

## 薄肉H形断面ばりの弾性波の位相速度について

ON THE PHASE VELOCITY OF ELASTIC WAVES  
IN THIN-WALLED H SECTION BEAM

能 町 純 雄\*・角 田 与 史 雄\*\*・岸 徳 光\*\*\*

By Sumio NOMACHI, Yoshio KAKUTA and Norimitsu KISHI

## 1. はじめに

棒状体を伝播する曲げたわみ波動については、古典曲げ理論にせん断変形と回転慣性を考慮するいわゆる Timoshenko ばり<sup>1)</sup>によって適用範囲を高周波域まで拡張することができた。また同じ考え方をねじり波動に拡張し Aggarwal と Cranch<sup>2)</sup> は薄肉開断面ばりを立体的に解析する波動理論を展開した。深沢<sup>3)</sup>はこの理論を任意断面形状のばりに拡張している。以上の理論は、薄肉断面においても断面形が不変のまま振動すると仮定しているが、中村<sup>4)</sup> ははりがたわみあるいはねじれを生ずると同時に断面が変形することを考慮した薄肉ばりの自由振動について論じている。

薄肉断面部材に断面不変形を仮定することは低周波領域以外実状にそわないようであるが、一方ひずみの線形分布の仮定においても、高周波部分で伝播速度は厳密解と異なってくる。また、線形分布ひずみが成立するのは、波長が自己断面の寸法より大きい場合のみである<sup>5),6)</sup>。

本論文は、位相速度分散曲線が波動の性質をよく表わす点に注目し、薄板要素の動的微分方程式を忠実に解くことによって得られる関係式を用いて、広く使用されている薄肉H形断面ばりの位相速度分散曲線ならびにモードを求め、その特性を明らかにしつつ、従来のはり理論との比較を行ったものである。

## 2. 解析理論

## (1) 概 要

薄肉はりが数枚の薄板要素から成り立っている場合

\* 正 会 員 工 博 北海道大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正 会 員 工 博 北海道大学助教授 工学部土木工学科

\*\*\* 学 生 会 員 工 修 北海道大学大学院博士課程

には、個々の薄板要素の接線における変位と断面力の剛性関係を求め、これを要素行列として与えられた断面形を表わすように全体の剛性行列を作り上げて応力解析する方法が行われるが、この方法によって薄肉断面ばりの位相速度を求めたものである。薄板要素については、面内変形と面外変形を互いに独立としてそれぞれ動的二次元弾性論および動的平板曲げ理論によって、長軸方向に一定の単色波動を与え微分方程式を忠実に解き、その解から両接線における変位と断面力の剛性関係式を求めたもので、この場合慣性項は係数中に現われる関数中のパラメーターとして入ってくる。本解析は基礎微分方程式を忠実に解いて求めるため、変位関数を多項式に仮定し変分原理に基づいて求める方法<sup>1)</sup>に比べ複雑な形になる。したがって、変位関数の選択や精度向上のための分割数の問題は生じない。また変位関数を多項式に仮定した場合は、剛性マトリックスと質量マトリックスは分離した形で求められ計算上有利であるが、本解析法によるとそれらは区別されない形となる。固有値は動的剛性マトリックスの中に複雑に入り込むため繰り返し算によって求めることになるが、断面および変形の対称性、逆対称性を考えてマトリックスを縮小し単純化した形で計算を行った。

## (2) 動的基本式の誘導

解析にあたり、各薄板要素は等方弾性体で、厚さ  $h$  は

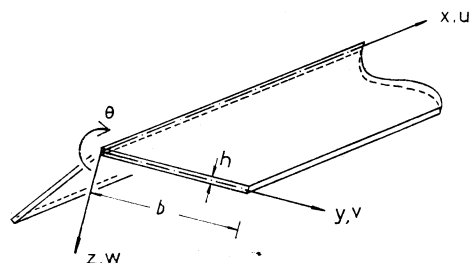


図-1 薄肉断面ばりの薄板要素

幅  $b$  に比べて十分小さく、変形は微小であると仮定する。

図-1 のような任意の薄板要素をとりだし、部材座標を  $x$ - $y$ - $z$  とし、その変位成分を  $u, v, w, x$  軸回りの回転角を  $\theta$ 、時間を  $t$  とする。位相速度および波長を  $c, \lambda$  とし、 $x$  方向への進行波を仮定すれば、各変位成分は次のように示すことができる。

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ v &= V \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ w &= W \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ \theta &= \theta \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $U, V, W, \theta$  は各変位成分の振幅を示し、 $y$  のみの関数値である。解析を進めるにあたり、変位や力の振幅を単に変位、力とよぶこととする。

a) 面内変形の動的基本式

任意の薄板要素において、各座標系の直応力を  $\sigma_x, \sigma_y$ 、せん断応力を  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  とすると、二次元応力問題における力のつり合い式は、慣性力を考慮して次のように表わされる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\rho$  は単位体積質量である。

