

振動のうなり現象を視覚的に理解させるための 講義用実験装置の製作

電気・情報系(機械システム工学科) 佐藤 政司

1 はじめに

当研究室の担当する講義科目に、機械系学科では昔から4力と称せられる主要科目の一つである機械力学がある。その主要な対象は振動問題である。講義では数学を駆使した理論解析が根幹をなし、パラメータも多いことから、学生にとって対象とする振動問題の実際の挙動を十分に把握し得ていないのが現状である。理解を深めるためには、解析と同時に、振動現象を実際に体験させることが必要である。しかしながら、このような講義実験を実施するには、現状では多くの問題等がある。例えば講義実験に適した実験装置の製作に要する労力と費用の問題、さらに研究室から講義室までかなりの距離を、その都度実験装置を搬入出しなければならない問題がある。そこで当研究室では講義実験装置の製作にさいして、可能な限り簡単な機構を採用し、また材料も廃棄物で再利用できるものを積極的に利用するようにつとめ、しかも対象とする振動現象を的確に把握できるように心がけている。本報告では、一例として、2自由度振動系の自由振動、特に、ある初期条件のもとに発生する振動のうなり振動を理解させるための振動モデルとして用いた、二つの単振り子をバネによって結合した2自由度振動系の実験装置の製作について報告する。

2 バネで連結された二つの振動理論

バネで連結された二つの単振り子は振れ角が小さい範囲で振動するものとする。この場合の振動モデル及び座標系を図1に示す。この2自由度系の運動方程式は次式(1),(2)のように表される。

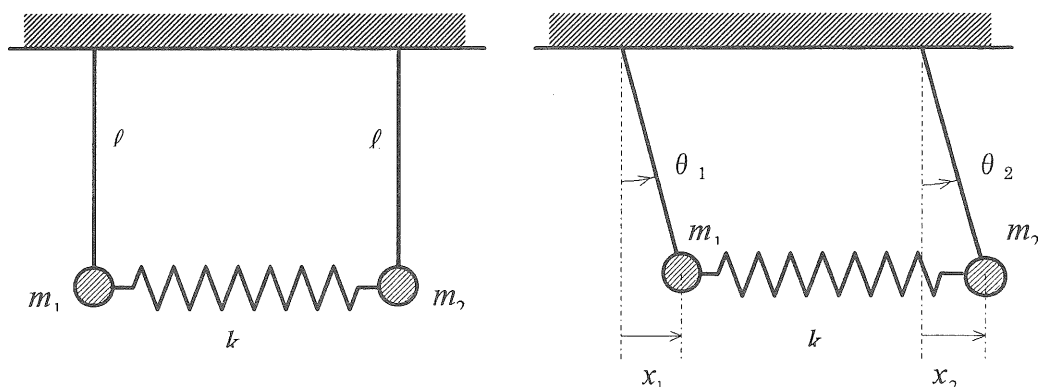


図 1 バネで連結された二つの単振り子

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 + (\omega_p^2 + \omega_{n1}^2)x_1 - \omega_{n1}^2 x_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \\ \ddot{x}_2 + (\omega_p^2 + \omega_{n2}^2)x_2 - \omega_{n2}^2 x_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (2) \end{array} \right.$$

ただし、 $\omega_p^2 = \frac{g}{l}$, $\omega_{n1}^2 = \frac{k}{m_1}$, $\omega_{n2}^2 = \frac{k}{m_2}$ 。振り子の腕の長さを l 、質量 m_1 、 m_2 、バネ定数を k 、重力加速度を g とする。この連立微分方程式の一般解は次式(3)のよ
うに表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{array} \right\} \dots\dots (3)$$

1 次及び 2 次の固有角振動数 ω_1 、 ω_2 はそれぞれ次のように求まる。

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1^2 = \omega_p^2 \\ \omega_2^2 = \omega_p^2 + \omega_{n1}^2 + \omega_{n2}^2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また振幅比について次のような関係が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \omega_1 \text{ のとき} \\ \omega = \omega_2 \text{ のとき} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = 1 \\ \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(1)}} = -\frac{\omega_{n2}^2}{\omega_{n1}^2} \end{array} \dots\dots\dots (5)$$

