3) にベクトル公式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0 \tag{2.5}$$

を用いると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.7}$$

が得られる．一般に，式 (2.1)，(2.2)，(2.6)，(2.7) をまとめてマクスウェルの方程式という．

2.2.2 構成関係式

マクスウェルの方程式は，物質の有無によらず，同じ形で書くことができ，物質の情報はすべて構成関係式の中に含まれている．ここでは線形で分散性のない，均質な等方性媒質を扱うことを考え， 構成関係式は

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + \sigma \boldsymbol{E} \tag{2.10}$$

で与えられる．ここに ε_0[F/m] は真空誘電率，ε_r は比誘電率，μ_0[H/m] は真空透磁率，μ_r は比透磁率，σ[S/m] は導電率であり，$\boldsymbol{J}_0$[A/m^2] は何らかの方法で外部から加えられた電磁界の波源となる電流である．また，光学の分野でよく用いられる屈折率 n は

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \tag{2.11}$$

で与えられるが，光学材料では $\mu_r = 1$ である場合が多く，このとき屈折率 n は

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{2.12}$$

となる．いま，単一の角周波数 ω[rad/s] をもつ電磁波を考え，

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}(x,y,z)\exp(j\omega t)\right] \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{H}}(x,y,z)\exp(j\omega t)\right] \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{D}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{D}}(x,y,z)\exp(j\omega t)\right] \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{B}}(x,y,z)\exp(j\omega t)\right] \tag{2.16}$$

のように関係づけられるフェーザ (複素振幅) 表示の電界 $\tilde{\boldsymbol{E}}$，磁界 $\tilde{\boldsymbol{H}}$，電束密度 $\tilde{\boldsymbol{D}}$，磁束密度 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ を導入し，これらを改めて $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$ と書くことにする．したがって，非導電性媒質 ($\sigma = 0$) の場合，マクスウェルの方程式は構成方程式 (2.8)~(2.10) を用いて

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu_0\boldsymbol{H} \tag{2.17}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_0 \tag{2.18}$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r\boldsymbol{E}) = \rho/\varepsilon_0 \tag{2.19}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.20}$$

と表すことができる．

また導電性媒質 ($\sigma \neq 0$) の場合，式 (2.18) は複素比誘電率 $\tilde{\varepsilon}_r$ を導入することで，

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}_r\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_0, \quad \tilde{\varepsilon}_r \equiv n^2 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \tag{2.21}$$

と書くことができ，非導電性媒質の式と同じように扱うことができる．本論文中では，導電性媒質の場合には $n^2 = \tilde{\varepsilon}_r$ として扱い，σ の値に関わらず式 (2.18) を使用する．

2.2.3 2 次元導波路解析のための基本式

y 方向に一様な構造をもつ光導波路構造を考える．y 方向には電磁界の変化がないため $\partial/\partial y \to 0$ とすると，波源が存在しない場合 ($\boldsymbol{J}_0 = 0$)，式 (2.17)，式 (2.18) の各成分は次のように書ける．

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_x \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_z \tag{2.24}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_y \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_z \tag{2.27}$$

ここに $E_i, H_i (i = x, y, z)$ はそれぞれ電界と磁界の i 方向成分を表す．式 (2.22)，(2.24)，(2.26) にしたがって導出される波動方程式は

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 E_y = 0 \tag{2.28}$$

と書ける．ここに k_0 は自由空間波数であり，$\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で与えられる．式 (2.28) で表される電磁界は E_y，H_x，H_z 成分のみを含み，図 2.1(a) に示す方向に振動する電磁界を表す．また電界が波の伝搬方向と直交する方向のみにあるため，TE(Transverse Electric) 波と呼ばれる．残りの 2 成分 H_x，H_z は

$$H_x = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial z} \tag{2.29}$$

$$H_z = \frac{-1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{2.30}$$

で与えられる．一方，式 (2.23)，(2.25)，(2.27) より導出される波動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{n^2}\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + k_0^2 H_y = 0 \tag{2.31}$$

と書ける．式 (2.31) で表される電磁界は H_y，E_x，E_z 成分のみを含み，図 2.1(b) に示す方向に振動する電磁界を表す．また磁界が波の伝搬方向と直交する方向のみにあるため，TM(Transverse Magnetic) 波と呼ばれる．残りの 2 成分 E_x，E_z は

$$E_x = \frac{-1}{j\omega\varepsilon_0 n^2}\frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{2.32}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0 n^2}\frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{2.33}$$

で与えられる．式 (2.28) と式 (2.31) はお互いに独立した式であり，統一的に表現すると次にように表すことができる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + k_0^2 q\Phi = 0 \tag{2.34}$$

ここに p，q，Φ は TE 波の場合，

$$p = 1 \qquad q = n^2 \qquad \Phi = E_y \tag{2.35}$$

と定義され，TM 波の場合は，

$$p = \frac{1}{n^2} \qquad q = 1 \qquad \Phi = H_y \tag{2.36}$$

で定義される．また，このとき Φ 以外の電磁界成分は Φ を用いて，

$$\Psi_x = jsp\frac{1}{\omega}\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{2.37}$$

$$\Psi_z = -jsp\frac{1}{\omega}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{2.38}$$

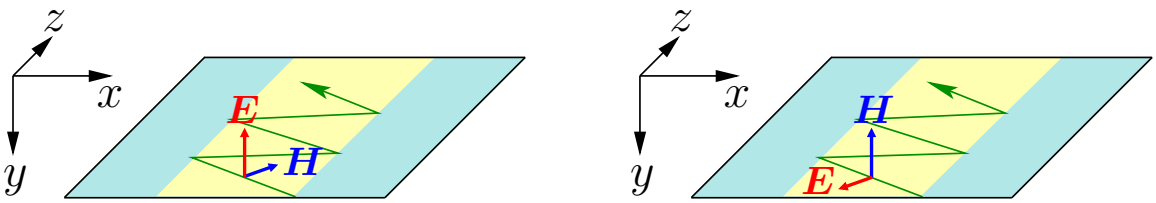
で表され，Ψ_x，Ψ_z，s は TE 波に対して，

$$\Psi_x = H_x, \qquad \Psi_z = H_z, \qquad s = -1/\mu_0 \tag{2.39}$$

と定義され，TM 波に対して，

$$\Psi_x = E_x, \qquad \Psi_z = E_z, \qquad s = 1/\varepsilon_0 \tag{2.40}$$

で定義される．



(a) TE モード　　(b) TM モード

図 2.1: 2 次元スラブ導波路

2.2.4　3 次元導波路解析のための基本式

マクスウェル方程式 (2.17)，(2.18) に対して波源が存在しない場合 ($\boldsymbol{J}_0 = 0$) を考え，

$$\nabla \times \text{式 (2.17)} \tag{2.41}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{n^2} \cdot \text{式 (2.18)} \right) \tag{2.42}$$

の計算を行うと，電界もしくは磁界のみで表されるベクトル波動方程式が導出され，それぞれ

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) - k_0^2 n^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.43}$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{n^2} \nabla \times \boldsymbol{H} \right) - k_0^2 \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.44}$$

で表される．また式 (2.43) と式 (2.44) を統一的に表現すると次のように表現できる．

$$\nabla \times (p \nabla \times \boldsymbol{\Phi}) - k_0^2 q \boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{2.45}$$

ここに p，q，$\boldsymbol{\Phi}$ は，$\boldsymbol{\Phi}$ を電界とする場合，

$$p = 1 \qquad q = n^2 \qquad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{E} \tag{2.46}$$

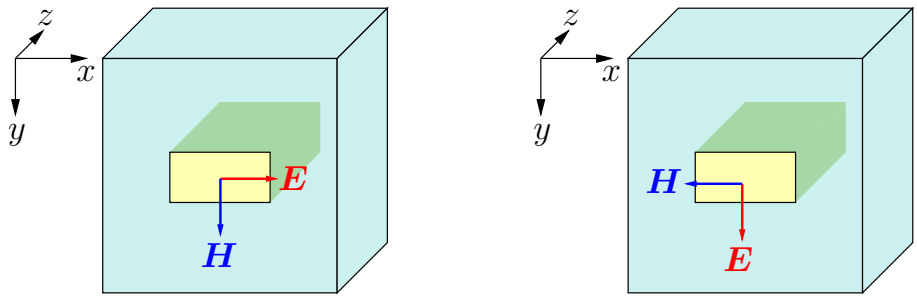
で定義され，$\boldsymbol{\Phi}$ を磁界とする場合，

$$p = \frac{1}{n^2} \qquad q = 1 \qquad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{H} \tag{2.47}$$

で定義される．また $\boldsymbol{\Phi}$ と対となる電磁界 $\boldsymbol{\Psi}$ は，

$$\boldsymbol{\Psi} = jsp \frac{1}{\omega} (\nabla \times \boldsymbol{\Phi}) \tag{2.48}$$

で与えられ，s は $\boldsymbol{\Phi}$ が電界のとき $1/\mu_0$，磁界のとき $-1/\varepsilon_0$ である．3 次元導波路のモードは電界 3 成分 (E_x, E_y, E_z) と磁界 3 成分 (H_x, H_y, H_z) の 6 成分を含んでいるが，E_x 成分と H_y 成分が他の 4 成分に対して大きい E^x モード (図 2.2(a)) と，E_y 成分と H_x 成分が他の 4 成分に対して大きい E^y モード (図 2.2(b)) の二つに分類することができる．



(a) E^x モード　　(b) E^y モード

図 2.2: 3 次元導波路構造

2.3　固有モード解析

2.3.1　2 次元導波路問題における一般化固有値方程式

2 次元スラブ導波路中を伝搬する固有モードが，z 方向に伝搬定数 β で一様に伝搬しているとする．このとき電磁界 Φ は

$$\Phi(x,z) = \phi(x)\exp(-j\beta z) \tag{2.49}$$

と表される．これを 2 次元の波動方程式 (2.34) に代入することで，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + (k_0^2 q - p\beta^2)\phi = 0 \tag{2.50}$$

を得る．式 (2.50) に対してガラーキン法に基づく有限要素法を適用する．まず対象となる領域を，材料境界を跨がないように要素と呼ばれる小部分に分割し，各要素に対してガラーキン法の適用を考える．図 2.3 に示すような線節点要素で導波路断面の全体解析領域を分割することを考え，各要素内の電磁界振幅 ϕ は区分多項式によって近似的に

$$\phi(x) \simeq \tilde{\phi}(x) = \{N(x)\}\{\phi_e\} \tag{2.51}$$

$$\{N(x)\} = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad \cdots \quad N_n(x)]^T \tag{2.52}$$

$$\{\phi_e\} = [\phi_{e1} \quad \phi_{e2} \quad \cdots \quad \phi_{en}]^T \tag{2.53}$$

と表現される．ここに上添字 T は転置を表し，$\{N(x)\}$ は線節点要素の形状関数ベクトル，$\{\phi_e\}$ は要素上に与えられた節点の電磁界振幅によるベクトルである．形状関数ベクトルの具体的な表現は，関数 ϕ の要素内変化を 1 次多項式

$$\tilde{\phi}(x) = a_0 + a_1 x \tag{2.54}$$

で近似する場合，図 2.3(a) に示すように節点が配置され，各節点の ϕ の値は式 (2.54) より

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

で表すことができる．したがって，式 (2.54) かつ式 (2.55) より未知係数 $a_i(i=0,1)$ を消去することで形状関数ベクトルを求められる．このとき長さ座標

$$L_1 = \frac{l_1}{l_e}, \qquad L_2 = \frac{l_2}{l_e} \tag{2.56}$$

$$l_e = x_2 - x_1, \quad l_1 = x_2 - x, \quad l_2 = x - x_1 \quad (x_2 > x_1) \tag{2.57}$$

を導入すると，形状関数は

$$\{N\} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

で与えられる．同様にして関数 ϕ の要素内変化を 2 次多項式および 3 次多項式で近似する場合，それぞれ図 2.3(b) および (c) のように節点を配置することで，近似多項式と形状関数ベクトルは次のように表される．

2 次多項式近似の場合

$$\tilde{\phi}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \tag{2.59}$$

$$\{N\} = \begin{bmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ 4L_1L_2 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

3 次多項式近似の場合

$$\tilde{\phi}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{2.61}$$

$$\{N\} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2}L_1^3 - \frac{9}{2}L_1^2 + L_1 \\ \frac{9}{2}L_2^3 - \frac{9}{2}L_2^2 + L_2 \\ L_1L_2\left(9L_1 - \frac{9}{2}L_2\right) \\ L_1L_2\left(9L_2 - \frac{9}{2}L_1\right) \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

いま，電磁界振幅 ϕ を近似解 $\tilde{\phi}$ を用いて表すと式 (2.50) は，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right) + (k_0^2 q - p\beta^2)\tilde{\phi} = R \tag{2.63}$$

のように誤差の分だけ残差 R が生じるため，重み関数を用意し，要素全体にわたって平均的に残差がゼロとなるようにする．これを重み付け残差法と呼ぶ．ガラーキン法ではこの重み関数に形状関数そのものを利用して，

$$\int_e N_1 R dx = 0, \quad \int_e N_2 R dx = 0, \quad \cdots \quad \int_e N_n R dx = 0 \tag{2.64}$$

のように残差をキャンセルする．式 (2.64) は式 (2.63) の残差の表現を用いてベクトル形式で

$$\iint_e \{N\}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right) + (k_0^2 q - p\beta^2)\tilde{\phi}\right] dxdy = \{0\} \tag{2.65}$$

のように書ける．ここで部分積分

$$\{N\}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right)-p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} \tag{2.66}$$

を利用すると，式 (2.65) は

$$\int_e\left[-p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}+\left(k_0^2q\{N\}-p\beta^2\{N\}\right)\tilde{\phi}\right]dx=-\left[p\{N\}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right] \tag{2.67}$$

のように表現できる．ここで式 (2.67) の左辺の $\tilde{\phi}$ を式 (2.51) を用いて節点値 $\{\phi_e\}$ で離散化すると，各要素に対する離散化方程式は次で表される．

$$\int_e\left[-p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}+k_0^2q\{N\}\{N\}^T-p\beta^2\{N\}\{N\}^T\right]\{\phi_e\}dx=-\left[p\{N\}\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x}\right] \tag{2.68}$$

この要素方程式をすべての要素について重ね合わせることで ($\sum_e\{\phi_e\}\to\{\phi\}$)，系全体に対する離散化方程式，いわゆる全体方程式を組み立てる．このとき式 (2.68) の右辺の境界積分項は隣接する要素間において打ち消し合い，全体領域の両端の値だけが残るが，導波モード振幅は解析領域端ではゼロになることを考慮すると無視できるため，最終的に次の一般化固有値方程式を得る．

$$\left([K]-\beta^2[M]\right)\{\phi\}=\{0\} \tag{2.69}$$

$$[K]=\sum_e\int_e\left[-p\frac{d\{N\}}{dx}\frac{d\{N\}^T}{dx}+k_0^2q\{N\}\{N\}^T\right] \tag{2.70}$$

$$[M]=\sum_e\int_e p\{N\}\{N\}^T dx \tag{2.71}$$

ここに $\sum_e$ はすべての要素についての総和を取ることを意味する．$[K]$ と $[M]$ はそれぞれ全体剛性行列，全体質量行列と呼ばれる．最終的に解くべき一般化固有値方程式を組み立てるには，式 (2.70) および式 (2.71) の積分計算が必要となる．要素内で媒質定数が任意に変化する場合や曲辺境界をもつ要素を用いた場合などにおいては，厳密な積分が困難なため数値積分が必要になるが，それ以外の場合では長さ座標を利用した積分公式

$$\int_e L_1^kL_2^l dx=l_e\frac{k!l!}{(l+k+1)!} \tag{2.72}$$

を使うことで厳密な積分計算を比較的容易に実行することが可能であり，1 次要素，2 次要素，3 次要素の場合でそれぞれ次のように求めることができる．

1 次要素の場合

$$\frac{d\{N\}}{dx}=-\frac{1}{l_e}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{2.73}$$

$$\int_e\{N\}\{N\}^T dx=\frac{l_e}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix} \tag{2.74}$$

$$\int_e\frac{d\{N\}}{dx}\frac{d\{N\}^T}{dx}dx=\frac{1}{l_e}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} \tag{2.75}$$

2 次要素の場合

$$\frac{d\{N\}}{dx} = -\frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} 4L_1 - 1 \\ -4L_2 + 1 \\ 4(L_2 - L_1) \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

$$\int_e \{N\}\{N\}^T dx = \frac{l_e}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

$$\int_e \frac{d\{N\}}{dx}\frac{d\{N\}^T}{dx} dx = \frac{1}{3l_e}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

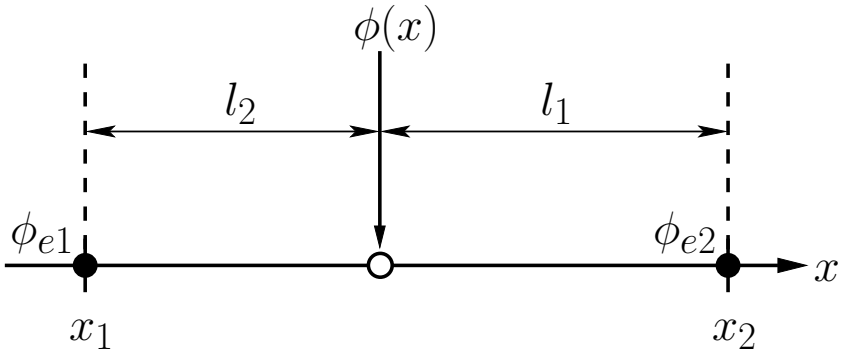
3 次要素の場合

$$\frac{d\{N\}}{dx} = -\frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} \frac{27}{2}L_1^2 - 9L_1 + 1 \\ -\frac{27}{2}L_2^2 + 9L_2 - 1 \\ -9L_1^2 - \frac{9}{2}L_2^2 + 27L_1L_2 \\ 9L_2^2 + \frac{9}{2}L_1^2 - 27L_1L_2 \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

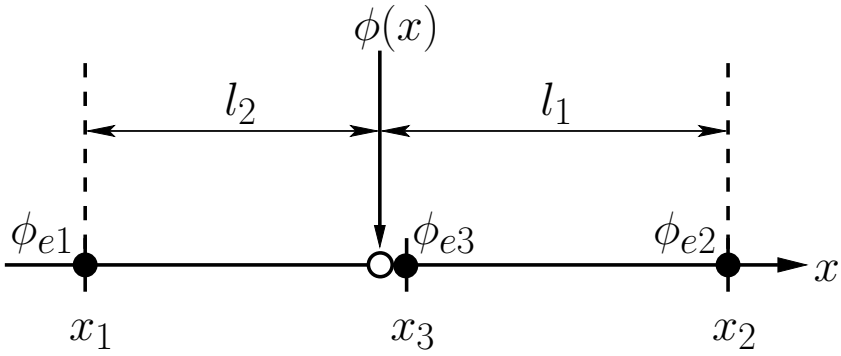
$$\int_e \{N\}\{N\}^T dx = \frac{l_e}{35}\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{19}{48} & \frac{33}{16} & -\frac{3}{4} \\ \frac{19}{48} & \frac{8}{3} & -\frac{3}{4} & \frac{33}{16} \\ \frac{33}{16} & -\frac{3}{4} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{16} \\ -\frac{3}{4} & \frac{33}{16} & -\frac{27}{16} & \frac{27}{2} \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

$$\int_e \frac{d\{N\}}{dx}\frac{d\{N\}^T}{dx} dx = \frac{1}{5l_e}\begin{bmatrix} \frac{37}{2} & -\frac{13}{8} & -\frac{189}{8} & \frac{27}{4} \\ -\frac{13}{8} & \frac{37}{2} & \frac{27}{4} & -\frac{189}{8} \\ -\frac{189}{8} & \frac{27}{4} & 54 & -\frac{297}{8} \\ \frac{27}{4} & -\frac{189}{8} & -\frac{297}{8} & 54 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

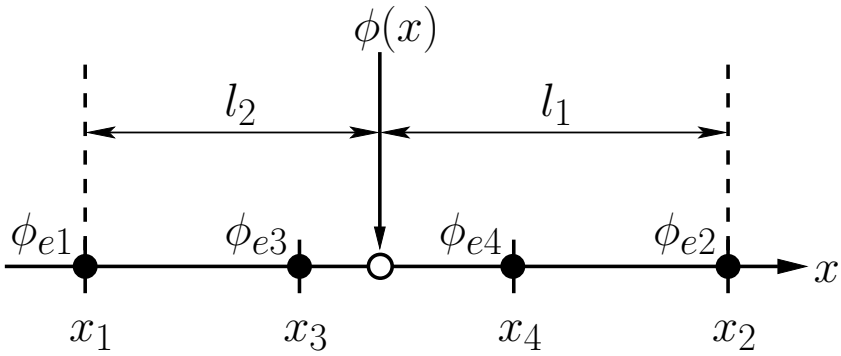
図 2.4 に線要素の 1 次要素から 3 次要素における電磁界の近似形態を示す．図はコアの屈折率が 2.4，クラッドの屈折率が 1 の 3 層スラブ導波路 (コア幅 0.5 μm) の基本モードをそれぞれの要素次数で同じ節点数になるように要素分割を行い解析したものを表している．1 次要素では要素内を線形補間しているため，曲線形状に対する近似精度が劣る．また 2 次要素と 3 次要素はそれぞれ要素内を 2 次関数，3 次関数で補間しており，特に急激に変化する電磁界付近を曲線形状で近似できるため，少ない節点数で精度良く解析できると考えられる．



(a) 1 次要素

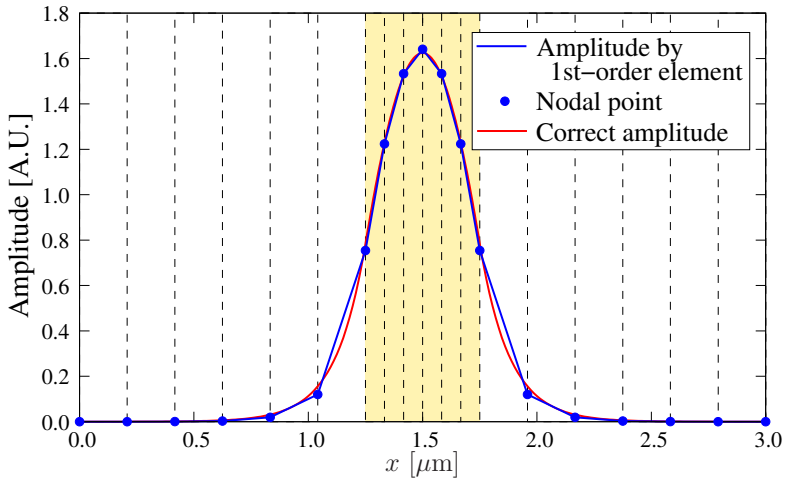


(b) 2 次要素

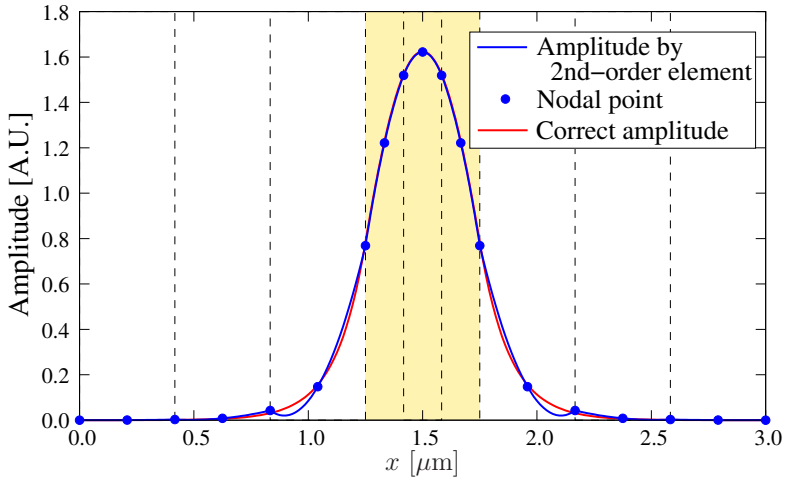


(c) 3 次要素

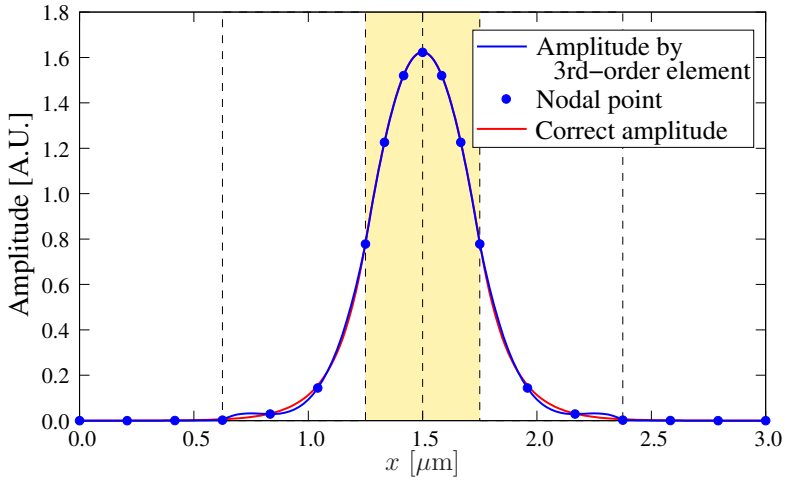
図 2.3: 線節点要素



(a) 1 次要素



(b) 2 次要素



(c) 3 次要素

図 2.4: 電磁解振幅の近似解

2.3.2　3 次元導波路問題における一般化固有値方程式

3 次元導波路の導波モードのベクトル波解析を行うため，電界もしくは磁界の 3 成分を使用した汎関数 F を導出する．汎関数は波動方程式 (2.45) に $\mathbf{\Phi}^*$ を乗じ，解析領域全体で積分した形で与えられ，ベクトル公式を用いて式変形することで，

$$\begin{aligned} F &= \iint \mathbf{\Phi}^* \cdot \left\{ \nabla \times (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) - k_0^2 q \mathbf{\Phi} \right\} dxdy \\ &= \iint \left\{ (\nabla \times \mathbf{\Phi}^*) \cdot (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) - k_0^2 q \mathbf{\Phi}^* \cdot \mathbf{\Phi} \right\} dxdy - \iint \nabla \cdot \left\{ \mathbf{\Phi}^* \cdot (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) \right\} dxdy \end{aligned} \tag{2.82}$$

と書ける．ここで右辺第 2 項はガウスの発散定理より

$$\iint \nabla \cdot \left\{ \mathbf{\Phi}^* \times (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) \right\} dxdy = \oint_\Gamma \boldsymbol{n} \cdot \left[\mathbf{\Phi}^* \times (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) \right] d\Gamma \tag{2.83}$$

のように解析領域の外周部である仮想境界 Γ に関する周回積分で表すことができる．式 (2.83) の右辺はベクトル公式よりさらに

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{n} \cdot \left[\mathbf{\Phi}^* \times (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) \right] d\Gamma = \oint_{\Gamma_u} (\boldsymbol{n} \times \mathbf{\Phi}^*) \cdot (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) + \oint_{\Gamma_v} \mathbf{\Phi}^* \cdot \left[(p\nabla \times \mathbf{\Phi}) \times \boldsymbol{n} \right] \tag{2.84}$$

と書くことができる．ここで Γ_u および Γ_v に境界条件として，$\mathbf{\Phi}$ を電界とする場合にはそれぞれ電気壁，磁気壁，$\mathbf{\Phi}$ を磁界とする場合にはそれぞれ磁気壁，電気壁を課すことで式 (2.84) の右辺がゼロとなる．したがって，汎関数は最終的に

$$F = \iint \left\{ (\nabla \times \mathbf{\Phi}^*) \cdot (p\nabla \times \mathbf{\Phi}) - k_0^2 q \mathbf{\Phi}^* \cdot \mathbf{\Phi} \right\} dxdy \tag{2.85}$$

で表すことができる．汎関数 (2.85) は通常の節点要素を使用して有限要素法を適用すると一般にスプリアス解が発生することが知られている．そこで図 2.6 に示すような三角形エッジ/ノーダルハイブリッド要素を用いて解析領域の xy 断面を分割し，ベクトル波動方程式 (2.45) の $\mathbf{\Phi}$ を，

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{U\}^T \{\phi_t\} \\ \{V\}^T \{\phi_t\} \\ j\beta \{N\}^T \{\phi_z\} \end{bmatrix} e^{-j\beta z} \tag{2.86}$$

のように表し，断面内の電磁界をベクトル量として扱う．これにより要素境界において接線成分の連続性を容易に課すことができる．ここに $\{U\}$ および $\{V\}$ は，辺要素に対する形状関数であり，$\{N\}$ は節点要素に対する形状関数である．いま各要素に対する汎関数を F_e として式 (2.85) に式 (2.86) を代入して整理すると，

$$\begin{aligned} F_e = \{\phi_t\}^T \Bigg[& p \left(\frac{\partial \{V\}}{\partial x} - \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} - \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} \right) \\ & - k_0^2 q \left(\{U\}\{U\}^T + \{V\}\{V\}^T \right) - \beta^2 p \left(\{U\}\{U\}^T + \{V\}\{V\}^T \right) \Bigg] \{\phi_t\} \\ & - \beta^2 p \{\phi_t\}^T \left(\{V\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} + \{U\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \right) \{\phi_z\} \\ & - \beta^2 p \{\phi_z\}^T \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial y} \{V\}^T + \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \{U\}^T \right) \{\phi_t\} \\ & - \beta^2 \{\phi_z\}^T \left(p \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} + p \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} - k_0^2 q \{N\}\{N\}^T \right) \{\phi_z\} \end{aligned} \tag{2.87}$$

となる．式 (2.87) に変分原理

$$\frac{\partial F_e}{\partial \phi_{i,j}^{(e)}} = 0, \quad i = t, z, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.88}$$

を適用すると，要素方程式が得られ，すべての要素について重ね合わせをとることで，式 (2.69) と同じ形式で一般化固有値方程式を得ることができる．なお有限要素行列 $[K]$，$[M]$ は以下のように表される．

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{tt}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix}, \qquad [M] = \begin{bmatrix} [M_{tt}] & [M_{tz}] \\ [M_{zt}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

ここで，各小行列 $[K_{ij}], [M_{ij}] (i, j = t, z)$ は以下の式で与えられる．

$$[K_{tt}] = \sum_e \iint_e \left[p \left(\frac{\partial \{V\}}{\partial x} - \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} - \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} \right) \right.$$
$$\left. - k_0^2 q (\{U\}\{U\}^T + \{V\}\{V\}^T) \right] dxdy \tag{2.90}$$

$$[M_{tt}] = \sum_e \iint_e p \left(\{V\}\{V\}^T + \{U\}\{U\}^T \right) dxdy \tag{2.91}$$

$$[M_{tz}] = \sum_e \iint_e p \left(\{V\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} + \{U\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \right) dxdy \tag{2.92}$$

$$[M_{zt}] = [M_{tz}]^T = \sum_e \iint_e p \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial y} \{V\}^T + \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \{U\}^T \right) dxdy \tag{2.93}$$

$$[M_{zz}] = \sum_e \iint_e \left[p \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} + p \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} - k_0^2 q \{N\}\{N\} \right] dxdy \tag{2.94}$$

節点要素に対する形状関数については 2.4 節で使用するものと同じである．辺要素は要素境界上で各辺に平行な成分と垂直な成分を未知変数にとる．また形状関数に用いる基底関数としては，ベクトル完全多項式空間から同次部分空間を除去した不完全多項式を使用することでスプリアス解の発生を抑圧することも知られている [76]．以下では基本要素である不完全 1 次 (Constant-Tangential/Linear-Normal: CT/LN) 辺要素に加え，高次要素の不完全 2 次 (Linear-Tangential/Quadratic-Normal: LT/QN) 辺要素，不完全 3 次 (Quadratic-Tangential/Cubic-Normal: QT/CuN) 辺要素による形状関数について説明する．

不完全 1 次 (CT/LN) 辺要素

不完全 1 次多項式ベクトルは 3 個の未知係数で表され，図 2.6(a) に示すような辺要素を考えると，面内の電磁界は以下のように表現できる．

$$\mathbf{\Phi}_t = \sum_{i=1}^{3} a_i \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,i} \tag{2.95}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1} = L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1, \ \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,2} = L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2, \ \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,3} = L_3 \nabla L_1 - L_1 \nabla L_3 \tag{2.96}$$

ここに $L_i(i=1,2,3)$ は図 2.5 に示すような三角形要素内の面積座標を表し，以下で与えられる．

$$L_1(x,z)=\frac{S_1(x,z)}{S_e},\qquad L_2(x,z)=\frac{S_2(x,z)}{S_e},\qquad L_3(x,z)=\frac{S_3(x,z)}{S_e} \tag{2.97}$$

$$S_e=S_1+S_2+S_3,\qquad S_i=\frac{A_i+B_ix+C_iy}{2}\qquad (i=1,2,3) \tag{2.98}$$

$$A_1=x_2y_3-x_3y_2,\qquad A_2=x_3y_1-x_1y_3,\qquad A_3=x_1y_2-x_2y_1 \tag{2.99}$$

$$B_1=y_2-y_3,\qquad B_2=y_3-y_1,\qquad B_3=y_1-y_2 \tag{2.100}$$

$$C_1=x_3-x_2,\qquad C_2=x_1-x_3,\qquad C_3=x_2-x_1 \tag{2.101}$$

いま未知変数 a_i を電磁界の接線方向成分 $\Phi_{t,i}$ に置き換えて，面内の電磁界を

$$\boldsymbol{\Phi}_t=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{N}_{t,i}\Phi_{t,i} \tag{2.102}$$

のように表すためには，形状関数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,i}$ の各辺に対する接線方向成分を求める必要がある．三角形要素の辺 12 について接線方向の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{t}_1=\frac{\nabla L_3}{|\nabla L_3|}\times\boldsymbol{i}_z \tag{2.103}$$

で表せるため，$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1}$ の辺 12 に対する接線成分の大きさは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_1\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1}&=\frac{\nabla L_3}{|\nabla L_3|}\times\boldsymbol{i}_z\cdot(L_1\nabla L_2-L_2\nabla L_1)\\&=\frac{\boldsymbol{i}_z}{|\nabla L_3|}\cdot(L_1\nabla L_2\times\nabla L_3-L_2\nabla L_1\times\nabla L_3)\end{aligned} \tag{2.104}$$

と表現できる．ここで

$$L_1+L_2+L_3=1 \tag{2.105}$$

$$\nabla L_1+\nabla L_2+\nabla L_3=0 \tag{2.106}$$

の関係を利用することで，式 (2.104) はさらに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_1\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1}&=\frac{\boldsymbol{i}_z}{|\nabla L_3|}\cdot(L_1+L_2)(\nabla L_1\times\nabla L_2)\\&=\frac{\boldsymbol{i}_z}{|\nabla L_3|}\cdot(1-L_3)(\nabla L_1\times\nabla L_2)=\frac{1-L_3}{|\nabla L_3|}\cdot\frac{1}{2S_e}\end{aligned} \tag{2.107}$$

と式変形できる．また $|\nabla L_3|$ は図 2.5 中に示す三角形の高さ h_1，辺の長さ l_1 を用いて

$$|\nabla L_3|=\frac{1}{h_3}=\frac{l_1}{2S_e} \tag{2.108}$$

と書けることから，式 (2.107)(2.108) より辺 12 上 $(L_3=0)$ においては

$$\boldsymbol{t}_1\cdot\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1}=\frac{1}{l_1} \tag{2.109}$$

の関係が成り立つ．したがって辺 12 における接線方向に対する形状関数 $\boldsymbol{N}_{t,1}$ は

$$\boldsymbol{N}_{t,1} = l_1 \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1} \tag{2.110}$$

で表される．よって，すべての辺に対しても同様の操作を行うことで各形状関数は

$$\boldsymbol{N}_{t,1} = l_1(L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1),\ \boldsymbol{N}_{t,2} = l_2(L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2),\ \boldsymbol{N}_{t,3} = l_3(L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3) \tag{2.111}$$

と表すことができる．また最終的に

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \sum_{i=1}^{3}(U_i\boldsymbol{i}_x + V_i\boldsymbol{i}_y)\Phi_{t,i} \tag{2.112}$$

で与えられる辺要素に対する形状関数 $\{U\}$，$\{V\}$ の各成分は

$$X_1 = l_1\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi}\right), \qquad X_2 = l_2\left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\right)$$
$$X_3 = l_3\left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi}\right) \tag{2.113}$$
$$(X,\xi) = (U,x),(V,y) \tag{2.114}$$

と表される．

不完全 2 次 (LT/QN) 辺要素

不完全 2 次多項式ベクトルは 8 個の未知係数で表され，図 2.6(b) に示すような辺要素を考えると，面内の電磁界は以下のように表現できる．

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \sum_{i=1}^{8} a_i \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,i} \tag{2.115}$$
$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1} = L_1\nabla L_2,\quad \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,2} = L_2\nabla L_3,\quad \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,3} = L_3\nabla L_1, \tag{2.116}$$
$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,4} = L_2\nabla L_1,\quad \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,5} = L_3\nabla L_2,\quad \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,6} = L_1\nabla L_3, \tag{2.117}$$
$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,7} = 4L_1L_2\nabla L_3,\quad \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,8} = 4L_1L_2\nabla L_3 \tag{2.118}$$

いま未知変数 a_i を電磁界の接線方向成分 $\Phi_{t,i}$ に置き換えて，面内の電磁界を

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \sum_{i=1}^{8} \boldsymbol{N}_{t,i}\Phi_{t,i} \tag{2.119}$$

のように表すためには，形状関数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1} \sim \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,6}$ の各点におけるベクトル方向成分，および $\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,7}$，$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,8}$ の各辺に対する法線方向成分を求める必要がある．$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1}$ の頂点 1 から頂点 2 に向かうベクトル方向成分の大きさは，式 (2.105)(2.106)(2.108) の関係より，頂点 1($L_2 = L_3 = 1$) において，

$$\boldsymbol{t}_1 \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1} = \frac{\nabla L_3}{|\nabla L_3|} \times \boldsymbol{i}_z \cdot (L_1\nabla L_2) = \frac{1}{l_1} \tag{2.120}$$

で表される．よって，すべての頂点におけるベクトルに対しても同様の操作を行うことで各形状関数 $\boldsymbol{N}_{t,1} \sim \boldsymbol{N}_{t,6}$ は

$$\boldsymbol{N}_{t,1} = l_1 L_1 \nabla L_2, \quad \boldsymbol{N}_{t,2} = l_2 L_2 \nabla L_3, \quad \boldsymbol{N}_{t,3} = l_3 L_3 \nabla L_1, \tag{2.121}$$

$$\boldsymbol{N}_{t,4} = l_1 L_2 \nabla L_1, \quad \boldsymbol{N}_{t,5} = l_2 L_3 \nabla L_2, \quad \boldsymbol{N}_{t,6} = l_3 L_1 \nabla L_3 \tag{2.122}$$

と表すことができる．一方，辺 12 の法線方向の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{n}_7 = \frac{\nabla L_3}{|\nabla L_3|} \tag{2.123}$$

と書けることから，$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,7}$ の辺 12 に対する法線成分の大きさは，式 (2.108) の関係より，辺の中点 $(L_1 = L_2 = 1/2)$ において，

$$\boldsymbol{n}_7 \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,7} = \frac{\nabla L_3}{|\nabla L_3|} \cdot (4 L_1 L_2 \nabla L_3) = \frac{l_1}{2 S_e} \tag{2.124}$$

で表すことができる．よって，同様の操作を行うことで各形状関数 $\boldsymbol{N}_{t,7}$，$\boldsymbol{N}_{t,6}$ は

$$\boldsymbol{N}_{t,7} = \frac{4 S_e}{l_1} L_1 L_2 \nabla L_3, \quad \boldsymbol{N}_{t,8} = \frac{4 S_e}{l_2} L_2 L_3 \nabla L_1 \tag{2.125}$$

と表すことができる．また最終的に

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \sum_{i=1}^{8} (U_i \boldsymbol{i}_x + V_i \boldsymbol{i}_y) \Phi_{t,i} \tag{2.126}$$

で与えられる辺要素に対する形状関数 $\{U\}$，$\{V\}$ の各成分は

$$\boldsymbol{X}_{t,1} = l_1 L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{X}_{t,2} = l_2 L_2 \frac{\partial L_3}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{X}_{t,3} = l_3 L_3 \frac{\partial L_1}{\partial \xi}, \tag{2.127}$$

$$\boldsymbol{X}_{t,4} = l_1 L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{X}_{t,5} = l_2 L_3 \frac{\partial L_2}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{X}_{t,6} = l_3 L_1 \frac{\partial L_3}{\partial \xi} \tag{2.128}$$

$$\boldsymbol{X}_{t,7} = \frac{4 S_e}{l_1} L_1 L_2 \frac{\partial L_3}{\partial \xi}, \quad \boldsymbol{N}_{t,8} = \frac{4 S_e}{l_2} L_2 L_3 \frac{\partial L_1}{\partial \xi} \tag{2.129}$$

$$(X, \xi) = (U, x), (V, y) \tag{2.130}$$

と表される．

不完全 3 次 (QT/CuN) 辺要素

不完全 3 次多項式ベクトルは 15 個の未知係数で表され，図 2.6(c) に示すような辺要素を考える

と，面内の電磁界を以下のように表現できる．

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \sum_{i=1}^{15} a_i \tilde{\boldsymbol{N}}_{t,i} \tag{2.131}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,1} = \frac{1}{2}(L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1)(4L_1-1)(4L_1-2), \tag{2.132}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,2} = (L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1)(4L_1-1)(4L_2-1), \tag{2.133}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,3} = \frac{1}{2}(L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1)(4L_2-1)(4L_2-2), \tag{2.134}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,4} = \frac{1}{2}(L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2)(4L_2-1)(4L_2-2), \tag{2.135}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,5} = (L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2)(4L_2-1)(4L_3-1), \tag{2.136}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,6} = \frac{1}{2}(L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2)(4L_3-1)(4L_3-2), \tag{2.137}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,7} = \frac{1}{2}(L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3)(4L_3-1)(4L_3-2), \tag{2.138}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,8} = (L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3)(4L_3-1)(4L_1-1), \tag{2.139}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,9} = \frac{1}{2}(L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3)(4L_1-1)(4L_1-2), \tag{2.140}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,10} = (L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2)L_1(4L_1-1), \tag{2.141}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,11} = (L_2\nabla L_3 - L_3\nabla L_2)L_2(4L_1-1), \tag{2.142}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,12} = (L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3)L_2(4L_2-1), \tag{2.143}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,13} = (L_3\nabla L_1 - L_1\nabla L_3)L_3(4L_2-1), \tag{2.144}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,14} = (L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1)L_3(4L_3-1), \tag{2.145}$$

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_{t,15} = (L_1\nabla L_2 - L_2\nabla L_1)L_1(4L_3-1) \tag{2.146}$$

ベクトル形状関数に関する詳細説明は文献 [40] に委ねることとして，ここでは $\{U\}$ および $\{V\}$ の最終的な表現のみを以下に示す．

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi}\right)(4L_1-1)(4L_1-2) \tag{2.147}$$

$$X_2 = \left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi}\right)(4L_1-1)(4L_2-1) \tag{2.148}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi}\right)(4L_2-1)(4L_2-2) \tag{2.149}$$

$$X_4 = \frac{1}{2}\left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\right)(4L_2-1)(4L_2-2) \tag{2.150}$$

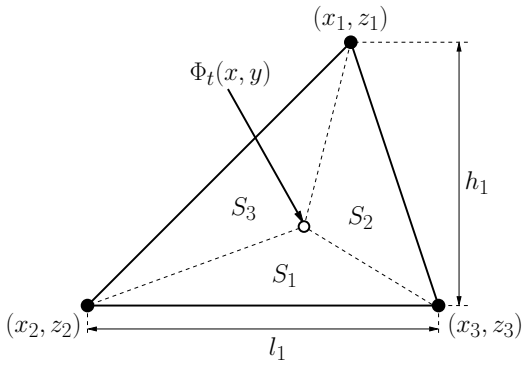


図 2.5: 三角形要素

$$X_5 = \left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\right)(4L_2 - 1)(4L_3 - 1) \tag{2.151}$$

$$X_6 = \frac{1}{2}\left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\right)(4L_3 - 1)(4L_3 - 2) \tag{2.152}$$

$$X_7 = \frac{1}{2}\left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi}\right)(4L_3 - 1)(4L_3 - 2) \tag{2.153}$$

$$X_8 = \left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi}\right)(4L_3 - 1)(4L_1 - 1) \tag{2.154}$$

$$X_9 = \frac{1}{2}\left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi}\right)(4L_3 - 1)(4L_1 - 1) \tag{2.155}$$

$$X_{10} = \left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\right)L_1(4L_1 - 1) \tag{2.156}$$

$$X_{11} = \left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi}\right)L_2(4L_1 - 1) \tag{2.157}$$

$$X_{12} = \left(L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi}\right)L_2(4L_2 - 1) \tag{2.158}$$

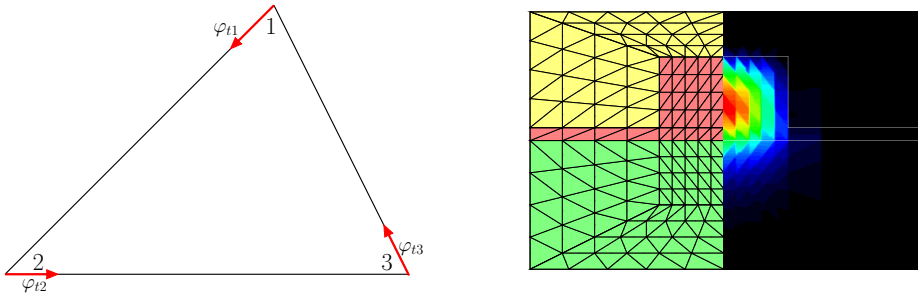
$$X_{13} = \left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi}\right)L_3(4L_2 - 1) \tag{2.159}$$

$$X_{14} = \left(L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi}\right)L_3(4L_3 - 1) \tag{2.160}$$

$$X_{15} = \left(L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi}\right)L_1(4L_3 - 1) \tag{2.161}$$