また、 $E$ ：ヤング係数、 $G(=E/2(1+\nu))$ ：せん断弾性係数、 $\nu$ ：ポアソン比とすると、平面応力問題の Hooke の法則は、

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (6)$$

となる。さらに上式の各応力は式(1)より次のように表わすことができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ \sigma_y &= \sigma_y \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式(1)、(7)を用い、式(4)~(6)の応力と変位の関係式を考慮して、式(2)、(3)にそれぞれ  $\sin n\pi/b \cdot y, \cos n\pi/b \cdot y$  を乗じ、【付録 A】に従って  $0 < y < b$  の間に有限 Fourier 変換<sup>7)</sup>をおこなう。部分積分を施し整理すると、結局、式(1)中の  $U, V$  に関する像関数  $S_n[U], C_n[V]$  は次のように求められる。

$$\left[ \begin{aligned} &2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + (1-\nu) \left\{ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\rho c^2}{G} \right\} \\ &(1+\nu) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{n\pi}{b} \\ &(1+\nu) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{n\pi}{b} \\ &2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + (1-\nu) \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\rho c^2}{G} \right\} \end{aligned} \right] \left\{ \begin{aligned} &S_n[U] \\ &C_n[V] \end{aligned} \right\} \\ = - (1-\nu) \left[ \begin{aligned} &\frac{n\pi}{b} \\ &\frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \right] \bar{U} + \frac{(1-\nu)}{G} \left[ \begin{aligned} &0 \\ &1 \end{aligned} \right] \bar{\sigma}_y \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $S_n[U] = \int_0^b U \sin \frac{n\pi}{b} y dy,$

$C_n[V] = \int_0^b V \cos \frac{n\pi}{b} y dy$

$n=0, 1, 2, \dots$

また、 $\bar{U}, \bar{\sigma}_y$  は  $y=0, b$  における境界物理量からなるもので次のように示される。

$\bar{U} = (-1)^n U_b - U_0$

$\bar{\sigma}_y = (-1)^n \sigma_{y,b} - \sigma_{y,0}$

ここで、サフィックス  $b, 0$  はそれぞれ  $y=b$  点、 $y=0$  点を意味するものとする。

式(8)を  $S_n[U], C_n[V]$  について連立に解き逆変換すると

$$U = -\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n1}} \left[ 2(1-\nu) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ \nu + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho c^2}{G} \right\} \right] \bar{U} + \frac{(1-\nu^2)}{G} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \bar{\sigma}_y \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \dots\dots (9)$$

$$V = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \left\{ \frac{1}{G} \cdot (\sigma_{y,b} - \sigma_{y,0}) - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (U_b - U_0) \right\} - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n1}} \left[ 2(1-\nu) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left[ -\nu \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho c^2}{G} \right\} \right] \bar{U} - \frac{(1-\nu)}{G} \left[ (1-\nu) \cdot \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + 2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho c^2}{G} \right\} \right] \bar{\sigma}_y \right] \cos \frac{n\pi}{b} y \dots\dots (10)$$

となる。ただし、 $a_{n1}, a_2$  は、

$a_{n1} = 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\rho c^2}{G} \right\} \right]$

$\cdot \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\rho c^2}{G} \right\} \right]$

$a_2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{\rho c^2}{G} \right\}$

である。

ここで、座標、位相速度を無次元化して次のように定義する。すなわち

$$\eta=y/b, V_E=c/c_s, V_p=c_p/c_s \dots \dots \dots (11)$$

ただし,  $0 \leq \eta \leq 1$  であり,

$$c_s = \sqrt{G/\rho}, c_p = \sqrt{E/\{(1-\nu^2)\rho\}}$$

である。ここに,  $c_s$  はせん断波速度とよばれるものである。さらに

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{2b}{\lambda}\right)^2 \alpha_1^2, \alpha_1^2 = 1 - V_E^2$$

$$\lambda_2^2 = \left(\frac{2b}{\lambda}\right)^2 \alpha_2^2, \alpha_2^2 = 1 - V_E^2/V_p^2$$