式(3)の一般解には 6 個の積分定数 $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, ϕ_1 , ϕ_2 が含まれているが、これらの積分定数は初期条件(初期変位と初速度について各 2 個) 4 個と式(5)の 2 個の条件を用いて決定することができる。以下に 3 種類の典型的な振動型の場合を示す。いずれの場合も 2 個の振り子の質量は等しく、 $m_1 = m_2 = m$ とする。

[Case1] 初期条件 : $x_1(0) = x_2(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ の場合。

これらの条件を式(3)に適応し、積分定数を求めて整理すると

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = x_0 \cos \omega_1 t \\ x_2(t) = x_0 \cos \omega_1 t \end{array} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 。式(6)のグラフの概略を図 2 に示す。この場合には、バネは伸縮せず、2 個の単振り子が一体となって振動する。すなわち、同位相で振動する。

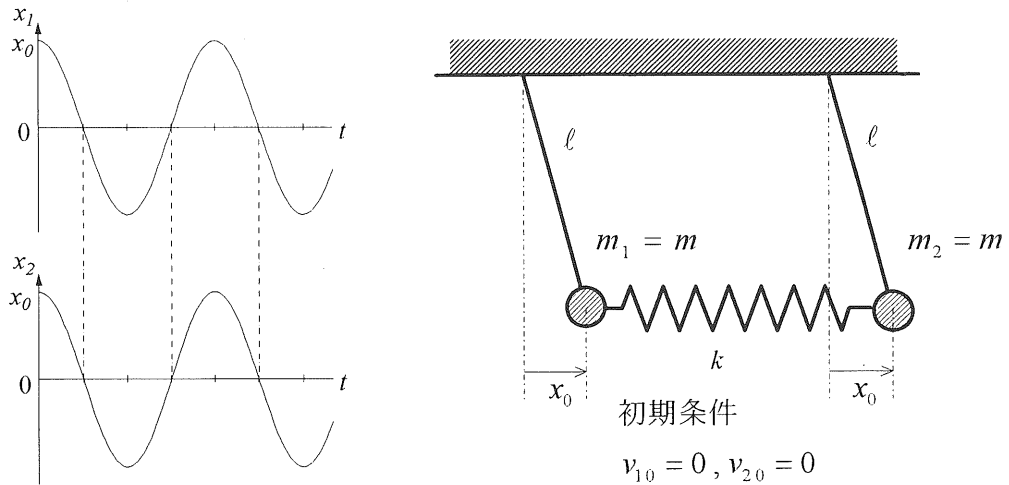


図 2 二つの振り子の同位相振動 [式 (6)]

[Case 2] 初期条件: $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = -x_0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ の場合.
 これらの条件を式(3)に適応し、積分定数を求めて整理すると、

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos \omega_2 t \\ x_2(t) &= -x_0 \cos \omega_2 t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ 。式 (7) のグラフの概略を図 3 に示す。

この場合には、2 個の単振り子是对称的に、すなわち、逆位相で振動する。

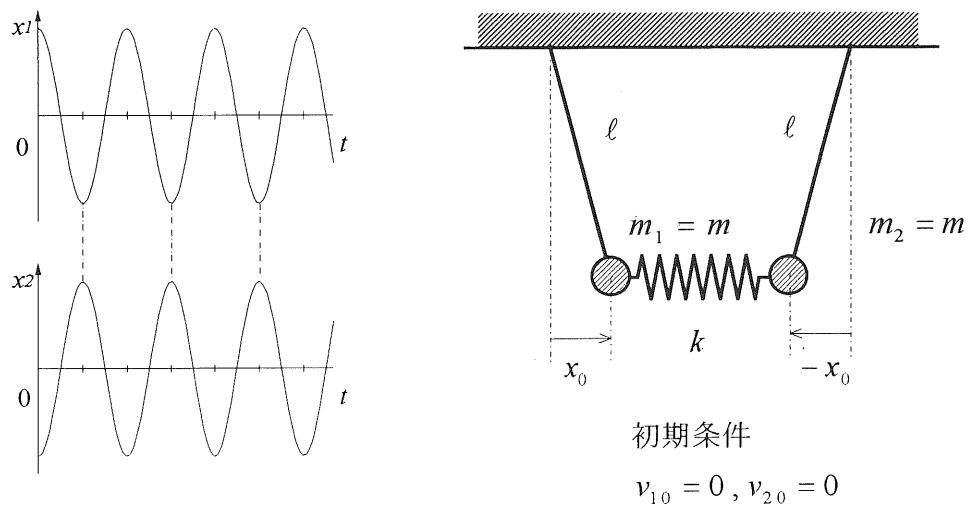


図 3 二つの単振り子の逆位相振動 [式 (7)]