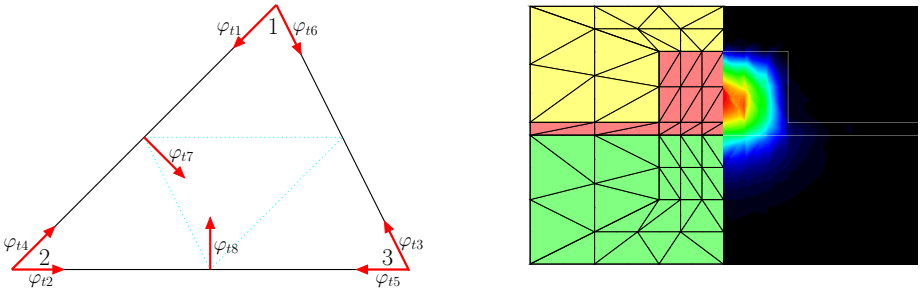
$$(X, \xi) = (U, x), (V, y) \tag{2.162}$$

また，図 2.6 ではリブ導波路を用いて，各要素に対して同程度の未知変数になるように解析領域を分割して固有モード解析を行った際の基本モードの電磁界分布を示しているが，高次の要素を用いることで少ない未知変数でも精度良く解析を行えることがわかる．



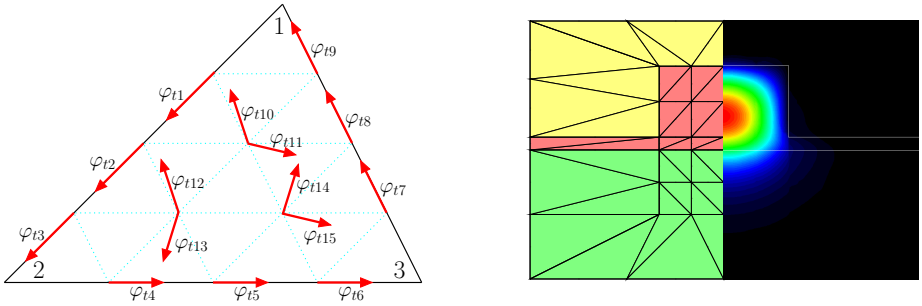
(*I*) (*II*)

(a) CT/LN 要素



(*I*) (*II*)

(b) LT/QN 要素



(*I*) (*II*)

(c) QT/CuN 要素

図 2.6: 有限要素法における三角形エッジ/ノーダルハイブリッド要素 ((*I*) 辺要素形状と (*II*) 電磁界分布の近似解)

2.3.3 逆反復法

伝搬解析を行うためには入射モードをあらかじめ求めておく必要があり，前小節で示した一般化固有値方程式より，入射波として設定する導波モードを求めることができる．固有モードを算出する方法としては，一般に行列を対角化することで直接全固有値を求めることが可能であるが，ここではより効率的に入射モードを求めるために，逆反復法による定式化を行いその概要を説明する．逆反復法は，固有値問題を連立一次方程式を繰り返し解く問題に帰着させることができるため，マルチフロンタル法などを用いて計算の効率化を図ることができる．

逆反復法は通常最小固有値が求まる解法であるため一般化固有値方程式 (2.69) を以下のように変形する．

$$\left([\tilde{K}]-\lambda[M]\right)\{\phi\}=\{0\} \qquad \left(\beta_{\max}^2[M]-[K]=[\tilde{K}],\quad \beta_{\max}^2-\beta^2=\lambda\right) \tag{2.163}$$

$$[A]\{\phi\}=\tilde{\lambda}\{\phi\} \qquad \left([\tilde{K}]^{-1}[M]=[A],\quad \frac{1}{\lambda}=\tilde{\lambda}\right) \tag{2.164}$$

ここに λ は標準固有値方程式の固有値であり

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_N| \qquad (\,|\tilde{\lambda}_1|<|\tilde{\lambda}_2|<\cdots<|\tilde{\lambda}_N|\,) \tag{2.165}$$

の関係があるとする．また $\beta_{\max}$ は伝搬定数の最大値であり，これに対応する基本モードが求まることになる．次に以下のような反復計算式を考える．

$$\{\phi^{(k+1)}\}=[A]\{\phi^{(k)}\} \qquad \{\phi^{(0)}\}=\sum_{i=1}^{N}a_i\{\phi_i\} \tag{2.166}$$

ここに $\{\phi_0\}$ は反復計算の初期値であり，固有モードの重ね合わせで表す．上式に基づき $\{\phi_1\}$ は

$$\begin{aligned}\{\phi_1\}&=[A]\{\phi_0\}\\&=a_1[A]\{\phi_1\}+a_2[A]\{\phi_2\}+\cdots+a_N[A]\{\phi_N\}\\&=a_1\tilde{\lambda}_1\{\phi_1\}+a_2\tilde{\lambda}_2\{\phi_2\}+\cdots+a_N\tilde{\lambda}_N\{\phi_N\}\end{aligned} \tag{2.167}$$

で表されることから，無限回の反復回数を考えると

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\{\phi^{(k)}\}&=\lim_{k\to\infty}\left(a_1\tilde{\lambda}_1^k\{\phi_1\}+a_2\tilde{\lambda}_2^k\{\phi_2\}+\cdots+a_N\tilde{\lambda}_N^k\{\phi_N\}\right)\\&=\lim_{k\to\infty}a_N\tilde{\lambda}_N^k\left(\frac{a_1}{a_N}\left(\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_N}\right)^k\{\phi_1\}+\frac{a_2}{a_N}\left(\frac{\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_N}\right)^k\{\phi_2\}+\cdots+\{\phi_N\}\right)\\&=\lim_{k\to\infty}a_N\tilde{\lambda}_N^k\{\phi_N\}\end{aligned} \tag{2.168}$$

を得る．したがって，反復計算により最も大きい固有値 $\lambda_1\ (=\tilde{\lambda}_N)$，つまり伝搬定数 β が $\beta_{\max}$ に最も近い固有モード ϕ_1 を求めることができる．このように逆反復法ではある固有値に対応する固有モードを増大し，それ以外が減衰するため，初期値 $\{\phi^{(0)}\}$ はランダムに与えて反復計算を行えばよいことになる．また高次モードを求めたい場合には $\beta_{\max}$ に近似伝搬定数を指定することでそ

れに最も近い固有モードを求めることができる．また固有値 β^2 は式 (2.163) より

$$
\begin{aligned}
(\beta_{\max}^2 - \beta^2)[M]\{\phi\} &= (\beta_{\max}^2[M] - [K])\{\phi\} \\
\beta_{\max}^2 - \beta^2 &= \beta_{\max}^2 \frac{\{\phi\}^T[M]\{\phi\}}{\{\phi\}^T[M]\{\phi\}} - \frac{\{\phi\}^T[K]\{\phi\}}{\{\phi\}^T[M]\{\phi\}} \\
\therefore\ \beta^2 &= \frac{\{\phi\}^T[K]\{\phi\}}{\{\phi\}^T[M]\{\phi\}}
\end{aligned} \tag{2.169}
$$

として求めることができる．また実際の有限要素法における反復計算では，導波モード求めるために反復毎に固有ベクトルを正規化する必要があり，

$$
\{\phi^{(k+1)\prime}\} = [\tilde{K}]^{-1}[M]\{\phi^{(k)}\} \tag{2.170}
$$

$$
\{\phi^{(k+1)}\} = \frac{\{\phi^{(k+1)\prime}\}}{\{\phi^{(k+1)\prime}\}^T[M]\{\phi^{(k+1)\prime}\}} \tag{2.171}
$$

で与えられる反復計算式を実行する．

2.3.4 固有モード伝送パワーの評価式

導波路不連続部や入出力ポート上の特性を評価する場合，入射波に対する入出力導波路の固有モード伝送パワーを知ることが重要であり，その計算方法について示す．

いま，入出力導波路上での電磁界を

$$
\boldsymbol{\Phi} = \sum_i a_i \boldsymbol{\Phi}_i \qquad \boldsymbol{\Psi} = \sum_i a_i \boldsymbol{\Psi}_i \tag{2.172}
$$

のように固有モードの重ね合わせとして表現すると，モードの直交性を利用して，次のような重なり積分表現を得ることができる．

$$
\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_i^* \times \boldsymbol{\Psi}) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy = a_i \iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_i^* \times \boldsymbol{\Psi}_i) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy \tag{2.173}
$$

ここで，導波モードの横成分は実数なので

$$
\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^* = \boldsymbol{\Phi}_i^* \times \boldsymbol{\Psi}_i \tag{2.174}
$$

の関係が成り立つ．式 (2.173) より，モード振幅係数 a_i は

$$
a_i = \frac{\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi}_i^*) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy}{\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy} \tag{2.175}
$$

で表される．また全電力 P_t はポインティングベクトルの時間平均より

$$
P_t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_t \times \boldsymbol{\Psi}_t^*) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy\right\} \tag{2.176}
$$

で与えられる．一方，任意の電磁界に対して i 番目のモードが運ぶ電力 P_i は，

$$
P_i = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iint_\Omega \{\boldsymbol{\Phi} \times (a_i \boldsymbol{\Psi}_i)^*\} \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy\right\} \tag{2.177}
$$

で表され，モードの直交性より

$$P_i = \frac{|a_i|^2}{2}\mathrm{Re}\left\{\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dxdy\right\} \tag{2.178}$$

となる．よって，全電力に対する i 番目の固有モード電力は式 (2.175)(2.176)(2.178) より

$$\frac{P_i}{P_t} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\left|\iint (\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi}_i^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dxdy\right|^2}{\iint (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dxdy \cdot \iint (\boldsymbol{\Phi}_t \times \boldsymbol{\Psi}_t^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dxdy}\right\} \tag{2.179}$$

で評価することができる．また固有モード電力はマクスウェルの方程式の関係から電界成分もしくは磁界成分のみで評価が可能である．以下で 2 次元導波路と 3 次元導波路の場合の有限要素行列を利用した具体的な表現を示す．

2 次元導波路の場合

TE 波の固有モードに対して，

$$E_y = \phi_i(x)\exp(-j\beta_i z) \tag{2.180}$$

$$H_x = -j\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\beta_i}{\omega\mu_0}\phi_i(x)\exp(-j\beta_i z) \tag{2.181}$$

であることから，重なり積分は

$$\int (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dx = \int -E_y H_x^* dx = \frac{c\beta_i}{k_0\mu_0}\int |\phi_i(x)|^2 dx \tag{2.182}$$

と書ける．ここに k_0 は自由空間波数，c は光の伝搬速度である．同様に TM モードでは，

$$H_y = \phi_i(x)\exp(-j\beta_i z) \tag{2.183}$$

$$E_x = j\frac{1}{\omega\varepsilon_0 n^2}\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\beta_i}{\omega\varepsilon_0 n^2}\phi_i(x)\exp(-j\beta_i z) \tag{2.184}$$

であることから，

$$\int (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dx = \int E_x H_y^* dx = \frac{c\beta_i}{k_0\varepsilon_0}\int \frac{1}{n^2}|\phi_i(x)|^2 dx \tag{2.185}$$

と書ける．これらをまとめると i 番目の固有モードの重なり積分表現は，電界もしくは磁界の一成分を利用して，

$$\int (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*)\cdot \boldsymbol{i}_z dx = n_{\mathrm{eff}}^{(i)}\cdot cs\int p|\phi_i(x)|^2 dx \tag{2.186}$$

と書くことができる．ここに $n_{\mathrm{eff}}^{(i)}(=\beta_i/k_0)$ は実効屈折率であり，s, p はそれぞれ TE 波の場合，

$$s = 1/\mu_0 \qquad p = 1 \tag{2.187}$$

で定義され，TM 波の場合は

$$s = 1/\varepsilon_0 \qquad p = 1/n^2 \tag{2.188}$$

で定義される．よって，有限要素法による表示式を用いると電力計算で必要となる重なり積分表現は以下のように表される．

$$\int (\boldsymbol{\Phi}_i \times \boldsymbol{\Psi}_i^*) \cdot \boldsymbol{i}_z dx = n_{\mathrm{eff}}^{(i)} \cdot cs\{\phi_i\}^\dagger [M_i]\{\phi_i\} \tag{2.189}$$

$$\int (\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi}_i^*) \cdot \boldsymbol{i}_z dx = n_{\mathrm{eff}}^{(i)} \cdot cs\{\phi\}^\dagger [M_i]\{\phi_i\} \tag{2.190}$$

$$\int (\boldsymbol{\Phi}_t \times \boldsymbol{\Psi}_t^*) \cdot \boldsymbol{i}_z dx = n_{\mathrm{eff}}^{(t)} \cdot cs\{\phi_t\}^\dagger [M_t]\{\phi_t\} \tag{2.191}$$

ここに † は複素共役転置をとることを示す．

3 次元導波路の場合

ベクトル波動方程式 (2.45) より，i 番目の固有モードの重なり積分表現を

$$\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_i^* \times \boldsymbol{\Psi}_i) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy = \iint_\Omega \frac{jc}{k_0} [\boldsymbol{\Phi}_i^* \times (p\nabla \times \boldsymbol{\Phi}_i)] \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy \tag{2.192}$$

のように変形し，電磁界 $\boldsymbol{\Phi}_i$ にエッジ/ノーダルハイブリッド要素に対する形状関数を用いた表現を代入すると，各要素内では

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_e} \frac{jc}{k_0} [\boldsymbol{\Phi}_i^* \times (p\nabla \times \boldsymbol{\Phi}_i)] \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy \\
&= \iint_{\Omega_e} \frac{jc}{k_0} p \left[\{\phi_{t,(i)}\}^\dagger \{U\} \left(\frac{\partial \{U\}^T}{\partial z} \{\phi_{t,(i)}\} - j\beta_i \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \{\phi_{z,(i)}\} \right) \right. \\
&\qquad \left. - \{\phi_{t,(i)}\}^\dagger \{V\} \left(j\beta_i \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \{\phi_{z,(i)}\} - \frac{\partial \{V\}^T}{\partial z} \{\phi_{t,(i)}\} \right) \right] dxdy
\end{aligned} \tag{2.193}$$

と表せる．したがって $\partial/\partial z \to -j\beta$ として，導波路断面のすべての要素について重ね合わせると，有限要素行列を用いて

$$\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}_i^* \times \boldsymbol{\Psi}_i) \cdot \boldsymbol{i}_z dxdy = \frac{c\beta_i}{k_0} \{\phi_{t,(i)}\}^\dagger ([M_{tt}]\{\phi_{t,(i)}\} + [M_{tz}]\{\phi_{z,(i)}\}) \tag{2.194}$$

と表せる．

2.4 導波路伝搬解析

2 次元の波動方程式 (2.34) に対してガラーキン法に基づく有限要素法を適用する．図 2.7 に示すような三角形節点要素で全体領域を分割することを考え，各要素内の電磁界 Φ は区分多項式によって近似的に

$$\Phi(x,z) \simeq \tilde{\Phi}(x,z) = \{N(x,z)\}^T \{\Phi_e\} \tag{2.195}$$

$$\{N(x,z)\} = [N_1(x,z) \quad N_2(x,z) \quad \cdots \quad N_n(x,z)]^T \tag{2.196}$$

$$\{\Phi_e\} = [\Phi_{e1} \quad \Phi_{e2} \quad \cdots \quad \Phi_{en}]^T \tag{2.197}$$

と表現される．$\{N_i(x,z)\}$ は三角形要素の形状関数ベクトル，$\{\Phi_{ei}\}$ は要素上に与えられた節点の電磁界振幅によるベクトルである．形状関数ベクトルの具体的な表現は，関数 Φ の要素内変化を 1 次多項式

$$\Phi(x,z) = a_0 + a_1 x + a_2 z \tag{2.198}$$

で近似する場合，図 2.7(a) に示すように節点を配置し，係数 $a_i (i = 0 \sim 2)$ の具体表現を，各節点の Φ の値，すなわち

$$\begin{bmatrix} \Phi_{e1} \\ \Phi_{e2} \\ \Phi_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{2.199}$$

から求め，式 (2.198) に代入することで得られる．ここで面積座標を導入すると，形状関数は

$$\{N\} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T \tag{2.200}$$

で与えられる．同様にして，関数 Φ の要素内変化を 2 次多項式で近似する場合，図 2.7(b) に示すように節点を配置することで，近似多項式と形状関数ベクトルは次のように表される．

$$\Phi(x,z) = a_0 + a_1 x + a_2 z + a_3 x^2 + a_4 z^2 + a_5 xz \tag{2.201}$$

$$\{N\} = \begin{bmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ L_3(2L_3 - 1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_1L_3 \end{bmatrix} \tag{2.202}$$

いま電磁界 Φ を近似解 $\tilde{\Phi}$ を用いて表すと式 (2.34) は，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right) + k_0^2 q\tilde{\Phi} = R \tag{2.203}$$

のように残差 R が現れる．ここでガラーキン法を適用し，式 (2.203) に形状関数を乗じ，要素全体の積分値をゼロとすることで

$$\iint_e \{N\}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right) + k_0^2 q\tilde{\Phi}\right] dxdz = \{0\} \tag{2.204}$$

のように書ける．ここで部分積分

$$\{N\}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right) - p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} \tag{2.205}$$

$$\{N\}\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right) - p\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z} \tag{2.206}$$

を適用し，さらに n_x と n_z をそれぞれ要素境界外向き法線ベクトルの x 成分および z 成分として，2 次元のガウスの発散定理

$$\iint_e \frac{\partial}{\partial x}\left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right)dxdy = \int_\Gamma n_x \cdot \left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right)d\Gamma \tag{2.207}$$

$$\iint_e \frac{\partial}{\partial z}\left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right)dxdy = \int_\Gamma n_z \cdot \left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right)d\Gamma \tag{2.208}$$

$$\int_\Gamma n_x \cdot \left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right)d\Gamma + \int_\Gamma n_z \cdot \left(p\{N\}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right)d\Gamma = \int_\Gamma p\{N\}_\Gamma \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n}d\Gamma \tag{2.209}$$

を利用すると式 (2.204) は

$$\iint_e \left[p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} + p\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z} - k_0^2 q\{N\}\tilde{\Phi}\right]dxdz = \int_\Gamma p\{N\}_\Gamma \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n}d\Gamma \tag{2.210}$$

のように表現できる．ここに $\partial/\partial n$ は要素境界上における外向き法線方向微分を表す．式 (2.210) の左辺の $\tilde{\Phi}$ を式 (2.195) を用いて節点値 $\{\Phi_e\}$ で離散化すると，各要素に対する離散化方程式は次で表される．

$$\begin{aligned}\iint_e \Bigg[p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x}\{\Phi_e\} + p\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z}\{\Phi_e\} \\ -k_0^2 q\{N\}\{N\}^T\{\Phi_e\}\Bigg]dxdz = \int_\Gamma p\{N\}_\Gamma \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n}d\Gamma\end{aligned} \tag{2.211}$$

この要素方程式を全ての要素について重ね合わせることで ($\sum_e\{\Phi_e\} \to \{\Phi\}$)，全体方程式を組み立てると最終的に次の行列方程式を得る．

$$[P]\{\Phi\} = \{u\} \tag{2.212}$$

$$[P] = [K] - k_0^2[M] \tag{2.213}$$

$$[K] = \sum_e \iint_e \left[p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} + p\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z}\right]dxdz \tag{2.214}$$

$$[M] = \sum_e \iint_e q\{N\}\{N\}^T dxdz \tag{2.215}$$

$$\{u\} = \sum_e{}' \left(\int_\Gamma p\{N\}_\Gamma \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n}d\Gamma\right) \tag{2.216}$$

ここに $\sum_e{}'$ はある境界 Γ に関するすべての要素の総和を，$\int_\Gamma$ はある境界に関する積分を意味する．$\{N\}_\Gamma$ はある境界において三角形要素に対応するように定義される線節点要素の形状関数を意味する．$\{u\}$ は全体荷重ベクトルと呼ばれ，境界条件および入射条件を決定する項であり，式 (2.211) の右辺が，全体の外部境界および電磁界が不連続になる入射境界でキャンセルされずに残ったものに対応する．外部境界に関しては，図 2.8 に示すように完全整合層 (Perfectly Matched Layer: PML) を解析領域周囲に課すことで電磁界を終端で十分に減衰させることができるため，境界積分項をゼロと置いても問題はない．PML については 2.6 節で述べる．一方，入射境界は PML 領域外，つ

まり領域内部の断面を指定する必要がある．図 2.8 のように入射断面 Γ $(z = z_{\mathrm{in}})$ を境に 2 つの領域 Ω_A，Ω_B に分割すると，全体荷重ベクトルは各領域で

$$\{u_A\} = \sum_e{}' \left(\int_e p\{N\}_\Gamma \left.\frac{\partial \Phi_A}{\partial n_A}\right|_\Gamma d\Gamma \right) = -\sum_e{}' \left(\int_e p\{N\}_\Gamma \left.\frac{\partial \Phi_A}{\partial z}\right|_\Gamma d\Gamma \right) \tag{2.217}$$

$$\{u_B\} = \sum_e{}' \left(\int_e p\{N\}_\Gamma \left.\frac{\partial \Phi_B}{\partial n_B}\right|_\Gamma d\Gamma \right) = \sum_e{}' \left(\int_e p\{N\}_\Gamma \left.\frac{\partial \Phi_B}{\partial z}\right|_\Gamma d\Gamma \right) \tag{2.218}$$

と表され，入射断面における電磁界は各領域で

$$\Phi_A|_\Gamma = \Phi_{A,\mathrm{in}}|_\Gamma + \Phi_{A,\mathrm{scat}}|_\Gamma \tag{2.219}$$

$$\Phi_B|_\Gamma = \Phi_{B,\mathrm{in}}|_\Gamma + \Phi_{B,\mathrm{scat}}|_\Gamma \tag{2.220}$$

のように表すことができる．ここに $\Phi_{A,\mathrm{in}}$，$\Phi_{B,\mathrm{in}}$ は入射電磁界，$\Phi_{A,\mathrm{scat}}$，$\Phi_{B,\mathrm{scat}}$ は散乱電磁界を表す．散乱電磁界は入射断面で連続であることから，

$$\left.\frac{\partial \Phi_{A,\mathrm{scat}}}{\partial z}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial \Phi_{B,\mathrm{scat}}}{\partial z}\right|_\Gamma \tag{2.221}$$

の関係が得られ，さらに入射電磁界は入射断面から各領域内部に同じ伝搬定数 β_{in} をもつ入射モード ϕ_{in} が伝搬することを仮定し，

$$\Phi_{A,\mathrm{in}} = \phi_{\mathrm{in}}(x)\exp(j\beta_{\mathrm{in}} n_A) \to \phi_{\mathrm{in}}(x)\exp(-j\beta_{\mathrm{in}}(z - z_{\mathrm{in}})) \tag{2.222}$$

$$\Phi_{B,\mathrm{in}} = \phi_{\mathrm{in}}(x)\exp(j\beta_{\mathrm{in}} n_B) \to \phi_{\mathrm{in}}(x)\exp(j\beta_{\mathrm{in}}(z - z_{\mathrm{in}})) \tag{2.223}$$

とすれば，2 つの領域を統合した全体荷重ベクトル $\{u\}$ $(= \{u_A\} + \{u_B\})$ は

$$\{u\} = \sum_e{}' \left[\int_e p\{N\}_\Gamma \left(\frac{\partial \Phi_B}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_A}{\partial z} \right)\Bigg|_\Gamma d\Gamma \right] = \sum_e{}' \left(\int_e j2p\beta_{\mathrm{in}}\{N\}_\Gamma \phi_{\mathrm{in}} d\Gamma \right) \tag{2.224}$$

となり，ϕ_{in} を離散化すると

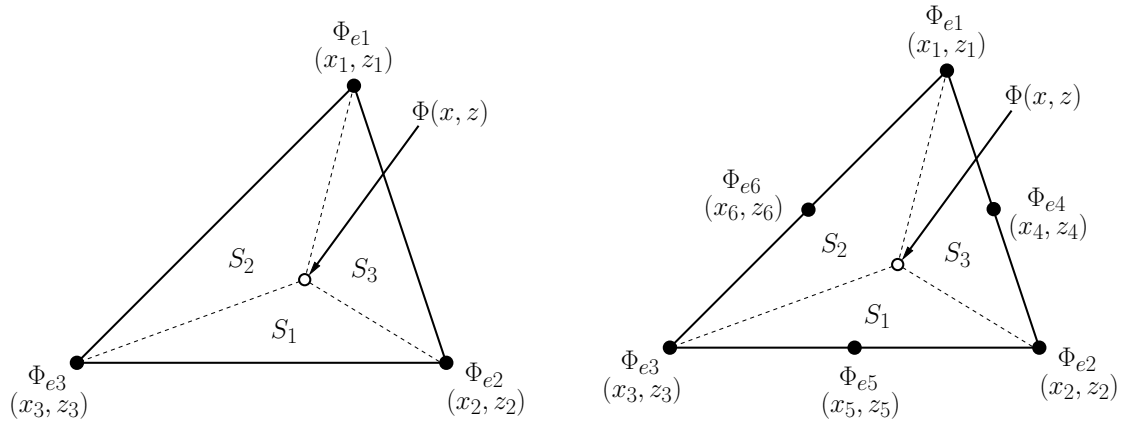
$$\{u\} = j2\beta_{\mathrm{in}} \sum_e{}' \left(\int_e p\{N\}_\Gamma \{N\}_\Gamma^T d\Gamma \right) \{\phi_{\mathrm{in}}\} \tag{2.225}$$

のように簡略化することができる．

伝搬解析で最終的に解くべき連立一次方程式を組み立てるには，式 (2.214)，(2.215) および (2.225) の積分計算が必要となる．要素内で媒質定数が任意に変化する場合や曲辺境界をもつ要素を用いた場合などにおいては厳密な積分が困難なため数値積分が必要になるが，面積座標を利用した積分公式

$$\iint_e L_1^k L_2^l L_3^m dxdy = 2S_e \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!} \tag{2.226}$$

を利用することで厳密な積分計算を比較的容易に実行することが可能であり，1 次要素，2 次要素の場合の結果はそれぞれ以下のようになる．



(a) 1 次要素　　(b) 2 次要素

図 2.7: 三角形節点要素

1 次要素の場合

$$\frac{\partial\{N\}}{\partial x} = \frac{1}{2S_e}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial\{N\}}{\partial y} = \frac{1}{2S_e}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \tag{2.227}$$

$$\iint_e \{N\}\{N\}^T dxdy = \frac{S_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.228}$$

$$\iint_e \frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial\xi} dxdy = \frac{1}{4S_e}\begin{bmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.229}$$

$$(\xi, X) = (x, B), (y, C) \tag{2.230}$$

2 次要素の場合

$$\frac{\partial\{N\}}{\partial x}=\frac{1}{2S_e}\begin{bmatrix}B_1(4L_1-1)\\B_2(4L_2-1)\\B_3(4L_3-1)\\4(B_1L_2+B_2L_1)\\4(B_2L_3+B_3L_2)\\4(B_3L_1+B_1L_3)\end{bmatrix}\qquad\frac{\partial\{N\}}{\partial y}=\frac{1}{2S_e}\begin{bmatrix}C_1(4L_1-1)\\C_2(4L_2-1)\\C_3(4L_3-1)\\4(C_1L_2+C_2L_1)\\4(C_2L_3+C_3L_2)\\4(C_3L_1+C_1L_3)\end{bmatrix}\tag{2.231}$$

$$\iint_e\{N\}\{N\}^T dxdy=\begin{bmatrix}6&-1&-1&0&-4&0\\-1&6&-1&0&0&-4\\-1&-1&6&-4&0&0\\0&0&-4&32&16&16\\-4&0&0&16&32&16\\0&-4&0&16&16&32\end{bmatrix}\tag{2.232}$$

$$\iint_e\frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial\xi}dxdy\tag{2.233}$$

$$=\frac{1}{12S_e}\begin{bmatrix}3\eta_{11}&-\eta_{12}&-\eta_{13}&4\eta_{12}&0&4\eta_{13}\\-\eta_{12}&3\eta_{22}&-\eta_{23}&4\eta_{12}&4\eta_{23}&0\\-\eta_{13}&-\eta_{23}&3\eta_{33}&0&4\eta_{23}&4\eta_{13}\\4\eta_{12}&4\eta_{12}&0&8\chi_{12}^2-8\eta_{12}&4\chi_{12}\chi_{23}+4\eta_{13}&4\chi_{12}\chi_{13}+4\eta_{23}\\0&4\eta_{23}&4\eta_{23}&4\chi_{12}\chi_{23}+4\eta_{13}&8\chi_{23}^2-8\eta_{23}&4\chi_{23}\chi_{13}+4\eta_{12}\\4\eta_{13}&0&4\eta_{13}&4\chi_{12}\chi_{13}+4\eta_{23}&4\chi_{23}\chi_{13}+4\eta_{12}&8\chi_{13}^2-8\eta_{13}\end{bmatrix}\tag{2.234}$$

$$\eta_{ij}=\zeta_i\zeta_j\tag{2.235}$$

$$\chi_{ij}=\zeta_i+\zeta_j\tag{2.236}$$

$$(\xi,\zeta)=(x,B),(y,C)\tag{2.237}$$

有限要素法の伝搬解析における計算は疎行列を係数とする連立一次方程式の計算に帰着するため，疎行列向けの高速なソルバは，解析の効率化のために非常に重要である．連立一次方程式の解法は大きく分けて直接法と反復法がある．一般に直接法は，分解計算において分解後に非零となる要素 (fill-in) が生じるために反復法に比べて必要なメモリ量が増大するが，反復法が収束しない問題でも解を求められる可能性があり，特に対称正定値の行列の場合は，数値誤差がなければ必ず解を求められるという特徴があり，広く使用されている．現在では，fill-in となる要素のみのメモリを確保すること，fill-in がなるべく少なくなるように行・列の同時置換を行うことなどにより演算量・メモリ量を節約できる疎行列直接解法 (スパースソルバ) が主流となっている．本研究ではスパースソルバであるマルチフロンタル法による連立一次方程式の解法を採用している．マルチフロンタル法は外積形式によるコレスキー分解の変形であり，フロンタル行列と呼ばれる非零要素のみを圧縮した小規模な蜜行列に対して LU 分解の消去演算を行い高速化を図る方法であり [77]，有限要素法で得られる大規模な疎行列連立一次方程式の計算にも広く使用されている．またスパースソルバのライブラリとしては，IBM の WSMP，intel の Math Kernel Library に含まれる PARADISO，日立の SkylineSolver などの商用ソフトをはじめ，フリーの SPOOLES, SuperLU, UMFPACK など，多くのソフトが提供されている．

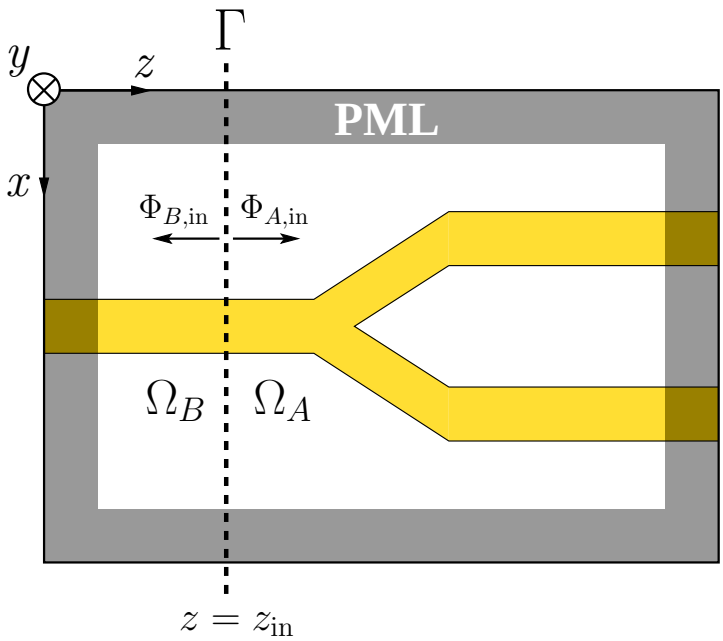


図 2.8: 解析領域

2.5 ビーム伝搬解析

本節では電磁界を有限要素法を用いて離散化する有限要素ビーム伝搬法 (FE-BPM) の定式化を行う．BPM では，通常フレネル近似が用いられているため，光の伝搬方向を z としたとき，その適用は導波路の z 軸に対する傾斜角が十分小さい場合に限られる．こうしたフレネル近似の欠点を克服するための方法として，パデ近似を用いた広角 BPM が開発されている．ここではパデ式を基本式とした FE-BPM を扱う．

2 次元導波路を考え，電磁界 Φ を z 方向に位相定数 $k_0 n_0$ で振動する伝搬項成分と緩慢変化する包絡線振幅 ϕ にわけ，電磁界 Φ を以下のように表す．

$$\Phi(x,z) = \phi(x,z)\exp(-jk_0 n_0 z) \tag{2.238}$$

ここに n_0 は参照屈折率と呼ばれる．式 (2.238) を 2 次元の波動方程式 (2.34) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)e^{-jk_0n_0z} + \left\{\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}e^{-jk_0n_0z} - jk_0n_0\phi e^{-jk_0n_0z}\right)\right\} \\ + p\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}e^{-jk_0n_0z} - jk_0n_0\phi e^{-jk_0n_0z}\right)\right\} + k_0^2 q\phi e^{-jk_0n_0z} = 0\end{aligned} \tag{2.239}$$

を得る．ここで伝搬方向に対して屈折率が緩やかに変化する場合，$\partial p/\partial z \simeq 0$ と近似できるため，左辺第 2 項を無視すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + p\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - j2k_0n_0p\frac{\partial\phi}{\partial z} - k_0^2n_0^2p\phi + k_0^2q\phi = 0 \tag{2.240}$$

のような広角ビーム伝搬解析のための基本方程式が得られる．ここで電磁界振幅 ϕ を形状関数ベクトル $\{N(x)\}$ と要素節点ベクトル $\{\phi\}_e$ を用いて

$$\phi(x,z) = \{N(x)\}^T\{\phi_e(z)\} \tag{2.241}$$

のように表し，式 (2.240) に有限要素法を適用すると

$$[M]\frac{d^2\{\phi\}}{dz^2} - j2k_0n_0[M]\frac{d\{\phi\}}{dz} + ([K] - k_0^2n_0^2)\{\phi\} = \{0\} \tag{2.242}$$

が得られる．このときの有限要素行列 $[K]$ および $[M]$ はそれぞれ式 (2.70)，(2.71) と同じ形式で与えられる．また式 (2.242) において d^2/dz^2 の項を無視するとフレネル近似になる．広角 BPM ではこの項を無視せずパデ式を用いて近似を行う．簡単な方法として，式 (2.242) を形式的に d/dz に関する漸化式

$$2jk_0n_0[M]\left.\frac{d}{dz}\right|_n\{\phi\} = \frac{([K] - k_0^2n_0^2[M])\{\phi\}}{1 - \left.\frac{1}{2jk_0n_0}\frac{d}{dz}\right|_{n-1}} \qquad \left(\left.\frac{d}{dz}\right|_{-1} = 0\right) \tag{2.243}$$

と書き，連分数展開を行うことでパデ式を求めることができる．Pade(1,0) の定式化は式 (2.243) で $n = 0$ とした場合に対応しており，

$$\frac{d\{\phi\}}{dz} = \frac{1}{2jk_0n_0}[M]^{-1}([K] - k_0^2n_0^2[M])\{\phi\} \tag{2.244}$$

のように得られた表現を，式 (2.242) の z の 2 階微分項に代入することで

$$-j2k_0n_0[\tilde{M}]\frac{d\{\phi\}}{dz} + ([K] - k_0^2n_0^2[M])\{\phi\} = \{0\} \tag{2.245}$$

が得られる．ここで行列 $[\tilde{M}]$ は

$$[\tilde{M}] = [M] + \frac{1}{4k_0^2n_0^2}([K] - k_0^2n_0^2[M])\{\phi\} \tag{2.246}$$

で与えられる．また式 (2.245) 中の行列 $[\tilde{M}]$ を行列 $[M]$ に置き換えることによってもフレネル式を得ることができる．式 (2.245) に対してクランク・ニコルソン法により

$$\frac{d\{\phi\}}{dz} = \frac{\{\phi\}_{k+1} - \{\phi\}_k}{\Delta z} \tag{2.247}$$

$$\{\phi\} = 0.5\{\phi\}_{k+1} + 0.5\{\phi\}_k \tag{2.248}$$

として z 方向に差分化することによって，最終的に以下の逐次計算式を得ることができる．

$$[A]_k\{\phi\}_{k+1} = [B]_k\{\phi\}_k \tag{2.249}$$

ここに行列 $[A]_k$，$[B]_k$ はそれぞれ以下のように定義される．

$$[A]_k = -j2k_0n_0[\tilde{M}]_k + 0.5\Delta z([K]_k - k_0^2n_0^2[M]_k) \tag{2.250}$$

$$[B]_k = -j2k_0n_0[\tilde{M}]_k - 0.5\Delta z([K]_k - k_0^2n_0^2[M]_k) \tag{2.251}$$

よって式 (2.249) より，入射端での電磁界 $\{\phi\}_0$ が与えられると，逐次計算により任意の位置 $z = k\Delta z$ における電磁界振幅 $\{\phi\}_k$ を求めることができる．なお，ここではパデ式の導出に連分数展開を使用したが，直接パデ展開を利用することも可能であり，これについては付録 A1 で示す．

ビーム伝搬法においては，参照屈折率 n_0 を適切に選ぶことが解析精度を高めるために重要である．最も簡単な方法は参照屈折率をクラッドあるいはコアの屈折率に選ぶことであるが，屈折率

差の大きな導波路を扱う場合やあらかじめ設定した伝搬方向と実際の光の伝搬方向が異なる場合には参照屈折率の選び方に注意が必要である．また，伝搬方向に導波路構造や光の伝搬姿態が変化する場合には伝搬方向に参照屈折率を変化させることも必要になる．ここでは，導波路構造と光の伝搬の変化に対応して伝搬方向に参照屈折率をアダプティブに更新する方法について述べる．有限要素ビーム伝搬解析の基本式 (2.242) において，z 方向の微分 d/dz を 0 とおくと

$$[K]\{\phi\} = k_0^2 n_0^2 [M]\{\phi\} \tag{2.252}$$

を得る．この式から，レイリー商を考え n_0 が実数であることを考慮して参照屈折率 n_0 は

$$n_0^2 = \mathrm{Re}\left[\frac{\{\phi\}^\dagger [K]\{\phi\}}{k_0^2 \{\phi\}^\dagger [M]\{\phi\}}\right] \tag{2.253}$$

と求めることができる．各伝搬ステップにおいて式 (2.253) に従って参照屈折率を更新することで有限要素ビーム伝搬法の解析精度を高めることができる．

2.6 完全整合層

有限要素法では無限領域を扱うことは一般に難しく，仮想的に設定した解析領域端からの非物理的な反射が問題になる場合には，適切な境界処理をする必要がある．解析領域端に単純な吸収媒質を置いただけでは，吸収媒質の前後でのインピーダンス不整合からその境界で反射が生じてしまう問題がある．ここでは，解析領域端に完全整合層 (Perfectly Matched Layer : PML)[78]〜[82] と呼ばれる無反射吸収層で解析領域端を取り囲むことで解析領域から外に向かう波を無反射で吸収させ，非物理的な反射波を抑圧する．ここでは複素係数を用いた座標変換に基づく PML を考え，放射波を吸収させる．

いま，解析領域の周囲に PML 層を設け，その PML 内部での座標変換を，

$$\tilde{x} = \int_{x_0}^{x} s_x(x')dx', \qquad \tilde{y} = \int_{y_0}^{y} s_y(y')dy', \qquad \tilde{z} = \int_{z_0}^{z} s_z(z')dz', \tag{2.254}$$

とすると，$i\ (i = x, y, z)$ に対する微分演算子は，それぞれ

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x}\frac{\partial}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{s_y}\frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{s_z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.255}$$

と書ける．ここで $s_i\ (i = x, y, z)$ はストレッチング変数であり，以下のように表される．

$$s_i = 1 - j\left(\frac{\rho}{d}\right)^m \tan\delta \tag{2.256}$$

ここに ρ は PML 境界からの距離，d は PML の厚さ，δ は PML 終端における損失角である．m は損失の分布を決め，m 乗分布の損失であることを表す．m は数値的な誤差を減らすために，実用的には $m = 2$ の 2 乗分布がよく用いられる．

式 (2.255) を用いて 2 次元波動方程式 (2.34) を書き換えると PML 領域内の波動方程式は，

$$s_z \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{s_y}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}\right) + s_y \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{s_z}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}\right) + k_0^2 q s_y s_z \tilde{\phi} = 0 \tag{2.257}$$

となる．同様に 3 次元波動方程式 (2.45) は PML 領域内で，

$$\nabla \times ([p]_{\mathrm{PML}} \nabla \times \mathbf{\Phi}) - k_0^2 [q]_{\mathrm{PML}} \mathbf{\Phi} = \{0\} \tag{2.258}$$

$$[p]_{\mathrm{PML}} = p \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix}, \qquad [q]_{\mathrm{PML}} = q \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_x}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \tag{2.259}$$

と表される．ただし，有限要素行列 (2.70)(2.71)(2.214)(2.215) を積分公式を使用して計算する場合，要素内で各節点上の $s_i (i = x, y, z)$ の値が異なるため，領域内の分布を節点値で補間する必要がある．具体的な表現については付録 A2 に示す．

第3章　伝搬演算子を用いた光導波路不連続問題の効率的な解析法

3.1　まえがき

光導波路不連続問題では，図 3.1 に示すような，ある導波路構造に対して伝搬方向に不連続な断面における光波の伝搬特性を考えるもので，レーザーや導波路端面，異なる光導波路や光ファイバー同士の突合せ接続などで生じる反射・透過特性の評価が極めて重要である．また新たな光デバイスの設計や光通信システムを構築する上でも必須の問題である．これまでに様々な解析手法が提案されているが，反射が存在しない場合には，フレネル損失を無視することで，モードの直交性に基づく重なり積分を計算することによって，接続効率を評価することができる [83]~[86]．この方法は単純で容易に実装できるため，従来より広く使用されているが，屈折率差が大きく接続部のモードフィールドが大きく異なる場合など，不連続部における反射を無視することができない問題に対して，反射波のうち導波モードは考慮できるが，放射波までは考慮できない [87, 88]．モードフィールドを表現するために，導波モードとの類似性から，正弦関数や Hermite-Gaussian 関数など既知の直交基底関数を使用する場合，十分な精度を得るためには一般に非常に多くの基底を用意する必要がある．一方で，導波路断面で固有モード展開を行うことで実際に存在する導波モード，放射モード，エバネッセントモードを含むモードを選択的に利用することで，より高精度な解析が可能である．このように固有モード展開に基づく不連続問題の解析法は，モード整合法と呼ばれ，解析精度は高いが，事前の固有モード計算が必要となるため，一般に計算負荷が大きいことが問題となる [52][53][54][88]．

本章では，固有モードの算出を行わずに，任意のモードフィールドに対して不連続問題の解析が可能である伝搬演算子法 (Propagation Operator Method: POM) の定式化およびその妥当性について検討する．伝搬演算子の算出は特性行列の平方根の計算を行う必要があり，一般に行列の対角化を行うことで計算できるが，固有値分解を行う必要があるため計算コストが高い．そこで従来の POM ではビーム伝搬法で実績のあるパデ近似を使用した伝搬演算子の近似法が広く使用されるようになり，その有効性についての多くの研究で報告されている [43]，[47]~[50]．しかしながらパデ近似を使用する場合，エバネッセント波が伝搬に寄与するプラズモニック導波路の場合，求まる伝搬演算子にスプリアスなモードが混在し，解析自体が不安定となることが報告されている [89]．一方で，Denman-Beaver Iterative(DBI) 法による平方根行列の計算法を導入した伝搬演算子法は，有限差分法に基づく定式化により，その有用性が検討されており，パデ近似よりも安定した解析が可能であることが報告されている [51]．本章ではまず，より導波路形状への適合性と汎用性の高い有限要素法に基づき，DBI を使用した伝搬演算子法の定式化を行い，2 次元スカラ波解析および 3 次元ベクトル波解析における有用性を検討する．さらに，プラズモニック導波路への適用が可能であることを確かめる．

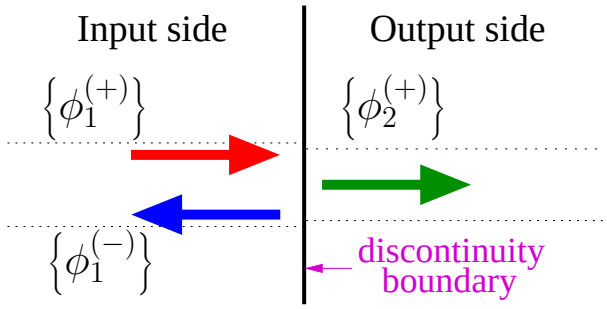


図 3.1: 不連続境界における入射波，反射波，および透過波

3.2 基礎理論および定式化

3.2.1 伝搬演算子法

2 次元波動方程式 (2.34) を 2.3 節の固有モード解析で使用した線要素の形状関数ベクトルを用いて x 方向のみを離散化する．ガラーキン法を適用すると，重み付け残差表現は以下のようになる．

$$\int_e \left[\{N\}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}\right) + \{N\}\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial z}\right) + k_0^2 q\{N\}\tilde{\Phi}\right] dx = \{0\} \tag{3.1}$$

ここで部分積分を用いて式変形し，境界積分項を無視すると

$$\int_e \left[-p\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x} + p\{N\}\left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2}\right) + k_0^2 q\{N\}\tilde{\Phi}\right] dx = \{0\} \tag{3.2}$$

を得る．ここに p は z 方向への構造変化がないことから z に関する偏微分に無依存となる．いま形状関数を用いた区分多項式

$$\tilde{\Phi}(x,z) = \{N(x)\}^T\{\Phi_e(z)\} \tag{3.3}$$

により式 (3.2) を離散化することで，以下の要素方程式を得る．

$$\int_e \left[-p\frac{d\{N\}}{dx}\frac{d\{N\}^T}{dx}\{\Phi_e\} + p\{N\}\{N\}^T\frac{d^2\{\Phi_e\}}{dz^2} + k_0^2 q\{N\}\{N\}^T\{\Phi_e\}\right] dx = 0 \tag{3.4}$$

この要素方程式をすべての要素について重ね合わせると，最終的に次の横断面の離散化方程式を得る．

$$[M]\frac{d^2\{\Phi\}}{dz^2} + [K]\{\Phi\} = \{0\} \tag{3.5}$$

$$[K] = \sum_e \int_e \left[k_0^2 q\{N\}\{N\}^T - p\frac{d\{N\}}{dx}\frac{d\{N\}^T}{dx}\right] dx \tag{3.6}$$

$$[M] = \sum_e \int_e p\{N\}\{N\}^T dx \tag{3.7}$$

なお 3 次元導波路問題の場合は，導波路断面を 2.3 節で示した三角形要素を使用して離散化することで式 (3.5) と同じ式が得られる．また式 (3.5) は一般化固有値方程式 (2.69) に対して $\beta \to j\partial/\partial z$