とにおいて, 式(9),(10)に有限 Fourier 変換公式【付録B】を用いて整理すると  $U(\eta), V(\eta)$  は,

$$U(\eta) = Q_0(\eta)U_0 + Q_1(1-\eta)U_b + \frac{(1+\nu)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \cdot \left[ \bar{Q}_{12}(\eta)U_0 + \bar{Q}_{12}(1-\eta)U_b - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{1}{2G} \cdot \{\bar{Q}_{12}(\eta)\sigma_y\}_0 + \bar{Q}_{12}(1-\eta)\sigma_y\} \right] \dots (12)$$

$$V(\eta) = \frac{1}{\alpha_1} \left[ \xi_1(\eta)U_0 - \xi_1(1-\eta)U_b - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{1}{G} \cdot \{\xi_1(\eta)\sigma_y\}_0 - \xi_1(1-\eta)\sigma_y\} \right] - \frac{1+\nu}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \cdot \left[ \bar{\xi}_{\alpha_{12}}(\eta)U_0 - \bar{\xi}_{\alpha_{12}}(1-\eta)U_b - \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{1}{2G} \cdot \{\bar{\xi}_{\alpha_{12}}(\eta)\sigma_y\}_0 - \bar{\xi}_{\alpha_{12}}(1-\eta)\sigma_y\} \right] \dots (13)$$

ただし,  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  は負の値をもつ可能性があるので注意を必要とする。また,  $\bar{Q}_{12}(\eta), \bar{\xi}_{\alpha_{12}}(\eta)$  などについては【付録B】に示すとおりである。

したがって, 境界の応力は式(12),(13)より容易に求めることができる。たとえば,  $\sigma_y$  は式(13)に  $\eta=0, 1$  を代入して二元連立方程式より求められ,  $\tau_{xy}$  も式(1),(7)を用いて式(6)に式(12),(13)を代入することにより求められる。

以上より, 面内変形に関する境界の応力は, すべて境界の変位のみで示すことができた。

断面力を  $T=h \cdot \tau_{xy}, S=h \cdot \sigma_y$  とおき, 座標の正の向きを正として整理すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} T_0 \\ S_0 \\ T_b \\ S_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_5^* & A_1 & A_6^* & A_2 \\ & A_3 & -A_2 & -A_4 \\ & & A_5^* & -A_1 \\ \text{Symm.} & & & A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ U_b \\ V_b \end{Bmatrix} \dots (14)$$

式(14)が薄板要素の面内変形に関する動的基本式である。なお, 係数マトリックスの要素は次のようになる。つまり,

$$\xi_u(\eta) = \frac{\xi_1(\eta)}{\alpha_1} - \frac{(1+\nu)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)} \cdot \bar{\xi}_{\alpha_{12}}(\eta)$$

$$\xi_v(\eta) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi_1(\eta)}{\alpha_1} + \xi_u(\eta) \right\}$$

$$\xi_w(\eta) = -2\xi_u(\eta) + \left( \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1} \right) \xi_1(\eta)$$

とおくと,

$$A_0 = -\{\xi_v^2(0) - \xi_v^2(1)\}$$

$$A_1 = -Gh \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \{\xi_u(0)\xi_v(0) - \xi_u(1)\xi_v(1)\}/A_0$$

$$A_2 = Gh \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \{\xi_u(0)\xi_v(1) - \xi_u(1)\xi_v(0)\}/A_0$$

$$A_3 = Gh \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \xi_v(0)/A_0$$

$$A_4 = Gh \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \xi_v(1)/A_0$$

$$A_5 = Gh \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \xi_w(0)$$

$$A_6 = Gh \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \xi_w(1)$$

$$A_7 = \xi_u(0)$$

$$A_8 = \xi_u(1)$$

$$A_5^* = (A_5 - A_1A_7 - A_2A_8)$$

$$A_6^* = -(A_6 - A_2A_7 - A_1A_8)$$

である。

b) 面外変形の動的基本式

図-1において, 薄板要素の  $x, y$  軸まわりの曲げモーメントをそれぞれ  $M_y, M_x$ , ねじりモーメントを  $M_{yx}$  とすると, 曲げのつり合い式は慣性力を考慮して,

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots (15)$$

と示される。上式における断面力および  $y$  軸方向の反力  $R_y$  と曲率との関係式は薄板の曲げ剛性を  $D(=Eh^3/12(1-\nu^2))$  とすると,

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots (16)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots (17)$$

$$M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots (18)$$

$$R_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \dots (19)$$

となり, また, 上式の各断面力は式(1)の仮定より次のように表わすことができる。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \mathbf{M}_x \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ M_y &= \mathbf{M}_y \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ M_{yx} &= \mathbf{M}_{yx} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ R_y &= \mathbf{R}_y \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

式(1),(20)を用い, 式(16)~(18)を考慮して, 式(15)に  $\sin n\pi/b \cdot y$  を乗じ【付録A】に従って  $0 < y < b$  の間に有限 Fourier 変換<sup>7)</sup>をおこなう。部分積分を行い境界条件を考慮して整理すると, 式(1)中の  $W$  に関する像関数  $S_n[W]$  は次のようになる。

$$\left[ D \left\{ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 - \rho h \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 c^2 \right] S_n[W] \\ = -\frac{n\pi}{b} \left[ \bar{M}_y + D \left\{ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + (2-\nu) \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right\} \bar{W} \right] \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし

$$S_n[W] = \int_0^b W \sin \frac{n\pi}{b} y dy, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