[Case 3] 初期条件： $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ の場合。

これらの条件を式(3)に適応し、積分定数を求めて整理すると、

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ x_2(t) &= x_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)の x_1, x_2 はともになりの式となっている。このグラフの概略を図4に示す。この場合、初期変位を与えた方の振り子は振幅を減少しながら振動し、それとともに最初に静止していた方の振り子は徐々に振幅を増大しながら振動をはじめ、振幅が最大になると前者の振り子はその時静止する。次に両者が入れ替わった振動が起こり、交互に同様な振動が繰り返されることになる。このような振動が振動のうなり現象である。

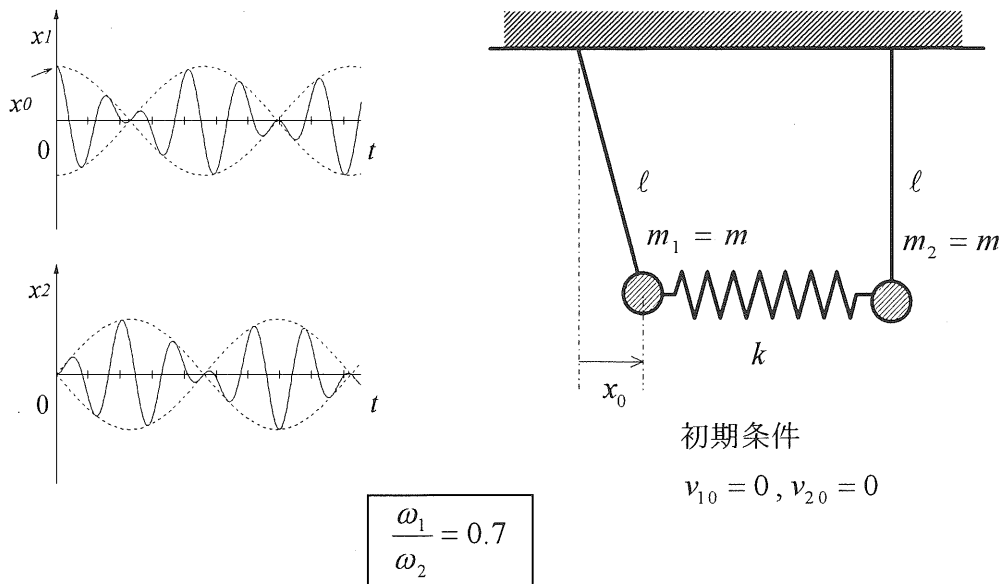
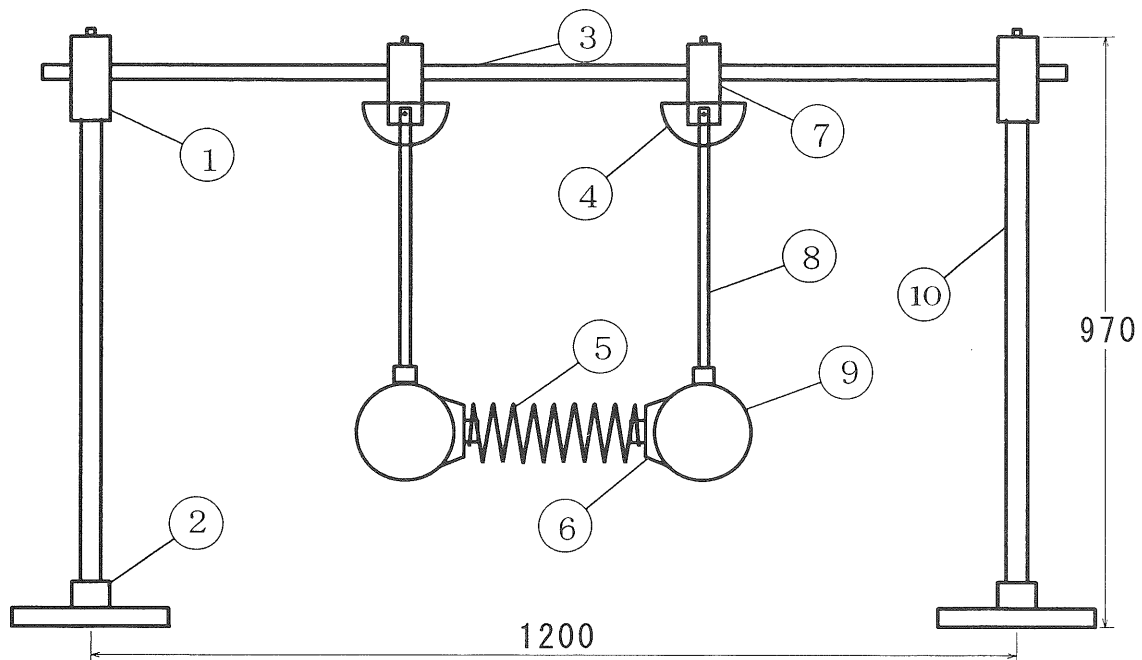