と置くことによっても得ることができる．式 (3.5) より，導波路中を伝搬する電磁界は形式的に

$$\{\Phi\} = \exp(-j[Q]z)\left\{\phi^{(+)}\right\} + \exp(j[Q]z)\left\{\phi^{(-)}\right\} \tag{3.8}$$

$$[Q] = \sqrt{[M]^{-1}[K]} \tag{3.9}$$

と表すことができる．ここに $\left\{\phi^{(+)}\right\}$，$\left\{\phi^{(-)}\right\}$ はそれぞれ前進波，後進波の固有モード振幅を表す．$[Q]$ は z 方向への伝搬特性を表す特性行列であり，一般化固有値方程式 (2.69) を標準固有値方程式に変形した式

$$[M]^{-1}[K]\{\phi\} = \beta^2\{\phi\} \tag{3.10}$$

を考えると，$[Q]^2$ が $\{\phi\}$ を固有ベクトル，β^2 を固有値にもつ行列であることがわかる．よって式 (3.8) によりすべてのモードを考慮した伝搬特性を記述することが可能であること言える．いま，導波路不連続問題の解析を行うためには，不連続面における電磁界の境界条件を満足する条件を課す必要がある．以下で 2 次元問題，3 次元問題における境界条件を示す．

2 次元導波路問題における境界条件

TE 波 (TM 波) の場合，電界 (磁界)$\{\Phi(z)\}$ に対して磁界 (電界)$\{\Psi(z)\}$ は式 (2.37) で表され，これを断面内の各要素に対してガラーキン法を適用すると重み付け残差表現は

$$\int_e \left[\{N\}\left(\Psi - jsp\frac{1}{\omega}\frac{d\Phi}{dz}\right)\right] dx = 0 \tag{3.11}$$

となり，すべての要素を足し合わせ，電磁界を形状関数を用いて離散化し，式 (3.8) に代入することで

$$\{\Psi\} = j[P]\frac{s}{\omega}\frac{d\{\Phi\}}{dz} \tag{3.12}$$

$$= \frac{s}{\omega}\left[[Z]\exp(-j[Q]z)\left\{\phi^{(+)}\right\} - [Z]\exp(j[Q]z)\left\{\phi^{(-)}\right\}\right] \tag{3.13}$$

を得ることができる．ここに $[P]$ および $[Z]$ は

$$[P] = [M_0]^{-1}[M] \tag{3.14}$$

$$[M_0] = \sum_e \int_e \{N\}\{N\}^T dx \tag{3.15}$$

$$[Z] = [P][Q] \tag{3.16}$$

で与えられる．よって不連続面の境界条件は電磁界の接線成分の連続性より，

$$\left\{\phi_1^{(+)}\right\} + \left\{\phi_1^{(-)}\right\} = \left\{\phi_2^{(+)}\right\} + \left\{\phi_2^{(-)}\right\} \tag{3.17}$$

$$[Z_1]\left\{\phi_1^{(+)}\right\} - [Z_1]\left\{\phi_1^{(-)}\right\} = [Z_2]\left\{\phi_2^{(+)}\right\} - [Z_2]\left\{\phi_2^{(-)}\right\} \tag{3.18}$$

と表すことができる．ここに下添字 1，2 はそれぞれ入射導波路側，出射導波路側を表す．いま不連続部の前後では伝搬方向に構造が変化しない場合を考えると，出射導波路側では後進波が存在

しないことから，反射波 $\left\{\phi_1^{(-)}\right\}$ および透過波 $\left\{\phi_2^{(+)}\right\}$ は，入射波 $\left\{\phi_1^{(+)}\right\}$ を用いて

$$\left\{\phi_1^{(-)}\right\} = \frac{[Z_1]-[Z_2]}{[Z_1]+[Z_2]}\left\{\phi_1^{(+)}\right\} \tag{3.19}$$

$$\left\{\phi_2^{(+)}\right\} = \frac{2[Z_1]}{[Z_1]+[Z_2]}\left\{\phi_1^{(+)}\right\} \tag{3.20}$$

として求めることができる．

3 次元導波路問題における境界条件

3 次元ベクトル波解析において導波路中を伝搬する電磁界は，形式的に 2 次元解析の場合と同様に記述できる．よって，電界もしくは磁界のみを考えれば，不連続部での境界条件は横方向の電磁界 $\{\phi_t\}$ を用いて

$$\left\{\phi_{t,1}^{(+)}\right\} + \left\{\phi_{t,1}^{(-)}\right\} = \left\{\phi_{t,2}^{(+)}\right\} + \left\{\phi_{t,2}^{(-)}\right\} \tag{3.21}$$

と表すことができる．しかしながらベクトル波解析の場合，2 次元解析における TE 波と TM 波のように偏波を分離して取り扱うことができず，境界条件をより厳密に取り扱う必要がある．そこで不連部の境界条件として，電力の連続性を考える．

z 方向に対する i 番目の固有モード伝送パワーは式 (2.194) より求められるが，任意の伝搬波形を扱う場合は，伝搬定数 β_i を伝搬演算子 $[Q]$ に置き換えて定式化する必要がある．また i 番目の固有モードの縦成分 $\left\{\phi_{z,(i)}\right\}$ は一般化固有値方程式 (2.69) と有限要素行列 (2.89) より横成分を用いて

$$\left\{\phi_{z,(i)}\right\} = -[M_{zz}]^{-1}[M_{zt}]\left\{\phi_{t,(i)}\right\} \tag{3.22}$$

と表される．したがって，任意の伝搬波形に対する伝送パワーは，電磁界の横成分のみを用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iint_\Omega (\boldsymbol{\Phi}^* \times \boldsymbol{\Psi})\cdot \boldsymbol{i}_z dxdy\right\} &= \frac{c}{2k_0}\{\phi_t\}^T\left([M_{tt}]-[M_{tz}][M_{zz}]^{-1}[M_{zt}]\right)[Q]\{\phi_t\} \\ &= \frac{c}{2k_0}\{\phi_t\}^T[F]\{\phi_t\}\end{aligned} \tag{3.23}$$

と表すことができる．ここに $[F] = ([M_{tt}]-[M_{tz}][M_{zz}]^{-1}[M_{zt}])[Q]$ と置いた．いま伝搬方向への電力の流れは不連続境界において連続でなければならないので，不連続部の境界条件は

$$[F_1]\left\{\phi_{t,1}^{(+)}\right\} - [F_1]\left\{\phi_{t,1}^{(-)}\right\} = [F_2]\left\{\phi_{t,2}^{(+)}\right\} - [F_2]\left\{\phi_{t,2}^{(-)}\right\} \tag{3.24}$$

が成り立つことである．よって，式 (3.21)，(3.24) より，出射導波路側からの反射を無視できる場合，反射波および透過波は

$$\left\{\phi_{t,1}^{(-)}\right\} = \frac{[F_1]-[F_2]}{[F_1]+[F_2]}\left\{\phi_{t,1}^{(+)}\right\} \tag{3.25}$$

$$\left\{\phi_{t,2}^{(+)}\right\} = \frac{2[F_1]}{[F_1]+[F_2]}\left\{\phi_{t,1}^{(+)}\right\} \tag{3.26}$$

より求めることができる．

3.2.2 DBI 法

式 (3.9) で示すように，伝搬演算子行列を求めるためには平方根行列の算出が必要であり，この計算精度と計算効率が POM の性能に直結する．行列の平方根を計算する方法として Newton 反復法 [90] がよく知られており，非正の実固有値を持たない行列に対して 2 次収束する．しかし，Newton 反復法は数値安定性が非常に低く，浮動小数点演算には推奨されず，代替法として，Newton 反復法と数学的に等価な式変形により導かれる Denman-Beavers Iteration(DBI) が提案されている [91][92]．DBI 法による漸化式に基づく反復計算では，解の収束は保証されていないが，解が収束する際には 2 次収束することが知られている．以下で Newton 反復法の式変形により，DBI 法の漸化式を導出する．

複素行列 $[A] \in \mathbf{C}^{n\times n}$ の平方根行列 $[X] \in \mathbf{C}^{n\times n}$ を計算するために

$$F([X]) = [X]^2 - [A] = [0] \tag{3.27}$$

の解を Newton 法

$$[X]_{k+1} = [X]_k - F'([X]_k)^{-1} F([X]_k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.28}$$

により求めることを考える．式 (3.28) に式 (3.27) の F を代入すると次の Newton 反復法の漸化式を得る．

$$[X]_{k+1} = \frac{[X]_k + [X]_k^{-1}[A]}{2}, \quad [X]_0 = [A] \tag{3.29}$$

また，このときすべての k に対して

$$[A][X]_k = [X]_k[A] \tag{3.30}$$

が成り立つ．ここで $[Y]_k = [X]_k$，$[Z]_k = [A]_k^{-1}[X]_k$ と置くと，次の DBI 法の漸化式を得る．

$$[Y]_{k+1} = \frac{[Y]_k + [Z]_k^{-1}}{2} \tag{3.31}$$

$$[Z]_{k+1} = \frac{[Z]_k + [Y]_k^{-1}}{2} \tag{3.32}$$

ここに $[I]$ は単位行列である．実際の伝搬演算子行列の計算では初期値を $[Y]_0 = [Q]^2$，$[Z]_0 = [I]$ と設定することになる．$k = 0$ から反復計算を行うことで，最終的に $[Y]_k$ が $[Q]$ に，$[Z]_k$ が $[Q]^{-1}$ に収束する．ただし，実数行列の平方根を DBI 法で解くと，解が収束しないことがしばしば起こる．これは，平方根行列の各成分が複素数になる場合があるにも関わらず，DBI 法の反復計算では初期解が実数であれば実数解にしかならないためである．この問題を解決するためには初期解が複素行列になるようにすればよく，ブランチカットの手法がしばしば用いられる．DBI 法によって求まる行列が複素数でも良いように行列の各成分に複素係数をかけ，複素行列として近似することでこの問題を解決することができる．したがって，ブランチカットの回転角を α とすると，最終的な平方根行列は

$$\sqrt{[A]_k} = \exp\left(j\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{[A]_k \exp(-j\alpha)} \tag{3.33}$$

より求められることを利用して，$[A]_k \exp(-j\alpha)$ に対して DBI 法を適用する．

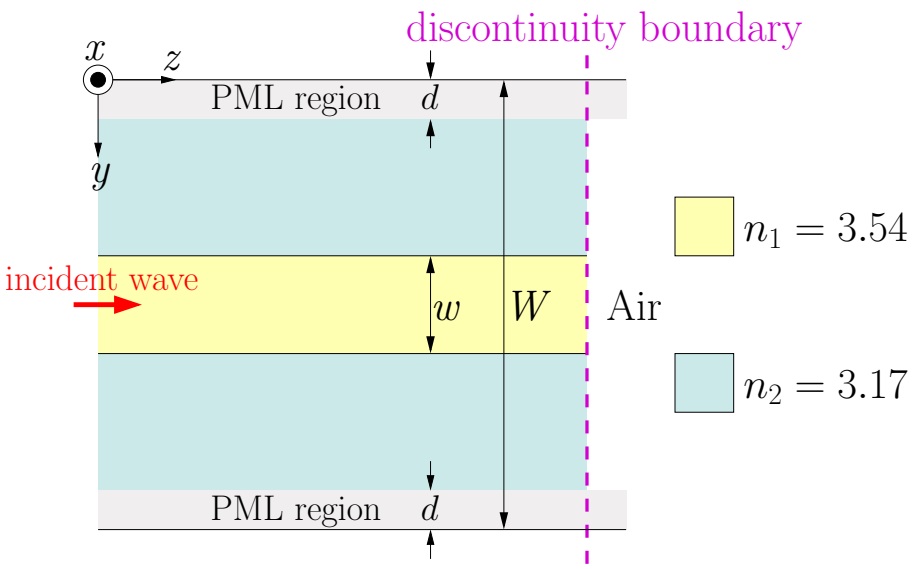


図 3.2: 2 次元スラブ導波路端面からの光の放射問題

3.3 数値解析例

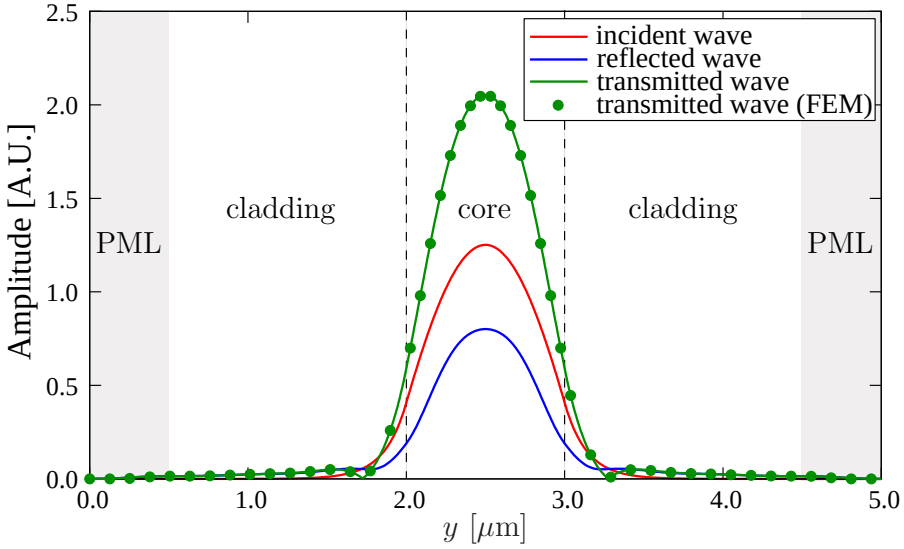
3.3.1 2 次元スラブ弱導波路の突合せ接続

図 3.2 に示すようなコアとクラッドの屈折率差が比較的小さい 2 次元スラブ導波路を考え，動作波長 1.3 μm の TE 波あるいは TM 波基本モードを入射したときの導波路端面での光の反射波・透過波の解析精度を評価する．コアの屈折率を $n_1 = 3.54$，クラッドの屈折率を $n_2 = 3.17$ とし，導波路端面から先は空気を仮定して屈折率を 1.0 とする．

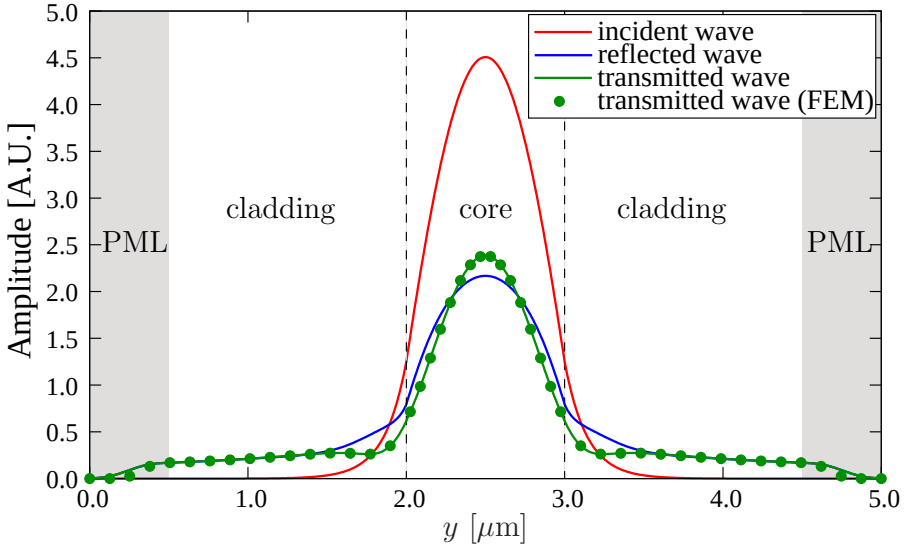
図 3.3 にコア幅を $w = 1.0$ μm，解析領域全体を $W = 5.0$ μm とした場合の反射電磁界および透過電磁界を示す．図 3.3(a) は TE 基本モードを入射した場合の電界振幅を示し，図 3.3(b) は TM 基本モードを入射した場合の磁界振幅である．なお解析領域端には幅 $d = 0.5$ μm の PML 層を設けている．TE モードの場合，入射電磁界よりも透過電磁界が増大して見えるのは，出射側の空気の波動インピーダンスが入射側に比べて大きいためであり，電力が増大しているわけではない．図 3.3 では放射波が解析領域端に置かれた PML にまで達しているが，無反射で吸収されていることから，本手法における PML の有効性が確認できる．これらの結果はより厳密な解析手法である FEM による結果ともよく一致しており，図 3.3 の解析結果において基本モードの規格化反射パワーは TE モードと TM モードでそれぞれ 0.362，0.258 であり，FEM による結果との相対誤差はそれぞれ 0.006%，0.009%である．また図 3.4 にそのときの FEM により求まる伝搬界分布を示し，(a), (b) はそれぞれ TE 基本モードを入射した場合と TM 基本モードを入射した場合の結果である．図 3.4 では，TE 波に対しては電界を描画し TM 波に対しては磁界を描画しているため，TE モードに比べ TM モードでは出射側に放射する電磁界振幅は小さくなっている．

図 3.5 にスラブ導波路のコア幅 w を 0.1 μm から 5.0 μm まで変化させたときの入射パワーで規格化した基本モード反射パワーを示す．図には本手法の解析結果と併せて FEM および重なり積分による解析結果も示している．本手法の解析結果は TE モード，TM モードのいずれの場合も FEM による結果とよく一致していることがわかるが，重なり積分の結果はコア幅が狭い場合に大きく異なっていることがわかる．これは以下のような理由が考えられる．コア幅が広くなる場合，コ

アの屈折率と出射側の空気の屈折率のみで決まる反射率 (約 0.313) に近づくが，コア幅が狭くなると，入射側導波路の実効屈折率が出射側の一様媒質の屈折率に近づき，導波路端での屈折率不連続が小さくなるため反射パワーが減少するはずである．しかし図 3.5 の POM と FEM の解析結果では反射パワーが極大となるコア幅が存在しており，これは出射側の等価屈折率が変動することによるものである．TE モードの場合を考えると，入射側導波路のスポットサイズが最も小さくなる付近で出射側の等価屈折率が最小となり入射側導波路との実効屈折率差が最大になるため反射が最大になると考えられる．等価屈折率は光の広がりと関係するため，特に出射側が光の閉じ込め構造のない一様媒質の場合には，反射放射波を無視する重なり積分による評価では適切な評価が困難となる．一方 POM では図 3.5 より不連続断面のみの解析で光の反射放射波も考慮した解析が可能であると言える．

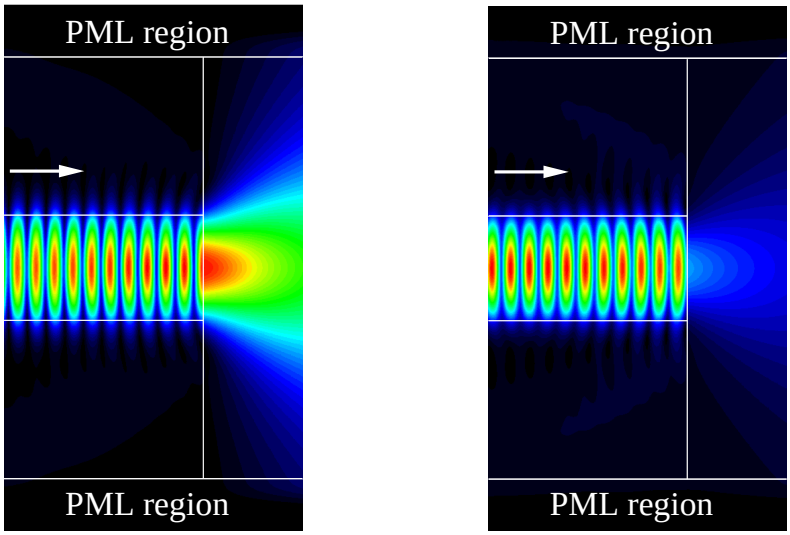


(a) TE 基本モード入射



(b) TM 基本モード入射

図 3.3: 図 3.2 の問題における不連続境界の電磁界分布



(a) TE 基本モード入射　　(b) TM 基本モード入射

図 3.4: 図 3.2 の問題における不連続境界の FEM 解析による伝搬界分布

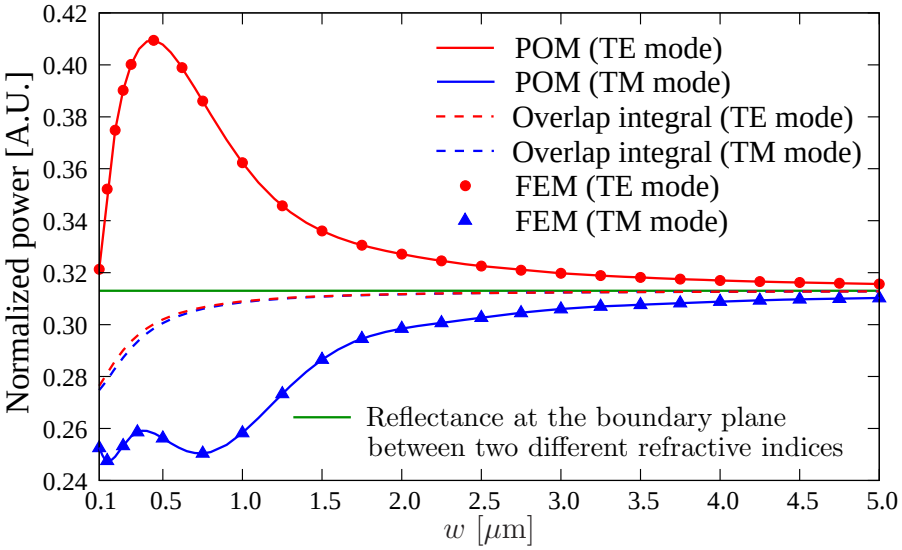


図 3.5: 図 3.2 の問題における基本モード反射パワーのコア幅依存性

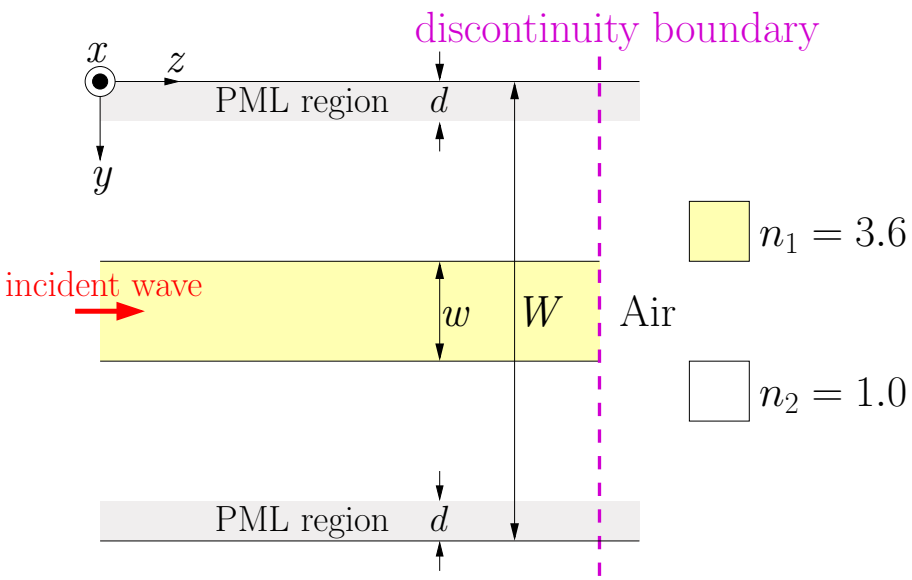


図 3.6: 空気中に置かれた導波路端面からの光の放射問題

3.3.2　2 次元導波路端面における不連続

次に，図 3.6 に示すような屈折率 $n_1 = 3.6$ の一様媒質の導波路が空気 (屈折率 $n_2 = 1.0$) 中に置かれている場合を仮定し，動作波長 1.55 μm の TE 波あるいは TM 波基本モードを入射したときの導波路端面での光の反射波・透過波を評価する．

図 3.7 にコア幅を $w = 0.5$ μm，解析領域全体を $W = 3.0$ μm とした場合の反射電磁界および透過電磁界を示す．図 3.7(a) は TE 基本モードを入射した場合の電界振幅であり，図 3.7(b) は TM 基本モードを入射した場合の磁界振幅である．なお解析領域端には幅 $d = 0.5$ μm の PML 層を設けている．また図 3.8 にそのときの FEM により求まる伝搬界分布を示す．図 3.8(a) に TE 基本モードを入射した場合，図 3.8(b) に TM 基本モードを入射した場合の伝搬界分布を示しており，いずれの入射モードもコアによく閉じ込められたモードとなっているが，反射波・透過波は不連続境界上の遠方まで界が広がっていることがわかる．図 3.7 でこの放射する界は，解析領域端に課した PML により無反射で吸収されており，POM においてスプリアスな反射を完全に抑圧できていることがわかる．PML 領域内の FEM との不一致は，吸収係数の違いによるものであり，導波モードパワーの評価に影響はない．また図 3.7(a)，(b) のクラッド領域において，入射波の存在しない部分に見られる反射・透過成分は図 3.8 の不連続境界で屈折率が連続となっている領域における光の回折の成分であり，POM では不連続断面のみを離散化したいるにも関わらず，このような光の回折も含めて FEM の結果とよく一致して解析可能であることがわかる．

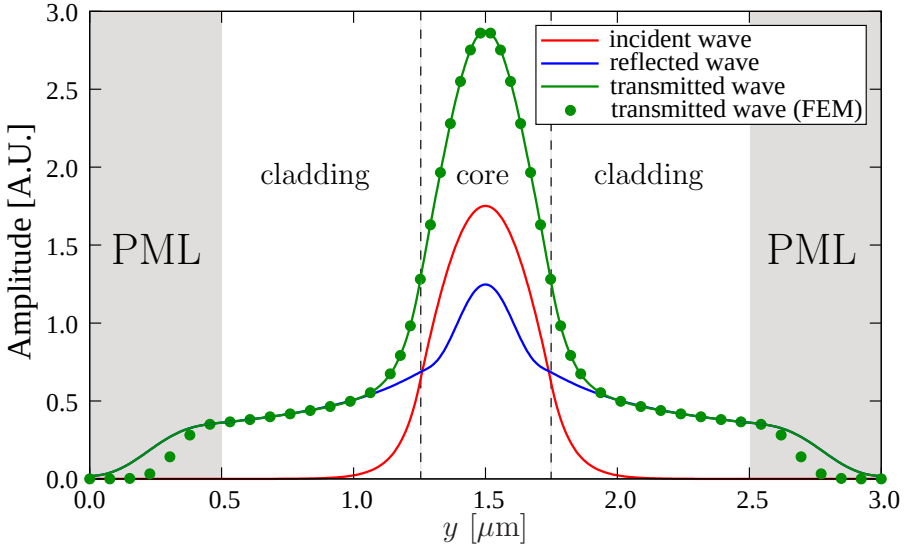
図 3.9 に導波路幅 w を 0.1 μm から 5.0 μm まで変化させたときの入射パワーで規格化した基本モード反射パワーを示す．図には本手法の解析結果と併せて FEM と重なり積分による結果も示す．POM による解析結果は TE 波，TM 波のいずれも FEM の結果とよく一致している．よってコアとクラッドの屈折率差が比較的大きな強導波路問題，および光の回折が生じやすい問題に対しても本手法で高精度な解析が可能であると言える．

図 3.10 に TE 基本モード入射に対し，反射パワーを評価した際の FEM の結果を基準とした相対誤差および計算時間比の DBI 法における反復回数依存性を示す．また伝搬演算子行列の計算に対

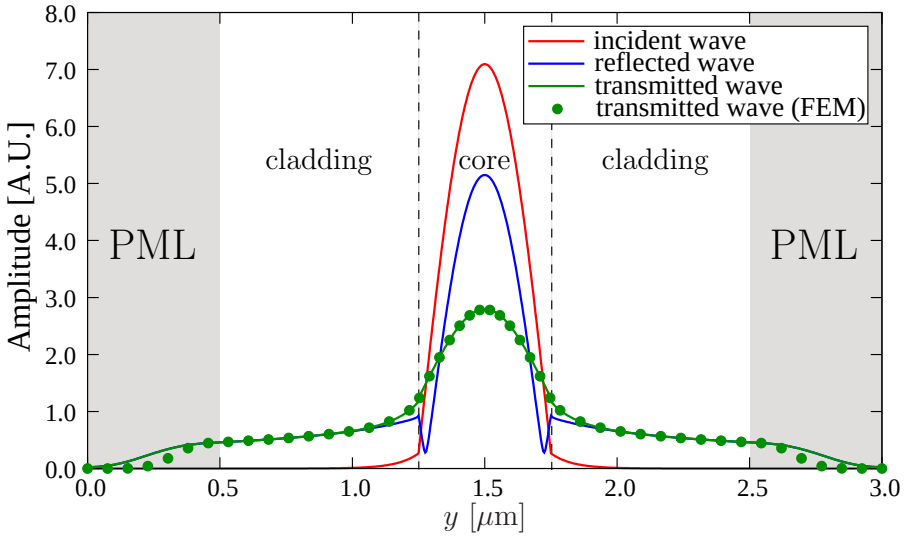
する収束性は，$[Q]^2$ と近似した平方根行列 $[\tilde{Q}]$ の 2 乗 $[\tilde{Q}]^2$ の間の近似誤差を

$$\mathrm{Error} = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j}\left|\frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{a_{ij,\max}}\right| \tag{3.34}$$

で評価し同図に示す．ここに N は行列サイズ，a_{ij} は真値 $[Q]^2$ の行列成分，$\tilde{a}_{ij}$ は DBI 法で求めた平方根行列の 2 乗 $[\tilde{Q}]^2$ の成分であり，a_{ij} の最大値 $a_{ij,\max} = \max_{i,j}|a_{ij}|$ で規格化した誤差で評価している．この図から，反復回数の増加に対して計算時間はほぼ線形に増加していることがわかる．また伝搬演算子行列の計算は 14 回程度の反復で収束しているのに対し，反射パワーの解析結果は 6 回の反復で収束しており，そのときの計算時間は FEM の場合よりも短いことがわかる．ただし FEM の計算時間はこの問題で約 3.6 秒であり，2 次元問題において本手法との間に計算時間の大きな差は認められない．

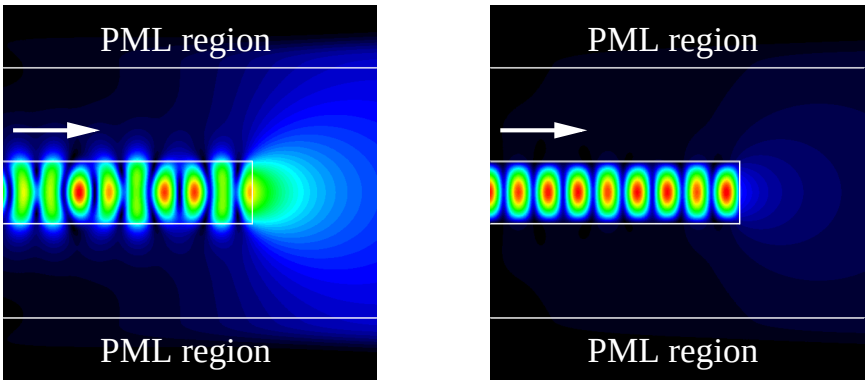


(a) TE 基本モード入射



(b) TM 基本モード入射

図 3.7: 図 3.6 の問題における不連続境界の電磁界分布



(a) TE 基本モード入射　　(b) TM 基本モード入射

図 3.8: 図 3.6 の問題における不連続境界の FEM 解析による伝搬界分布

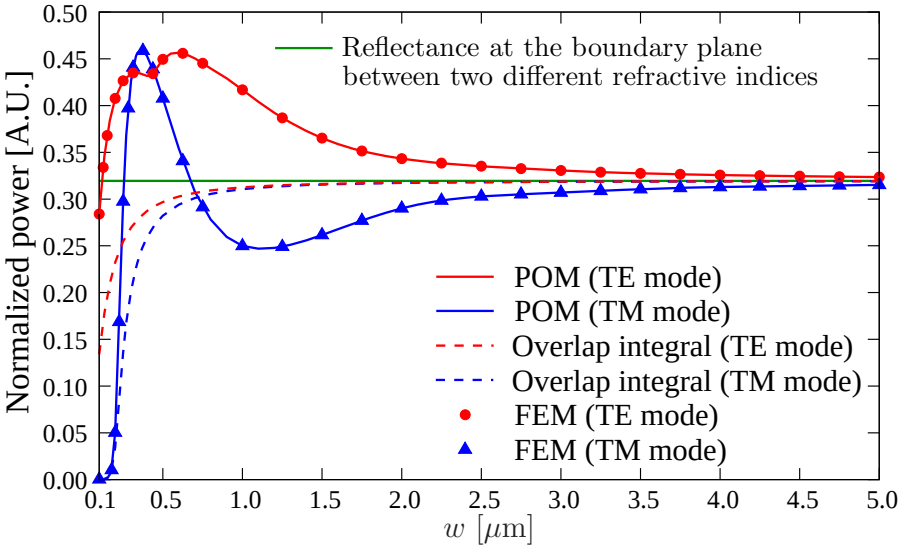


図 3.9: 基本モード反射パワーの導波路幅依存性 (図 3.6 の問題の場合)

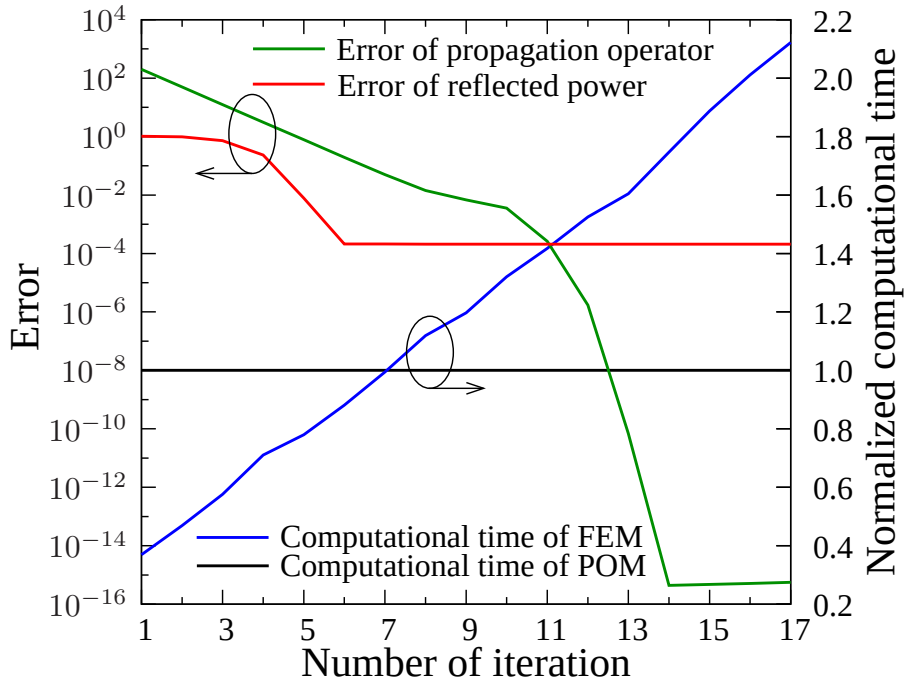


図 3.10: 反射パワーの FEM 解析結果に対する誤差，伝搬演算子の計算誤差および計算効率の DBI 法による反復回数依存性 (TE 基本モード入射)

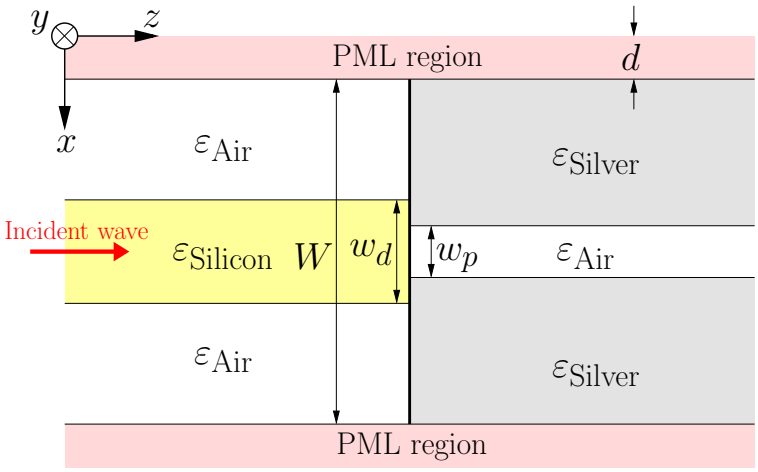


図 3.11: 誘電体導波路と MIM 導波路の突合せ構造

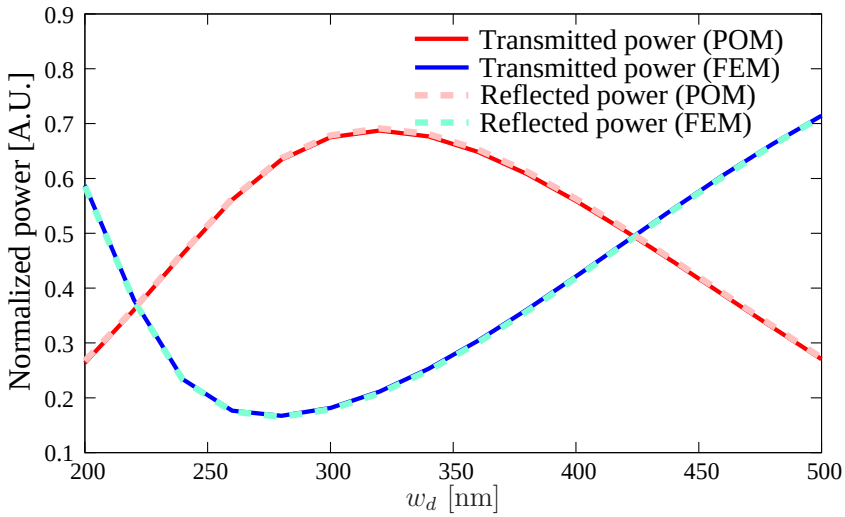
3.3.3 誘電体導波路とプラズモニック導波路の突合せ接続

プラズモニック導波路はナノメートルオーダーの領域に光を閉じ込めることができる反面，材料損失が大きく，長距離伝送のためには誘電体導波路との接続が実用的な方法である．ここではまず本手法の有用性を確認するために，図 3.11 に示すような誘電体導波路とプラズモニック導波路を突き合わせ接続した場合に，誘電体導波路側から波長 1.55 μm の TM 基本モードを入射した際の反射・透過特性を 2 次元 FEM に基づく POM により評価する．誘電体導波路はシリコン導波路とし，コアの比誘電率を $\varepsilon_{\mathrm{Silicon}} = 3.477^2$，クラッドの比誘電率を $\varepsilon_{\mathrm{Air}} = 1$ とする．またプラズモニック導波路は MIM(Metal-Insulator-Metal) 構造を考え金属材料は銀を用い複素比誘電率をドルーデ・ローレンツモデル [93] より波長 1.55 μm に対して $-103.33 - j8.1301$ とする．また解析領域端からの非物理的は反射を無反射で吸収し抑圧するために，解析領域 $W = 3$ μm に対して PML を解析領域端の幅 $d = 0.5$ μm に課す．

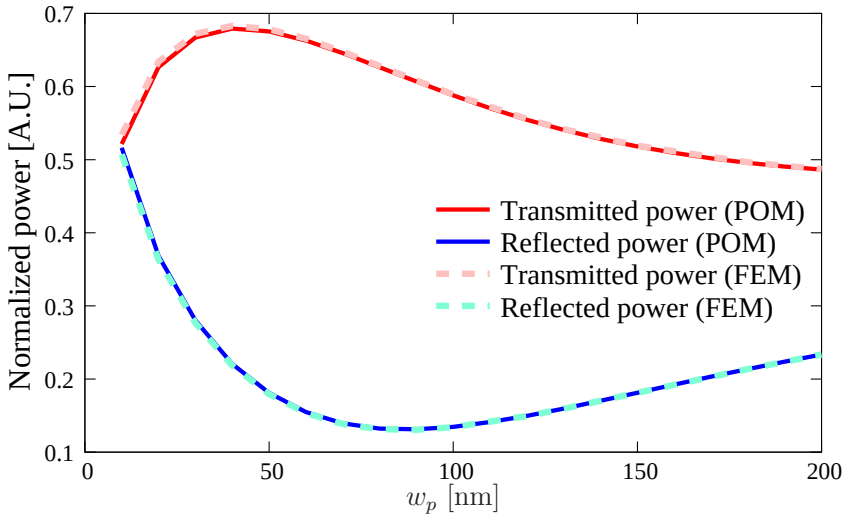
図 3.12 に不連続断面における基本モード反射パワーおよび透過パワーの本手法による解析結果と FEM によって直接離散化を行い解析した結果を示す．図 3.12(a) はプラズモニック導波路のギャップ幅 w_p を 50 nm に固定し，誘電体導波路幅 w_d を 200 $\sim$ 500 nm の範囲で変化させた場合のパワーの依存性を示している．図 3.12(b) では w_d を 100 nm に固定し，w_p を 10 $\sim$ 200 nm の範囲で変化させた場合のパワーの依存性を示している．図より導波路幅が広い場合には w_p よりも w_d がよりパワーの変化に強く依存していることがわかる．最大透過パワーは約 0.68 であり，w_p の最適値は w_d の最適値よりも小さいことがわかる．また本手法の解析結果は FEM による解析結果とよく一致しており，本手法で精度の良い解析が可能であると言える．

図 3.13 に $w_d = 300$ nm，$w_p = 50$ nm とした際の不連続部における電磁界振幅と FEM による伝搬界分布を示す．PML 領域では光が減衰し，解析領域端からの反射を抑圧できていることがわかる．また光は誘電体と金属の間の大きな屈折率差によって不連続部では強く反射していることがわかる．透過波は不連続部で振幅が増大しているが，伝搬界分布を見ると，金属内部まで光は伝搬せず，金属間の空気に強く光が閉じ込まっていることがわかる．本手法の結果は FEM による解析結果ともよく一致しており，十分な解析精度が得られていると言える．

次に有限要素メッシュの分割数とパワーの収束性の関係を調べ，本手法の解析の効率について議論する．POM 解析では断面方向 (x 方向) のみの離散化でよいが，FEM 解析では図 3.14 に示すように 2 次元解析領域を直接離散化する必要があるために計算コストが大きくなる．ここでは図 3.14 に示す均一メッシュを用いて解析を行い，図 3.15 に横方向の分割数に対する反射・透過パワーの依存性を示す．図には FEM による解析結果も示しているが FEM の場合は伝搬方向の離散化が必要となるため，ここでは十分な解析精度が得られるように伝搬方向 (z 方向) の解析領域の長さ L を $1\,\mu\mathrm{m}$ とし，分割数が 200，100，50 の場合について解析を行った結果を示している．いずれの解析結果も横方向の分割数が大きくなるにつれてパワーは収束値に近づいているが，FEM の場合は，縦方向の分割数に収束性が強く依存しており，図に示す結果では POM よりも収束性が劣っていることがわかる．横方向の分割数 $W/\Delta y = 1500$ のときの要素数と透過パワーの関係を POM と FEM で比較すると，POM では要素数 $1,500$ で透過パワーが 64.11% と最も収束値に近いのに対して，FEM では最も収束値に近い場合でも要素数が $150,000$ 必要となる．次に不均一メッシュを用いてより少ない分割数で精度よく解析するための検討を行う．プラズモニック導波路は金属の表皮効果により金属表面とその付近の金属内部で電磁界の急激な減衰が生じるため，電磁界が集中する付近の離散化をより細かくする必要があると考えられる．ここでは図 3.16 に示すように，$w_p = 50\,\mathrm{nm}$ のプラズモニック導波路の導波モードが金属内で減衰し，金属表面から振幅が e^{-1} 倍となる距離を表皮厚さ δ とし，これを $25\,\mathrm{nm}$ と見積もり，コア部を含めた 100 nm の分割を細分化し，またそれ以外の領域は 1 分割を $50\,\mathrm{nm}$ として離散化を緩和する．図 3.17 に不均一メッシュを用いた場合の横方向の分割数に対する反射・透過パワーの依存性を示す．ここでは不均一メッシュに加え，より高次の要素を用いてより少ない要素数で精度良く解析を行うことを考え，これまでの検討で用いた 2 次要素に加え 1 次要素と 3 次要素による解析を行い，要素数に対する収束性を比較した．図より要素次数が高いほどパワーの収束が早く，均一メッシュを用いた場合に比べ要素数を大きく削減できていることがわかる．3 次要素の不均一メッシュでは要素数 70 で 2 次要素の均一メッシュの要素数 1500 の場合と同等の透過パワーが得られている．

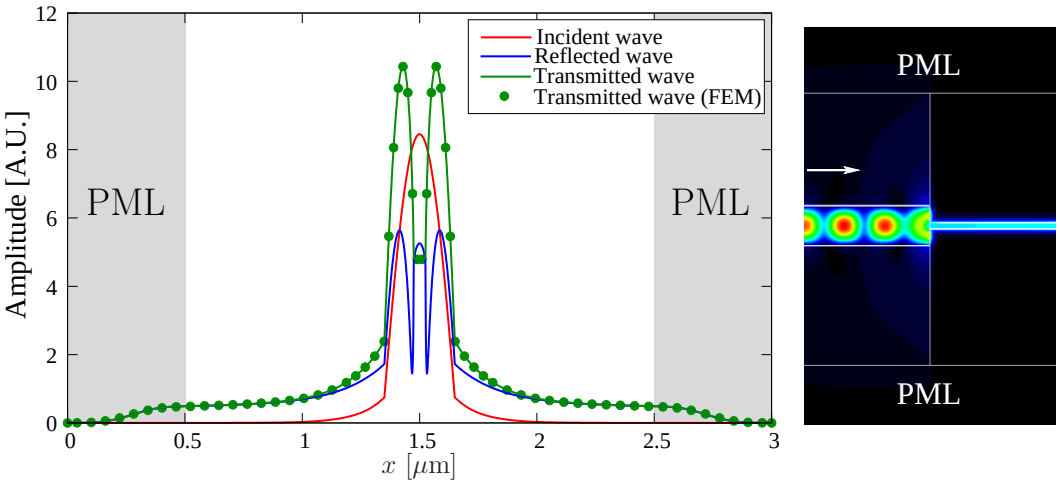


(a) 誘電体導波路幅 w_d に対するパワーの依存性 ($w_p = 50$ nm)



(b) プラズモニック導波路幅 w_p に対するパワーの依存性 ($w_d = 300$ nm)