また、 $\bar{M}_y, \bar{W}$  は  $y=0, b$  における境界物理量からなるもので次のように示される。

$$\bar{M}_y = (-1)^n M_{y,b} - M_{y,0}$$

$$\bar{W} = (-1)^n W_b - W_0$$

ここで、サフィックス  $b, 0$  は面内変形の場合と同様に  $y=b$  点,  $y=0$  点を意味するものとする。

式 (21) を逆変換することにより  $W$  は、

$$W = -\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n3}} \cdot \frac{n\pi}{b} \left[ \bar{M}_y + D \left\{ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + (2-\nu) \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right\} \bar{W} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、

$$a_{n3} = D \left\{ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 - \rho h \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 c^2$$

である。

ここで、式 (11) を用い次のような記号を導入する。

$$\lambda_3^2 = \left( \frac{2b}{\lambda} \right)^2 \alpha_3^2 \quad \alpha_3^2 = 1 - V_E \left/ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_p V_p \right) \right.$$

$$\lambda_4^2 = \left( \frac{2b}{\lambda} \right)^2 \alpha_4^2 \quad \alpha_4^2 = 1 + V_E \left/ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_p V_p \right) \right.$$

ただし、 $r_p (=h/\sqrt{12})$  は薄板要素の断面二次半径とする。

式 (22) より、 $W$  と  $\theta (= \partial W / \partial y)$  は【付録 B】によって次のように示される。すなわち、

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{2\pi}{\lambda} W(\eta) \\ \theta(\eta) \end{array} \right\} = \frac{1}{(\alpha_3^2 - \alpha_4^2)} \left[ -\frac{1}{D} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \right. \\ \cdot \left. \begin{array}{c} \bar{Q}_{34}(\eta) \quad \bar{Q}_{34}(1-\eta) \\ -\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(\eta) \quad \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1-\eta) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} M_{y,0} \\ M_{y,b} \end{array} \right\} \\ + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \left[ \begin{array}{c} \bar{Q}\bar{\alpha}_{34}^2(\eta) - (2-\nu)\bar{Q}\bar{\alpha}_{34}(\eta) \\ -\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(\eta) + (2-\nu)\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(\eta) \\ \bar{Q}\bar{\alpha}_{34}^2(1-\eta) - (2-\nu)\bar{Q}\bar{\alpha}_{34}(1-\eta) \\ \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(1-\eta) - (2-\nu)\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1-\eta) \end{array} \right] \\ \left\{ \begin{array}{c} W_0 \\ W_b \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式中  $\lambda_3^2$  は、面内変形における  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  と同様負の値をもつ可能性を含んでいる。また、 $\bar{Q}\bar{\alpha}_{34}(\eta), \bar{Q}\bar{\alpha}_{34}^2(\eta), \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(\eta)$  は【付録 B】に示すとおりである。

境界断面力  $M_y$  は式 (23) の  $\theta(\eta)$  に  $\eta=0, \eta=1$  を代入して二元連立方程式より求める。 $R_y$  も、式 (1), (20) を用い、式 (19) に式 (23) を代入することにより求められる。

以上より、薄板要素の面外変形に関する境界断面力をすべて境界変位で表現することができた。座標の増加の向きを正として整理すると面外変形の動的基本式は、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{c} R_{y,0} \\ M_{y,0} \\ R_{y,b} \\ M_{y,b} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} -B_5^* & B_1 & B_6^* & B_2 \\ & B_3 & -B_2 & B_4 \\ & & B_3^* & -B_1 \\ \text{Symm.} & & & B_3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} W_0 \\ \theta_0 \\ W_b \\ \theta_b \end{array} \right\} \quad \dots\dots (24)$$

ここで、係数マトリックスの要素は、

$$B_5 = \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(0)^2 - \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1)^2$$

$$B_1 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 D \left[ \{ \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(0) \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(0) \} \right. \\ \left. - \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(1) \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1) \right] / B_0 - (2-\nu)$$

$$B_2 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 D \{ \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(1) \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(0) \} \\ - \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(0) \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1) / B_0$$

$$B_3 = \frac{2\pi}{\lambda} D (\alpha_3^2 - \alpha_4^2) \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(0) / B_0$$

$$B_4 = -\frac{2\pi}{\lambda} D (\alpha_3^2 - \alpha_4^2) \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1) / B_0$$

$$B_5 = \frac{2\pi}{\lambda} \{ -\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(0) + (2-\nu)\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(0) \} / (\alpha_3^2 - \alpha_4^2)$$

$$B_6 = \frac{2\pi}{\lambda} \{ -\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(1) + (2-\nu)\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1) \} / (\alpha_3^2 - \alpha_4^2)$$