図 4 バネで連結された二つの単振り子のうなり振動 [式(8)]

3 講義用実験装置の試作

講義では100名程度の学生を対象するため、教壇上で実施する実験が教室のどこからでも充分観察できるように装置の大きさについては充分考慮した。また先に述べたように、各部材については積極的に廃棄物等の再利用を心がけた。製作した実験装置の概略を図5に示す。



各部の名称

- ① ジョイント $\phi 45 \times 78$ S45C ② フランジ $\phi 180 \times 26$ S45C ③ パイプ $\phi 19 \times 1800$ ステンレス ④ 分度器 プラスチック ⑤ スリンキーバネ $k =$ バネ定数 0.595 (N/m) プラスチック ⑥ 吸着板 プラスチックとゴム ⑦ 支持板 $40 \times 46 \times 10$ ジュラルミン ⑧ 球を支える棒 $\phi 8 \times 600$ S45C ⑨ 球 $\phi 125$ 真鍮 質量 0.6 kg ⑩ $\phi 20 \times 950$ S45C

図 5 実験装置

3.1 工夫した点

教室のどこからでも見えること、振り子の質量が同一になること、構造が簡単であること、2名で持ち運びが出来ること、出来るだけ廃材を利用してコストを少なくするという意識をもち実践すること、実験を見てうなりのイメージが理解出来ること、に注意をはらい製作した。

3.2 実験方法

実験は2名で行う。各々が球を支える棒⑧を分度器見ながら静かに持ち上げ、各々の初期変位設定を行い、2名同時に手を解放する。

[Case1] [Case 2] [Case 3] とも同様に行う。

4 講義実験の実施内容

講義では、本実験装置を用いて2自由度系の自由振動が初期条件の相違によって異なった振動型となることを視覚的に把握させる。具体的には、2章で述べた

[Case1] [Case 2] [Case 3] の各場合について、理論解析の結果と実際の現象とを比較し2自由度系が同位相または逆位相で振動する場合、さらにうなり振動となる場合を視覚的に理解させることに主眼を置いている。時間の許す限りにおいて、さらに初期条件を任意に与えた場合の振動挙動も実験を通して理解させる。

5 まとめ

講義実験のための実験装置は、工夫すれば、廃棄物等の再利用をはじめ、身近に入手できる材料を用いて容易に製作し得ることを実際に示した。この実験を実際に行って見せたときの学生の反応には顕著なものがあつた。理論について講義しているさいには無表情でうつろな眼をしていた学生達が、実験が始まると身を乗り出し、眼差しが真剣で生き生きしてきたことを感じた。学生の感想にも今までは問題を解いて正解が得られるとそれで満足し、その解の意味する挙動を深く考えることをしなかったが、実際の現象を見てよく理解することができた言っている。今後ともこのような講義実験は可能なかぎり実施すべきであることが痛切に感じられた。

6 謝辞

実験装置製作にあたり、理論分野を支え、ご指導を賜りました、西田公至教授、ならびに齊當建一助教授に心より深く感謝する。製作にあたり有益な助言をいただいた、落合一雄技術専門官、それに心よく廃材を提供して下さった、実習工場の小西敏幸、村本充、両技官、パソコンの指導をしていただいた博士後期課程の井坂秀治、松本大樹の両氏、およびに修士課程の二瓶和範、小林卓哉、両氏、学部生の小栗龍夫氏ほか多くの関係各位に深謝する。