図 3.12: TM 基本モードを入射した際の図 3.11 の構造における不連続境界での基本モード反射・透過パワーの導波路幅依存性



(a) 不連続断面の電磁界振幅

(b) FEM 解析による伝搬界分布

図 3.13: TM 基本モードを入射した際の図 3.11 の構造 ($w_d = 300$ nm, $w_p = 50$ nm) における電磁界分布

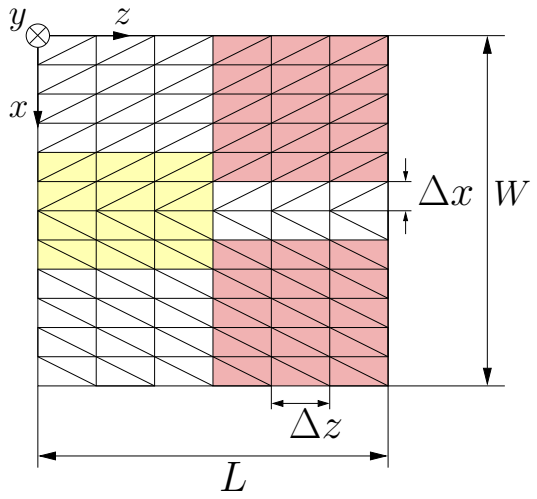
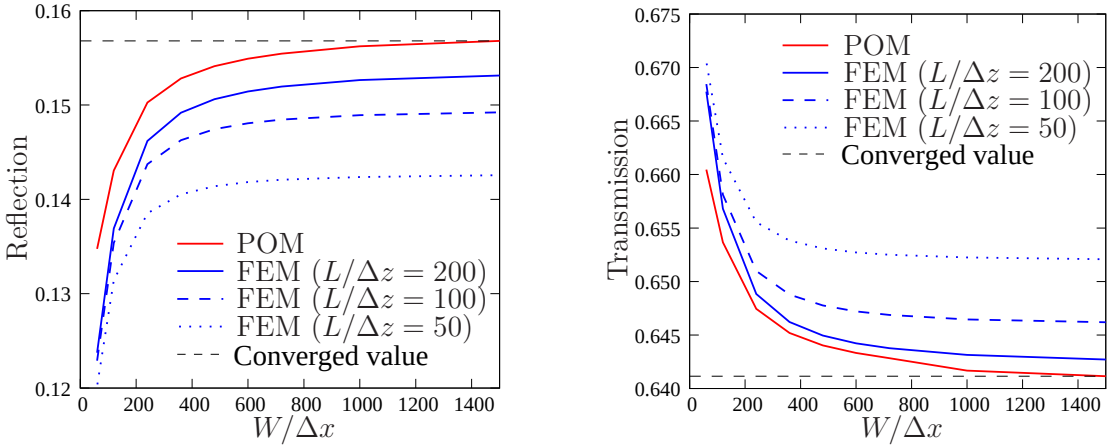


図 3.14: 有限要素法における均一メッシュによる解析領域の分割



(a) 基本モード反射パワー

(b) 基本モード透過パワー

図 3.15: 均一メッシュを用いた場合の横方向の分割数に対するパワーの収束性

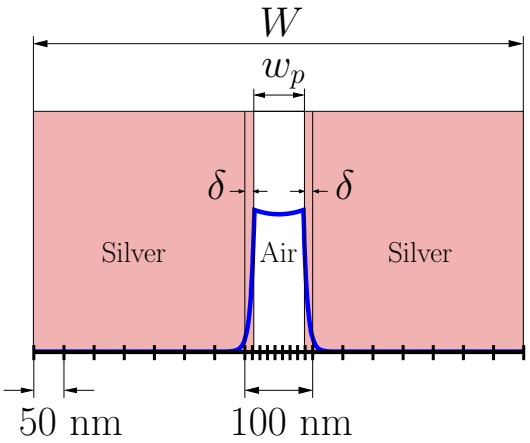
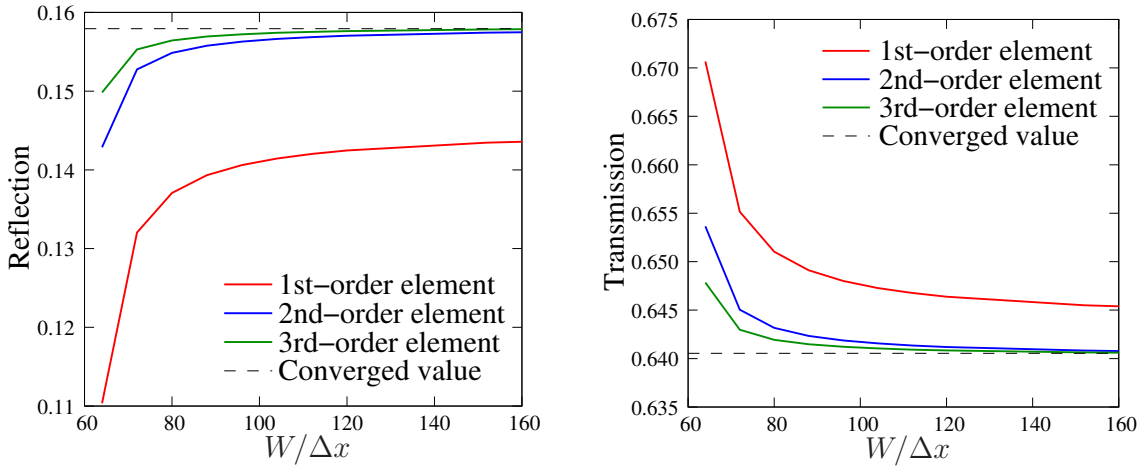


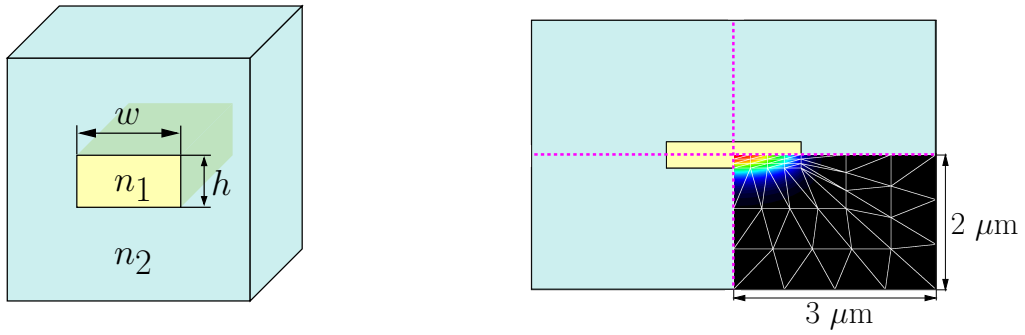
図 3.16: プラズモニック導波路断面のメッシュ分割の不均一化



(a) 基本モード反射パワー

(b) 基本モード透過パワー

図 3.17: 不均一メッシュを用いた場合の POM における横方向の分割に対するパワーの収束性



(a) (b)

図 3.18: 埋め込み型導波路: (a) 3 次元導波路構造; (b) 解析領域

3.3.4 埋め込み型導波路端面からの光の放射

まず図 3.18(a) に示す埋め込み型導波路に光を入射し，その端面から光が空気中に放射される場合を考える．解析モデルの構造パラメータは $h = 0.4\ \mu\mathrm{m}$，$w = 1\ \mu\mathrm{m}$ とし，コアの屈折率 n_1 を 3.54，クラッドの屈折率 n_2 を 3.17 とする．本解析例では構造の対称性を考慮し，図 3.18(b) のような導波路断面の 4 分の 1 の解析領域 ($3 \times 2\ \mu\mathrm{m}$) を 3 次三角形エッジ/ノーダルハイブリッド要素で分割する．また十分な解析精度が得られるように，要素数は 66 とし，このとき未知変数の数は 696 である．図 3.19 に動作波長 $\lambda = 1.3\ \mu\mathrm{m}$ の E^x 基本モードおよび E^y 基本モードを入射した際の基本モード反射パワーのコア幅依存性を示す．図には POM のスカラ波近似解析による結果，FEM によるベクトル波解析結果および有限差分法 (FDM) に基づく POM によるベクトル波解析を行った文献 [48] における結果も示している．スカラ波解析ではコア幅が小さくなるにつれ，反射パワーは TE モードでは大きくなり，TM モードでは小さくなっていることがわかる．一方，その他のベクトル波解析の結果ではコア形状が正方形になる $w = 0.4\ \mu\mathrm{m}$ のときに E^x モードおよび E^y モードの反射パワーが一致するようにパワーが変化している．これはスカラ波解析が x 軸に垂直な境界に対する境界条件を正確に扱えないためであると考えられる．本手法の結果は FEM や文献 [48] の結果と概ね一致していることがわかる．図 3.20 に $w = 2\ \mu\mathrm{m}$ のときの E^x 基本モードを入射した際の不連続部における電磁界分布を示す．それぞれの界分布は放射波の様子が見えるように各波ごとに最大値で規格化して示している．またここでは解析領域端に PML を置き放射波を吸収する処理はしておらず，反射波に関しては解析領域端からのスプリアスな反射が見られる．図 3.21 に $w = 0.4\ \mu\mathrm{m}$ のときの E^x 基本モードを入射した際の不連続部における電磁界分布を示す．図 3.20 と比較して，電磁界のマイナー成分の影響が強くなっており，反射波の E_y 成分の振幅の最大値は $w = 2\ \mu\mathrm{m}$ のときに比べて $w = 0.4\ \mu\mathrm{m}$ のときでは約 2 倍になっている．

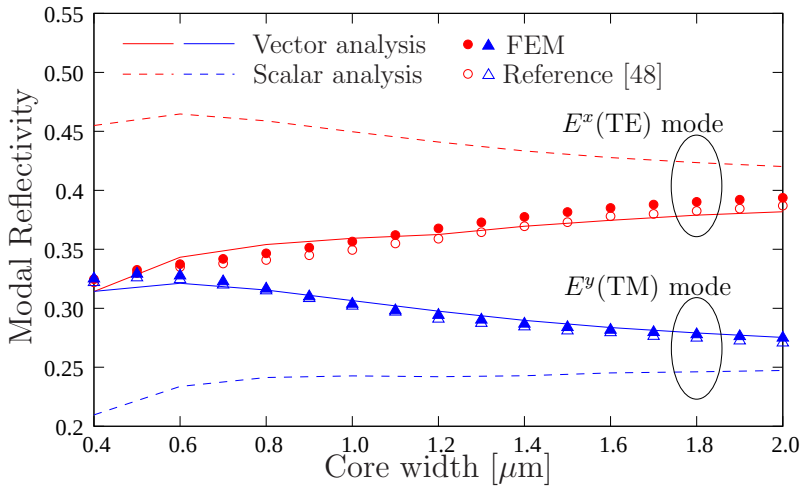
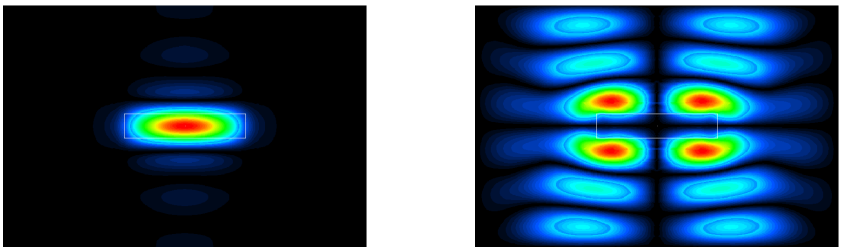


図 3.19: 図 3.18 の構造の導波路端における基本モード反射パワーのコア幅依存性

(*I*) E_x 成分　　(*II*) E_y 成分

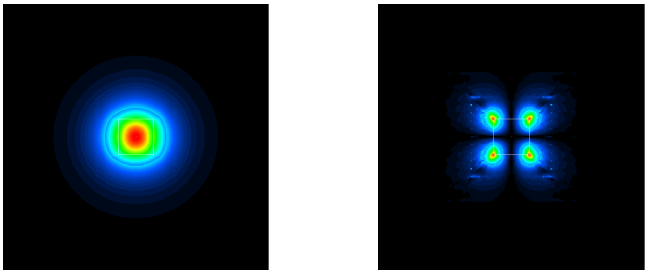
(a) 入射波



(*I*) E_x 成分　　(*II*) E_y 成分

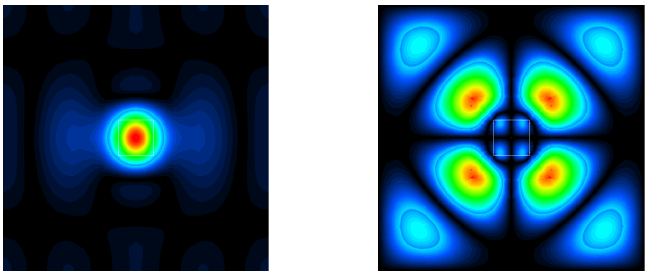
(b) 反射波

図 3.20: 図 3.18 の構造 ($w = 2\ \mu$m) における E^x 基本モードの入射波および反射波の電磁界分布



(I) E_x 成分　　(II) E_y 成分

(a) 入射波



(I) E_x 成分　　(II) E_y 成分

(b) 反射波

図 3.21: 図 3.18 の構造 ($w = 0.4\ \mu$m) における E^x 基本モードの入射波および反射波の電磁界分布

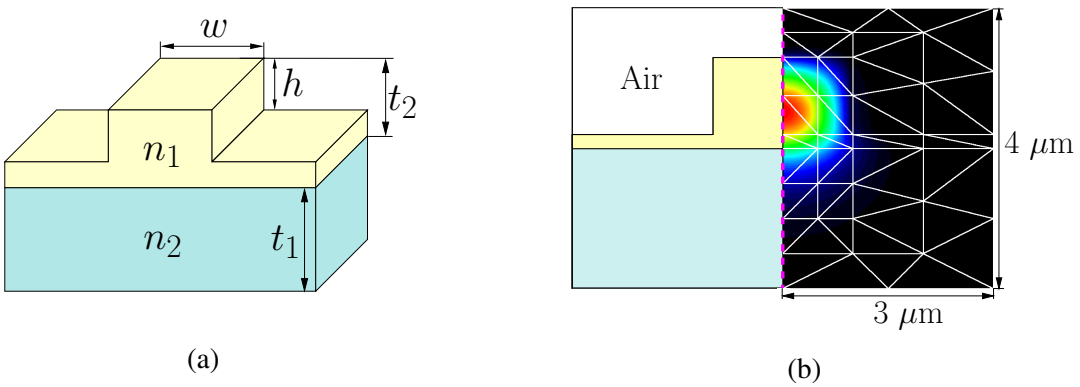


図 3.22: リブ導波路: (a) 3 次元導波路構造; (b) 解析領域

3.3.5 リブ導波路端面からの光の放射

次に，入射導波路を図 3.22(a) に示すリブ導波路とし，構造パラメータを $t_1 = 2\,\mu\mathrm{m}$，$t_2 = 1.3\,\mu\mathrm{m}$，$h = 1.1\,\mu\mathrm{m}$，$w = 2\,\mu\mathrm{m}$，屈折率を $n_1 = 3.44$，$n_2 = 3.34$ とする．本解析例では構造の対称性を考慮し，図 3.22(b) のような導波路断面の 4 分の 1 の解析領域 ($3 \times 2\,\mu\mathrm{m}$) を 3 次三角形エッジ/ノーダルハイブリッド要素で分割する．また十分な解析精度が得られるように，要素数は 66 とし，このとき未知変数の数は 696 である．このリブ導波路端面から光が放射される場合について，$1.55\,\mu\mathrm{m}$ の基本モードを入射電磁界とし，POM により不連続部における反射波を評価する．図 3.23 にコア幅 w を $1 \sim 4.5\,\mu\mathrm{m}$ まで変化させたときの基本モード反射パワーのコア幅依存性を示す．図には POM のスカラ波近似解析による解析結果も示している．ベクトル解析ではコア幅とコアの高さが近いときに E^x モードと E^y モードの反射パワーが近くなるが，コア幅が狭い場合には光の放射が強くなり，横方向へ広がる光を適切に評価する必要がある．本提案手法の解析結果は FEM の結果の傾向とよく一致してるが，僅かなずれが生じており，これは解析領域周囲からの反射による影響が考えられる．

次に本手法の計算効率についての検討として図 3.24 に $w = 2\,\mu\mathrm{m}$ のときの E^x 基本モード反射パワーの未知変数に対する依存性を示す．ここでは DBI 法の反復回数を 10 回とする．また FEM で使用する要素次数は解析の収束性に依存するため，比較のために CT/LN 要素，LT/QN 要素および QT/CuN 要素による解析結果を示している．最も要素次数の高い QT/CuN 要素では，反射パワーは未知変数 600 でほぼ収束しているしているが，LT/QN 要素や CT/LN 要素ではより多くの未知変数を要することから収束性が劣化することがわかる．図には未知変数に対して解析に要する計算時間も示しているが，いずれの要素に対しても指数関数的な計算時間の増大が見られる．そのため高次要素を用いて十分少ない未知変数で解析を行うことが効率的な解析のためには求められる．

図 3.25 に E^x 基本モードの反射パワーと式 (3.34) で定義される平方根行列の近似誤差の DBI 法における反復回数に対する依存性を示す．ここでは QT/CuN 要素を使用し，未知変数が 573 である場合の解析結果を示している．図より，反射パワーは平方根行列の誤差よりも早く収束し，6 回の反復で収束していることがわかる．このときの全体の解析時間は約 34 秒であり，入射側と出力側の伝搬演算子行列を算出する過程では 31 秒である．このことから，全体の解析時間は伝搬演算子行列の計算時間に大きく依存していることがわかる．なお計算時間は DBI 法の反復回数に対し

て線形的に増大するため，反復回数の削減をするため，適切な反復終了条件を与えることが解析の効率化に直接的に影響すると言える．

図 3.26 および図 3.27 に E^x 基本モードまたは E^y 基本モードを入射した際のリブ導波路端面における入射，反射，透過波の POM による電磁界振幅を示しており，図 3.26 はベクトル波解析，図 3.27 はスカラ波近似解析による結果である．ベクトル波解析とスカラ波近似解析の結果を比較すると，リブと空気の間の材料境界周辺では特にそれぞれ異なる電磁界分布が得られ，またスカラ波近似解析の放射電磁界はベクトル波解析に比べて大きくなっていることがわかる．これは横方向の屈折率差が大きな問題に対してはスカラ波近似解析が十分な解析が行えないためであり，このことからもより厳密な解析のためにはベクトル波解析が必要であると言える．

いま上記の解析例では PML を課さずに解析を行ったが，本来解析境域端から反射する電磁界は非物理的な振る舞いであるために抑圧する必要がある．図 3.28 に PML を課さない場合と課した場合の反射・透過波の解析結果を示している．ベクトル波解析の場合，PML を課した際には解析領域端に電磁界が局在するような非物理解が得られていることがわかる．ただし電磁界はそれぞれの最大値で規格化しており，規格化反射パワーについては PML を課さない場合で 0.305，PML を課した場合で 0.337 と極端な差はない．このような問題は PML を課した際に非物理的な発散モードが励起してしまうことが問題と考えられ，図 3.29 に入射側と出射側構造における PML を課した場合と課さない場合の行列 $[Q]^2$ の全固有値分布を示す．図より，PML を課すことで固有値分布が虚軸に対して非対称な分布にシフトしていることがわかる．フルベクトル FE-BPM では虚部が正の固有値が発散モードとして解析の不安定要因になることが報告されており [94]，現状エッジ/ノーダルハイブリッド要素を使用したとしても不安定性を完全に取り除くことができない．本研究においては非物理モードの励起が，図のような PML を課した場合の固有値分布の変化に起因していると考えられる．

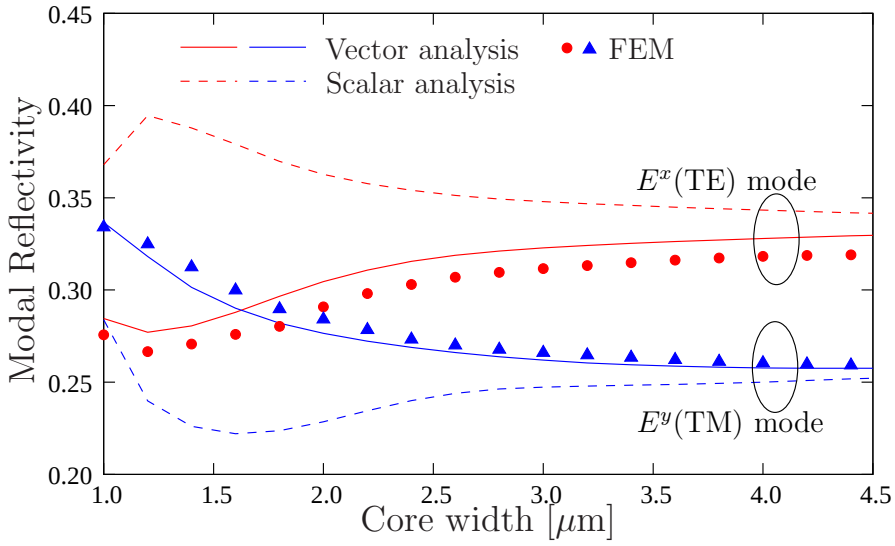


図 3.23: 図 3.22 の構造に導波路端における基本モード反射パワーのコア幅依存性

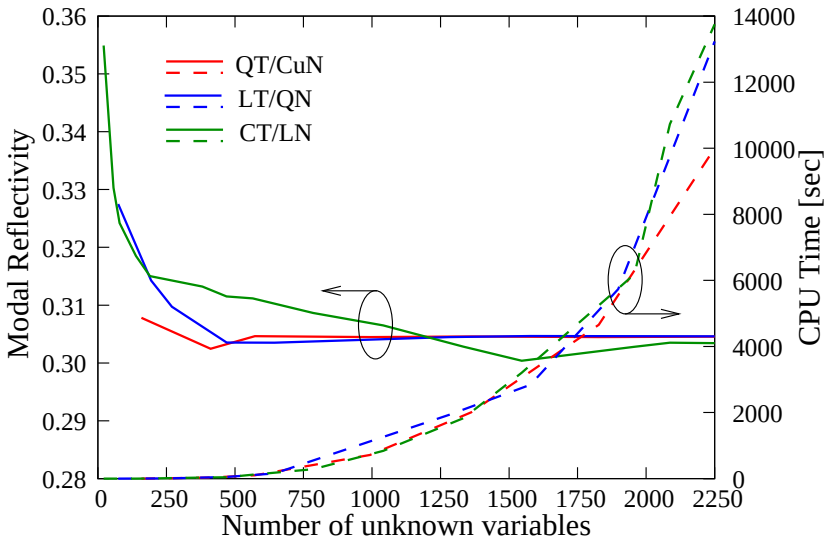


図 3.24: 3 次元 POM 解析における基本モード反射パワーと計算時間の全解析領域の未知変数に対する依存性

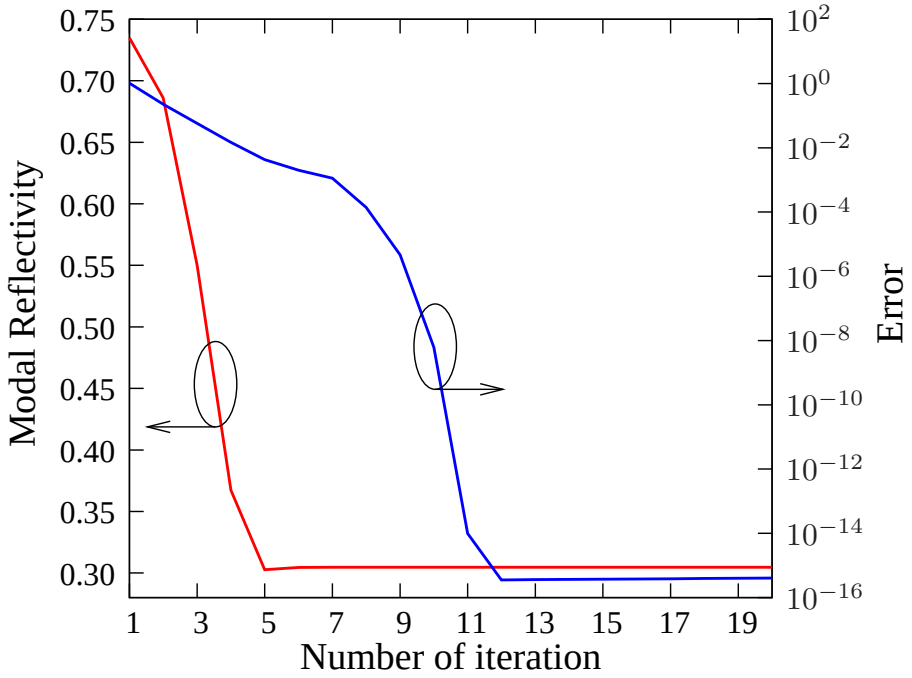
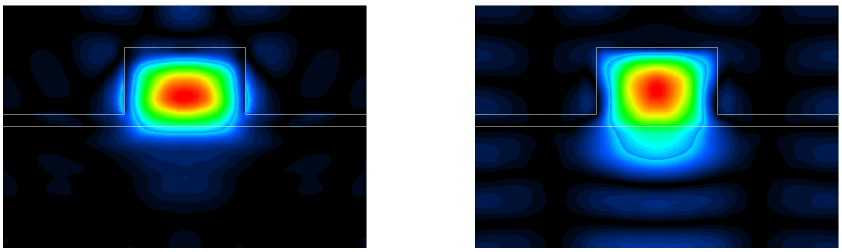


図 3.25: 3 次元 POM 解析における基本モード反射パワーと伝搬演算子行列の近似誤差の DBI 法における反復回数に対する依存性

(I) E_x 成分　　(II) H_x 成分

(a) 入射波



(I) E_x 成分　　(II) H_x 成分

(b) 反射波

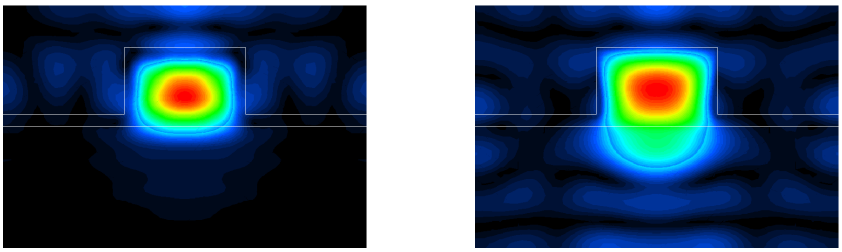
(I) E_x 成分　　(II) H_x 成分

(c) 透過波

図 3.26: 図 3.22 の構造 ($w = 2\ \mu\mathrm{m}$) における $(I)E^x$ モードおよび $(II)E^y$ モードの基本モード入射，反射，透過波の電磁界分布のベクトル POM による解析結果

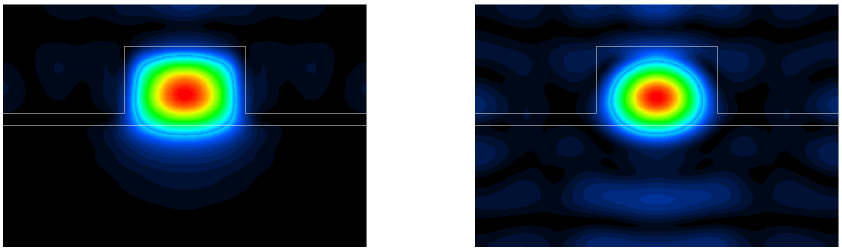
(I) E_x 成分　　(II) H_x 成分

(a) 入射波



(I) E_x 成分　　(II) H_x 成分

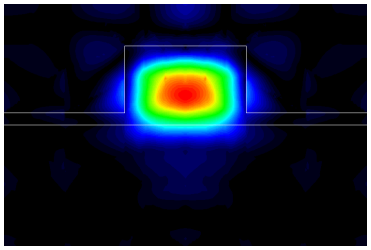
(b) 反射波



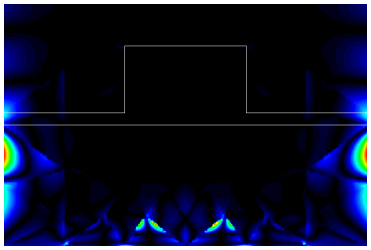
(I) E_x 成分　　(II) H_x 成分

(c) 透過波

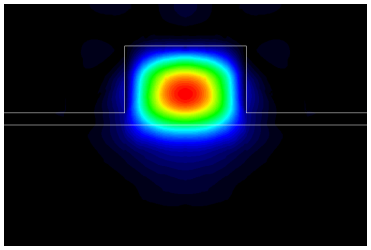
図 3.27: 図 3.22 の構造 ($w = 2\ \mu\mathrm{m}$) における $(I)E^x$ モードおよび $(II)E^y$ モードの基本モード入射，反射，透過波の電磁界分布のスカラ POM による解析結果



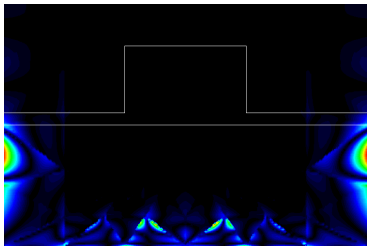
(a) 反射波 (PML 未装荷)



(b) 反射波 (PML 装荷)

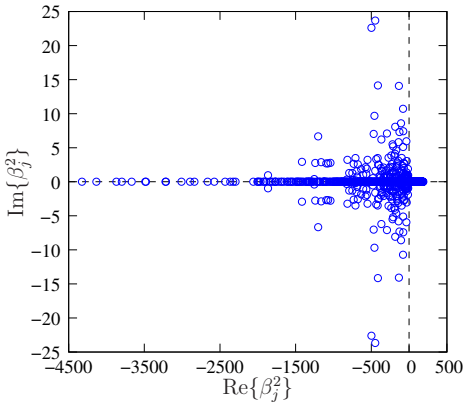


(c) 透過波 (PML 未装荷)

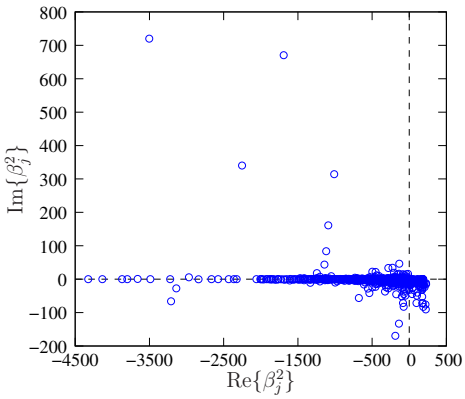


(d) 透過波 (PML 装荷)

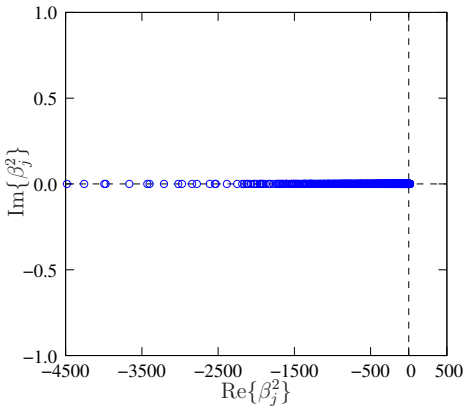
図 3.28: 図 3.22 の構造 ($w = 2\ \mu\mathrm{m}$) における PML を課さない場合と課した場合の不連続部における反射・透過波



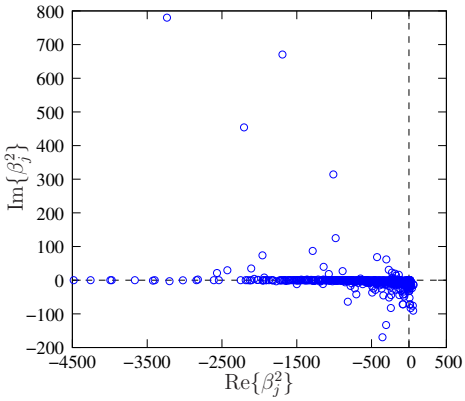
(a) 入射側の全固有値分布 (PML 未装荷)



(b) 入射側の全固有値分布 (PML 未装荷)



(c) 出射側の全固有値分布 (PML 未装荷)



(d) 出射側の全固有値分布 (PML 装荷)

図 3.29: 入射側 (リブ導波路) と出射側 (空気) の構造における行列 $[Q]^2$ の全固有値分布

第4章　伝搬演算子を用いた複数の不連続点を有する光導波路の効率的な解析法

4.1　まえがき

前章では，POM により，単一の不連続面の解析を効率的に解析が行えることを示した．POM 解析では不連続断面の前後の構造は伝搬方向に一様であることを仮定しているため，伝搬方向に対する構造の変化を含めた不連続導波路の解析を行うことができない．伝搬方向に複数の不連続構造がある場合には，一様構造を伝搬する光波を伝搬演算子により評価することで解析が可能である．この方法は双方向ビーム伝搬法 (BiBPM) と呼ばれ，これまでに反復型 [66][73][74]，非反復型 [67]∼[72][75] の手法が提案されている．反復型の場合，一方向の伝搬を解析するために BPM を不連続部の間で前進波と後進波に対して適用し，反射波を繰り返し伝搬させ，終端面への寄与を足し合わせることで解析を行う．この方法は，十分な収束値を得るために一般に反復回数が大きくなり，計算コストが増大する．一方，非反復型では，伝達行列法や散乱演算子法により不連続断面間で生じる光の干渉も含めて効率的に解析を行うことができる．この場合，伝達行列を構成するために行列指数関数による演算子の算出を必要とするが，一般に多項式近似を使用するため，十分な精度を得るためには計算量が増大する．また，伝搬方向に構造が連続的に変化する場合，その間を一様導波路で分割して階段近似を行う必要があり，各断面構造ごとに行列指数関数による演算子を算出しなければならない．一方，緩慢変化包絡線近似に基づく従来の BPM を使用することで，伝搬方向に連続的に変化する構造を少ないステップ数で効率的に解析が可能であるが，不連続断面構造で発生する反射波を扱うことができない．

そこで本章では，2 次元光導波路において，複数の不連続点を有する光導波路の効率的な解析を行うために POM と BPM の結合解法を開発する．本手法は不連続部における特性評価には POM を，伝搬方向に対して連続的に構造変化する領域に対しては BPM を使用し，各部分領域に対して伝達行列を構成することで解析領域全体を効率的に解析を行うことができる．本手法は，テーパ導波路の突合せ接続，ギャップ構造の導波路，誘電体導波路とプラズモニック導波路の突合せ接続の解析に適用し，本手法の有用性について検討を行う．

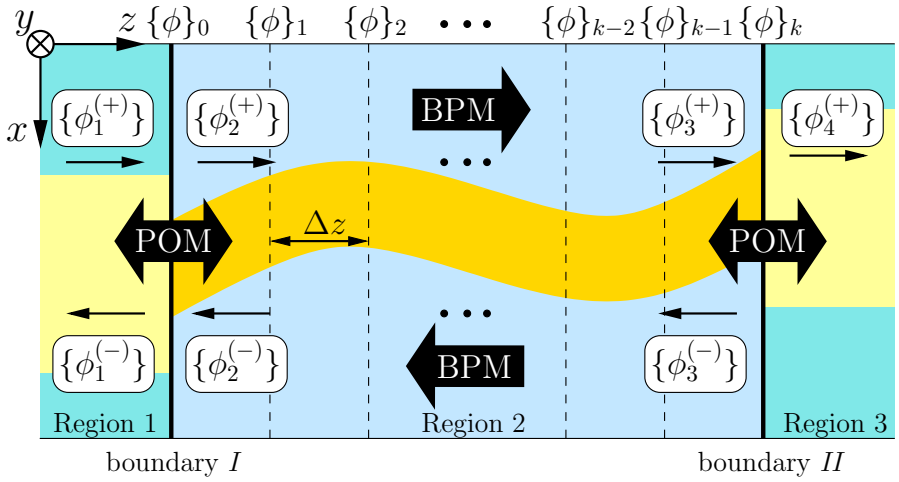


図 4.1: FE-BPM と POM の結合解法の概念図

4.2 基礎理論および定式化

4.2.1 POM と BPM の結合解法

いま，図 4.1 に示すような伝搬方向に対して 2 箇所の導波路不連続を有する構造を考える．伝搬方向に対して緩やかに構造が変化する領域を k 個の領域に分割し，その入射端の電磁界と出射端の振幅の関係は BPM の逐次計算式 (2.249) より

$$\left\{\phi_{t,2}^{(+)}\right\} = \prod_k [B_2]_k^{-1}[A_2]_k \left\{\phi_{t,3}^{(+)}\right\} \tag{4.1}$$

$$\left\{\phi_{t,2}^{(-)}\right\} = \prod_k [A_2]_k^{-1}[B_2]_k \left\{\phi_{t,3}^{(-)}\right\} \tag{4.2}$$

と書ける．よってこれらの式と伝搬演算子法によって得られた導波路不連続部における関係式 (3.17)(3.18) より，最終的な入射端と出力端の関係式は

$$\begin{bmatrix} \{\phi_1^{(+)}\} \\ \{\phi_1^{(-)}\} \end{bmatrix} = [P_I][B][P_{II}] \begin{bmatrix} \{\phi_4^{(+)}\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$[P_I] = \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ [Z_1] & -[Z_1] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ [Z_2] & -[Z_2] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \prod_k [B_2]_k^{-1}[A_2]_k & [0] \\ [0] & \prod_k [A_2]_k^{-1}[B_2]_k \end{bmatrix}$$

$$[P_{II}] = \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ [Z_2] & -[Z_2] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ [Z_3] & -[Z_3] \end{bmatrix}$$

と表すことができる．入射側導波路と出力側導波路が同じ構造である場合は，行列 $[P_{II}]$ を $[P_I]$ の逆行列で置き換えればよい．通常の FE-BPM では反射波を扱うことはできないが，式 (4.3) では前

進波と後進波に対してそれぞれ FE-BPM を適用するため反射波を扱うことが可能であり，さらに不連続境界では POM の境界条件が適用されるため，2 つの不連続境界間での共振も扱うことが可能である．また，導波路の不連続構造が 3 箇所以上ある場合は，式 (4.3) の伝達行列 $[P_I][B][P_{II}]$ を多段に接続することで，層数に関わらず，入出力特性を評価することが可能である．

4.2.2 線形フィルタによる不要モードの抑圧

不連続断面では導波モード以外の様々なモード成分が励振する可能性があり，その場合，伝搬角度が大きく広がるような電磁界はビーム伝搬法で扱うことが困難であるため，解析精度の劣化が予想される．特にプラズモニック導波路との接続を行う場合は，不連続部で生じるエバネッセント波がビーム伝搬法で本質的に扱えないことが問題となる．しかしながら，プラズモニック導波路では導波モードが単一のモードのみであるため，それ以外のモードの励振を抑圧する処理を行うことで，上記の問題を解決できると考えられる．ここでは線形フィルタ [95] を用いて，FE-BPM 解析の過程で不要なモードを効率的に抑圧することを考える．いま，FEM による一般化固有値方程式 (2.69) を以下のように変形する．

$$([K]-\beta_l^2[M])^{-1}\{\phi_i\} = \frac{1}{\beta_i^2-\beta_l^2}\{\phi_i\} \tag{4.4}$$

ここに下添字 i は任意の固有モード番号を表し，ある伝搬定数 β_l 近傍の固有値に対する固有モード振幅を増大させ，β_l から遠いモードを減衰させることができる．この関係を用いて，線形フィルタは

$$[F] = \prod_{l=1}^{N} \frac{a[M]}{[K]-(at_l+t_0)[M]} \tag{4.5}$$

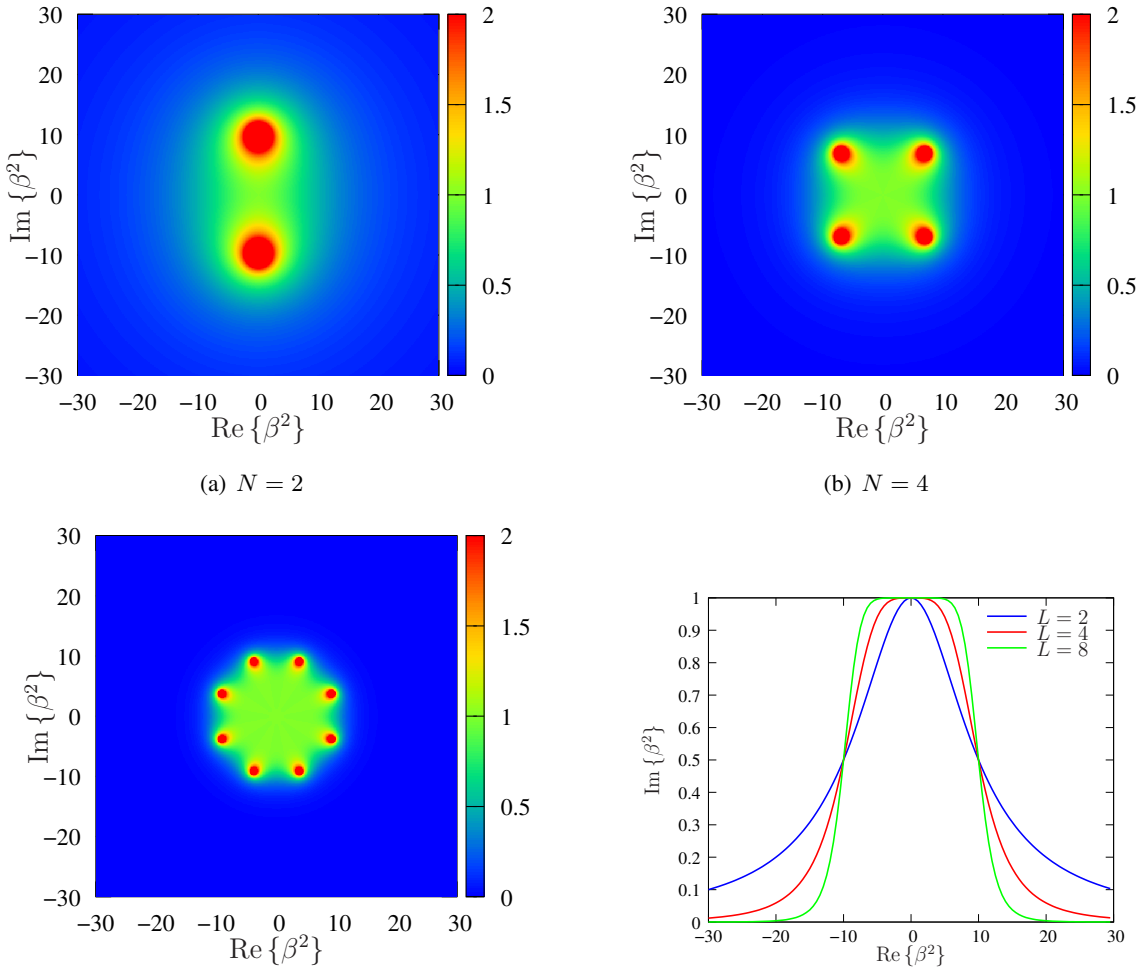
$$t_l = \exp(j(2l-1)\pi/L) \tag{4.6}$$

のように構成することができる．ここで t_0 は固有値の複素平面上のフィルタの中心，a はフィルタ半径，N はフィルタ次数である．図 4.2 に $N = 2,\ 4,\ 8$ の複素平面上におけるフィルタ特性と実軸上の特性を示す．実際の計算では，BPM の関係式 (4.1)(4.2) に対してフィルタ関数 $[F]$ を適用して

$$\left\{\phi_{t,2}^{(+)}\right\} = \prod_k [F]^{-1}[B_2]_k^{-1}[A_2]_k \left\{\phi_{t,3}^{(+)}\right\} \tag{4.7}$$

$$\left\{\phi_{t,2}^{(-)}\right\} = \prod_k [F][A_2]_k^{-1}[B_2]_k \left\{\phi_{t,3}^{(-)}\right\} \tag{4.8}$$

と変更することでフィルタリングできる．



(a) $N = 2$

(b) $N = 4$

(c) $N = 8$

(d) 実軸上の特性

図 4.2: 複素平面上と実軸上におけるフィルタ特性

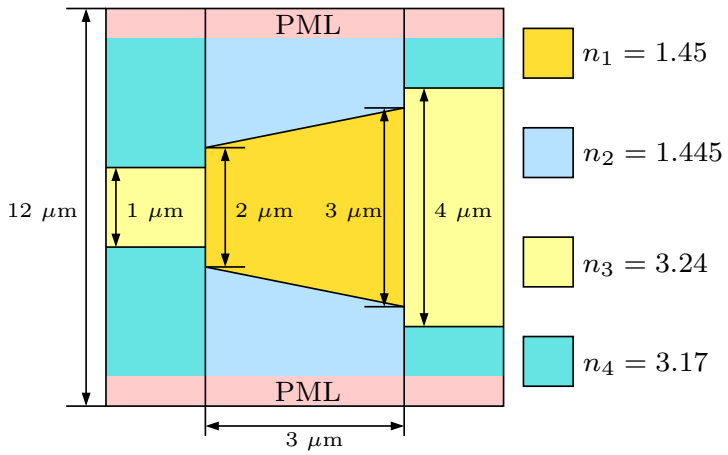
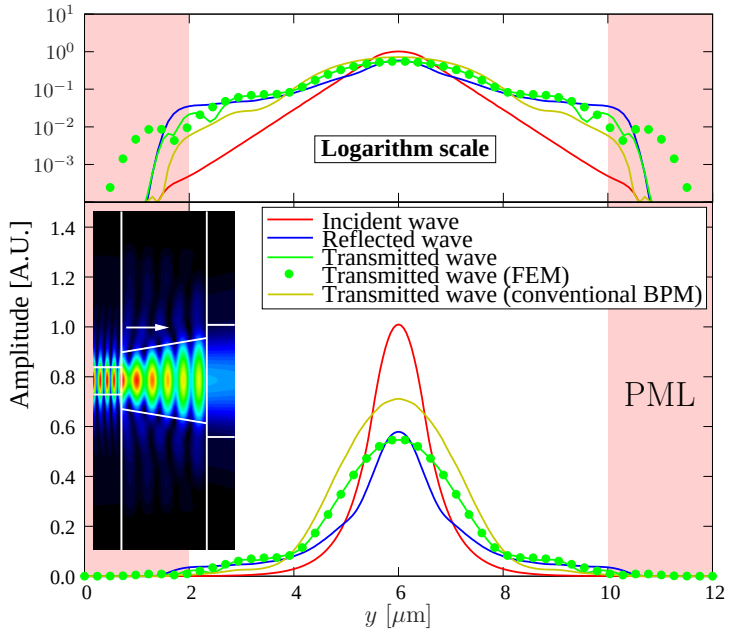