$$B_7 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 D \{ \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^5(0) - 2(2-\nu)\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(0) \} \\ + (2-\nu)^2 \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(0) / (\alpha_3^2 - \alpha_4^2)$$

$$B_8 = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^3 D \{ \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^5(1) - 2(2-\nu)\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^3(1) \} \\ + (2-\nu)^2 \bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}(1) / (\alpha_3^2 - \alpha_4^2)$$

$$B_5^* = -(B_7 + B_1 B_5 + B_2 B_6)$$

$$B_6^* = (B_8 + B_2 B_5 + B_1 B_6)$$

となる。ただし、 $\bar{\xi}\bar{\alpha}_{34}^5(\eta)$  は【付録 B】に示すとおりである。

### (3) 任意断面ばりの動的 basic 式および固有行列式

任意断面形状のはりにおいて、節点  $i, j$  を有する薄板要素を  $ij$  要素とすると、 $ij$  要素に関する部材座標系についてのマトリックス関係式は次のようになる。

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで  $\{F\}, \{d\}$  それぞれ節点力、節点変位ベクトルであり、サフィックス  $i, j$  を (2) の **a), b)** における  $0, b$  に対応させると次のように表わすことができる。すなわち

$$\{F\} = [T_i S_i R_{y,i} M_{y,i} T_j S_j R_{y,j} M_{y,j}]^T \quad \dots\dots (26)$$

$$\{d\} = [U_i V_i W_i \theta_i U_j V_j W_j \theta_j]^T$$

また、 $[K]$  は、式 (26) に対応する  $8 \times 8$  の動的剛性マトリックスであり、式 (14), (24) よりただちに求まる。

構造全体の動的剛性マトリックスを作るためには式(25)を全体座標系へ変換する必要がある。

いま、図-2のように全体座標系をとると、座標変換により全体座標系における節点力、節点変位ベクトル  $\{\bar{F}\}$ ,  $\{\bar{U}\}$  は、

それぞれ、 $\{\bar{F}\} = [T]^{-1}\{F\}$ ,  $\{\bar{U}\} = [T]^{-1}\{U\}$  として示される。ここで座標変換マトリックス  $[T]$  は、

$$[T] = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

ただし

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。したがって、 $ij$  要素の全体座標系における動的剛性マトリックス  $[\bar{K}]$  は、

$$[\bar{K}] = [T]^{-1}[K][T] \dots\dots\dots (28)$$

となる。

式(28)を各要素に適用して、節点における力のつり合いと変位の適合条件のもとに重ね合せをおこない、構造全体の動的剛性マトリックス  $[\bar{K}_{st}]$  を完成する。

構造全体の外力、変位ベクトルを  $\{\bar{P}_{st}\}$ ,  $\{\bar{U}_{st}\}$  とおくと、次のような関係式が成立する。

$$\{\bar{P}_{st}\} = [\bar{K}_{st}]\{\bar{U}_{st}\} \dots\dots\dots (29)$$

上式が薄板要素より構成された任意断面形状ばりの動的基本式である。

ここで、 $\{\bar{P}_{st}\} = 0$ ,  $\{\bar{U}_{st}\} \neq 0$  とおけば、式(29)は、

$$[\bar{K}_{st}]\{\bar{U}_{st}\} = \{0\} \dots\dots\dots (30)$$

となり、結局、次のように示される。

$$[\bar{K}_{st}] = 0 \dots\dots\dots (31)$$

上式が、波長  $\lambda$  に対する薄板要素より成る任意断面形状ばりの位相速度を求める固有行列式である。

節点変位モードは、式(30)に位相速度を代入して求められ、節点力モードも式(25)を用いることによって求めることができる。また、任意の板要素上の変位モード分布は、これら節点物理量モードを式(12), (13), (23)に代入することによって求まる。

なお、式(31)の固有行列式において、固有値としての位相速度が、変位を表わす関数形の中にパラメータとして複雑に入り込むため、数値計算は繰返し算によって行われなければならないが、本論文においては、一次補間反復公式<sup>9)</sup>を用いて求めている。また、長軸直角方向の自由度が無限であるから任意の波長に対して無限個

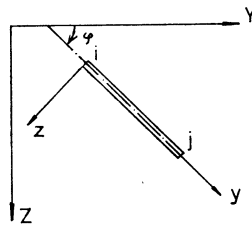


図-2  $ij$  要素に関する座標系

の位相速度が存在する。

### 3. 波動伝播の数値解析例

図-3に示すように、薄肉H形断面ばりにおいて、Y軸を強軸、Z軸を弱軸とし、断面形状比、材料定数は、

$$\begin{aligned} B/H &= 1 \\ h_f/H &= 1/30 \\ (h_f = h_w) \\ \nu &= 0.30 \end{aligned}$$