図 4.3: テーパ導波路と一様矩形導波路の突合せ接続構造

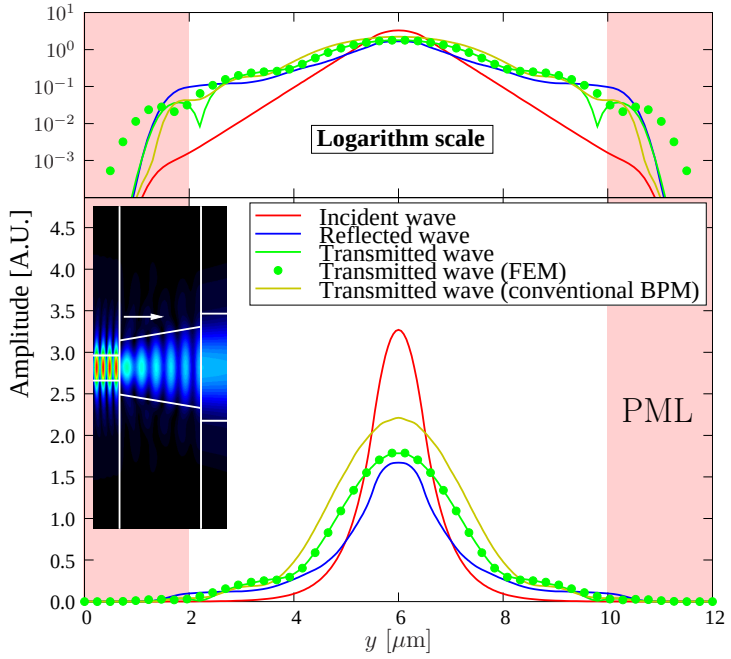
4.3 数値解析例

4.3.1 テーパ導波路の突合せ接続

図 4.3 に示すようなテーパ導波路と矩形導波路を突合せ接続した場合を考える．テーパ導波路の屈折率を $n_1 = 1.45$，$n_2 = 1.445$，一様矩形導波路の屈折率を $n_3 = 3.24$，$n_4 = 3.17$ とする．図のような構造では，不連続断面において反射波が生じるため，従来の BPM での解析が困難である．コア幅 1 μm の一様導波路から動作波長 1.55 μm の基本モードが入射され，幅が 2 μm から 3 μm に線形変化するテーパ導波路を介し，幅 4 μm の一様導波路へ接続する場合を考える．図 4.4 に TE モード，TM モードを入射した場合の入出力ポートにおける電磁界振幅を示す．また従来の FEM 解析により得られた電磁界分布を挿入図として示しており，不連続部における反射と定在波が見られる．本手法による解析結果は，従来の FEM による解析結果と PML 領域を除いてよく一致していることがわかる．本手法および FEM による透過パワーは TE モードの場合，それぞれ 44.23%，44.68% であり，TM モードの場合，それぞれ 45.34%，45.80% である．ただし電磁界のわずかな不一致が PML 領域付近で見られており，これは横方向に伝搬する放射波に対する BPM の解析精度が十分ではないためであると考えられる．しかしながら，電磁界は横方向の解析領域端においては PML により十分に減衰しているため，透過パワーの評価に大きく影響することはない．一方で，比較のために図中に示している BPM による解析結果は，本手法もしくは FEM の解析結果と大きく異なっており，透過パワーは TE モードと TM モードの場合で，それぞれ 77.78%，77.74% であり，十分な精度が得られていないことがわかる．



(a) TE モード



(b) TM モード

図 4.4: 図 4.3 の構造に対する入出力ポートにおける反射波・透過波

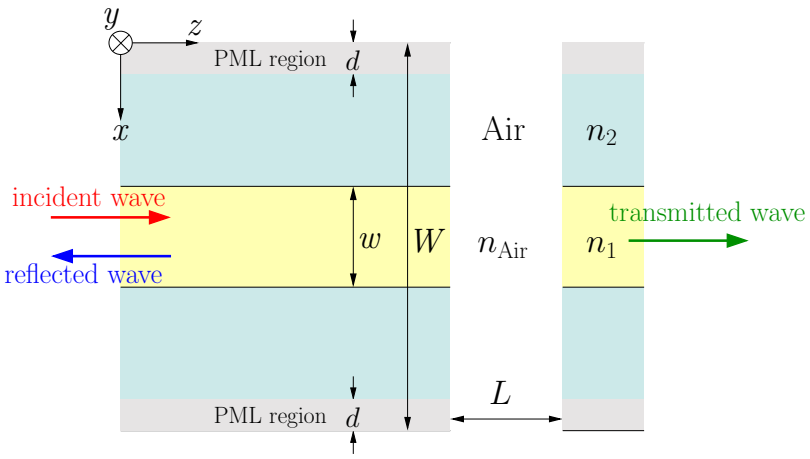


図 4.5: 導波路間にギャップが生じる 2 次元導波路不連続問題

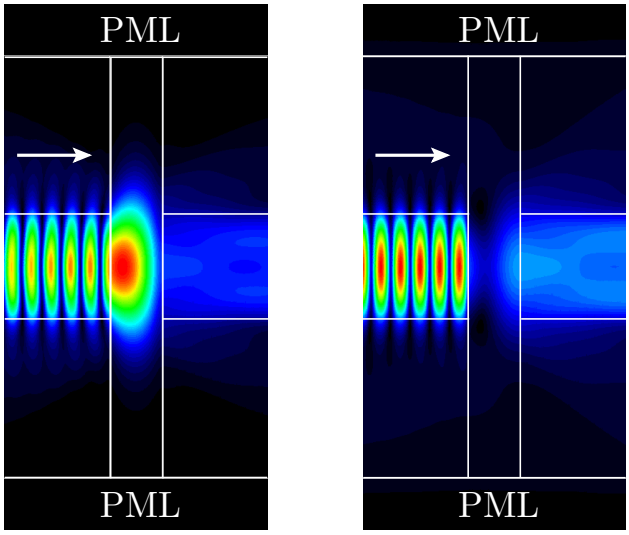
4.3.2 エアギャップを有する導波路構造

不連続断面が伝搬方向に対して 2 箇所存在する不連続導波路構造として，図 4.5 に示すような 2 つの誘電体導波路の接続部の間にエアギャップが生じるような構造を考える．入射側と出射側の導波路は同じ構造とし，まず弱導波問題を考え構造パラメータを $W = 5\,\mu\mathrm{m}$，$w = 1\,\mu\mathrm{m}$，$d = 0.5\,\mu\mathrm{m}$，屈折率を $n_1 = 3.54$，$n_2 = 3.17$ とする．図 4.6 にギャップ長 L を $0.5\,\mu\mathrm{m}$ としたときの基本モード入射に対する不連続部における反射・透過波の FEM による伝搬界分布を示す．エアギャップ領域には光を閉じ込める構造が無いために，光が横方向に強く放射していることがわかる．解析の収束性を確認するために，図 4.7 に基本モード反射パワーの動作波長あたりの分割数に対する依存性を示す．FEM は解析領域全体の離散化が必要であるため，ここでは $0.5\,\mu\mathrm{m}$ の PML 領域を含めて伝搬方向の解析領域サイズを $L = 2.5\,\mu\mathrm{m}$ とする．ここでは FEM 解析においては 2 次三角形要素，本手法の解析においては 2 次線要素を使用する．図 4.7(a) では伝搬方向の分割数を十分細かくし，横方向に沿った分割数に対する収束性を示している．収束に必要な横方向の分割数は FEM と本手法の場合でほぼ同じとなり，1 波長あたり 10 要素分割で十分な収束値を得られている．一方で，図 4.7(b) では横方向の分割数を十分細かくし，伝搬方向に沿った分割数に対する収束性を示しており，FEM よりも少ない分割数で本手法の収束値を得られていることがわかる．このとき解くべき行列サイズと計算時間は，FEM による解析では，それぞれ 5265，60ms であり，本手法による解析では，それぞれ，130，25ms である．本解析例では，計算時間に大きな差は無いが，3 次元ベクトル波解析の場合，本手法により離散化を大幅に減少することができるため，従来の FEM よりも効率的な解析が期待できる．加えて，各導波路構造における伝搬演算子の算出は並列計算が可能であるため，さらなる効率化も可能であると考えられる．図 4.8 に波長 $1.3\,\mu\mathrm{m}$ の TE 基本モードおよび TM 基本モードを入射した際の規格化反射・透過パワーのギャップ長 L に対する依存性を示す．図より，反射パワーおよび透過パワーはギャップ長が変化に伴って，極大と極小をとることがわかる．これは 2 つの不連続境界の間で起こる Fabry-Perót 共振によるもので，透過波と反射波の干渉についても扱うことが可能であることを示している．図 4.9 に $L = 0.5\mu\mathrm{m}$ とした場合の入出力断面における電磁界分布を示す．反射波と透過波はクラッド領域に光が広がり，本手法で放射波を評価できていることがわかる．クラッド部においてわずかな誤差が生じているが，図 4.8 に示すように，基本モードの伝搬特性を評価する上で誤差はほとんど影響を受けず，提案手法

の解析精度は実質的に求められる解析精度を有していると言える．

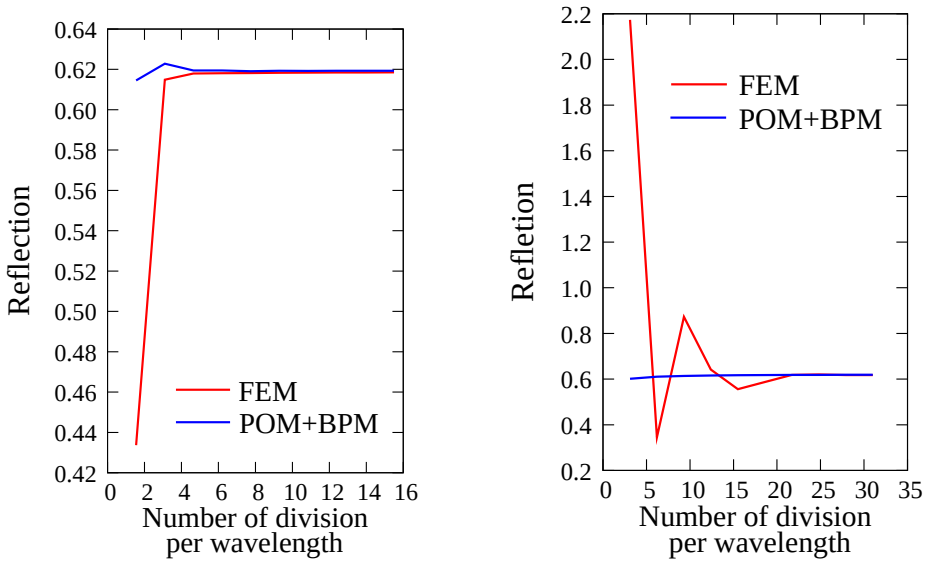
次に強導波路に対して本手法の有用性を調べるために，図 4.5 のギャップ構造において，構造パラメータを $W = 3\ \mu\mathrm{m}$，$w = 0.5\ \mu\mathrm{m}$，$d = 0.5\ \mu\mathrm{m}$，屈折率を $n_1 = 3.6$，$n_2 = 1$ に変更して解析を行う．図 4.10 に波長 1.55 μm の TE 基本モードおよび TM 基本モードを入射した際の規格化反射・透過パワーのギャップ長 L に対する依存性を示す．図ではギャップ長が比較的長い場合には，本手法と FEM の解析結果がよく一致しているが，ギャップ長が短い場合には両偏波で解析結果が一致していないことがわかる．

この原因について考察するために，図 4.11 に示すように単一の不連続部から TM 基本モードが放射する場合の光の伝搬特性を BPM を用いて解析を行った結果を示す．図では (a) で 2 次元解析領域を光が伝搬する様子を，(b) では不連続境界からそれぞれ放射した光が距離 $l_I = 0.1\ \mu\mathrm{m}$，$l_{II} = 0.4\ \mu\mathrm{m}$，$l_{III} = 0.8\ \mu\mathrm{m}$ だけ伝搬した位置での断面の電磁界振幅を示している．伝搬距離が短い場合，BPM と FEM の誤差が大きく，伝搬距離が長くなると誤差が小さくなっていることがわかる．また BPM と FEM 解析によって得られる電磁界振幅を比較すると，本来伝搬と共にクラッド領域で減衰するエバネッセントモードが，BPM 解析では十分に減衰することなく導波モードと共に伝搬していることがわかる．これは BPM の近似では伝搬方向とは大きく異なる方向に対する波数ベクトルに対して十分な解析精度が得られず，その結果，図 4.10 に示すようなパワーの解析精度の劣化が生じたと考えられる．一方で，エバネッセント波が十分に減衰するだけの距離を伝搬させることで本手法の結果は FEM の結果とよく一致するようになる．この問題の解決法として，BPM を用いる代わりにギャップの伝搬特性を表す伝達行列を固有モード展開によって生成する方法があるが，伝搬方向に構造が変化するような問題を扱う場合，モード展開に膨大な計算コストを要する問題がある．また，先行研究ではベクトル FE-BPM において線形フィルタによって不要なモードの励振を抑圧することに成功しており [95]，このフィルタを本手法に適用することでエバネッセント波を減衰させることが可能である．しかしながら，ここで扱うような様々なモードを扱う必要のある問題に対しては適切なフィルタリング範囲の設定が容易ではない．このような問題は BPM の解析手法自体に起因するものでるが，伝搬距離が短い場合に限った問題であり，計算コストについて考えると，伝搬距離が短い場合であれば FEM でも比較的低コストで解析を行うことが可能なため，本手法は伝搬距離が長い導波路構造に対しては依然として高精度，高効率な解析が可能である．



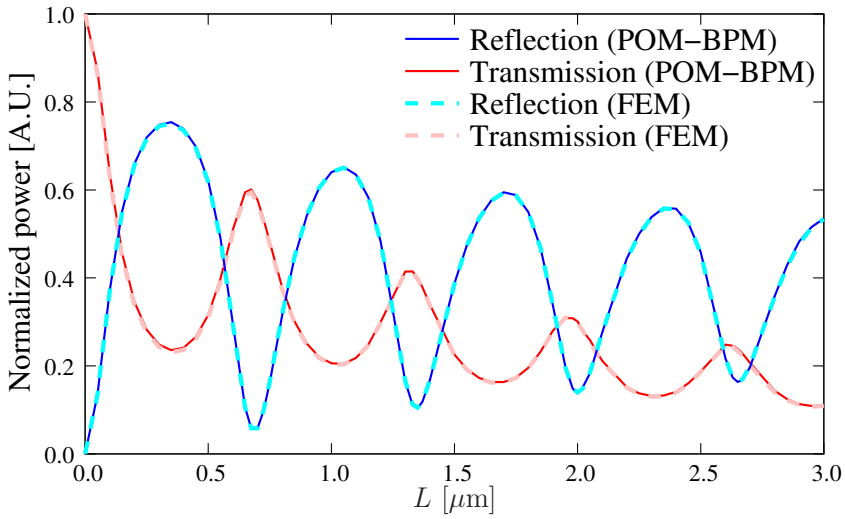
(a) TE 基本モード入射　　(b) TM 基本モード入射

図 4.6: 図 4.5 の構造における電磁界分布 ($L = 0.5\ \mu\mathrm{m}$)

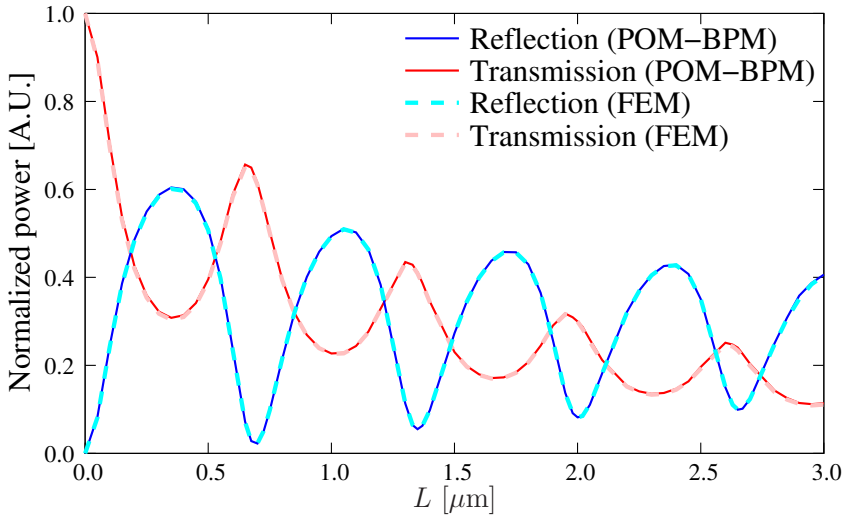


(a) 横方向分割数に対する反射パワー　　(b) 伝搬方向分割数に対する反射パワー

図 4.7: 基本モード反射パワーの動作波長あたりの分割数に対する依存性

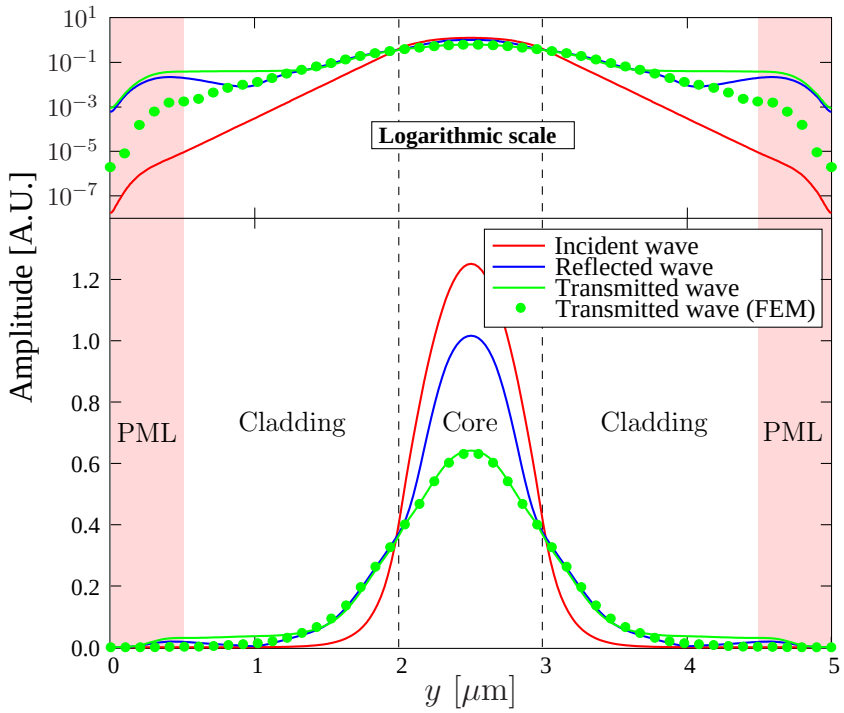


(a) TE 基本モード入射に対するパワーの依存性

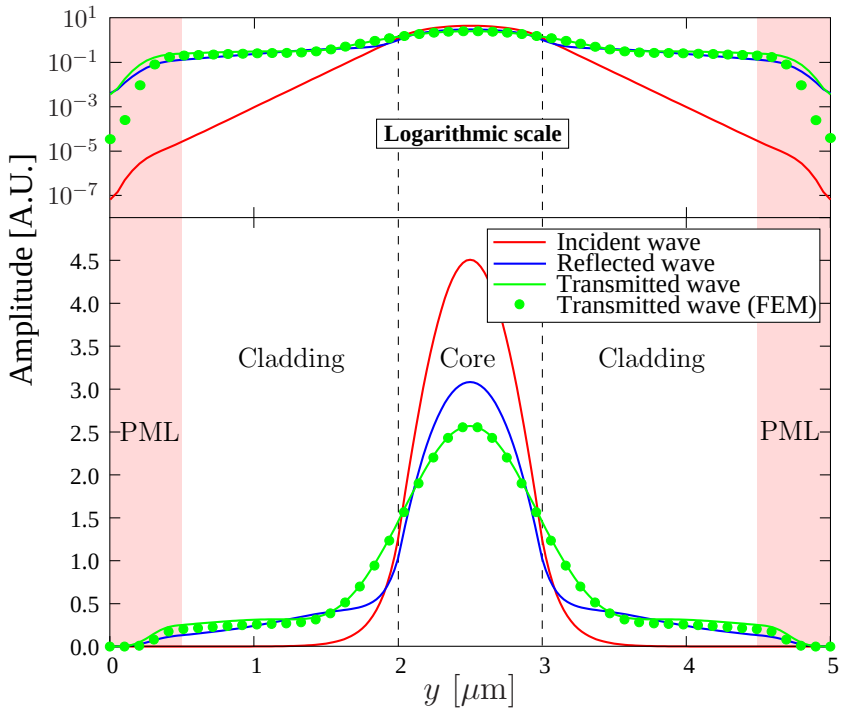


(b) TM 基本モード入射に対するパワーの依存性

図 4.8: 図 4.5 の弱導波路問題 ($n_1 = 3.54,\ n_2 = 3.17$) における基本モード入射に対する反射・透過パワーのギャップ長依存性

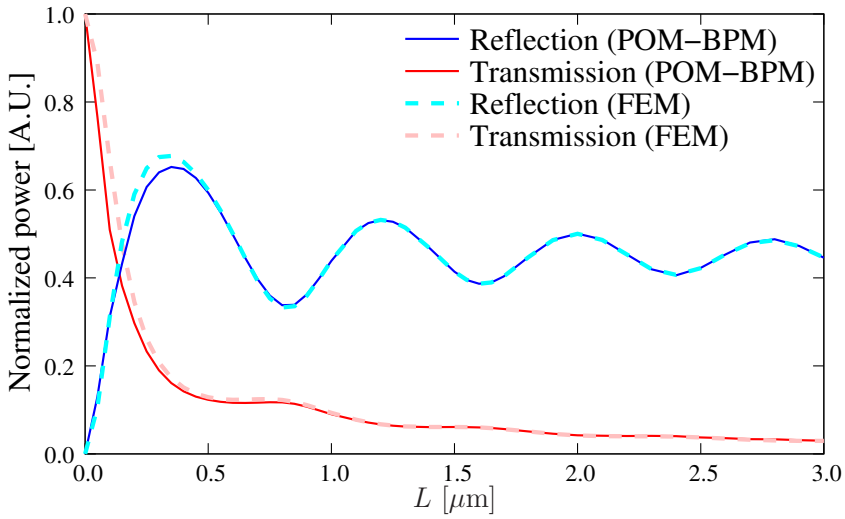


(a) TE 基本モード入射

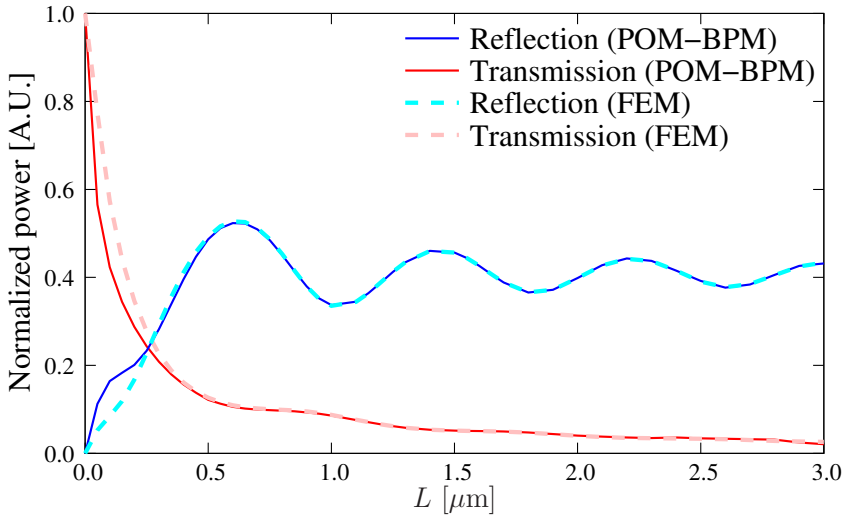


(b) TM 基本モード入射

図 4.9: 図 4.5 の弱導波路問題 ($n_1 = 3.54,\ n_2 = 3.17$) における不連続部の電磁界分布 ($L = 0.5\ \mu$m)

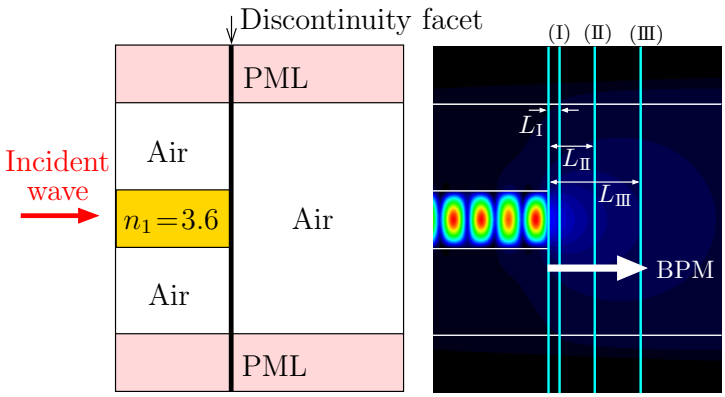


(a) TE 基本モード入射

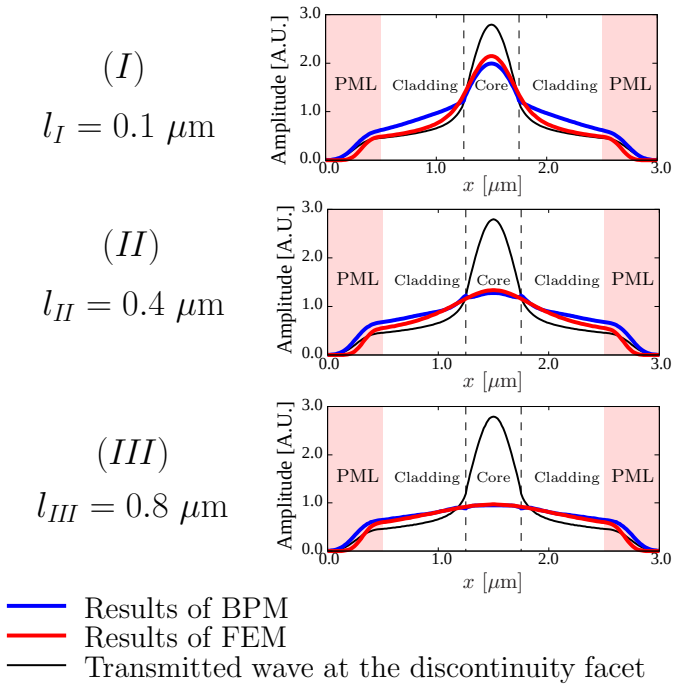


(b) TM 基本モード入射

図 4.10: 図 4.5 の強導波路問題 ($n_1 = 3.6,\ n_2 = 1$) における反射・透過パワーのギャップ長依存性



(a) 導波路端から放射する光の伝搬界分布



(b) 各伝搬距離に対する断面の電磁界振幅

図 4.11: TM 基本モードを入射したときの誘電体導波路端における光の放射

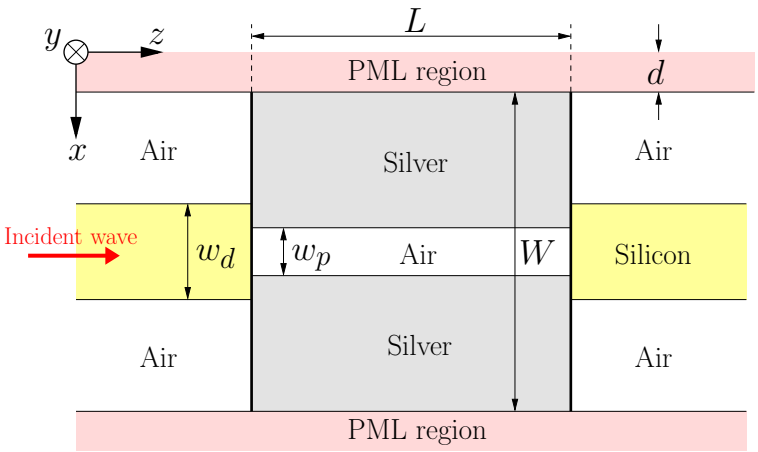


図 4.12: プラズモニック導波路の入出力端に誘電体導波路が突き合わせ接続された構造

4.3.3 誘電体導波路とプラズモニック導波路の多段接続

ここで図 4.12 の構造において，シリコンの誘電体導波路と銀を用いた MIM 構造のプラズモニック導波路を考え，構造パラメータを $w_d = 300$ nm，$w_p = 50$ nm，$W = 3000$ nm，$d = 0.5$ μm とする．プラズモニック導波路を扱う場合，不連続部で励起するエバネッセント波が BPM 解析において精度劣化の原因となることが考えられる．そこでフィルタ関数 (4.6) を使用して，導波モードの伝送に寄与しないモード成分を抑圧して解析を行う．このときプラズモニック導波路の全固有値分布は図 4.13 に示す複素平面上で表され，導波モードに対応する固有値は正の実数に存在するため，それ以外をフィルタリングするように線形フィルタのパラメータを設計する．まず線形フィルタの有用性を検討するために，図 4.14 の構造に対して，TM 基本モードを入射した際の誘電体導波路とプラズモニック導波路の接続部における不連続断面から透過した光に対して，BPM による伝搬解析を行った結果を示す．図 4.14(a) は 2 次元解析領域を光が伝搬する様子を，図 4.14(b) は不連続境界からそれぞれ放射した光が距離 $l_I = 50$ nm, $l_{II} = 100$ nm，$l_{III} = 500$ nm だけ伝搬した位置での断面の電磁界振幅を示している．FEM 解析では不連続部で励起されたエバネッセントモードがプラズモニック導波路を 50 nm 伝搬した位置でほとんど 0 に近づいている一方，BPM 解析の結果はエバネッセントモードが金属内部で十分に減衰することなく伝搬していることがわかる．導波モードのみを伝搬するように設計した線形フィルタを適用した BPM の解析結果では単一モードのみが伝搬しており，$l_I = 50$ nm の場合を除き，FEM 解析の結果とほぼ一致していることがわかる．よってこの線形フィルタを適用することで，POM と BPM の結合解法において精度のよい解析が可能であると考えられる．図 4.12 の構造において波長 1.55 μm の TM 基本モードを入射した際の反射および透過パワーのプラズモニック導波路幅 L に対する依存性をそれぞれ図 4.15 および図 4.16 に示す．通常の BPM を用いた場合では伝搬距離が短い場合に FEM の結果と大きく異なっていることがわかる．一方でフィルタリング処理を行った場合では伝搬距離に関わらず FEM の結果とよく一致している．また解析結果からプラズモニック導波路を伝搬する光が反射波と透過波の干渉によってパワーの増減が生じ，これは図 4.17 に示すプラズモニック導波路の長さ L が 1750 nm，2000 nm のときの FEM 解析による伝搬界分布からも確認できる．

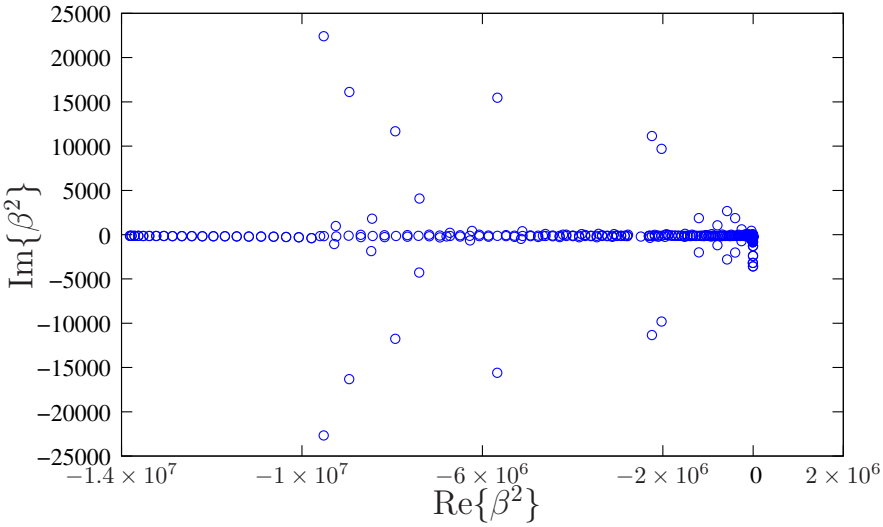
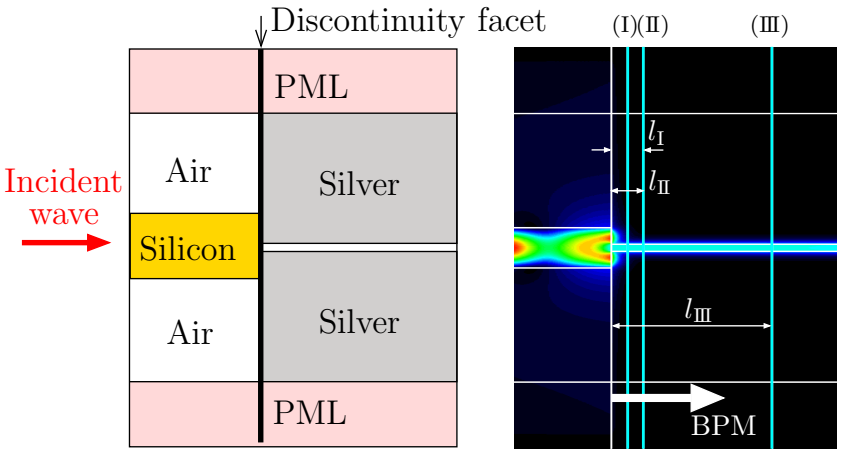
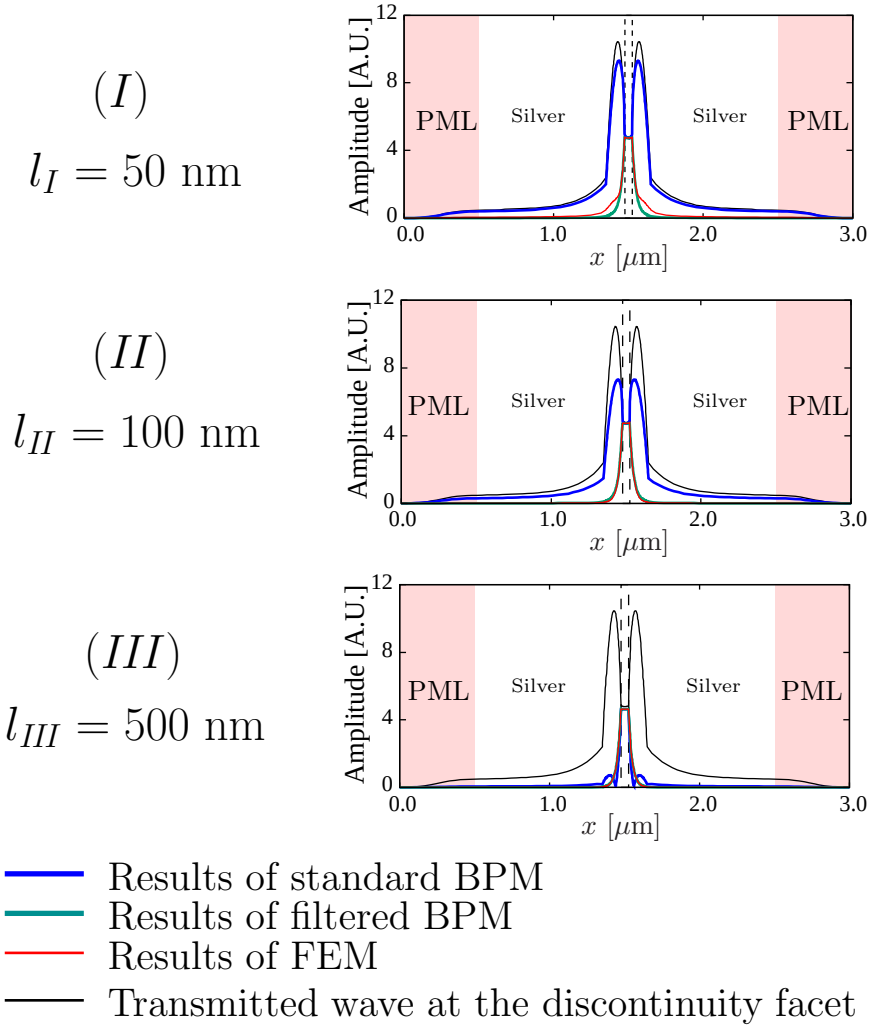


図 4.13: プラズモニック導波路の全固有値分布



(a) 不連続部を透過した光がプラズモニック導波路を伝搬する様子



(b) 各伝搬距離に対する断面の電磁界振幅

図 4.14: TM 基本モードを入射したときのプラズモニック導波路を伝搬する透過波

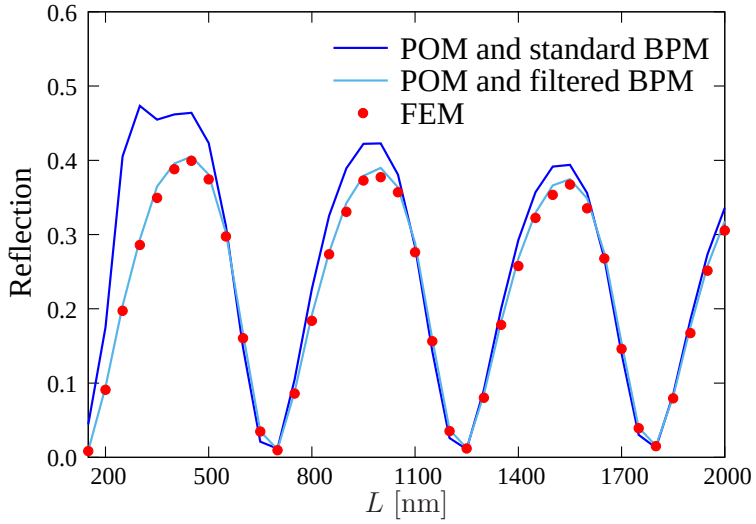


図 4.15: 図 4.12 の構造における反射パワーのプラズモニック導波路の長さに対する依存性

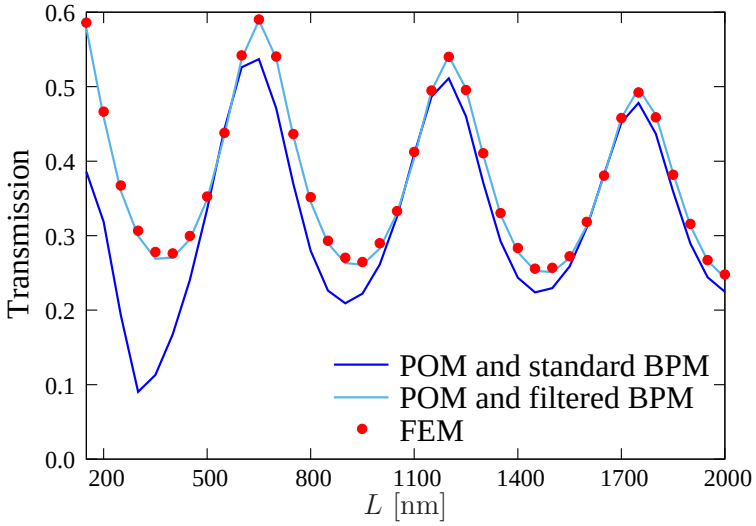
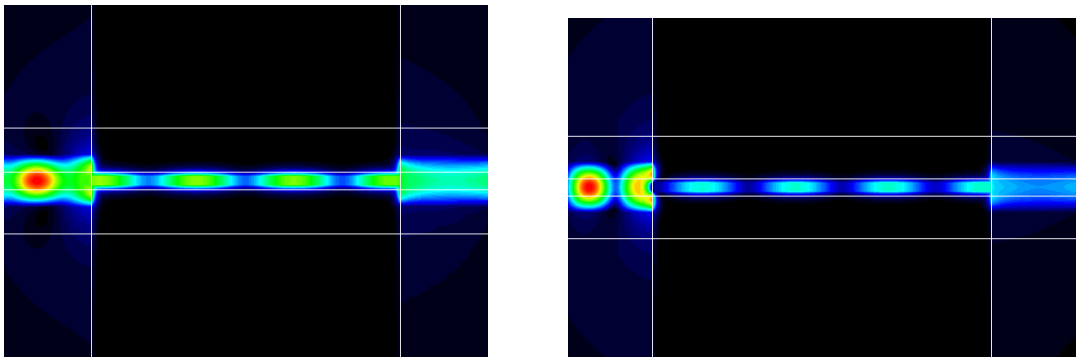


図 4.16: 図 4.12 の構造における透過パワーのプラズモニック導波路の長さに対する依存性



(a) $L = 1750$ nm　　(b) $L = 2000$ nm

図 4.17: 図 4.12 の構造における FEM による伝搬界分布

第5章　伝搬演算子を用いた任意構造を有する光導波路の効率的な解析法

5.1　まえがき

有限要素法は電磁界解析で広く用いられている極めて汎用性の高い数値解析手法の一つであるが，開領域問題を扱う場合，解析領域外部へ伝搬する光波を扱うための適切な境界処理が必須である．近年ではこのような境界処理に PML が高性能な無反射吸収層としてとりわけ多くの問題で使用されている．しかしながら，PML を使用する場合，仮想的な媒質を解析領域全周囲に置くための余計な解析領域を確保しなければならず，計算機メモリが大幅に増大することがボトルネックとなる．特にフォトニック結晶などの周期構造では，緩やかな電磁界の減衰を必要とし，PML 領域の大幅な拡大が必要となる [81]．PML が使用され始める以前は，境界上で電磁界が連続となるように固有モード展開による処理を行うことで，解析領域を終端する方法が使用された [96]．この方法では，導波モード，放射モード，エバネッセントモードを正確に扱うことができる反面，解析領域終端で放射波の影響が大きい問題などを扱うためには多くのモードを必要とし，計算コストが膨大になる．近軸近似に基づいた比較的簡単な境界条件では，モード展開を必要とせず容易に実装可能であるが，放射波を扱うことはできない [97]．また別の近似的な境界条件として，パデ近似を使用した境界条件も提案されており，近軸近似に基づく境界条件と比較して広角伝搬が可能で，放射波を含めた解析が可能である [98] が，各境界において設定される参照屈折率によって伝搬方向を特徴付けられる．したがって，大きな放射成分が寄与する開領域問題の場合，これらの近似的な境界条件では精度の劣化を避けることが困難である．

そこで，本章では境界条件として POM を適用した効率的な有限要素法の解析手法ついて検討を行う．これにより，任意の電磁界成分に対して PML や固有モード展開を使用せずに解析領域を終端することが可能となる．さらに，入出力ポートを解析領域外部の境界上で終端しているため，全体の解析領域を小ブロック領域に分割して解析を行うことが可能となる．これにより従来ではある構造に対して，その都度大規模な連立一次方程式を解かなければならなかったのに対し，本手法では全体素子構造を入出力がセットとなった機能ブロックの多段接続と見なし，各ブロック構造ごとに計算をすれば良いため，自動最適設計に応用した場合にその有用性が高いと考えられる．

分割領域の接続による解析方法としては，伝達行列法 (Transfer Matrix Mehod: TMM)[67] [68] [75] [99]∼[104] や散乱演算子 (Scattering Operator: SO) 法 [69]∼[72][105][106][107] がよく知られている．これらの手法は，不連続断面の境界条件と各分割領域の固有フィールドから定式化され，伝搬方向の構造が変化しない構造内の計算量を減らすことで，周期導波路など複数の不連続断面を有する全体構造を効率的に解析することが可能である．TMM の定式化には，導波路の固有モードを直接計算する双方向固有モード伝搬 (Bidirectional Eigenmode Propagation: BEP) 法 [99]∼[104] やフィールド演算子に基づいた双方ビーム伝搬法 (Bidirectional Beam Propataion Method; BiBPM)[67][68][75] を使用した定式化が提案されており，導波モードおよび放射モードを含めた解析に成功している．しかしながら TMM はエバネッセントモードを扱う場合にしばしば数値的に不安定になることが知

られており，比較的安定な解析法として，BEP[105][106][107] や BiBPM[69]∼[72] を使用した SO による解析法が提案されている．ただし，これらの手法は各分割領域内では伝搬方向に一様な構造である必要があり，設計自由度が大きく制限されてしまう．前章で示した従来の BPM と POM を組み合わせた新しい TMM では，各ブロックで構造が伝搬方向に変化する場合の解析を可能としたが，伝搬角度が制限されるため，任意構造に適用できるわけではない．本手法においては各ブロックが有限要素メッシュにより分割されるため，構造の任意性が保たれる．

本章ではまず，FEM による 2 次元光導波路伝搬解析において，解析領域の境界条件に POM を適用した FEM の定式化と，散乱演算子の導出を行う．また解析領域をブロック化し，各領域の散乱行列の多段接続による解析法を示す．数値解析例では，放射波の影響が比較的大きく現れる構造に対して本境界条件の有用性を確認するため，導波路の軸ずれ構造，導波路端における光の放射の解析を行う．また，散乱演算子法により，分割した導波路構造の多段接続による解析の妥当性および有用性を確認するため，ギャップ構造の導波路と 1 次元フォトニック結晶による周期構造の解析を行う．

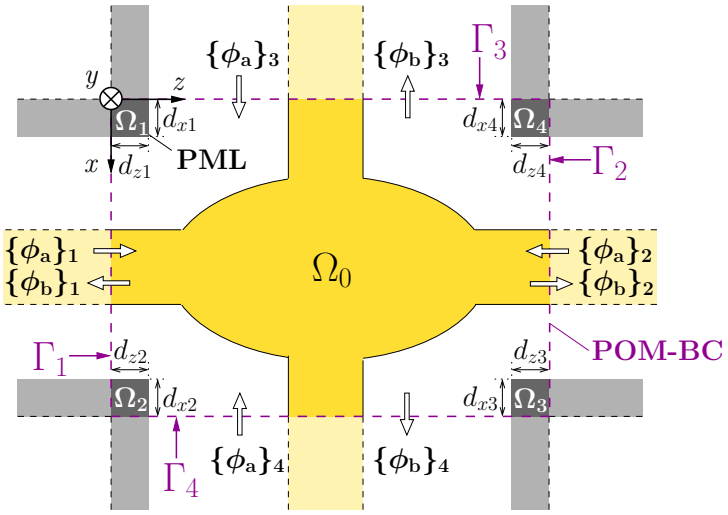


図 5.1: 境界条件に POM のを課した FEM 解析の概念図

5.2 基礎理論および定式化

5.2.1 伝搬演算子による境界条件

図 5.1 に示すような y 方向に構造変化がない 2 次元光導波路を考え，解析領域 Ω_0 は境界 Γ_1-Γ_4 に囲まれた領域とする．任意の位置で PML を設置可能とすると，導波路伝搬解析の定式化に基づいて，以下の連立一次方程式を得る．

$$[P]\{\Phi\} = \{u\} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}[P] = \sum_e \iint_e \Bigg[& p\frac{s_z}{s_x}\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial x} \\ & + p\frac{s_x}{s_z}\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\frac{\partial\{N\}^T}{\partial z} - k_0^2 q s_x s_z \{N\}\{N\}^T \Bigg] dxdz\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{e_i}{}' \int_e p\frac{s_l}{s_m}\{\tilde{N}\}_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial n_i} dl\right) \tag{5.3}$$

ここに，i は各境界の情報を与える添字であり，$\sum_e$ は全体領域，$\sum_{e_i}'$ は境界 Γ_i 上に関する全要素の総和を表す．$\{\tilde{N}\}_i$ は境界 Γ_i 上の形状関数ベクトルを表す．l および m は $i = 1, 2$ のときはそれぞれ x と z であり，$i = 3, 4$ のときは z と x である．式 (5.1) は領域内部と境界上に関する成分に分離して以下のような形式で表すことができる．

$$\begin{bmatrix} [P]_{00} & [P]_{01} & [P]_{02} & [P]_{03} & [P]_{04} \\ [P]_{10} & [P]_{11} & [P]_{12} & [P]_{13} & [P]_{14} \\ [P]_{20} & [P]_{21} & [P]_{22} & [P]_{23} & [P]_{24} \\ [P]_{30} & [P]_{31} & [P]_{32} & [P]_{33} & [P]_{34} \\ [P]_{40} & [P]_{41} & [P]_{42} & [P]_{43} & [P]_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi\}_0 \\ \{\Phi\}_1 \\ \{\Phi\}_2 \\ \{\Phi\}_3 \\ \{\Phi\}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ [\tilde{M}]_1\{\Psi\}_1 \\ [\tilde{M}]_2\{\Psi\}_2 \\ [\tilde{M}]_3\{\Psi\}_3 \\ [\tilde{M}]_4\{\Psi\}_4 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

ここに $[\tilde{M}]_i$ および $\{\Psi\}_i$ は

$$[\tilde{M}]_i = \sum_{e_i}{}' \int_e p\frac{s_l}{s_m}\{\tilde{N}\}_i\{\tilde{N}\}_i^T dl \tag{5.5}$$

$$\{\Psi\}_i = \left.\frac{\partial\{\Phi\}_i}{\partial n_i}\right|_{\Gamma_i} \tag{5.6}$$

で与えられる．ここに $[\tilde{M}]_i$ は境界 Γ_i における線要素で構成された固有モード解析のための質量行列である．

伝搬演算子法では，各境界の電磁界 $\{\Phi\}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ が以下の波動方程式で表される．

$$\frac{d^2\{\Phi\}_i}{dn_i^2} + [Q]_i^2\{\Phi\}_i = \{0\} \tag{5.7}$$

ここに $[Q]_i$ は各境界上の伝搬演算子行列であり，

$$[Q]_i = \sqrt{[\tilde{M}]_i^{-1}[\tilde{K}]_i} \tag{5.8}$$

$$[\tilde{K}]_i = \sum_{e_i}{}' \int_e \left[k_0^2 q s_l s_m \{\tilde{N}\}_i\{\tilde{N}\}_i^T - p\frac{s_m}{s_l}\frac{d\{\tilde{N}\}_i}{dl}\frac{d\{\tilde{N}\}_i^T}{dl}\right] dl \tag{5.9}$$

で表される．ここに $[\tilde{K}]_i$ は境界 Γ_i における線要素で構成された固有モード解析のための剛性行列である．式 (5.7) の波動方程式の解は次で表される．

$$\{\Phi\}_i = \{\phi_a\}_i \exp(j[Q]_i n_i) + \{\phi_b\}_i \exp(-j[Q]_i n_i) \tag{5.10}$$

ここに $\{\phi_a\}_i$ および $\{\phi_b\}_i$ はそれぞれ各境界の外向き法線方向を正としたときの後進波，前進波の電磁界振幅を表す．式 (5.10) を微分し，$\{\phi_b\}_i$ を消去すると，

$$\left.\frac{d\{\Phi\}_i}{dn_i}\right|_{\Gamma_i} = j2[Q]_i\{\phi_a\}_i \exp(j[Q]_i n_i) - j[Q]_i\{\Phi\}_i \tag{5.11}$$

を得る．よって入射面を Γ_1 とすれば，$\{\Psi\}_i$ は以下のように表すことができる．

$$\{\Psi\}_i = \begin{cases} j2[Q]_1\{\phi_a\}_1 - j[Q]_1\{\Phi\}_1 & (i = 1) \\ -j[Q]_i\{\Phi\}_i & (\text{else}) \end{cases} \tag{5.12}$$

ここに $\{\phi_a\}_1$ は入射振幅を表す．式 (5.4) および式 (5.12) より，最終的な解くべき行列方程式は以下のように書ける．

$$\begin{bmatrix} [P]_{00} & [P]_{01} & [P]_{02} & [P]_{03} & [P]_{04} \\ [P]_{10} & [\tilde{P}]_{11} & [P]_{12} & [P]_{13} & [P]_{14} \\ [P]_{20} & [P]_{21} & [\tilde{P}]_{22} & [P]_{23} & [P]_{24} \\ [P]_{30} & [P]_{31} & [P]_{32} & [\tilde{P}]_{33} & [P]_{34} \\ [P]_{40} & [P]_{41} & [P]_{42} & [P]_{43} & [\tilde{P}]_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi\}_0 \\ \{\Phi\}_1 \\ \{\Phi\}_2 \\ \{\Phi\}_3 \\ \{\Phi\}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ 2[C]_1\{\phi_a\}_1 \\ \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

ここに $[C]_i$ および $[\tilde{P}]_{ii}$ は

$$[C]_i = j[\tilde{M}]_i[Q]_i \tag{5.14}$$

$$[\tilde{P}]_{ii} = [P]_{ii} + [C]_i \qquad \text{for } i = 1 \text{ to } 4. \tag{5.15}$$

で与えられる．

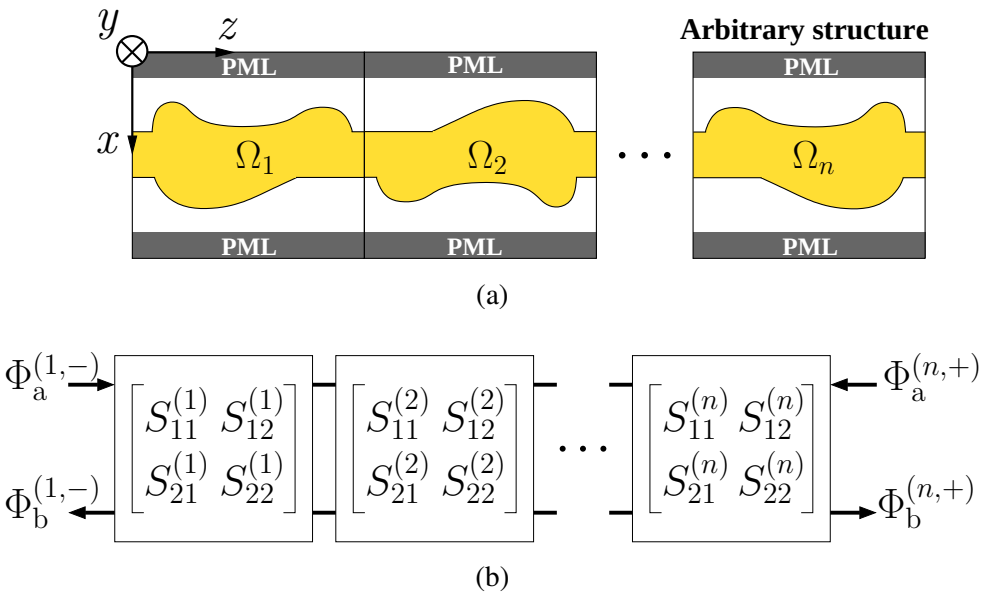


図 5.2: 任意導波路構造の接続: (a) 導波路接続構造の概念図; (b) 散乱行列表現

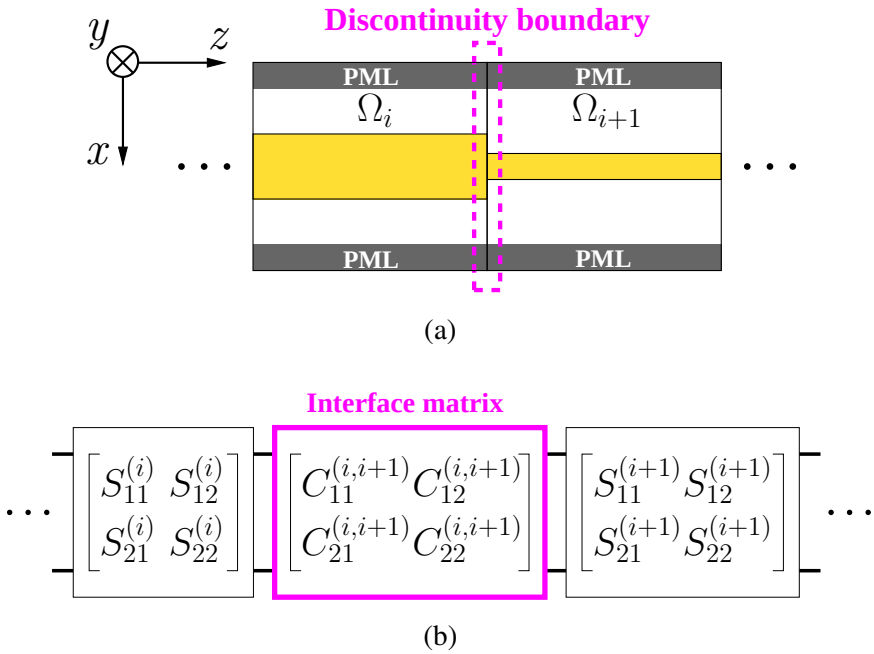


図 5.3: 導波路不連続部での接続: (a) 導波路接続構造の概念図; (b) 散乱行列表現

5.2.2 散乱演算子法

いま図 5.2 のように入力ポートと出力ポートを有する分割された各導波路構造を伝搬方向に接続することを考える．2 つのポートに対してのみ伝搬演算子による境界条件を適用すると，連立一次方程式は形式的に

$$\begin{bmatrix} [P_{00}] & [P_{0-}] & [P_{0+}] \\ [P_{-0}] & [\tilde{P}_{--}] & [P_{-+}] \\ [P_{+0}] & [P_{+-}] & [\tilde{P}_{++}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi\}_0 \\ \{\Phi\}_- \\ \{\Phi\}_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ 2[C]_-\{\Phi_a^{(-)}\} \\ 2[C]_+\{\Phi_a^{(+)}\} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

と書ける．ここに下添字 $-$ および $+$ は，それぞれ入力ポート側，出力ポート側を表す．SO 法では入出力応答を考えるため，式 (5.16) より内部電磁界 $\{\Phi\}_0$ を消去すると，あるブロック領域 Ω_i において次の散乱行列を得ることができる．

$$\begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{b}}^{(i,-)}\} \\ \{\Phi_{\mathrm{b}}^{(i,+)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S]_{11}^{(i)} & [S]_{12}^{(i)} \\ [S]_{21}^{(i)} & [S]_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{a}}^{(i,-)}\} \\ \{\Phi_{\mathrm{a}}^{(i,+)}\} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

$$[S]_{11}^{(i)} = 2[D]_1[C]_- - [I]_- \tag{5.18}$$

$$[S]_{12}^{(i)} = -2[D]_1[R]_{12}[R]_{22}^{-1}[C]_+ \tag{5.19}$$

$$[S]_{21}^{(i)} = -2[D]_2[R]_{21}[R]_{11}^{-1}[C]_- \tag{5.20}$$

$$[S]_{11}^{(i)} = 2[D]_2[C]_+ - [I]_+ \tag{5.21}$$

$$[D]_1 = \left([R]_{11} - [R]_{12}[R]_{22}^{-1}[R]_{21}\right)^{-1} \tag{5.22}$$

$$[D]_2 = \left([R]_{22} - [R]_{21}[R]_{11}^{-1}[R]_{12}\right)^{-1} \tag{5.23}$$

$$[R]_{ij} = [P_{ij}] - [P_{i0}][P_{00}]^{-1}[P_{0j}] \tag{5.24}$$

ここに $[I]_i (i = -, +)$ は単位行列，$[S]_{mn}^{(i)}$ $(m, n = 1, 2)$ は散乱演算子である．ここで z 軸の負方向からの入射を考えると，入射波に対する反射・透過波は

$$\{\Phi_{\mathrm{b}}^{(i,+)}\} = [S]_{21}^{(i)}\{\Phi_{\mathrm{a}}^{(i,-)}\} \tag{5.25}$$

$$\{\Phi_{\mathrm{b}}^{(i,-)}\} = [S]_{11}^{(i)}\{\Phi_{\mathrm{a}}^{(i,-)}\} \tag{5.26}$$

と表すことができる．この散乱行列を図 5.2(b) に示すように隣接する構造の散乱行列と接続することを考える．Redhffer のスター積 [108] を用いると，2 つの散乱行列を統合して 1 つの散乱行列として以下のように表すことができる．Ω_i と Ω_{i+1} の間のスター積

$$\begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{b}}\}^{(i,-)} \\ \{\Phi_{\mathrm{b}}\}^{(i+1,+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}^{(i,i+1)}] & [S_{12}^{(i,i+1)}] \\ [S_{21}^{(i,i+1)}] & [S_{22}^{(i,i+1)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{a}}\}^{(i,-)} \\ \{\Phi_{\mathrm{a}}\}^{(i+1,+)} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

$$[S_{11}^{(i,i+1)}] = [S_{11}^{(i)}] + [S_{12}^{(i)}]\left[[I] - [S_{11}^{(i+1)}][S_{22}^{(i)}]\right]^{-1}[S_{11}^{(i+1)}][S_{21}^{(i)}] \tag{5.28}$$

$$[S_{12}^{(i,i+1)}] = [S_{12}^{(i)}]\left[[I] - [S_{11}^{(i+1)}][S_{22}^{(i)}]\right]^{-1}[S_{12}^{(i+1)}] \tag{5.29}$$

$$[S_{21}^{(i,i+1)}] = [S_{21}^{(i+1)}]\left[[I] - [S_{22}^{(i)}][S_{11}^{(i+1)}]\right]^{-1}[S_{21}^{(i)}] \tag{5.30}$$

$$[S_{22}^{(i,i+1)}] = [S_{22}^{(i+1)}] + [S_{21}^{(i+1)}]\left[[I] - [S_{22}^{(i)}][S_{11}^{(i+1)}]\right]^{-1}[S_{22}^{(i)}][S_{12}^{(i+1)}] \tag{5.31}$$

で表すことができる．

POM 境界条件では，境界の外側の仮想的な領域は境界上の構造が無限遠まで続くことを仮定しているため，不連続境界で接続する場合に境界条件を満足しない．そこで図 5.3 に示すように，不連続部で接続する場合には，境界条件を満たすための接続行列を新たに導入する．不連続部の境界条件は，電磁界の接線成分の連続性を表す関係式 (3.17)(3.18) に基づきここでは Ω_i と Ω_{i+1} の間の境界条件を行列形式で以下のように表す．

$$\begin{bmatrix} [I] & [I] \\ [Z^{(i)}]_+ & -[Z^{(i)}]_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{b}}^{(i,+)}\} \\ \{\Phi_{\mathrm{a}}^{(i,+)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [I] \\ [Z^{(i+1)}]_- & -[Z^{(i+1)}]_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{a}}^{(i+1,-)}\} \\ \{\Phi_{\mathrm{b}}^{(i+1,-)}\} \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

式 (5.32) は左辺に現れる行列の逆行列の積をとることで容易に伝達行列形式に変形され

$$\begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{b}}\}^{(i,+)} \\ \{\Phi_{\mathrm{a}}\}^{(i,+)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{11}^{(i,i+1)}] & [F_{12}^{(i,i+1)}] \\ [F_{21}^{(i,i+1)}] & [F_{22}^{(i,i+1)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{a}}\}^{(i+1,-)} \\ \{\Phi_{\mathrm{b}}\}^{(i+1,-)} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

のように表される．ここでスター積を使用した散乱行列演算に帰着させるため，式 (5.33) はさらに次のように散乱行列形式に変形できる．

$$\begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{a}}\}^{(i,+)} \\ \{\Phi_{\mathrm{a}}\}^{(i+1,-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{11}^{(i,i+1)}] & [C_{12}^{(i,i+1)}] \\ [C_{21}^{(i,i+1)}] & [C_{22}^{(i,i+1)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Phi_{\mathrm{b}}\}^{(i,+)} \\ \{\Phi_{\mathrm{b}}\}^{(i+1,-)} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

$$[C_{11}^{(i,i+1)}] = [F_{21}^{(i,i+1)}][F_{11}^{(i,i+1)}]^{-1} \tag{5.35}$$

$$[C_{12}^{(i,i+1)}] = [F_{22}^{(i,i+1)}] - [F_{21}^{(i,i+1)}][F_{11}^{(i,i+1)}]^{-1}[F_{12}^{(i,i+1)}] \tag{5.36}$$

$$[C_{21}^{(i,i+1)}] = [F_{11}^{(i,i+1)}]^{-1} \tag{5.37}$$

$$[C_{22}^{(i,i+1)}] = -[F_{11}^{(i,i+1)}]^{-1}[F_{12}^{(i,i+1)}] \tag{5.38}$$

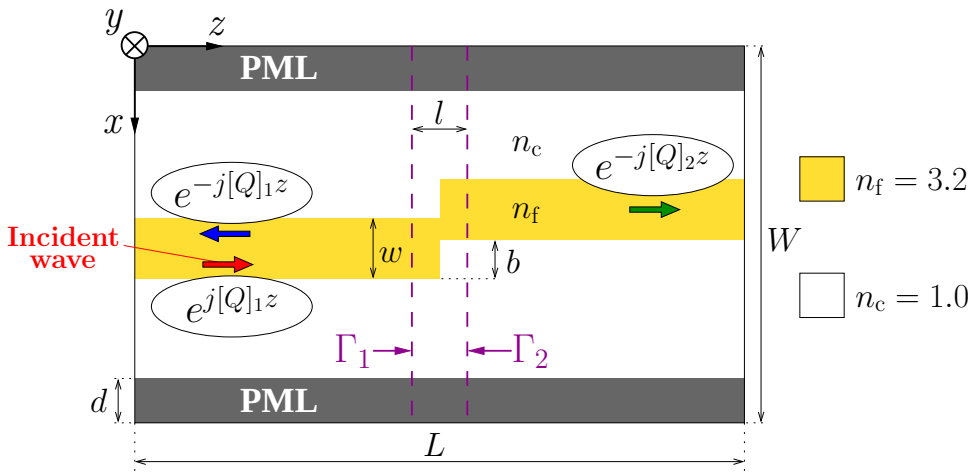
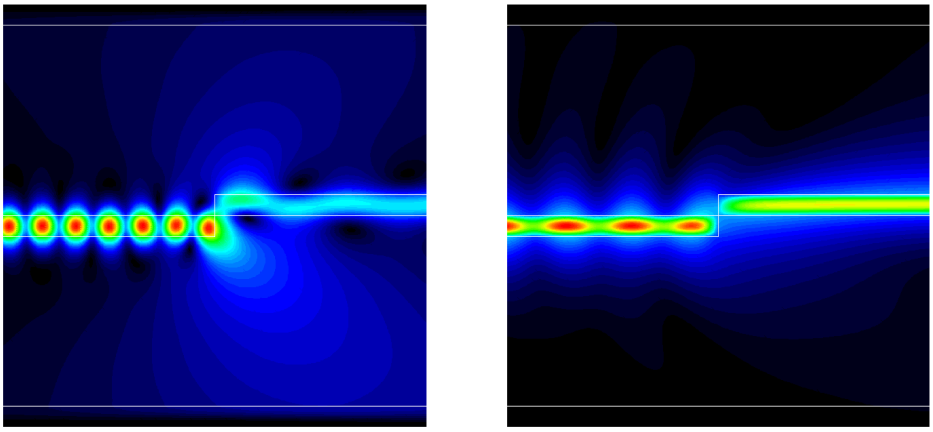


図 5.4: 導波路の軸ずれ接続

5.3 数値解析例

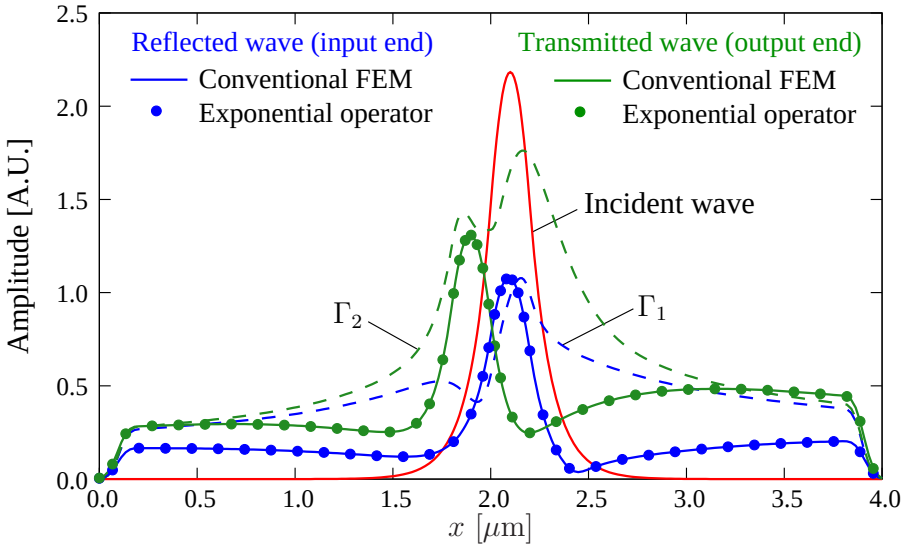
5.3.1 導波路の軸ずれ接続

まず図 5.4 に示すように導波路が軸ずれ構造で接続された不連続導波路を考える．屈折率を $n_f = 3.2, n_c = 1.0$ とし，構造パラメータを $W = 4\,\mu\mathrm{m}, w = 0.2\,\mu\mathrm{m}, L = 3\,\mu\mathrm{m}, d = 0.2\,\mu\mathrm{m}$ とする．伝搬方向の解析領域の長さは不連続部を含めた $l = 0.2\,\mu\mathrm{m}$ として三角形要素により分割し，入力ポートと出力ポート上での電磁界は式 (5.10) により計算する．このとき $[Q]_i (i = 1, 2)$ の固有値分解の計算を追加で必要とするが，境界上の離散点数は，解析領域全体の離散点に比べて十分に少なく，また連立一次方程式の計算と並列計算が可能であるため，計算時間の増加への影響は小さいと考えられる．図 5.5 に軸ずれの大きさが $b/w = 1$ で表される構造に対して，動作波長 $\lambda = 1.55\,\mu\mathrm{m}$ の TE モードと TM モードを入射した場合の，それぞれ電界および磁界分布を示す．図の電磁界分布は解析領域周囲に PML を課して解析を行って得られた結果と同等の分布になっている．図 5.6 に示す導波路断面における電磁界振幅を比較すると，Γ_i から入出力ポートまでの光の伝搬を伝搬演算子を利用して放射成分を含めて正確に表現できていることが分かる．図 5.7(a) および (b) にそれぞれ TE 基本モードを入射した場合の反射パワーおよび透過パワーの軸ずれの大きさ b/w に対する依存性を示す．比較のために，同図では近軸近似 (PBC)[97] およびパデ近似 [98] に基づく境界条件を使用した場合の解析結果も示している．PBC 以外の解析結果は PML を使用した場合の解析結果と同等の結果が得られている．一方で，図 5.8 に示す TM 基本モードを入射した場合の解析結果では，従来の近似的な境界条件の場合では PML を使用した結果から大きく逸脱していることがわかる．パデ近似の場合，より高次数を使用した場合には特異点が増えることから解析が不安定になり，ブランチカットを使用したとしても不安定性を完全に解消できない．一方で本手法は，安定した解析が可能である．

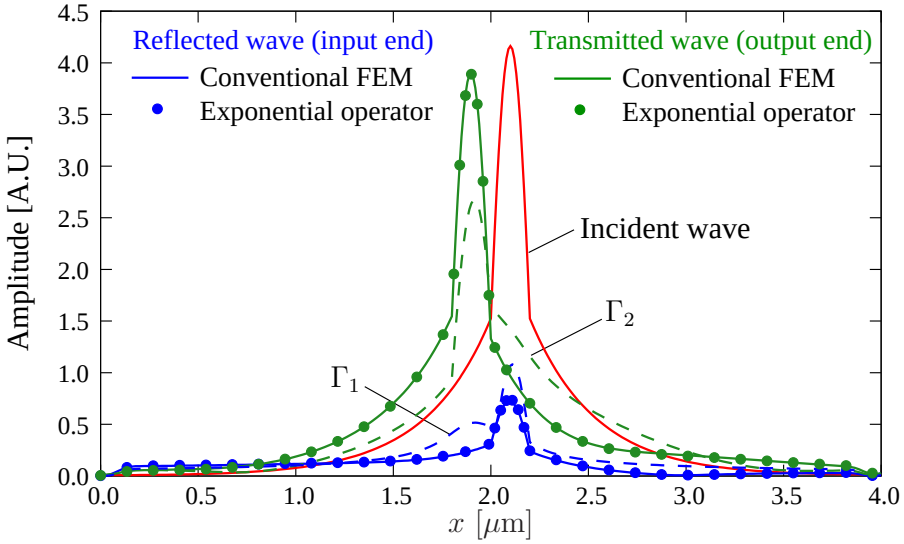


(a) TE 基本モード入射時の電界分布　　(b) TM 基本モード入射時の磁界分布

図 5.5: 図 5.4 の構造における電磁界分布

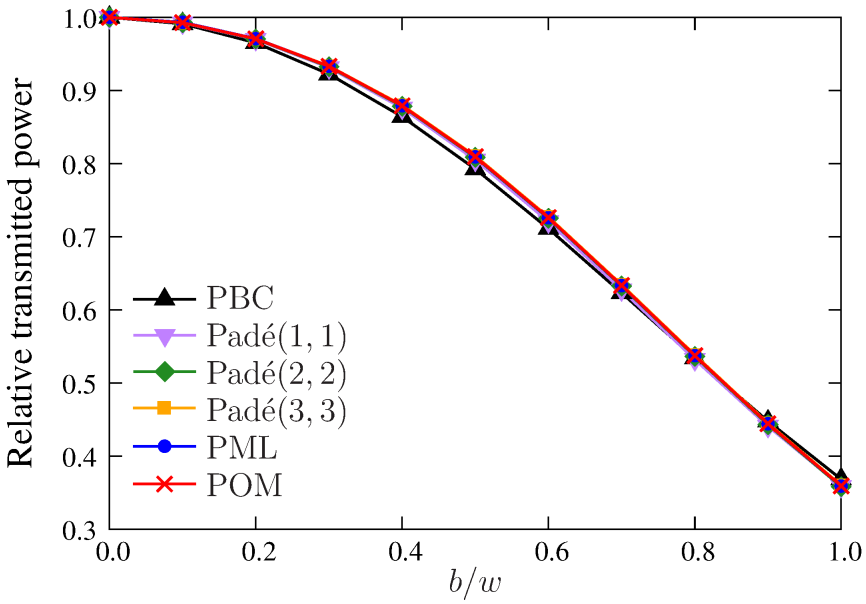


(a) TE 基本モード入射時の電界分布

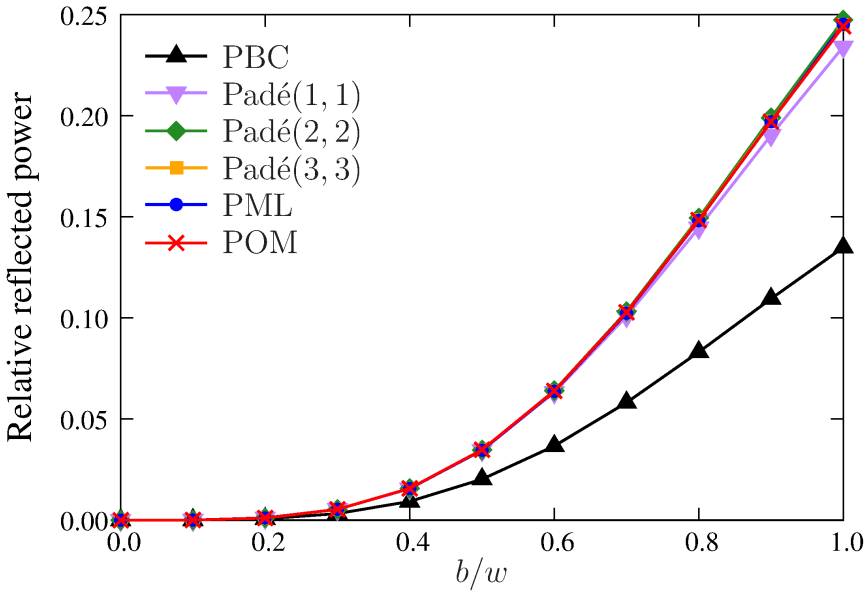


(b) TM 基本モード入射時の磁界分布

図 5.6: 図 5.4 の構造における横断面の電磁界分布

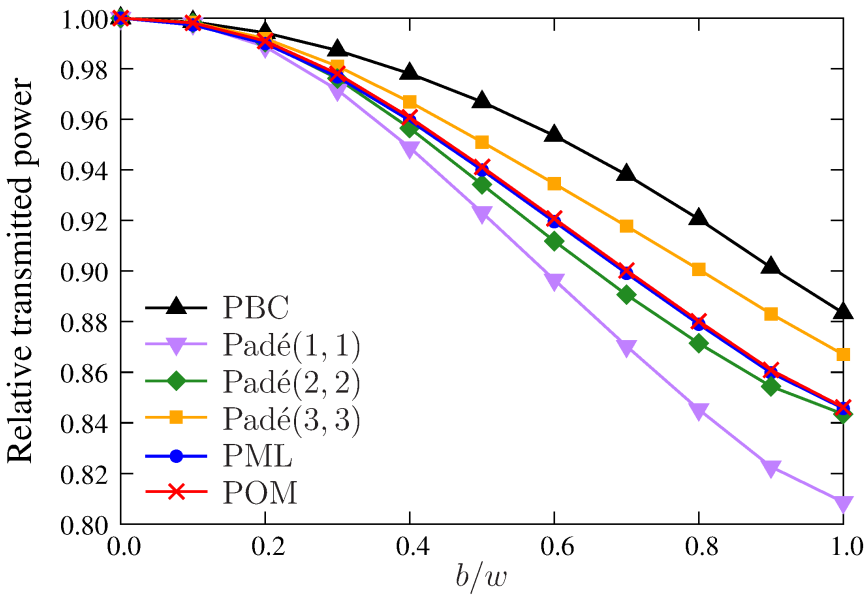


(a) 基本モード透過パワー

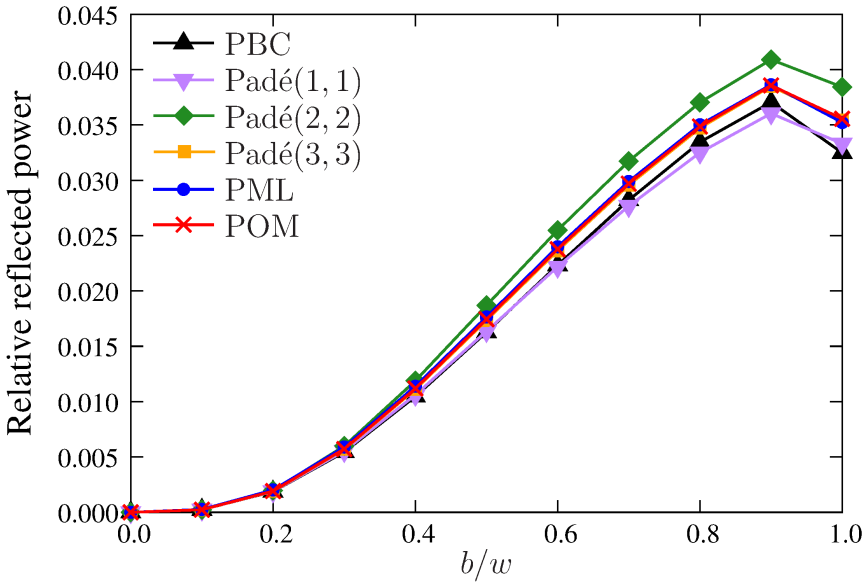


(b) 基本モード反射パワー

図 5.7: TE 基本モード入射時の透過・反射パワーの b/w 依存性



(a) 基本モード透過パワー



(b) 基本モード反射パワー

図 5.8: TM 基本モード入射時の透過・反射パワーの b/w 依存性

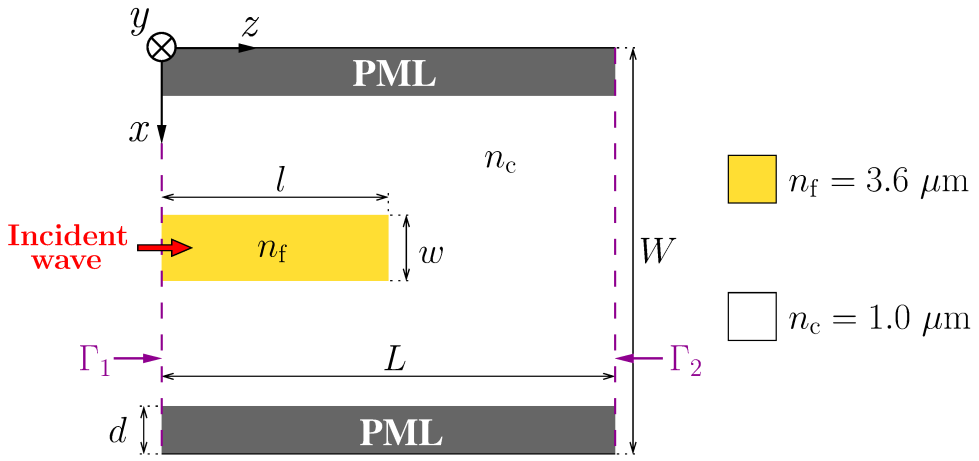
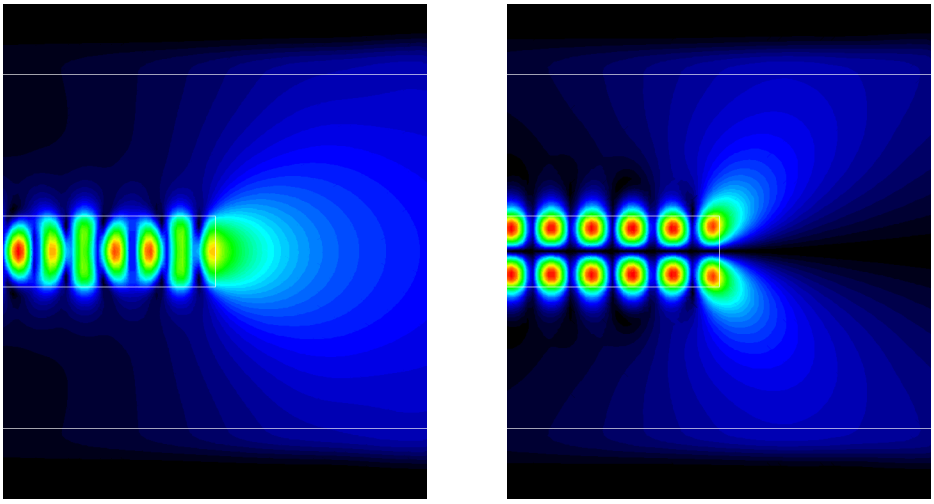


図 5.9: 導波路端における光の放射

5.3.2 導波路端における光の放射

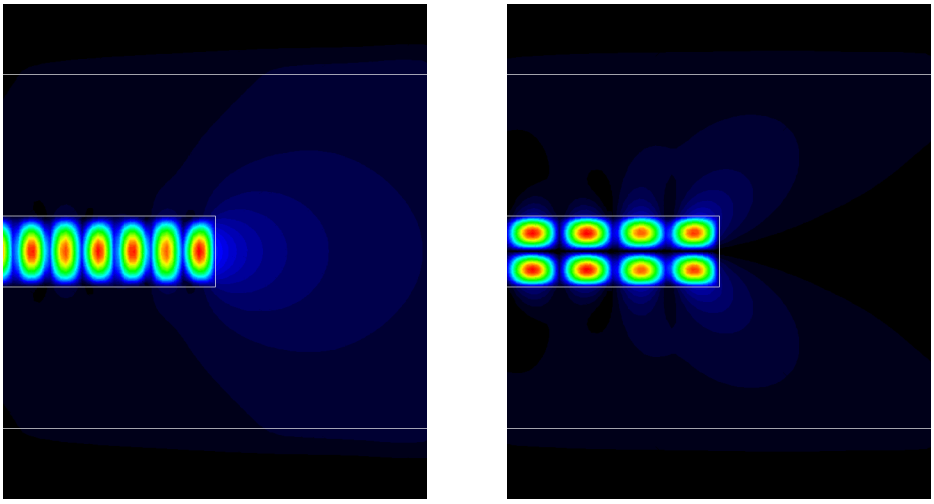
次に図 5.9 に示すような導波路端から光が放射する問題に対して本境界条件の有用性を確認する．屈折率を $n_f = 3.6$, $n_c = 1$ とし，構造パラメータを $L = 3\ \mu m$, $W = 3.5\ \mu m$, $l = 1.5\ \mu m$, $w = 0.5\ \mu m$, $d = 0.5\ \mu m$ とする．図 5.10 および図 5.11 に，それぞれ TE モード，TM モードを入射した場合の電磁界分布を示す．図には入射条件として動作波長 $\lambda = 1.55\ \mu m$ の (a) 基本モード，(b) 第 1 高次モードを設定する．導波路端において光が放射し，解析領域端まで広がっており，入出力ポートは適切に終端していることがわかる．この場合，出力ポートでは放射波が減衰し，平面波に近いモード形状となっているため，パデ近似による境界条件でも十分な解析精度を得ることが可能である．次に入出力ポート上で放射成分の適切な取扱いが必要な条件として，入出力ポートを導波路端面に近づけ，構造パラメータを $L = 0.2\ \mu m$，$l = 0.1 \mu m$ に変更した場合を考える．PML で終端する従来の FEM と計算効率について比較するため，図 5.12 に規格化反射パワーの伝搬方向の PML 厚さに対する依存性を示す．図より従来の FEM では十分な解析精度を得るためには $d_z = 0.12\ \mu m$ の PML 領域を確保する必要があることがわかる．この場合，解析領域全体の行列方程式の計算時間は従来の FEM で 2.64 秒であるのに対して，本手法では，伝搬方向の PML 領域を省くことで，0.603 秒まで短縮することが可能である．DBI 法による伝搬演算子の算出時間は 11 回の反復で 0.929 秒であることから，本境界条件を適用した FEM は従来の FEM よりも高速に解析が可能であると言える．加えて，伝搬演算子の算出は導波路内部の構造が変化しても，入出力ポートの構造が変化しない限り再計算の必要が無く，特に導波路の最適設計においてはより効率化が期待できる．

図 5.13 および図 5.14 にそれぞれ TE 基本モード，TM 基本モードを入射した場合に対する透過波および反射波の解析結果を示す．ここで基本モードと第一高次モードに対する反射・透過波を効率的に計算するために，散乱演算子を使用して式 (5.25)(5.26) により算出を行う．これにより一度散乱演算子を算出すれば，任意の入射波に対して連立一次方程式を解くことなく，反射波および透過波を行列積だけで計算可能である．図より，パデ境界条件では放射成分の解析精度が劣化しているのに対して，本手法は従来の PML を課した FEM の結果とよく一致していることがわかる．



(a) 基本モード　　(b) 第 1 高次モード

図 5.10: 図 5.9 の構造における TE モード入射に対する電界分布



(a) 基本モード　　(b) 第 1 高次モード

図 5.11: 図 5.9 の構造における TM モード入射に対する磁界分布

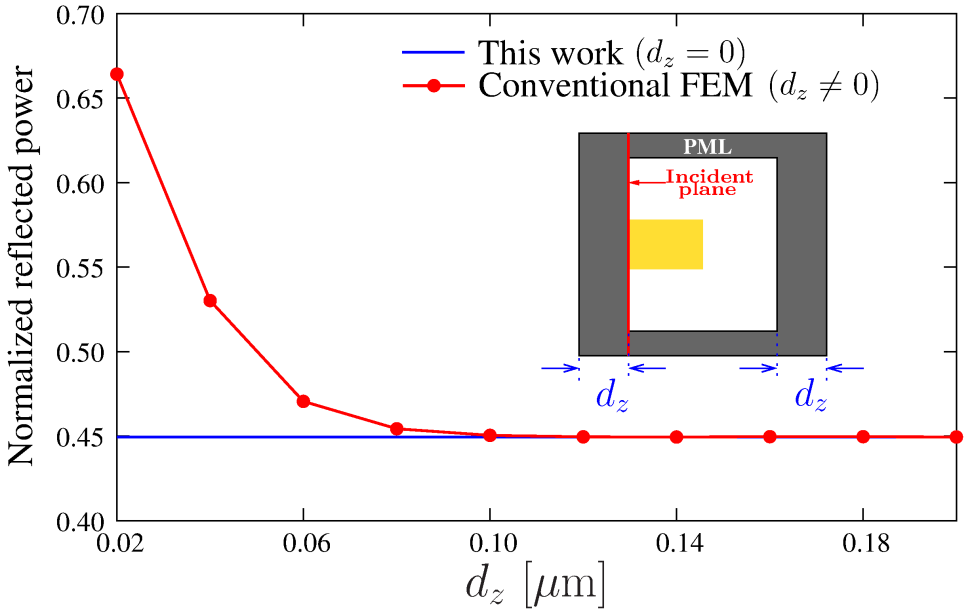
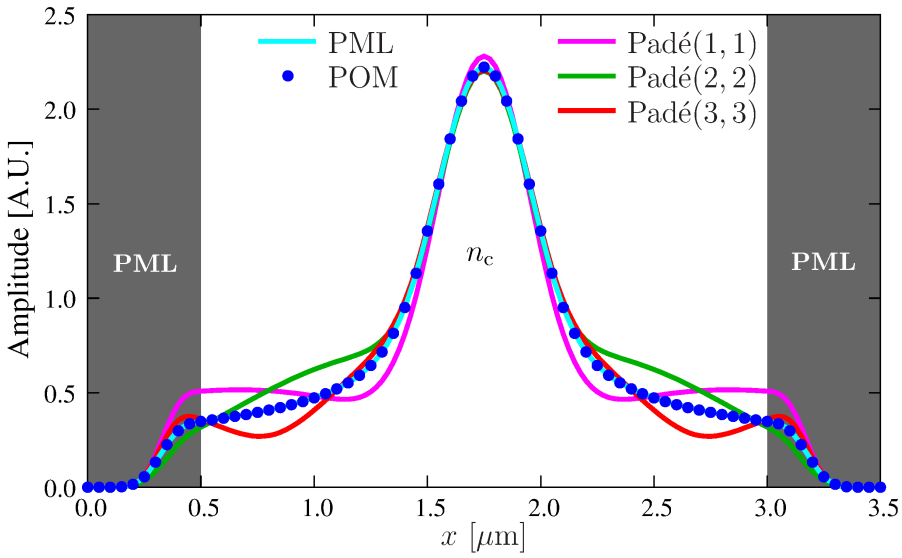
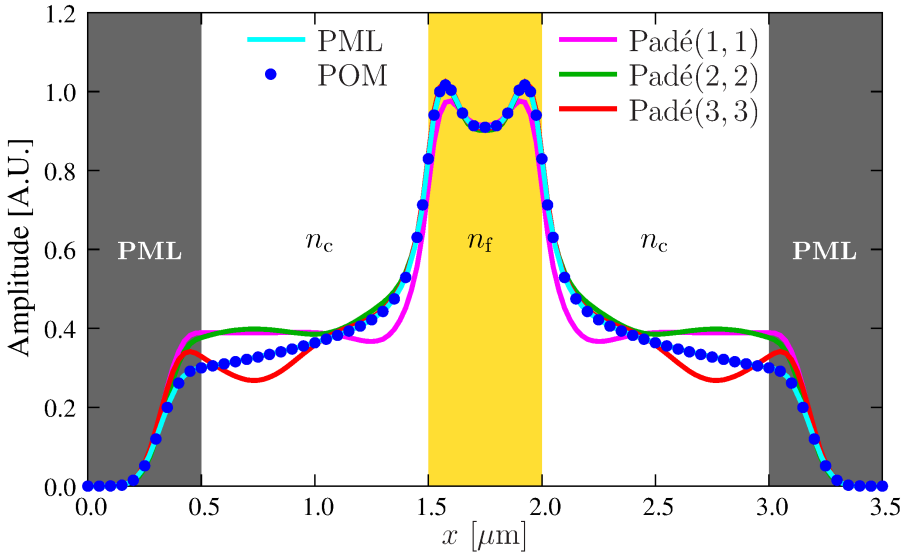