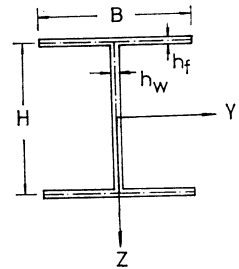


図-3 薄肉H形断面ばり

とする。この場合要素の分

割数は5となる。また、波長を無次元化して次のように定義する。

$$\alpha = H/\lambda \dots\dots\dots (32)$$

二軸対称断面であるから変形の対称性を考えて、表-1のように4種類の波動パターンを設定することとする。したがって、各波動パターンの固有行列式は  $8 \times 8$  の大きさとなる。固有値としての位相速度は、行列式の各要素を共通因子で除し  $10^{-7}$  を零基準にとって求めたが、なんら障害は生じなかった。

図-4~7は、表-1に分類した各波動パターンの最

表-1 波動パターン

波動パターン	変位	強軸に関して	弱軸に関して
強軸回りの曲げ波動	V W	逆対称 逆対称	対称 対称
弱軸回りの曲げ波動	V W	対称 対称	逆対称 逆対称
曲げねじり波動	V W	逆対称 逆対称	逆対称 逆対称
縦波動	V W	対称 対称	対称 対称

V: 各節点の強軸 (Y 軸) 方向変位  
W: 各節点の弱軸 (Z 軸) 方向変位

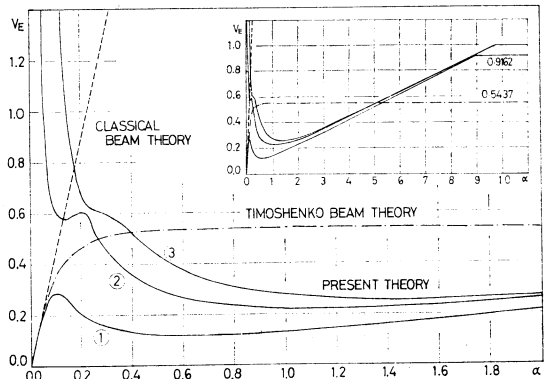
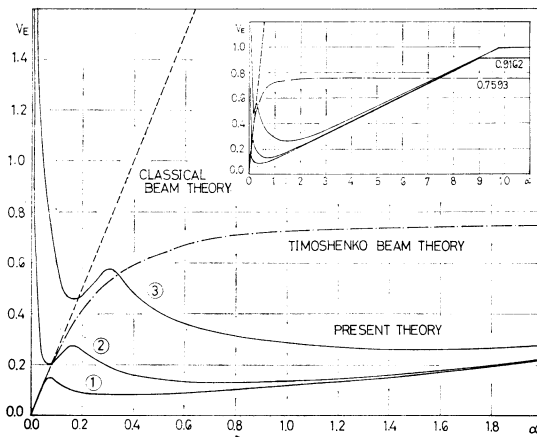
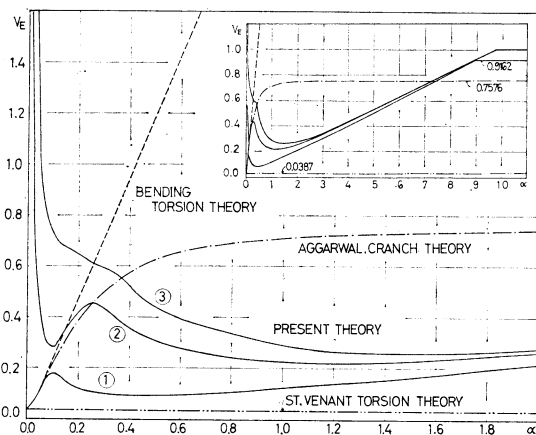


図-4 強軸回りの曲げ波動分散曲線

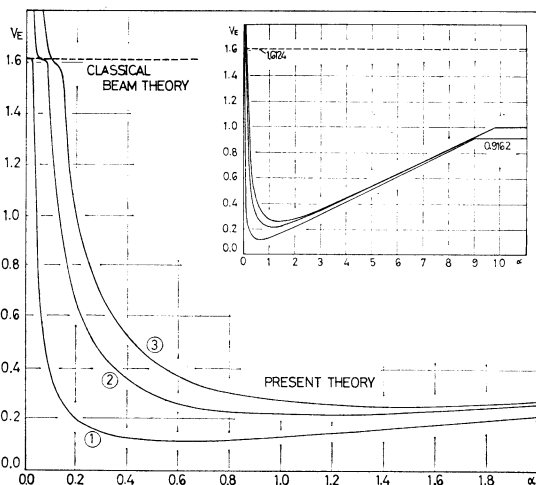
低次より 3 次までの位相速度分散曲線（図中には，①，②，③として示されていて，これらをそれぞれ，第 1 次，第 2 次，第 3 次分散曲線とよぶこととする）を Timo-



図—5 弱軸回りの曲げ波動分散曲線



図—6 曲げねじり波動分散曲線



図—7 縦波動分散曲線

shenko ばりの分散曲線といっしょに描いたものである。また，図—8～11には，第 1 次分散曲線について各周波数領域の特徴をよく表わしている  $\alpha=0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 6.0, 10.0$  の代表的な 7 例をとり上げ，断面変形モードと軸方向変位モードをそれぞれの最大変位を 1 として図示してある。したがって，それぞれのモードの大きさを図によって比較することはできない。図示されているすべてのパターンについての  $\alpha=10.0$  の場合，また，図—11 の  $\alpha=0.01$  の場合，断面変形モードの大きさは非常に小さく他に比べてほとんど 0 に近い。なお，Timoshenko ばりに用いられる平均せん断係数は，Cowper の理論式<sup>9)</sup>を採用したものである。

以下，それぞれの波動パターンについて順に説明する。

a) 強軸回りの曲げ波動（図—4，8）

第 1 次分散曲線については，0 から直線的に増加し， $\alpha=0.1$  で極大値をとり，ゆるやかに減少して， $\alpha=0.6$  で極小となり，徐々に増加し  $\alpha=9.0$  でほぼ不連続的に一定値 ( $V_E=0.9162$ ) になる。この値は，平面応力状態の  $\nu=0.3$  における Rayleigh 波速度とせん断波速度の比の値である。不連続線の存在することは，高周波に近づくくと固有行列式が曲げ振動に関するものと Rayleigh 波を生ずるものと積の形になることから明らかに示される。第 2，第 3 次分散曲線は，大きな値から双曲線的に減少し，また増大して  $\alpha=9.75$  でせん断波速度 ( $V_E=1.0$ ) に漸近している。また，モード分布については  $\alpha=0.1$  くらいまでは，はり理論で仮定されている平面保持を示しているが， $\alpha$  の増加とともに節点に集中する局所的モードを示し，軸方向変位分布は線形分布と大きく隔たる。断面変形については，フランジ部が片持ち板として曲げ振動を起こし，それによる波動が卓越するようすを示している。 $\alpha=10.0$  のモード分布は，Rayleigh 波が優越する状態となり自由端部に局在して波動が伝播するありさまを示している。いわゆる Cooper<sup>10)</sup> の“Skin waves”である。

古典理論は，よく知られているように，低周波領域以外で適用は不可能であり，Timoshenko ばりをモデルとして用いる場合も高周波領域で一定の速度に漸近はするが，Rayleigh 波速度と一致せず，また，断面変形を無視しているので，周波数がある程度以上になるとまったく異なった分散性状を示すようである。

b) 弱軸回りの曲げ波動（図—5，9）

第 1 次分散曲線は， $\alpha=0.075, 0.3$  前後でそれぞれ極大値，極小値となり， $\alpha > 9.0$  で Rayleigh 波速度となることは前と同様である。第 2，3 次分散曲線もほぼ  $\alpha=9.75$  でせん断波速度に漸近する。断面変形のモードは， $\alpha=0.1$  ですではり全体としてよりむしろフラン

ジ部またはウェブの薄板の曲げによる影響が波動に卓越しており、分散曲線が断面変形に著しく影響されることを表わしている。軸方向変位モードも、 $\alpha=0.5$  まではほぼ平面保持が成立しているものの、やはり $\alpha$ の増加とともに非線形分布となり、Rayleigh 波の状態では、 $\alpha=$