図 5.12: 規格化反射パワーの伝搬方向に沿った PML 厚さ依存性

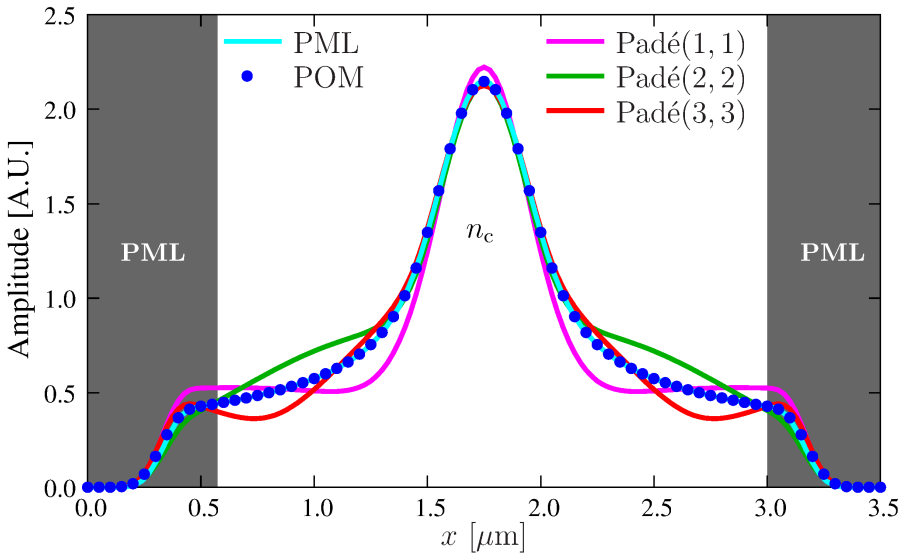


(a) 出力ポートにおける透過波

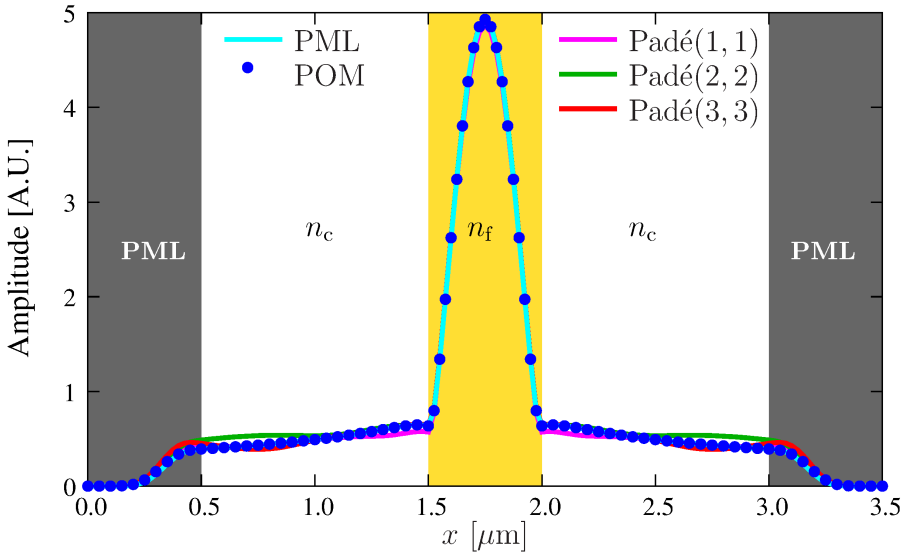


(b) 入力ポートにおける反射波

図 5.13: 図 5.9 の構造に対して TE 基本モードを入射した場合の横断面の電界分布



(a) 出力ポートにおける透過波



(b) 入力ポートにおける反射波

図 5.14: 図 5.9 の構造に対して TM 基本モードを入射した場合の横断面の電界分布

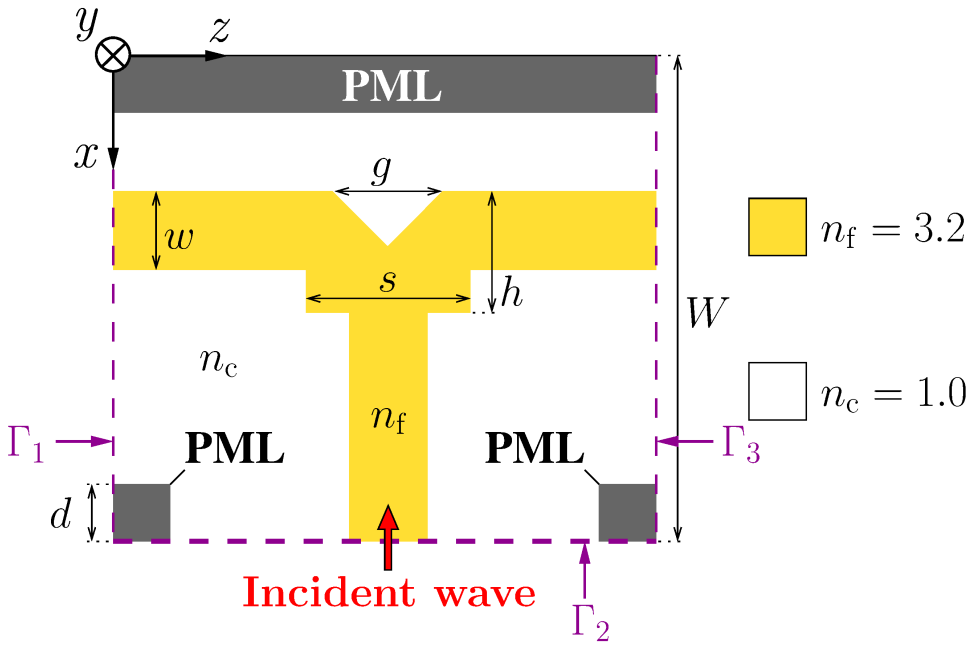


図 5.15: T 分岐導波路

5.3.3 T 分岐導波路

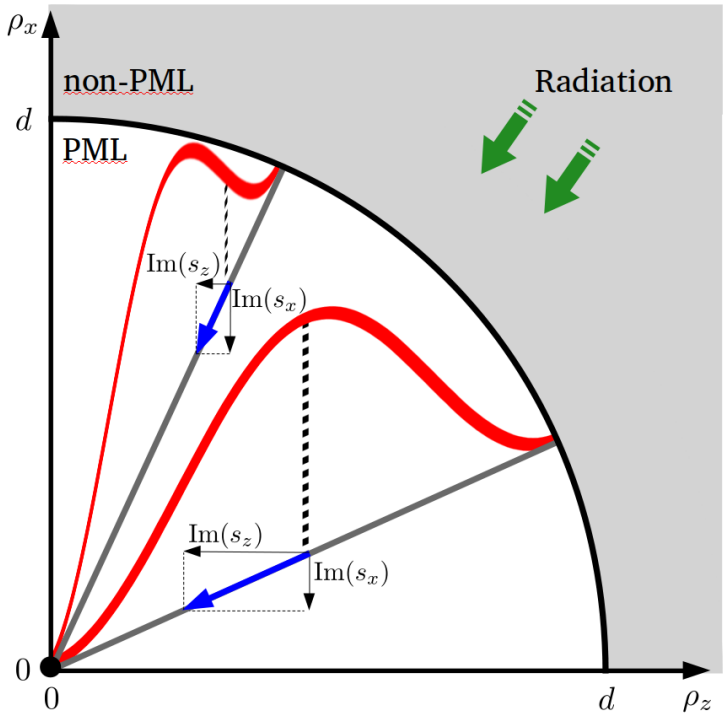
図 5.15 に示すような T 分岐導波路を考え，屈折率を $n_\mathrm{f} = 3.2$，$n_\mathrm{c} = 1.0$ とし，構造パラメータを $W = 5\ \mu\mathrm{m}$，$w = 0.2\ \mu\mathrm{m}$，$h = 0.66\ \mu\mathrm{m}$，$s = 1.44\ \mu\mathrm{m}$，$g = 0.87\ \mu\mathrm{m}$ とする．構造の対称性より Γ_2 から入射された電力は境界 Γ_1 および Γ_2 に等分配される．

文献 [98] ではパデ近似を用いた境界条件で T 分岐導波路の解析を行っているが，導波モードパワーの評価に放射波の影響が比較的小さいため，PML のストレッチングパラメータは入力ポートの両端で 1 に設定されている．しかしながら，放射成分を含めた解析を行うためには解析領域のあらゆる方向に伝搬する光波を評価するために，適切な吸収境界条件を課す必要がある．図 5.15 に示すように入力ポートの両端に従来の PML を使用する場合，インピーダンス整合条件を満たすことができないため，PML のストレッチングパラメータの分布を図 5.16 のように修正する．インピーダンス整合条件を満たすために，PML 領域の形状を角を中心とした円を考える．x 方向と z 方向の PML 係数の虚数部の比率 $|\mathrm{Im}(s_i)|$ $(i = x, z)$ は角に向かうベクトルの x 成分と z 成分の大きさの比率に対応させる．次に $|\mathrm{Im}(s_i)|$ は角からの距離が短くなるに連れて増加するが，角点は 2 つのポートで共有しているために s_x と s_z は同値である必要がある．したがって，ここでは吸収係数の大きさ s_l $(l = x, z)$ を角からの距離に関する cos 関数を使用し，次のように修正する．

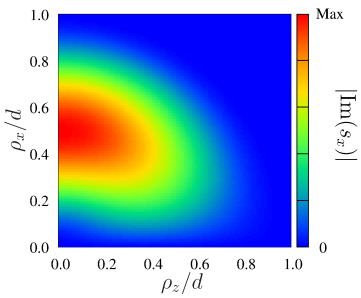
$$s_l = \begin{cases} 1 & \text{when } R_i > d \\ 1 - j\frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2\pi\frac{R_i}{d}\right)\right]\tan\delta_i\left(\frac{\rho_l}{R_i}\right) & \text{when } 0 \le R_i \le d \end{cases} \tag{5.39}$$

ここに R_i は角からの距離，ρ_l $(l = x, z)$ は図 5.16 に示すような局所座標系で表される．図 5.17(a) および (b) にそれぞれ，動作波長 $\lambda = 1.55\ \mu\mathrm{m}$ の TE 基本モードを入射した際の POM 境界条件および PML 境界条件を使用した場合の電界分布を示す．本手法では，従来手法と概ね一致しており，解析領域角に広がる放射成分による非物理的な反射は見られていない．図 5.18(a) および (b) にそ

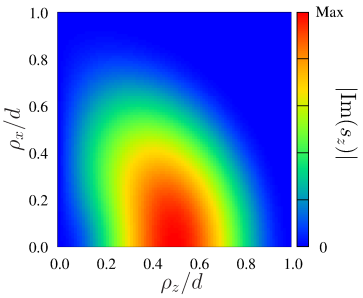
れぞれ，規格化反射パワーおよび規格化透過パワーの動作波長依存性を示しており，反射パワーは従来の PML による解析結果と本手法による解析結果がよく一致しているが，透過パワーはわずかに不一致が見られる．これは，角に向かう放射波が十分に吸収されておらずの導波モードに影響していると考えられるが，解析領域角の PML 領域のサイズを大きくすることでこの影響を抑圧することが可能である．またこの修正を行った解析領域角における PML では，図 5.9 の構造ように導波路端で放射が比較的大きい導波路構造などを扱う場合，角の放射の影響を抑圧するためには，PML 領域を非常に大きく確保する必要がある．そのため，PML の設定する半径と吸収係数は問題によって適切に選ぶ必要がある．



(a) 修正 PML の概要図

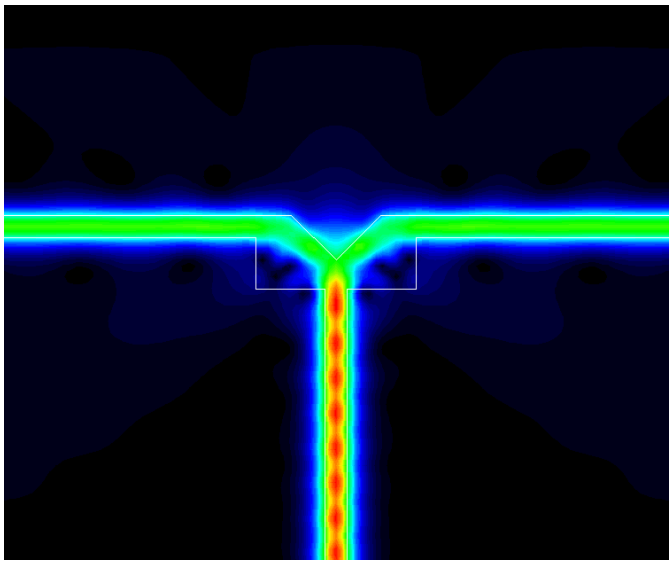


(b) $|\mathrm{Im}(s_x)|$ 分布

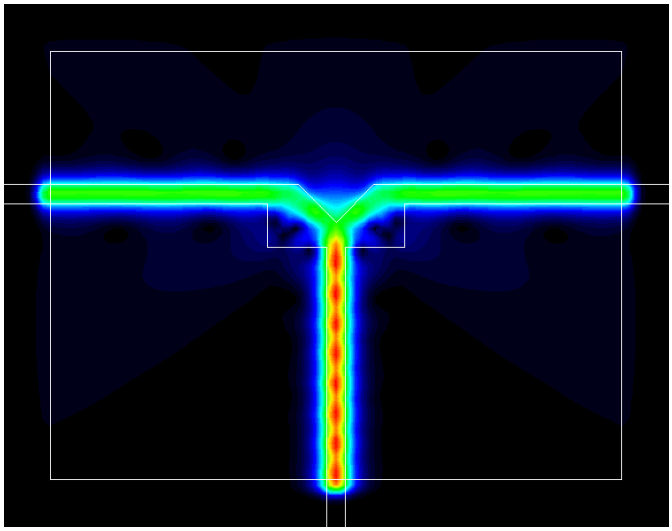


(c) $|\mathrm{Im}(s_z)|$ 分布

図 5.16: 解析領域角における修正 PML

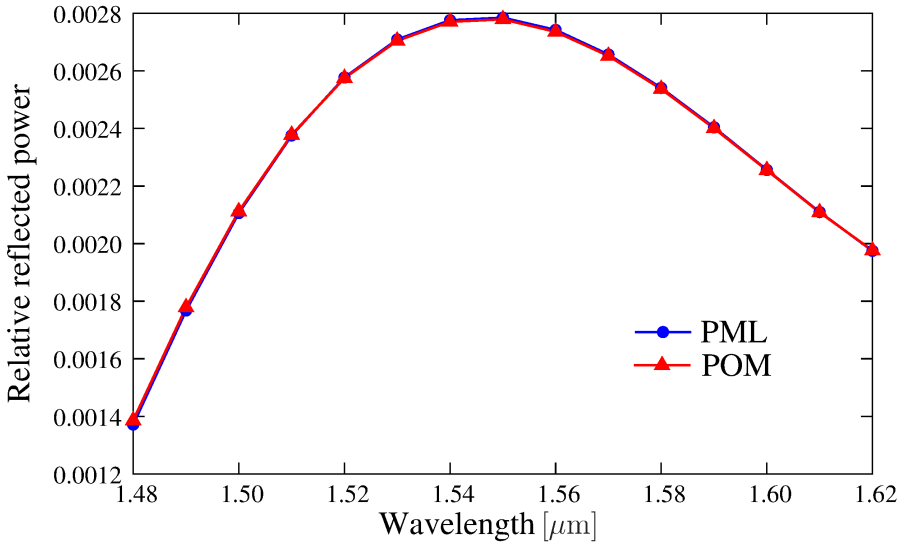


(a) POM 境界条件

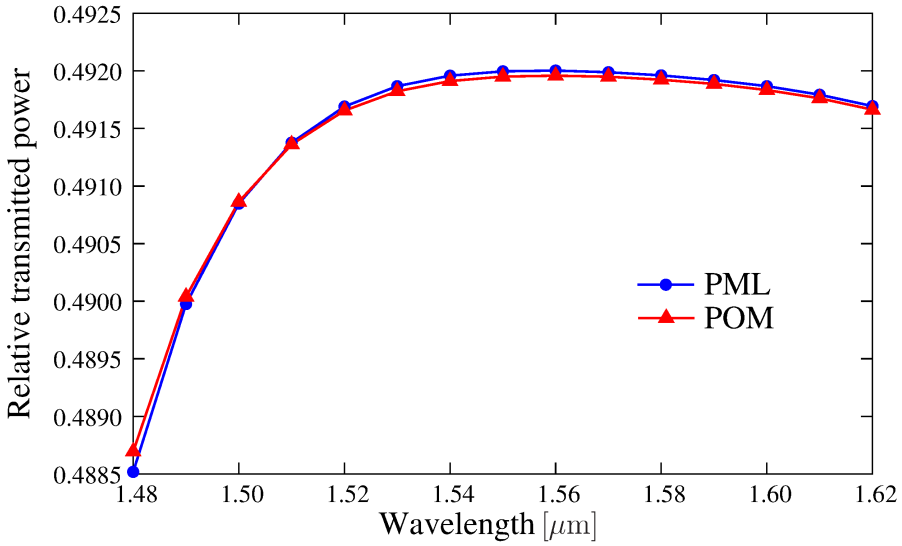


(b) PML 境界条件

図 5.17: 図 5.15 の構造に対して TE 基本モードを入射した場合の電界分布



(a) 反射パワー



(b) 透過パワー

図 5.18: 規格化反射・透過パワーの波長依存性

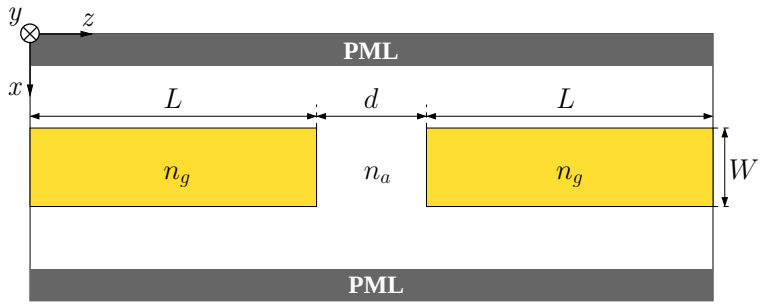
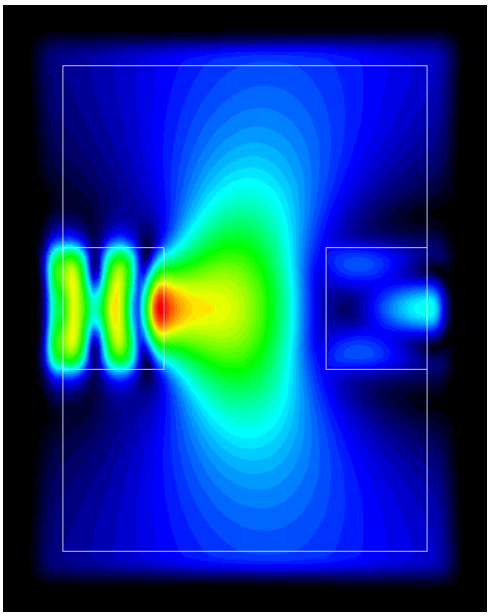


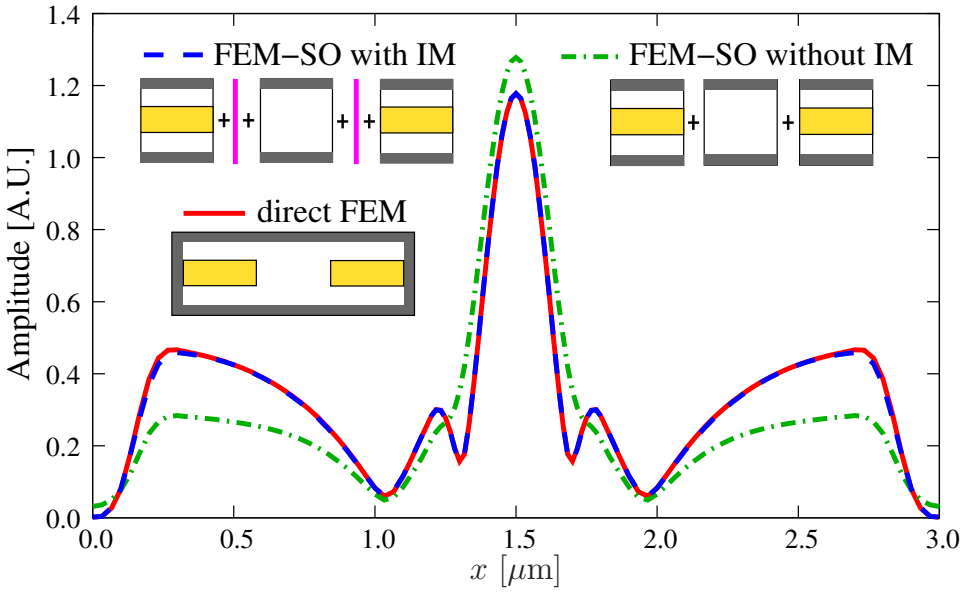
図 5.19: エアギャップを有する導波路構造

5.3.4 エアギャップを有する導波路構造

散乱演算子法の妥当性を確認するために，図 5.19 に示すような屈折率差の大きい強導波路のエアギャップ構造の解析を考え，屈折率を $n_g = 3.6$，$n_a = 1$，構造パラメータを $W = 0.6\ \mu\mathrm{m}$，$L = 0.5\ \mu\mathrm{m}$ とする．前章で示した BPM と POM の結合解法では，図の構造はエアギャップで生じる放射成分の影響が大きいため，十分な精度を維持することが困難であることを示している．全体解析領域を伝搬方向に構造が変化しない領域で 3 分割する．ここでは式 (5.34) に示した接続行列の有用性を確認するために，3 つの領域に関する散乱行列を単に接続を行って解析する場合と，2 つの接続部に関する散乱行列を加えた 5 つの散乱行列を接続して解析を行う場合で比較検討を行う．図 5.20 にエアギャップの距離を $d = 0.8\ \mu\mathrm{m}$ として，動作波長 $\lambda = 1.55\ \mu\mathrm{m}$ の TE 基本モードを入射した場合の電界分布を示す．解析領域は $3\ \mu\mathrm{m}$ とし PML の厚さを $0.3\ \mu\mathrm{m}$ とする．図 5.20(a) に従来の FEM で解析を行って得られた電界分布を示しており，様々な放射波がエアギャップにより励起され，出力ポートまで到達していることがわかる．従来の FEM では，入出力ポートを終端するために PML を伝搬方向の界面にも課す必要があり，計算コストが増大する．出力ポートの断面の電磁界振幅を図 5.20(b) に示す．FEM-SO で算出した振幅は直接 FEM 解析を行った結果とよく一致しているが，接続行列を使用しない場合では精度ん劣化が見られる．実際の解析問題では，本手法では導波路構造を任意の断面で分割することが可能であるため，構造が連続となる断面で分割するように調整することで接続行列を使用せずに済む．図 5.21 に規格化反射・透過パワーのエアギャップの距離に対する依存性を示しているが，本手法の結果は FEM の結果とよく一致している．



(a) FEM 解析による伝搬界分布



(b) 出力ポート上の透過振幅

図 5.20: 図 5.19 の構造における TE 基本モードを入射した場合の電界分布 ($d = 0.8\ \mu$m)

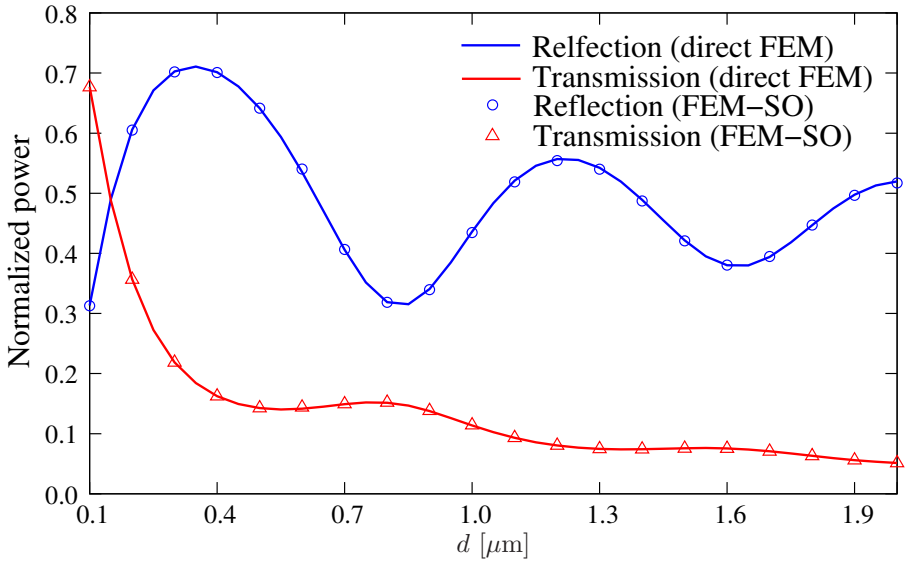


図 5.21: 規格化反射・透過パワーのギャップ長 d 依存性

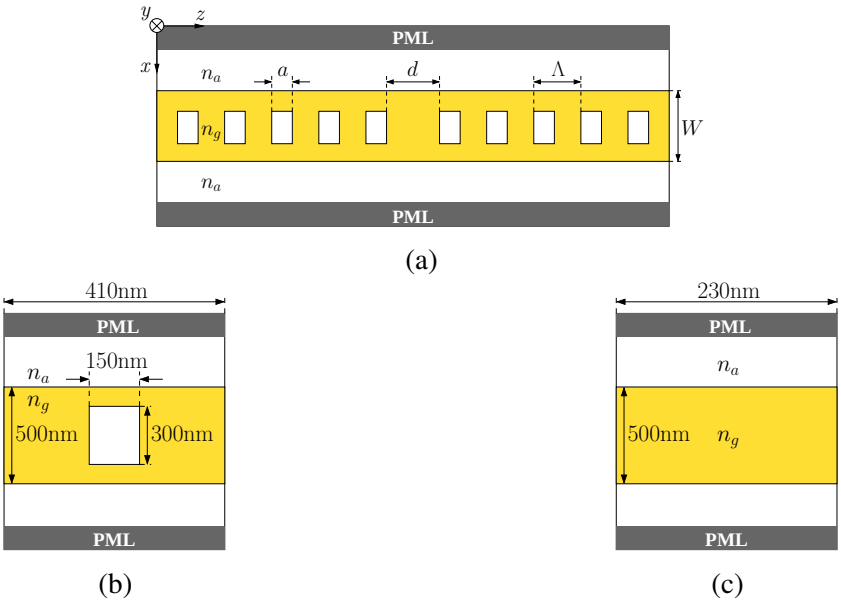
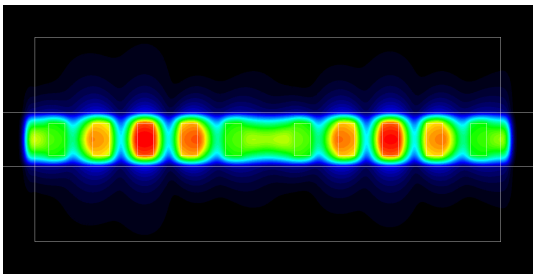


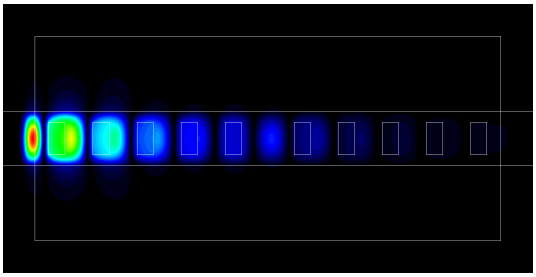
図 5.22: 1 次元フォトニック結晶 Fabry-Perót キャビティフィルタ; (a) 全体構造; (b)(c) 散乱演算子を構成する単位構造

5.3.5　1 次元フォトニック結晶 Fabry-Pérot キャビティフィルタ

図 5.22(a) に示すように，1 次元フォトニック結晶構造の Fabry-Pérot キャビティフィルタの解析を行う．屈折率を $n_g = 2.75$，$n_g = 1$ とし，構造パラメータを $a = 150$ nm, $d = 490$ nm, $\Lambda = 410$ nm, $W = 500$ nm とする．周期構造の場合，1 周期のみの散乱行列を構成すればよいため，計算コストを大幅に軽減することができる．ここでは，散乱行列を不連続部で接続することを避けるため，図 5.23(b) および (c) に示すような 2 つの構造に対する散乱行列を構成する．この解析例では，10 回のスター積の計算により全体構造の特性を算出することが可能であるが，周期性を利用して接続することで，5 回のスター積の計算まで計算量を減らす事ができる．図 5.23 に TM 基本モード入射に対する波長 $\lambda = 1.85\ \mu$m と $\lambda = 1.55\ \mu$m の場合の磁界分布を示しており，光の共振の様子が分かる．また図 5.24 に反射および透過のパワースペクトルを示しており，従来の有限要素法の解析結果と本手法がよく一致していることが分かる．



(a)



(b)

図 5.23: 図 5.22 の構造における TM 基本モードを入射した場合の磁界分布: (a)$\lambda = 1.85\ \mu$m; (b)$\lambda = 1.55\ \mu$m.

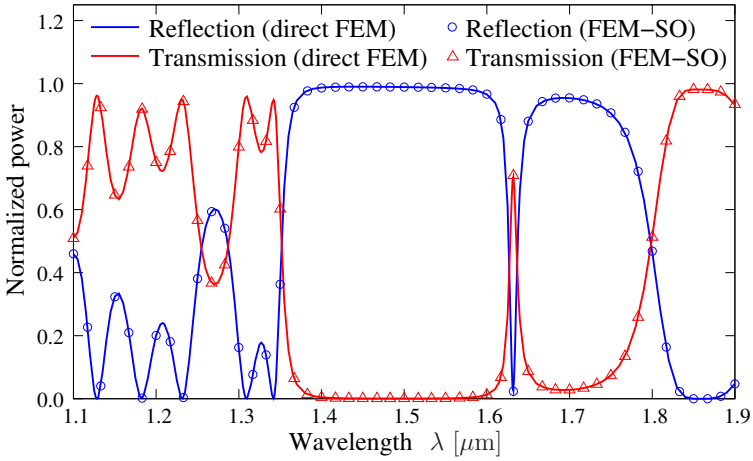


図 5.24: 規格化反射・透過パワーの動作波長 λ 依存性.

第6章　結　　論

本論文では，光導波路デバイスの効率的な解析手法として，有限要素法を基礎に，任意形状の伝搬波を効率的に計算可能な伝搬演算子を使用した解析手法を開発した．

第 3 章では，まず，有限要素メッシュを使用した導波路構造の離散化による構造適合性・汎用性の向上，および DBI 法による効率的な伝搬演算子の算出を行うための，2 次元および 3 次元フルベクトル波解析における伝搬演算子法の定式化を行った．本解析手法を導波路不連続問題の解析に適用し，コアとクラッドの屈折率差が大きい強導波路，プラズモニック導波路に対して，不連続断面の離散化のみで精度のよい解析が行えることを確認した．

第 4 章では，複数の不連続点を有する光導波路を効率的に解析を行うことを目的として，伝搬演算子法とビーム伝搬法の結合解法を開発した．本解析手法を 2 次元導波路の伝搬解析に適用し，ビーム伝搬法の解析精度が維持可能である，比較的電磁界の伝搬角度が狭い場合に，不連続部を含めた導波路構造の高精度な解析が可能であることを確認した．一方，強導波路やプラズモニック導波路では，放射波やエバネッセント波の影響が大きいためにビーム伝搬解析の過程で精度が劣化する場合がある．これに対して，線形フィルタを活用し導波モードの伝送に寄与しないモード成分を抑圧することで，精度の改善が可能であることを示した．

第 5 章では，任意の構造で形成される光導波路を効率的に解析することを目的として，従来の FEM の境界処理で使用される PML を使用しないことで解析領域サイズを縮小すること，および任意の全体解析領域を部分領域に分割して解析するための，伝搬演算子を使用した境界条件の適用および散乱演算子法の開発を行った．本解析手法を 2 次元導波路の伝搬解析に適用し，境界条件としては，導波路不連続構造によって大きく放射する光波を適切に扱うことが可能であり，従来のパデ近似による境界条件よりも，高精度に解析領域を終端できることを確認した．また散乱演算子法としては，強導波路の不連続構造に対して精度よく解析が可能であり，1 次元フォトニック結晶の周期構造において，1 周期のみの散乱行列の構築で効率的に解析が行えることを確認した．

以上，本研究では光導波路解析法について一貫して伝搬演算子を使用することによる効率化の方法論を示した．本手法は有限要素法に基づいて解析領域を離散化するため，様々な導波路構造に対して汎用性が高く，光デバイスの最適設計の効率化に大きく寄与することが可能であると考えられる．今後の高性能光デバイスの開発の展望としては，3 次元光導波路のより自由度の高い設計が求められると推測される．したがって，第 4 章および第 5 章で示した伝搬解析手法を 3 次元問題に拡張することが望まれる．ただし 3 次元フルベクトル波解析の課題として，第 3 章で示されるように，PML を課した場合にはスプリアス解が生じる問題が挙げられ，これを解消することが必要となる．また，大規模回路の設計には，第 5 章で示した散乱演算子法を使用した分割設計法が有用と考えられるが．その際，分割方向の任意性を向上可能か，実用的な計算時間とメモリ使用量で解析可能かどうかなど，いくつかの課題が考えられる．

参考文献

[1] Z. Hu and Y. Y. Lu, "Computing optimal waveguide bends with constant width," *J. Lightw. Technol.*, vol. 25, no. 10, pp. 3161-3167, Oct. 2007.

[2] W. Bogaerts and S. K. Selvaraja, "Compact single-mode silicon hybrid rib/strip waveguide with adiabatic bends," *IEEE Photon. J.*, vol. 3, no. 3, pp. 422-432, Jun. 2011.

[3] T. Chen, H. Lee, J. Li, and K. J. Vahala, "A general design algorithm for low optical loss adiabatic connections in waveguides," Opt. Express, vol. 20, no. 20, pp. 22819-22829, Sep. 2012.

[4] H. Chen and A. W. Poon, "Low-loss multimode-interference-based crossings for silicon wire waveguide," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 18, no. 21, pp. 2260-2262, Nov. 2006.

[5] P. J. Bock, P. Cheben, J. H. Schmid, J. Lapointe, A. Delâge, D.-X. Xu, S. Janz, A. Densmore, and T. J. Hall, "Subwavelength grating crossings for silicon wire waveguides," *Opt. Express*, vol. 18, no. 15, pp. 16146-16155, Jul. 2010.

[6] H.-L. Han, H. Li, X.-P. Zhang, A. Liu, T.-Y. Lin, Z. Chen, H.-B. Lv, M.-H. Lu, X.-P. Liu, and Y.-F. Chen, "High performance ultra-compact SOI waveguide crossing," *Opt. Express*, vol. 26, no. 20, pp. 25602-25610, Oct. 2018.

[7] B. Shen, P. Wang, R. Polson, and R. Menon, "An integrated-nanophotonics polarization beamsplitter with $2.4 \times 2.4\ \mu\mathrm{m}^2$ footprint," *Nature Photon.*, vol. 9, pp. 378-382, Jun. 2015.

[8] X. Guan, H. Wu, Y. Shi, L. Wosinski, and D. Dai, "Ultracompact and broadband polarization beam splitter utilizing the evanescent coupling between a hybrid plasmonic waveguide and a silicon nanowire," *Opt. Lett.*, vol. 38, no. 16, pp. 3005-3008, Aug. 2013.

[9] L. B. Soldano, A. H. de. Vreede, M. K. Smit, B. H. Verbeek, E. G. Metaal,and F. H. Green, "Mach–Zehnder interferometer polarization splitter in InGaAsP/InP," *IEEE Photon. Lett.*, vol. 6, no. 3, pp. 402-405, Mar. 1994.

[10] D. Dai, Z. Wang, J. Peters, and J. E. Bowers, "Compact polarization beamsplitter using an asymmetrical Mach–Zehnder interferometer based on silicon-on-insulator waveguides," *IEEE Photon. Techonl. Lett.*, vol. 24, no. 8, pp. 673-675, Jan. 2012.

[11] L. Xu, Y. Wang, A. Kumar, D. Patel, E. El-Fily, Z. Xing, R. Li, and D. V. Plant, "Polarization beam splitter based on MMI coupler with SWG birefringence engineering on SOI," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 30, no. 4, pp. 403-406, Feb. 2018.

[12] M. R. Watts and H. A. Haus, "Integrated mode-evolution-based polarization rotators," *Opt. Lett.*, vol. 30, no. 2, pp. 138-140, Jan. 2005.

[13] H. Okayama, Y. Onawa, D. Shimura, H. Yaegashi, and H. Sasaki, "Polarization rotation Bragg grating using Si wire waveguide with non-vertical sidewall," *Opt. Express*, vol. 22, no. 25, pp. 31371-31378, Dec. 2014.

[14] M. Aamer, Ana M. Gutierrez, A. Brimont, D. Vermeulen, G. Roelkens, J.-M. Fedeli, A. Håkansson, and P. Sanchis, "CMOS compatible silicon-on-insulator polarization rotator based on symmetry breaking of the waveguide cross section," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 24, no. 22, pp. 2031-2034, Nov. 2012.

[15] A. V. Velasco, M. L. Calvo, P. Cheben, A. O.-Moñux, J. H. Schmid, C. A. Ramos, Í. M. Fernandez, J. Lapointe, M. Vachon, S. Janz, and D.-X. Xu, "Ultracompact polarization converter with a dual subwavelength trench built in a silicon-on-insulator waveguide," *Opt. Lett.*, vol. 37, no. 3, pp. 365-367, Feb. 2012.

[16] Y. Fei, L. Zhang, T. Cao, Y. Cao, and S. Chen, "High efficiency broadband polarization converter based on tapered slot waveguide," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 25, no. 9, pp. 879-881, May 2013.

[17] L. Jin, Q. Chen, and L. Wen, "Mode-coupling polarization rotator based on plasmonic waveguide," *Opt. Lett.*, vol. 39, no. 9, pp. 2798-2801, May 2014.

[18] T. Uematsu, Y. Ishizaka, and Y. Kawaguchi, K. Saitoh, and M. Koshiba, "Design of a compact two-mode multi/demultiplexer consisting of multi-mode interference waveguides and a wavelength-insensitive phase shifter for mode-division multiplexing transmission," *J. Lightw. Technol.*, vol. 30, no. 15, pp. 2421-2426, May. 2012.

[19] J. Wang, S. He, and D. Dai,,"On-chip silicon 8-channel hybrid (de)multiplexer enabling simultaneous mode-and polarization-division-multiplexing," Laser Photon. Rev., vol. 8, no. 2, pp. 18-22, Jan. 2014.

[20] H. Qiu, H. Yu, T. Hu, G. Jiang, H. Shao, P. Yu, J. Yang, and X. Jiang, "Silicon mode multi/demultiplexer based on multimode grating-assisted couplers," *Opt. Express*, vol. 21, no. 15, pp. 17904-17911, July 2013.

[21] H. Xiao, Z. Liu, Xu Han, Jianhong Yang, Guanghui Ren, Arnan Mitchell, and Yonghui Tian, "On-chip reconfigurable and scalable optical mode multi-plexer/demultiplexer based on three-waveguide-coupling structure," *Opt. Express*, vol. 26, no. 17, pp. 22366-22377, Jun. 2018.

[22] C. W. Trowbridge and J. K. Sykulski, "Some key developments in computational electromagnetics and their attribution," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 503-508, Apr. 2006.

[23] P. Sumithra and D. Thiripurasundari, "A review on computational electromagnetics methods," *Adv. Electromagn.*, vol. 6, no. 1, Mar. 2017.

[24] J. S. Jensen and O. Sigmund, "Systematic design of photonic crystal structures using topology optimization: Low-loss waveguide bends," *Appl. Phys.*, vol. 84, no. 12, pp. 2022-2024, 2004.

[25] P. I. Borel, A. Harpøth, L. H. Frandsen, M. Kristensen, "Topology optimization and fabrication of photonic crystal structures," *Opt. Express*, vol. 12, no. 9, pp. 1996-2001, May 2004.

[26] J. S. Jensen, O. Sigmund, L. H. Frandsen, P. I. Borel, A. Harpøth, and M. Kristensen, "Topology design and fabrication of an efficient double 90 photonic crystal waveguide bend," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 17, no. 6, pp. 1202-1204, June 2005.

[27] P. I. Borel, L. H. Frandsen, A. Harpøth, M. Kristensen, J. S. Jensen, and O. Sigmund, "Topology optimised broadband photonic crystal Y-splitter," *Electron. Lett.*, vol. 41, no. 2, pp. 69-71, Jan. 2005.

[28] Y. Tsuji, K. Hirayama, T. Nomura, K. Sato, S. Nishiwaki, "Design of optical circuit devices based on topology optimization," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 18, no. 7, pp. 850-852, Apr. 2006.

[29] Y. Tsuji and K. Hirayama, "Design of optical circuit devices using topology optimization method with function-expansion-based refractive index distribution," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 20, no. 12, pp. 982-984, June 2008.

[30] T. Yasui, Y. Tsuji, J. Sugisaka, and K. Hirayama, "Design of three-dimensional optical circuit devices by using topology optimization method with function-expansion-based refractive index distribution," *J. Lightw. Technol.*, vol. 31, no. 23, pp. 3765-3770, Dec. 2013.

[31] Z. Zhang, Y. Tsuji, T. Yasui, and K. Hirayama, "Design of ultra-compact triplexer with function-expansion based topology optimization," *Opt. Express*, vol, 23, no. 4, pp. 3936-3950, Feb. 2015.

[32] R. Matzen, J. S. Jensen, and O. Sigmund, "Systematic design of slow-light photonic waveguides," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 28, no. 10, pp. 2374-2382, 2011.

[33] L. H. Frandsen, Y. Elesin, L. F. Frellsen, M. Mitrovic, Y. Ding, O. Sigmund, and K. Yvind, "Topology optimized mode conversion in a photonic crystal waveguide fabricated in silicon-on-insulator material," *Opt. Express*, vol. 22, no. 7, pp. 8525-8532, 2014.

[34] J. Lu and J. Vučković, "Nanophotonic computational design," *Opt. Express*, vol. 21, no. 11, pp. 13351-13367, 2013.

[35] A. Iguchi, Y. Tsuji, T. Yasui, and K. Hirayama, "Topology optimization of optical waveguide devices based on beam propagation method with sensitivity analysis," *J. Lightw. Technol.*, vol. 34, no. 18, pp. 4214-4220, Sept. 2016.

[36] A. Iguchi, Y. Tsuji, T. Yasui, and K. Hirayama, "Efficient topology optimization of optical waveguide devices utilizing semi-vectorial finite-difference beam propagation method," *Opt. Express*, vol. 25, no. 23, pp. 28210-28222, Nov. 2017.

[37] A. Iguchi, Y. Tsuji, T. Yasui, and K. Hirayama, "Topology optimal design for optical waveguides using time domain beam propagation method," *IEICE Electron. Express*, vol. 15, no. 11, pp. 1-7, 2018.

[38] A. Iguchi, Y. Tsuji, T. Yasui, and K. Hirayama, "Efficient shape and topology optimization based on sensitivity analysis for optical waveguide devices utilizing full-vectorial BPM," *J. Lightw. Technol.*, vol. 38, no. 8, Apr. 2020.

[39] M. Koshiba and Y. Tsuji, "Curvilinear hybrid edge/nodal elements with triangular shape for guided-wave problems," *J. Lightw. Technol.*, vol. 18, no. 5, pp. 737-743, May 2000.

[40] R. D. Graglia, D. R. Wilton, and A. F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 3, pp. 329-342, Mar. 1997.

[41] G. Mur and A. D. Hoop, "A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media," *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-21, no. 6, pp. 2188-2191, Nov. 1985.

[42] Y. Ohkawa, Y. Tsuji, and M. Koshiba, "Analysis of anisotropic dielectric grating diffraction using the finite-element method," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 13, no. 5, pp. 1006-1012, May 1996.

[43] Y. P. Chiou and H. C. Chang, "Analysis of optical waveguide discontinuities using Padé approximants," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 9, no. 7, pp. 964-966, July 1997.

[44] K. Kawano, T. Kitoh, M. Kohtoku, T. Takeshita, and Y. Hasumi, "3-D semivectorial analysis to calculate facet reflectivities of semiconductor optical waveguides based on the bi-directional method of line BPM (Mol-BPM)," *IEEE Photon. Technol.*, vol. 10, no. 1, pp. 108-110, Jan. 1998.

[45] K. Kawano, T. Kitoh, M. Kohtoku, T. Ito, and Y. Hasumi, "Bidirectional finite-element method-of-line beam propagation method (FE-MoL-BPM) for analyzing optical waveguides with discontinuities," *IEEE Photon. Technol.*, vol. 10, no. 2, pp. 244-245, Feb. 1998.

[46] S. S. A. Obayya, "Novel finite element analysis of optical waveguide discontinuity problems," *J. Lightw. Technol.*, vol. 22, no. 5,pp. 1420-1425, May 2004.

[47] H. Zhang, Q. Guo, and W. P. Huang, "Analysis of waveguide discontinuities by a fourth-order finite-difference reflective scheme," *J. Lightw. Technol.*, vol. 25, no. 2, pp. 556-561, Feb. 2007.

[48] H. A. Jamid and Z. M. Khan, "3-D full-vectorial analysis of strong otical waveguide discontinuities using Padé approximants," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 43, no. 4, pp. 343-349, Apr. 2007.

[49] H. El-Refaei, I. Betty, and D. Yevick, "The application of complex Padé approximants to reflection at optical waveguide facets," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 12, no. 2, pp. 158-160, Feb. 2000.

[50] N.-N. Feng and W.-P. Huang, "A field-based numerical method for three-dimensional analysis of optical waveguide discontinuities," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 39, no. 12, pp. 1661-1665, Dec. 2003.

[51] S. Wu, J. Xiao, and X. Sun, "Full-vectorial analysis of optical waveguide discontinuities using Denman-Beavers iterative scheme," *J. Lightw. Technol.*, vol. 33, no. 2, pp. 511-518, Jan. 2015.

[52] H. Derudder, F. Olyslager, D. D. Zutter, and S. V. D. Berghe, "Efficient mode-matching analysis of discontinuities in finite planar substrates using perfectly matched layers," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 49, no. 2, pp. 185-195, Feb. 2001.

[53] J. Mu and W.-P. Huang, "Simulation of three-dimensional waveguide discontinuities by a full-vector mode-matching method based on finite-difference schemes," *Opt. Express*, vol. 16, no. 22, pp. 18152-18163, Oct. 2008.

[54] H. Liang, J. Mu, R. A. Soref, X. Li, and W.-P. Huang, "An optical mode-matching method with improved accuracy and efficiency," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 51, no. 2, #6100108, Feb. 2015.

[55] G. Veronis and S. Fan, "Theoretical investigation of compact couplers between dielectric slab waveguides and two-dimensional metal-dielectric-metal plasmonic waveguides," *Opt. Express*, vol. 15, no. 3, pp. 1211-1221, Jan. 2007.

[56] J. Tian, S. Yu, W. Yan, and M. Qiu, "Broadband high-efficiency surface-plasmon-polariton coupler with silicon-metal interface," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 95, no. 1, 013504, 2009.

[57] M. Kang, J. Park, I.-M. Lee, and B. Lee, "Floating dielectric slab optical interconnection between metal-dielectric interface surface plasmon polariton waveguides," *Opt. Express*, vol. 17, no. 2, pp. 676-687, Jan. 2009.

[58] R. A. Wahsheh, Z. Lu, and M. A. G. Abushagur, "Nanoplasmonic couplers and splitters," *Opt. Express*, vol. 17, no. 21, pp. 19033-19040, Oct. 2009.

[59] R. A. Wahsheh, Z. Lu, and M. A. G. Abushagur, "Nanoplasmonic directional couplers and Mach-Zehnder interferometers," *Opt. Commun.*, vol. 282, no. 23, pp. 4622-4626, Aug. 2009.

[60] B. Lau, M. A. Swillam, and A. S. Helmy, "Hybrid orthogonal junctions: wideband plasmonic slot-silicon waveguide couplers," Opt. Express, vol. 18, no. 26, pp. 27048-27059, Dec. 2010.

[61] S.-Y. Lee, J. Park, M. Kang, and B. Lee, "Highly efficient plasmonic interconnector based on the asymmetric junction between metal-dielectric-metal and dielectric slab waveguides," *Opt. Express*, vol. 19, no. 10, pp. 9562-9574, May 2011.

[62] C.-T. Chen, X. Xu, A. Hosseini, Z. Pan, H. Subbaraman, X. Zhang, and R. T. Chen, "Design of highly efficient hybrid Si-Au taper for dielectrix strip waveguide to plasmonic slot waveguide mode converter," *J. Lightw. Technol.*, vol. 33, no. 2, pp. 535-540, Jan. 2015.

[63] D. Kong and M. Tsubokawa, "Evaluation of slot-to-slot coupling between dielectric slot waveguides and metal-insulator-metal slot waveguides," *Opt. Express*, vol. 23, no. 15, pp. 19082-19091, July 2015.

[64] R. A. Wahsheh and M. A. G. Abushagur, "Experimental and theoretical investigations of an air-slot coupler between dielectric and plasmonic waveguides," *Opt. Express*, vol. 24, no. 8, pp. 8237-8242, Apr. 2016.

[65] C. Huang, C. M. E. Sterke, and A. Tuniz, "Simple model for orthogonal and angled coupling in dielectric-plasmonic waveguides," *Opt. Express*, vol. 27, no. 15, pp. 20444-20455, Apr. 2019.

[66] S. S. A. Obayya, "Scalar finite-element analysis of optical-fiber facets," *J. Lightw. Technol.*, vol. 24, no. 5, pp. 2115-2121, May 2006.

[67] H. Rao, R. Scarmozzino, and M. Osgood, "A bidirectional beam propagation method for multiple dielectric interfaces," *IEEE photon. Technol. Lett.*, vol. 11, no. 7, Jul. 1999.

[68] H. E.-Refaei, D. Yevick, and I. Betty, "Stable and noniterative bidirectional beam propagation method," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 12, no. 4, Apr. 2000.

[69] P. L. Ho and Y. Y. Lu, "A Stable bidirectional propagation method based on scattering operators," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 13, no. 12, pp. 1316-1318, Dec. 2001.

[70] P. L. Ho and Y. Y. Lu, "A bidirectional beam propagation method for periodic waveguides," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 14, no. 3, pp. 325-327, Mar. 2002.

[71] H. Zhang, J. Mu, and W.-P. Huang, "Improved bidirectional beam-propagation method by a fourth-order finite-difference scheme," *J. Lightw. Technol.*, vol. 25, no. 9, pp. 2807-2813, Sep. 2007.

[72] H. Zhang, J. Mu, and W.-P. Huang, "Assessment of rational approximations for square root operator in bidirectional beam propagation method," *J. Lightw. Technol.*, vol. 26, no. 5, pp. 600-607, Mar. 2008.

[73] H. A. Jamid and M. Z. M. Khan, "A numerical approach for full-vectorial analysis of 3-D guided wave structures with multiple and strong longitudinal discontinuities," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 45, no. 2, pp. 117-124, Feb. 2009.

[74] M. Z. M. Khan and H. A. Jamid, "Full-vectorial analysis of high-index-contrast coupled channel waveguide," *Applied Opt.*, vol. 48, no. 22, pp. 4468-4474, Aug. 2009.

[75] S. Wu and J. Xiao, "An efficient semivectorial bidirectional beam propagation method for 3-D optical waveguide structures," *J. Lightw. Technol.*, vol. 34, no. 4, pp. 1313-1321, Feb. 2016.

[76] J. C. Nedelec, "Mixed finite elements in $\boldsymbol{R}^3$," *Numer. Math.*, vol. 35, pp. 315-341, 1980.

[77] J. W. H. Liu, "The multifrontal method for sparse matrix solution: Theory and practice," *SIAM Rev.*, vol. 34, no. 1, pp. 82-109, Mar. 1992.

[78] Ü. Pekel and R. Mittra, "An application of the perfectly matched layer (PML) concept to the finite element method frequency domain analysis of scattering problems," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 5, pp. 258-260, Aug. 1995.

[79] F. L. Teixeira and W. C. Chew, "General closed-form PML constitutive tensors to match arbitrary bianisotropic and dispersive linear media," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 8. no. 6, pp. 223-225, June 1998.

[80] J.-Y. Wu, D. M. Kingsland, J.-F. Lee, and R. Lee, "A comparison of anisotropic PML to Berenger's PML and its application to the finite-element method for EM scattering," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 45, no. 1, pp. 40-50, Jan. 1999.

[81] M. Koshiba, Y. Tsuji, and S. Sasaki, "High-performance absorbing boundary conditions for photonic crystal waveguide simulations," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 11, no. 4, pp. 152-154, Apr. 2001.

[82] Y. Tsuji and M. Koshiba, "Finite element method using port truncation by perfectly matched layer boundary conditions for optical waveguide discontinuity problems," *J. Lightw. Technol.*, vol. 20, no. 3, pp. 463-468, Mar. 2002.

[83] J. P. Meunier and Si. I. Hosain, "An efficient model for splice loss evaluation in single-mode graded-index fibers," *J. Lightw. Technol.*, vol. 9, no. 11, pp. 1457-1463, Nov. 1991.

[84] T. Conese, G. Barbarossa, and M. N. Armenise, "Accurate loss analysis of single-mode fiber/D-fiber splice by vectorial finite-element method," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 7, no. 5, pp. 523-525, May 1995.

[85] Y. L. Hoo, W. Jin, J. Ju, and H. L. Ho, "Loss analysis of single-mode fiber/photonic-crystal fiber splice," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 40, no. 5, pp. 378-380, Mar. 2004.

[86] Z. Xu, K. Duan, Z. Liu, Y. Wang, and W. Zhao, "Numerical analyses of splice losses of photonics crystal fibers," *Opt. Commun.*, vol. 282, no. 23, pp. 4527-4531, Dec. 2009.

[87] T. Ikegami, "Reflectivity of mode at facet and oscillation mode in double-heterostructure injection lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-8, no. 6, pp. 470-476, June 1972.

[88] M. Eguchi and Y. Tsuji, "Influence of reflected radiation waves caused by largemode field and large refractive index mismatches onsplice loss evaluation between elliptical-hole latticecore holey fibers and conventional fibers," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 30, no. 2, pp. 410-420, Feb. 2013.

[89] A. M. A. Said, A. M. Heikal, N. F. F. Areed, and S. S. A. Obayya, "Why do field-based methods fail to model plasmonics?," *IEEE Photon. J.*, vol. 8, no. 5, Oct. 2016, Art. no. 4802613.

[90] N. J. Higham, "Newton's method for the matrix square root," *Math. Comp.*, vol. 46, no. 174, pp. 537-549, Apr. 1986.

[91] E. D. Denman and A. N. Beavers, Jr., "The matrix sign function and computations in systems," *Appl. Math. Comput.*, vol. 2, pp. 63-94, 1976.

[92] N. J. Higham, "Stable iterations for the matrix square root," *Numer. Algorighms*, vol. 15, pp. 227-242, 1997.

[93] A. D. Rakic, A. B. Djurisic, J. M. Elazar, and M. L. Majewski, "Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices," *Appl. Opt.*, vol. 37, no. 22, pp. 5271-5283, Aug. 1998.

[94] T. Q. Tran and S. Kim, "Stability condition of finite-element beam propagation methods in lossy waveguide," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 50, no. 10, pp. 808-814, Oct. 2014.

[95] S. Kawai, A. Iguchi, and Y. Tsuji, "Study on high precision and stable finite element beam propagation method based on incomplete third order hybrid edge/nodal element," *J. Lightw. Technol.*, vol. 36, no. 11, pp. 2278-2285, June 2018.

[96] S. Yoneta, M. Koshiba, and Y. Tsuji, "Combination of beam propagation method and finite element method for optical beam propagation analysis," *J. Lightw. Technol.*, vol. 17, no. 11, pp. 2398-2404, Nov. 1999.

[97] M. I. Davanço, C. E. R.-Mercedes, and H. E. H.-Figueroa, "Novel boundary condition for the finite-element solution of arbitrary planar junction," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 13, pp. 46-47, 2001.

[98] C. E. R.-Mercedes and H. E. H.-Figueroa, "Padé boundary conditions for the finite-element modeling of arbitrary planar junctions," *J. Lightw. Technol.*, vol. 22, no. 2, pp. 669-676, Feb. 2004.

[99] J. Hong, W. Huang, and T. Makino, "On the transfer matrix method for distributed-feedback waveguide devices," *J. Lightw. Technol.*, vol. 10, no. 12, pp. 1860-1868, Dec. 1992.

[100] H.-P. Nolting and G. Sztefka, "Eigenmode matching and propagation theory of square meander-type couplers," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 4, no. 12, pp. 1386-1389, Dec. 1992.

[101] G. Sztefka and H. P. Nolting, "Bidirectional eigenmode propagation for large refractive index steps," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 5, no. 5, May 1993.

[102] Z. M. Mao and W. P. Huang, "Analysis of polarization rotation inperiodically loaded rib waveguides by transfer matrix method," *J. Lightw.Technol.*, vol. 12, no. 5, May 1994.

[103] J. Willems, J. Haes and R. Baets, "The bidirectional mode expansion method for two-dimensional waveguides: the TM case," *Opt. Quantum Electorn.*, vol. 27, no. 10, pp. 995-1007, Oct. 1995.

[104] M.-S. Kwon, "A numerical stable analysis method for complex multilayer waveguides based on modified transfer-matrix equations," *J. Lightw. Technol.*, vol. 27, no. 20, pp. 4407-4414, Oct. 2009.

[105] P. Bienstman and R. Baets, "Optical modelling of photonic crystals and VCSELs using eigenmode expansion and perfectly matched layers," *Opt. Quantum Electron.*, vol. 33, no. 4/5, pp. 327-341, Apr. 2001.

[106] J. Čtyroký, "A simple bi-directional mode expansion propagation algorithm based on modes of a parallel-plate waveguide," *Opt. Quantum Electron.*, vol. 38, pp. 45-62, 2006.

[107] J. Čtyroký, "Improved bidirectional-mode expansion propagation algorithm based on Fourier series," *J. Lightw. Technol.*, vol. 25, no. 9, p. 2321-2330, Sep. 2007.

[108] J. Tervo, M. Kuittinen, P. Vahimaa, J. Turunen, T. Aalto, P. Heimala, and M. Leppihalme, "Efficient Bragg waveguide-grating analysis by quasi-rigorous approach based on Redheffer's star product," *Optics Commun.*, vol. 198, pp. 265-272, Nov. 2001.

謝　　辞

本研究は室蘭工業大学波動エレクトロニクス研究室において，辻寧英教授および井口亜希人助教の懇切な御指導のもとに行われたものであります.

辻寧英教授には研究室に配属されてからの 5 年間に渡り，研究や生活面の多大な御指導，御鞭撻を賜りましたこと，また国内外における様々な発表の場と論文執筆の機会を提供して頂きましたことに心より感謝申し上げます.

井口亜希人助教には日頃から様々な御助言や相談をして頂き，本研究を深めていくことができたこと，また進学や履修のサポートなどをして頂いたこと深く感謝申し上げます.

本論文の副査をしていただきました本学 長谷川弘治教授，渡邊浩太教授には適切な御助言と御指導をいただきましたことに深く感謝申し上げます.

また長期インターンシップに快く私を受け入れて頂いた古河電工株式会社 長谷川淳一様，松原礼高様には，光デバイスの開発現場で貴重な経験を積ませて頂いたことに深く感謝申し上げます.

同研究室の卒業生である田中智大氏，森洸遥氏，修士 2 年の工藤滉司氏，富安柾斗氏とは，闊達な議論から，研究に関する多岐にわたる議論や相談をして頂き，論文の共著者としても携わらせて頂きましたことに感謝申し上げます.

研究業績

1. 論文

(1) 森本 佳太，辻 寧英，“有限要素法に基づく伝搬演算子法による光導波路突き合わせ接続の解析に関する検討,” 電子情報通信学会論文誌，Vol. J101-C, No. 5, pp. 201-206, May 2018.

(2) A. Koda, K. Morimoto, and Y. Tsuji, “A study on topology optimization of plasmonic waveguide devices using function expansion method and evolutionary approach,” *J. Lightw. Technol.*, Vol. 37. No. 3, pp. 981-988, Feb. 2019.

(3) K. Morimoto and Y. Tsuji, “Full-vectorial analysis of optical waveguide dixontinuities using propagation operator method based on finite element scheme,” *OSA Continuum*, Vol. 2, No. 3, pp. 540-553, March 2019.

(4) K. Mori, K. Morimoto, T. Tanaka, A. Iguchi, and Y. Tsuji, “Topology optimization of nonlinear optical waveguide devices considering output signal phase,” *Opt. Comm.*, Vol. 439, pp. 290-294, May 2019.

(5) K. Morimoto and Y. Tsuji, “Analysis of multiple waveguide discontinuities using propagation operator method and beam propagation method,” *IEEE J. Quantum Electron.*, Vol. 55, No. 4, #6100108, Aug. 2019.

(6) K. Morimoto, A. Iguchi, Y. Tsuji, “Propagation operator based boundary condition for finite element analysis,” *IEEE Photon. J.*, Vol. 12, No. 4, #6601713, Aug. 2020.

(7) A. Iguchi, K. Morimoto, and Y. Tsuji, “Sensitivity-based structural optimal design with bi-directional beam propagation method for photonic devices in high-index-contrast waveguides,” *IEEE Photon. J.*, Vol. 12, No. 5, #6602111, Oct. 2020.

(8) K. Kudo, K. Morimoto, A. Iguchi, and Y. Tsuji, “A study on optimal design of optical devices utilizing coupled mode theory and machine learning,” *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E103-C, No. 11, Nov. 2020.

(9) M. Tomiyasu, K. Morimoto, A. Iguchi, and Y. Tsuji, “A study on function-expansion-based topology optimization without gray area for optimal design of photonic devices,” *IEICE Trans. Electron.*, Vol. E103-C, No. 11, Nov. 2020.

(10) K. Morimoto, A. Iguchi, and Y. Tsuji, “Efficient topology optimization of optical waveguide using finite element method based on slowly varying envelope approximation,” *Optik*, Vol. 226, No. 1, #165951, Jan. 2021.

(11) 工藤 滉司, 森本 佳太, 井口 亜希人, 辻 寧英, “モード結合理論と機械学習を用いた 3 次元光導波路デバイスの最適設計の効率化に関する研究,” 電子情報通信学会論文誌, Vol. J104-C, No. 5, May 2021, to be published.

(12) 富安 柾斗, 森本 佳太, 井口 亜希人, 辻 寧英, “進化的手法と勾配法を用いた多目的最適設計による光デバイスの構造単純化に関する検討,” 電子情報通信学会論文誌, Vol. J104-C, No. 5, May 2021, to be published.

(13) Y. Tsuji, K. Morimoto, A. Iguchi, T. Kashiwa, and S. Nishiwaki, “Two-dimensional full-vectorial finite element analysis of NRD guide devices,” *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.*, to be published.

(14) K. Morimoto, A. Iguchi, and Y. Tsuji, “Novel scattering operator for arbitrary finite element models in optical waveguides,” *J. Lightw. Technol.*, to be published.

(15) K. Kudo, K. Morimoto, A. Iguchi, Y. Tsuji, and T. Kashiwa, “Optimal design of dielectric flat lens utilizing bayesian optimization,” *Microw. Opt. Technol. Lett.*, to be published.

2. 国際会議

(1) K. Morimoto and Y. Tsuji, “Analysis of butt-coupling of optical waveguide using propagation operator method based on finite element method,” Progress in Electromagnetic Tesearch Symposium (PIERS), 797-798, Singapore, Nov. 2017.

(2) K. Morimoto and Y. Tsuji, “Full-vectorial analsis of optical waveguide discontinuities using propagation operator method based on finite element scheme,” Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS), 207, Toyama, JAPAN, Aug. 2018.

(3) K. Morimoto and Y. Tsuji, “An efficient analysis of butt coupling between dielectric and plasmonic waveguide using propagation operator method based on finite element scheme,” Japan Society for Simulation Technology (JSST), Muroran City, Hokkaido, JAPAN, Sep. 2018.

(4) K. Morimoto and Y. Tsuji, “Beam propagation analysis for discontinuity structures of plasmonic waveguides using field-based propagation operator,” PhotonIcs & Electromagnetics Research Symposium (PIERS), 1376, Roma, Italy, June 2019.

3. 研究会

(1) 森本 佳太，辻　寧英，“有限要素法に基づく伝搬演算子法による光導波路突合せ接続の解析,” 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 117, No. 37, EST2017-6, pp. 27-32, 2017 年 5 月.

(2) 森本 佳太，辻　寧英，“有限要素法に基づく伝搬演算子法による 3 次元光導波路突合せ接続の解析,” 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 117, No. 408, EST2017-123, pp. 287-291, 2018 年 1 月.

(3) 森本 佳太，辻　寧英，“伝搬演算子法とビーム伝搬法を用いた導波路の接続特性の解析,” 電磁界理論研究会, EMT-18-69, pp. 13-17, 2018 年 7 月.

(4) 森本 佳太，辻　寧英，“伝搬演算子を用いた有限要素法の境界条件による効率的な光導波路伝搬解析,” 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 119, No. 407, EST2019-99, pp. 103-107, 2020 年 1 月.

(5) 森本 佳太，井口 亜希人, 辻　寧英 “S 行列を用いた領域分割型有限要素法による光導波路解析の効率化,” 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 120, No. 328, EST2020-60, pp. 39-44, 2021 年 1 月.

4. 全国大会

(1) 森本 佳太，辻　寧英，“有限要素法に基づく散乱演算子を用いた効率的な光導波路解析に関する検討,” 電子情報通信学会ソサイエティ大会，C-15-17，2020 年 9 月.

5. 支部大会

(1) 森本 佳太，辻　寧英，“有限要素法に基づく伝搬演算子法による 3 次元光導波路突合せ接続の解析に関する検討,” 電気・情報関係学会北海道支部連合大会，115，2016 年 11 月.

(2) 森本 佳太，辻　寧英，“有限要素法に基づく伝搬演算子法による 3 次元光導波路突合せ接続の解析に関する研究,” IEICE 北海道支部学生会インターネットシンポジウム，102-4，2017 年 3 月.

(3) 森本 佳太，辻　寧英，“有限要素法に基づく伝搬演算子法を用いたエアギャップによるフレネル損失を考慮した光導波路突合せ接続の解析,” 電気・情報関係学会北海道支部連合大会，156，2017 年 10 月.

(4) 森本 佳太，辻　寧英，“フルベクトル有限要素法に基づく伝搬演算子法による 3 次元光導波路突合せ接続の解析に関する研究,” IEICE 北海道支部学生会インターネットシンポジウム，102-07，2018 年 3 月.

(5) 森本 佳太，辻　寧英，“伝搬演算子法とビーム伝搬法を用いた誘電体導波路とプラズモニック導波路の突合せ接続の解析,” 電気・情報関係学会北海道支部連合大会，145，2018 年 10 月.

(6) 森本 佳太，辻　寧英，“伝搬演算子法とビーム伝搬法による誘電体導波路導波路とプラズモニック導波路の接続特性の解析,” IEICE 北海道支部学生会インターネットシンポジウム，102-07，2018 年 3 月.

6. 受賞

(1) 平成 29 年 3 月　電子情報通信学会北海道支部学生会 インターネットシンポジウム優秀発表賞

(2) 平成 30 年 3 月　電子情報通信学会エレクトロニクスシミュレーション研究会 優秀論文発表賞

(3) 平成 30 年 11 月　電気・情報関係学会北海道支部連合大会 若手優秀論文発表賞

(4) 平成 31 年 3 月　電子情報通信学会エレクトロニクスシミュレーション研究会 学生・若手エレクトロニクスソフトウェアコンテスト 最優秀賞

(5) 平成 31 年 3 月　電子情報通信学会北海道支部 学生奨励賞

(6) 令和 3 年 2 月　IEEE Sapporo Section Encouragement Award

(7) 令和 3 年 3 月　電子情報通信学会 学術奨励賞

付　　録

A1　パデ展開による広角ビーム伝搬法のためのパデ式の導出

有限要素法により導波路断面を離散化することで得られる離散方程式 (3.5) を再掲する．

$$[M]\frac{d^2\{\Phi\}}{dz^2}+[K]\{\Phi\}=\{0\} \tag{6.1}$$

ここで逆方向伝搬を無視すると，式 (6.1) の解析解は

$$\begin{aligned}\{\Phi\}&=A\exp\left(-j\sqrt{[M]^{-1}[K]}z\right)\\&=A\exp\left(-j\sqrt{[M]^{-1}([K]-k_0^2n_0^2[M])+k_0^2n_0^2}z\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

で与えられる．$\{\Phi\}$ に緩慢変化包絡線近似を適用することを考え，

$$\{\Phi\}=\{\phi\}\exp(-jk_0n_0z) \tag{6.3}$$

を式 (6.2) に代入し，$P=[M]^{-1}([K]-k_0^2n_0^2[M])$，$\beta_0=k_0n_0$ と置くと，

$$\{\phi\}=A\exp\left\{-j\left(\sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0\right)z\right\} \tag{6.4}$$

を得る．ここで両辺を z で微分すると

$$\frac{d\{\phi\}}{dz}=-j\left(\sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0\right)\{\phi\} \tag{6.5}$$

の関係が得られ，括弧内を P の関数としてパデ展開を実行する．Pade(1,0) の場合，展開中心を $P=0$，すなわち $[M]^{-1}[K]=k_0^2n_0^2$ とする点と中心としたパデ展開式

$$\sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{P}{2\beta_0} \tag{6.6}$$

を式 (6.5) に代入すると

$$\frac{d\{\phi\}}{dz}=\frac{[M]^{-1}\left([K]-k_0^2n_0^2[M]\right)}{2jk_0n_0}\{\phi\} \tag{6.7}$$

となり，これは連分数展開で得られたパデ式 (2.244) に一致する．以下に Pade(4,4) までのパデ展開の計算結果を示す．

$$\mathrm{Pade}(1,0) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{P}{2\beta_0} \tag{6.8}$$

$$\mathrm{Pade}(1,1) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}}{1+\frac{P}{4\beta_0^2}} \tag{6.9}$$

$$\mathrm{Pade}(2,1) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}+\frac{P^2}{8\beta_0^3}}{1+\frac{P}{2\beta_0^2}} \tag{6.10}$$

$$\mathrm{Pade}(2,2) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}+\frac{P^2}{4\beta_0^3}}{1+\frac{3P}{4\beta_0^2}+\frac{P^2}{16\beta_0^4}} \tag{6.11}$$

$$\mathrm{Pade}(3,2) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}+\frac{3P^2}{8\beta_0^3}+\frac{P^3}{32\beta_0^3}}{1+\frac{P}{\beta_0^2}+\frac{3P^2}{16\beta_0^4}} \tag{6.12}$$

$$\mathrm{Pade}(3,3) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}+\frac{P^2}{2\beta_0^3}+\frac{3P^3}{32\beta_0^5}}{1+\frac{5P}{4\beta_0^2}+\frac{3P^2}{8\beta_0^4}+\frac{P^3}{64\beta_0^6}} \tag{6.13}$$

$$\mathrm{Pade}(4,3) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}+\frac{5P^2}{8\beta_0^3}+\frac{3P^3}{16\beta_0^5}+\frac{P^4}{128\beta_0^7}}{1+\frac{3P}{2\beta_0^2}+\frac{5P^2}{8\beta_0^4}+\frac{P^3}{16\beta_0^6}} \tag{6.14}$$

$$\mathrm{Pade}(4,4) \qquad \sqrt{P+\beta_0^2}-\beta_0=\frac{\frac{P}{2\beta_0}+\frac{3P^2}{4\beta_0^3}+\frac{5P^3}{16\beta^5}+\frac{P^4}{32\beta^7}}{1+\frac{7P}{4\beta_0^2}+\frac{15P^2}{16\beta_0^4}+\frac{5P^3}{32\beta_0^6}+\frac{P^4}{256\beta_0^8}} \tag{6.15}$$

A2 PML 係数を課した積分計算の解析解

PML を課す場合，線要素または三角形要素の i 番目の節点上の材料によって与えられる係数 p_i は，ストレッチング変数 s_i との積による表現に書き換えられるが，ここでは p_i として表記する．各要素内積分値は以下のように表される．

1) 1 次線要素の場合

$$\int_e (p_1N_1+p_2N_2)\{N\}\{N\}^T dx=\frac{l_e}{4}\begin{bmatrix} p_1+\frac{1}{3}p_2 & \frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2 \\ \frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2 & p_1+\frac{1}{3}p_2 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

$$\int_e (p_1N_1+p_2N_2)\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{d\{N\}^T}{dx}dx=\frac{1}{2l_e}\begin{bmatrix} p_1+p_2 & -p_1-p_2 \\ -p_1-p_2 & p_1+p_2 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

2) 2 次線要素の場合

$$
\begin{aligned}
&\int_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3)\,\{N\}\{N\}^T dx \\
&= l_e \begin{bmatrix}
\frac{13}{140}p_1 + \frac{-1}{140}p_2 + \frac{1}{21}p_3 & \frac{-1}{140}p_1 + \frac{-1}{140}p_2 + \frac{2}{105}p_3 & \frac{1}{21}p_1 + \frac{-2}{105}p_2 + \frac{4}{105}p_3 \\
\frac{-1}{140}p_1 + \frac{-1}{140}p_2 + \frac{2}{105}p_3 & \frac{-1}{140}p_1 + \frac{13}{140}p_2 + \frac{1}{21}p_3 & \frac{-2.0}{105}p_1 + \frac{1}{21}p_2 + \frac{4}{105} * p_3 \\
\frac{1}{21}p_1 + \frac{-2}{105}p_2 + \frac{4}{105}p_3 & \frac{-2.0}{105}p_1 + \frac{1}{21}p_2 + \frac{4}{105} * p_3 & \frac{4}{105}p_1 + \frac{4}{105} * p_2 + \frac{16}{35} * p_3
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3)\,\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{d\{N\}^T}{dx} dx \\
&= \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix}
\frac{37}{30}p_1 + \frac{-1}{10}p_2 + \frac{6}{5}p_3 & \frac{7}{30}p_1 + \frac{7}{30}p_2 + \frac{-2}{15}p_3 & \frac{-22}{15}p_1 + \frac{-2}{15}p_2 + \frac{-16}{15} \\
\frac{7}{30}p_1 + \frac{7}{30}p_2 + \frac{-2}{15}p_3 & \frac{-1}{10}p_1 + \frac{37}{30}p_2 + \frac{6}{5}p_3 & \frac{-2}{15}p_1 + \frac{-22}{15}p_2 + \frac{-16}{15}p_3 \\
\frac{-22}{15}p_1 + \frac{-2}{15}p_2 + \frac{-16}{15} & \frac{-2}{15}p_1 + \frac{-22}{15}p_2 + \frac{-16}{15}p_3 & \frac{8}{5}p_1 + \frac{8}{5}p_2 + \frac{32}{15}p_2
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

3) 3 次線要素の場合

$$\int_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3 + p_4N_4)\{N\}\{N\}^T dx = l_e \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

$$X_{11} = \frac{17}{320}p_1 + \frac{1}{336}p_2 + \frac{9}{280}p_3 + \frac{-27}{2240}p_4 \tag{6.21}$$

$$X_{12} = \frac{1}{336}p_1 + \frac{1}{336}p_2 + \frac{3}{1120}p_3 + \frac{3}{1120}p_4 \tag{6.22}$$

$$X_{13} = \frac{9}{280}p_1 + \frac{3}{1120}p_2 + \frac{27}{560}p_3 + \frac{-27}{1120}p_4 \tag{6.23}$$

$$X_{14} = \frac{-27}{2240}p_1 + \frac{3}{1120}p_2 + \frac{-27}{1120} + \frac{27}{2240}p_4 \tag{6.24}$$

$$X_{21} = X_{12} \tag{6.25}$$

$$X_{22} = \frac{1}{336}p_1 + \frac{17}{320}p_2 + \frac{-27}{2240}p_3 + \frac{9}{280}p_4 \tag{6.26}$$

$$X_{23} = \frac{3}{1120}p_1 + \frac{-27}{2240}p_2 + \frac{27}{2240}p_3 + \frac{-27}{1120}p_4 \tag{6.27}$$

$$X_{24} = \frac{3}{1120}p_1 + \frac{9}{280}p_2 + \frac{-27}{1120}p_3 + \frac{27}{560}p_4 \tag{6.28}$$

$$X_{31} = X_{13} \tag{6.29}$$

$$X_{32} = X_{23} \tag{6.30}$$

$$X_{33} = \frac{27}{560}p_1 + \frac{27}{2240}p_2 + \frac{729}{2240}p_3 \tag{6.31}$$

$$X_{34} = \frac{-27}{1120}p_1 + \frac{-27}{1120}p_2 \tag{6.32}$$

$$X_{41} = X_{14} \tag{6.33}$$

$$X_{42} = X_{24} \tag{6.34}$$

$$X_{43} = X_{34} \tag{6.35}$$

$$X_{44} = \frac{27}{2240}p_1 + \frac{27}{560}p_2 + \frac{729}{2240}p_4 \tag{6.36}$$

$$\int_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3 + p_4N_4)\,\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\frac{d\{N\}^T}{dx}dx = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

$$Y_{11} = \frac{137}{64}p_1 + \frac{409}{2240}p_2 + \frac{4539}{2240}p_3 + \frac{-291}{448}p_4 \tag{6.38}$$

$$Y_{12} = \frac{-523}{2240}p_1 + \frac{-523}{2240}p_2 + \frac{159}{2240}p_3 + \frac{159}{2240}p_4 \tag{6.39}$$

$$Y_{13} = \frac{-6753}{2240}p_1 + \frac{-753}{2240}p_2 + \frac{-4131}{2240}p_3 + \frac{1053}{2240}p_4 \tag{6.40}$$

$$Y_{14} = \frac{2481}{2240}p_1 + \frac{867}{2240}p_2 + \frac{-81}{320}p_3 + \frac{243}{2240}p_4 \tag{6.41}$$

$$Y_{21} = Y_{12} \tag{6.42}$$

$$Y_{22} = \frac{409}{2240}p_1 + \frac{137}{64}p_2 + \frac{-291}{448}p_3 + \frac{4539}{2240}p_4 \tag{6.43}$$

$$Y_{23} = \frac{867}{2240}p_1 + \frac{2481}{2240}p_2 + \frac{243}{2240}p_3 + \frac{-81}{320} \tag{6.44}$$

$$Y_{24} = \frac{-753}{2240}p_1 + \frac{-6753}{2240}p_2 + \frac{1053}{2240}p_3 + \frac{-4131}{2240} \tag{6.45}$$

$$Y_{31} = Y_{13} \tag{6.46}$$

$$Y_{32} = Y_{23} \tag{6.47}$$

$$Y_{33} = \frac{1917}{448}p_1 + \frac{1971}{2240}p_2 + \frac{243}{64}p_3 + \frac{4131}{2240}p_3 \tag{6.48}$$

$$Y_{34} = \frac{-3699}{2240}p_1 + \frac{-3699}{2240}p_2 + \frac{-4617}{2240}p_3 + \frac{-4617}{2240}p_4 \tag{6.49}$$

$$Y_{41} = Y_{14} \tag{6.50}$$

$$Y_{42} = Y_{24} \tag{6.51}$$

$$Y_{43} = Y_{34} \tag{6.52}$$

$$Y_{44} = \frac{1971}{2240}p_1 + \frac{1917}{448}p_2 + \frac{4131}{2240}p_2 + \frac{243}{64}p_3 \tag{6.53}$$

4) 1 次三角形要素の場合

$$\begin{aligned} &\int_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3)\,\{N\}\{N\}^T dx \\ &= \frac{S_e}{10}\begin{bmatrix} p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{6}p_3 & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{3}p_3 \\ \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{6}p_3 & \frac{1}{3}p_1 + p_2 + \frac{1}{3}p_3 & \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 \\ \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{3}p_3 & \frac{1}{6}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{3}p_3 & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_2 + p_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\iint_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3)\,\frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}\frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}dxdy = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{12S_e}\begin{bmatrix} \zeta_1\zeta_1 & \zeta_1\zeta_2 & \zeta_1\zeta_3 \\ \zeta_1\zeta_2 & \zeta_2\zeta_2 & \zeta_2\zeta_3 \\ \zeta_1\zeta_3 & \zeta_2\zeta_3 & \zeta_3\zeta_3 \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

$$(\xi, \zeta) = (x, B), (y, C) \tag{6.56}$$

5) 2 次三角形要素の場合

$$
\begin{aligned}
&\int_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3 + p_4N_4 + p_5N_5 + p_6N_6)\,\{N\}\{N\}^T dx \\
&= S_e \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & X_{15} & X_{16} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & X_{25} & X_{26} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & X_{35} & X_{36} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{45} & X_{46} \\ X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{56} \\ X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.57}
$$

$$X_{11} = \frac{1}{70}p_1 + \frac{-1}{630}p_2 + \frac{-1}{630}p_3 + \frac{1}{105}p_4 + \frac{1}{315}p_5 + \frac{1}{105}p_6 \tag{6.58}$$

$$X_{12} = \frac{-1}{630}p_1 + \frac{-1}{630}p_2 + \frac{1}{1260}p_3 + \frac{-1}{315}p_4 \tag{6.59}$$

$$X_{13} = \frac{-1}{630}p_1 + \frac{1}{1260}p_2 + \frac{-1}{630}p_3 + \frac{-1}{315}p_6 \tag{6.60}$$

$$X_{14} = \frac{1}{105}p_1 + \frac{-1}{315}p_2 + \frac{-2}{315}p_5 \tag{6.61}$$

$$X_{15} = \frac{1}{315}p_1 + \frac{-2}{315}p_4 + \frac{-4}{315}p_5 + \frac{-2}{315}p_6 \tag{6.62}$$

$$X_{16} = \frac{1}{105}p_1 + \frac{-1}{315}p_3 + \frac{-2}{315}p_5 \tag{6.63}$$

$$X_{21} = X_{12} \tag{6.64}$$

$$X_{22} = \frac{-1}{630}p_1 + \frac{1}{70}p_2 + \frac{-1}{630}p_3 + \frac{1}{105}p_4 + \frac{1}{105}p_5 + \frac{1}{315}p_6 \tag{6.65}$$

$$X_{23} = \frac{1}{1260}p_1 + \frac{-1}{630}p_2 + \frac{-1}{630}p_3 + \frac{-1}{315}p_5 \tag{6.66}$$

$$X_{24} = \frac{-1}{315}p_1 + \frac{1}{105}p_2 + \frac{-2}{315}p_6 \tag{6.67}$$

$$X_{25} = \frac{1}{105}p_2 + \frac{-1}{315}p_3 + \frac{-2}{315}p_6 \tag{6.68}$$

$$X_{26} = \frac{1}{315}p_2 + \frac{-2}{315}p_4 + \frac{-2}{315}p_5 + \frac{-4}{315}p_6 \tag{6.69}$$

$$X_{31} = X_{13} \tag{6.70}$$

$$X_{32} = X_{23} \tag{6.71}$$

$$X_{33} = \frac{-1}{630}p_1 + \frac{-1}{630}p_2 + \frac{1}{70}p_3 + \frac{1}{315}p_4 + \frac{1}{105}p_5 + \frac{1}{105}p_6 \tag{6.72}$$

$$X_{34} = \frac{1}{315}p_3 + \frac{-4}{315}p_4 + \frac{-2}{315}p_5 + \frac{-2}{315}p_6 \tag{6.73}$$

$$X_{35} = \frac{-1}{315}p_2 + \frac{1}{105}p_3 + \frac{-2}{315}p_4 \tag{6.74}$$

$$X_{36} = \frac{-1}{315}p_1 + \frac{1}{105}p_3 + \frac{-2}{315}p_4 \tag{6.75}$$

$$X_{41} = X_{14} \tag{6.76}$$
$$X_{42} = X_{24} \tag{6.77}$$
$$X_{43} = X_{34} \tag{6.78}$$
$$X_{44} = \frac{-4}{315}p_3 + \frac{4}{35}p_4 + \frac{4}{105}p_5 + \frac{4}{105}p_6 \tag{6.79}$$
$$X_{45} = \frac{-2}{315}p_1 + \frac{-2}{315}p_3 + \frac{4}{105}p_4 + \frac{4}{105}p_5 + \frac{8}{315}p_6 \tag{6.80}$$
$$X_{46} = \frac{-2}{315}p_2 + \frac{-2}{315}p_3 + \frac{4}{105}p_4 + \frac{8}{315}p_5 + \frac{4}{105}p_6 \tag{6.81}$$

$$X_{51} = X_{15} \tag{6.82}$$
$$X_{52} = X_{25} \tag{6.83}$$
$$X_{53} = X_{35} \tag{6.84}$$
$$X_{54} = X_{45} \tag{6.85}$$
$$X_{55} = \frac{-4}{315}p_1 + \frac{4}{105}p_4 + \frac{4}{35}p_5 + \frac{4}{105}p_6 \tag{6.86}$$
$$X_{56} = \frac{-2}{315}p_1 + \frac{-2}{315}p_2 + \frac{8}{315}p_4 + \frac{4}{105}p_5 + \frac{4}{105} \tag{6.87}$$

$$X_{61} = X_{16} \tag{6.88}$$
$$X_{62} = X_{26} \tag{6.89}$$
$$X_{63} = X_{36} \tag{6.90}$$
$$X_{64} = X_{46} \tag{6.91}$$
$$X_{65} = X_{56} \tag{6.92}$$
$$X_{66} = \frac{-4}{315}p_2 + \frac{4}{105}p_4 + \frac{4}{105}p_5 + \frac{4}{35}p_6 \tag{6.93}$$

$$\iint_e (p_1N_1 + p_2N_2 + p_3N_3 + p_4N_4 + p_5N_5 + p_6N_6)\,\frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}\frac{\partial\{N\}}{\partial\xi}dxdy$$
$$= \frac{1}{4S_e}\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \tag{6.94}$$

$$Y_{11} = \zeta_1\zeta_1 \left(\frac{4}{15}p_1 + \frac{-2}{45}p_2 + \frac{-2}{45}p_3 + \frac{1}{3}p_4 + \frac{7}{45}p_5 + \frac{1}{3}p_6 \right) \tag{6.95}$$

$$Y_{12} = \zeta_1\zeta_2 \left(\frac{-1}{15}p_1 + \frac{-1}{15}p_2 + \frac{2}{45}p_3 + \frac{-1}{45}p_4 + \frac{-1}{9}p_5 + \frac{-1}{9}p_6 \right) \tag{6.96}$$

$$Y_{13} = \zeta_1\zeta_3 \left(\frac{-1}{15}p_1 + \frac{2}{45}p_2 + \frac{-1}{15}p_3 + \frac{-1}{9}p_4 + \frac{-1}{9}p_5 + \frac{-1}{45}p_6 \right) \tag{6.97}$$

$$\begin{aligned} Y_{14} = &\left(\frac{1}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{2}{5}\zeta_1\zeta_2 \right) p_1 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_2 \right) p_2 + \left(\frac{-1}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_2 \right) p_3 \\ &+ \left(\frac{8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_2 \right) p_4 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{4}{45}\zeta_1\zeta_2 \right) p_5 + \left(\frac{4}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_2 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.98}$$

$$\begin{aligned} Y_{15} = &\left(\frac{1}{15}\zeta_1\zeta_2 + \frac{1}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-1}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-2}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-1}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_3 \\ &+ \left(\frac{4}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{8}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{8}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{4}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.99}$$

$$\begin{aligned} Y_{16} = &\left(\frac{1}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{2}{5}\zeta_1\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-1}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_3 \right) p_3 \\ &+ \left(\frac{4}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{4}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.100}$$

$$Y_{21} = Y_{12} \tag{6.101}$$

$$Y_{22} = \zeta_2\zeta_2 \left(\frac{-2}{45}p_1 + \frac{4}{15}p_2 + \frac{-2}{45}p_3 + \frac{1}{3}p_4 + \frac{1}{3}p_5 + \frac{7}{45}p_6 \right) \tag{6.102}$$

$$Y_{23} = \zeta_2\zeta_3 \left(\frac{2}{45}p_1 + \frac{-1}{15}p_2 + \frac{-1}{15}p_3 + \frac{-1}{9}p_4 + \frac{-1}{45}p_5 + \frac{-1}{9}p_6 \right) \tag{6.103}$$

$$\begin{aligned} Y_{24} = &\left(\frac{-2}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_2 \right) p_1 + \left(\frac{1}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{2}{5}\zeta_1\zeta_2 \right) p_2 + \left(\frac{-1}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_2 \right) p_3 \\ &+ \left(\frac{8}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_2 \right) p_4 + \left(\frac{4}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_2 \right) p_5 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{4}{45}\zeta_1\zeta_2 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.104}$$

$$\begin{aligned} Y_{25} = &\left(\frac{-1}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{-1}{9}\zeta_2\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{1}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{2}{5}\zeta_2\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{-1}{9}\zeta_2\zeta_3 \right) p_3 \\ &+ \left(\frac{4}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{8}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{8}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{8}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{4}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.105}$$

$$\begin{aligned} Y_{26} = &\left(\frac{-1}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-2}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{1}{15}\zeta_1\zeta_2 + \frac{1}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-1}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_3 \\ &+ \left(\frac{4}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{8}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{8}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{4}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.106}$$

$$Y_{31} = Y_{13} \tag{6.107}$$

$$Y_{32} = Y_{23} \tag{6.108}$$

$$Y_{33} = \zeta_3\zeta_3 \left(\frac{-2}{45} p_1 + \frac{-2}{45} p_2 + \frac{4}{15} p_3 + \frac{7}{45} p_4 + \frac{1}{3} p_5 + \frac{1}{3} p_6 \right) \tag{6.109}$$

$$\begin{aligned} Y_{34} = & \left(\frac{-1}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{-2}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_1\zeta_3 + \frac{-1}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{1}{15}\zeta_1\zeta_3 + \frac{1}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_3 \\ & + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{8}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{4}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{4}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{8}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.110}$$

$$\begin{aligned} Y_{35} = & \left(\frac{-1}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{-1}{9}\zeta_2\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-2}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{-1}{9}\zeta_2\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{1}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{2}{5}\zeta_2\zeta_3 \right) p_3 \\ & + \left(\frac{-8}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{4}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{8}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{8}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{4}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{8}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.111}$$

$$\begin{aligned} Y_{36} = & \left(\frac{-2}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-1}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{-1}{9}\zeta_1\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{1}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{2}{5}\zeta_1\zeta_3 \right) p_3 \\ & + \left(\frac{-8}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{4}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_4 + \left(\frac{4}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_5 + \left(\frac{8}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.112}$$

$$Y_{41} = Y_{14} \tag{6.113}$$

$$Y_{42} = Y_{24} \tag{6.114}$$

$$Y_{43} = Y_{34} \tag{6.115}$$

$$\begin{aligned} Y_{44} = & \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_2\zeta_2 \right) p_1 + \left(\frac{8}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_2 \right) p_2 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_2 \right) p_3 \\ & + \left(\frac{16}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{15}\zeta_2\zeta_2 \right) p_4 + \left(\frac{16}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{45}\zeta_2\zeta_2 \right) p_5 + \left(\frac{16}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{15}\zeta_2\zeta_2 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.116}$$

$$\begin{aligned} Y_{45} = & \left(\frac{-4}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-4}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{-4}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_3 \\ & + \left(\frac{16}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{15}\zeta_1\zeta_3 + \frac{32}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_4 \\ & + \left(\frac{16}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{32}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{15}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_5 \\ & + \left(\frac{32}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.117}$$

$$\begin{aligned} Y_{46} = & \left(\frac{-4}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_1 + \left(\frac{-4}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_2 + \left(\frac{-4}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_3 \\ & + \left(\frac{16}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{32}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_4 \\ & + \left(\frac{32}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{45}\zeta_2\zeta_3 \right) p_5 \\ & + \left(\frac{16}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{32}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{15}\zeta_2\zeta_3 \right) p_6 \end{aligned} \tag{6.118}$$

$$Y_{51} = Y_{15} \tag{6.119}$$

$$Y_{52} = Y_{25} \tag{6.120}$$

$$Y_{53} = Y_{35} \tag{6.121}$$

$$Y_{54} = Y_{45} \tag{6.122}$$

$$\begin{aligned} Y_{55} = &\left(\frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{-8}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_1 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{8}{15}\zeta_3\zeta_3\right)p_2 \\ &+ \left(\frac{8}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{-8}{45}\zeta_3\zeta_3\right)p_3 + \left(\frac{16}{45}\zeta_2\zeta_2 + \frac{16}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{32}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_4 \\ &+ \left(\frac{16}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{16}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{64}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_5 \\ &+ \left(\frac{16}{15}\zeta_2\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{32}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_6 \end{aligned} \tag{6.123}$$

$$\begin{aligned} Y_{56} = &\left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-4}{45}\zeta_1\zeta_3\right)p_1 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{-4}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_2 + \left(\frac{-4}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{8}{15}\zeta_1\zeta_2\right)p_3 \\ &+ \left(\frac{32}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_4 \\ &+ \left(\frac{16}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{16}{15}\zeta_1\zeta_2 + \frac{32}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{16}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_5 \\ &+ \left(\frac{16}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{16}{15}\zeta_1\zeta_2 + \frac{16}{45}\zeta_1\zeta_3 + \frac{32}{45}\zeta_2\zeta_3\right)p_6 \end{aligned} \tag{6.124}$$

$$Y_{61} = Y_{16} \tag{6.125}$$

$$Y_{62} = Y_{26} \tag{6.126}$$

$$Y_{63} = Y_{36} \tag{6.127}$$

$$Y_{64} = Y_{46} \tag{6.128}$$

$$Y_{65} = Y_{56} \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned} Y_{66} = &\left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{8}{15}\zeta_3\zeta_3\right)p_1 + \left(\frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-8}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{-8}{45}\zeta_1\zeta_3\right)p_2 \\ &+ \left(\frac{8}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{-8}{45}\zeta_3\zeta_3\right)p_3 + \left(\frac{16}{45}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{32}{45}\zeta_1\zeta_3\right)p_4 \\ &+ \left(\frac{16}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{45}\zeta_3\zeta_3 + \frac{32}{45}\zeta_1\zeta_3\right)p_5 \\ &+ \left(\frac{16}{15}\zeta_1\zeta_1 + \frac{16}{15}\zeta_3\zeta_3 + \frac{64}{45}\zeta_1\zeta_3\right)p_6 \end{aligned} \tag{6.130}$$

$$(\xi, \zeta) = (x, B), (y, C) \tag{6.131}$$