10.0 のように端部に局在する形で波動が進むことを示している。

古典はり理論は強軸回りの曲げ波動と同様適用範囲が低周波領域に限定される。さらに、Timoshenko ばりによる結果も、高周波領域で前の場合と同様に一定速度

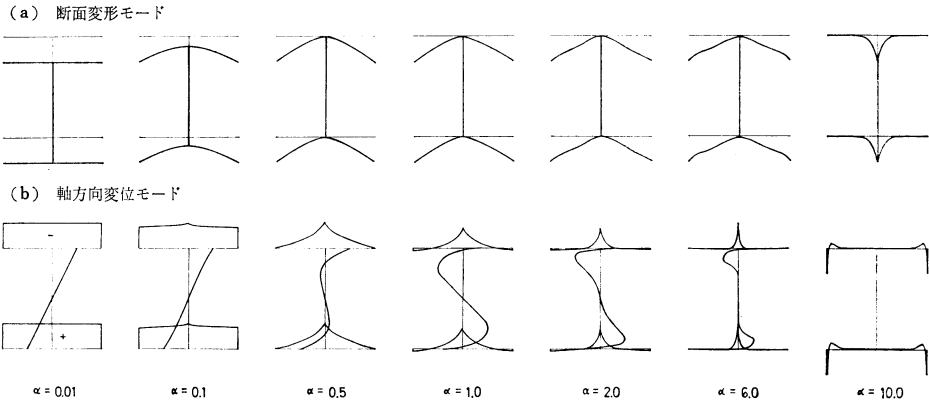


図-8 強軸回りの曲げ波動のモード

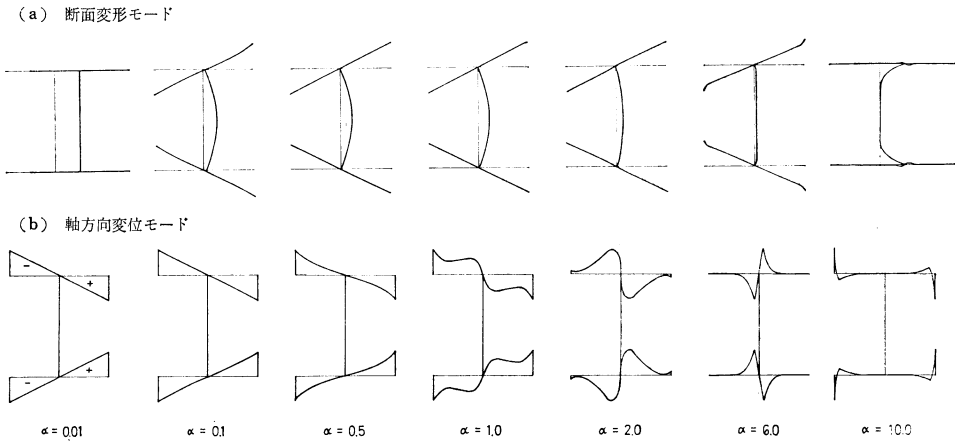


図-9 弱軸回りの曲げ波動のモード

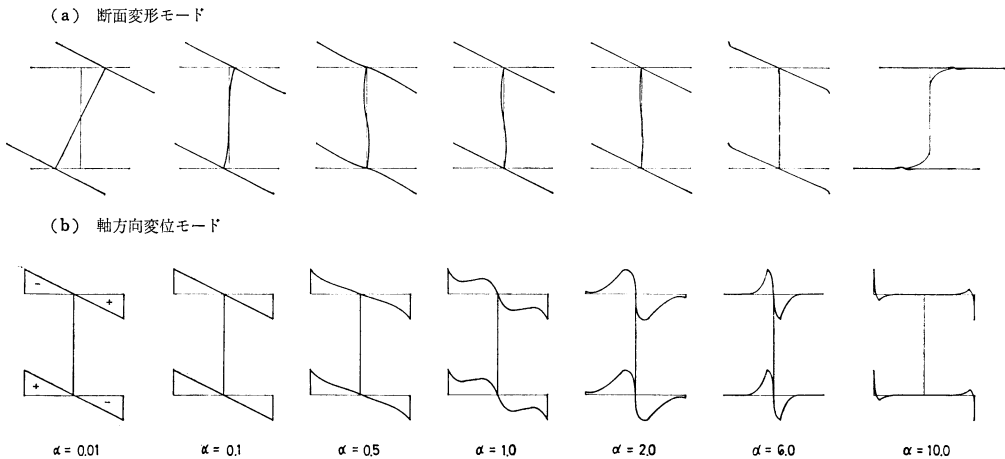


図-10 曲げねじり波動のモード

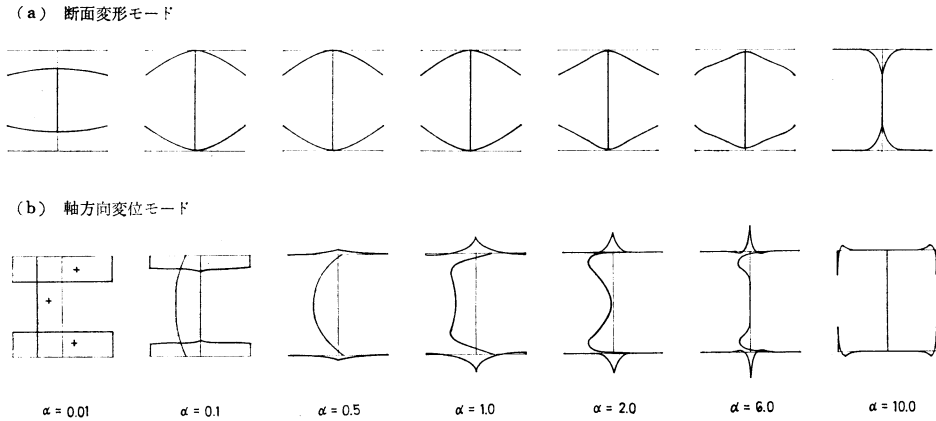


図-11 縦波動のモード

に漸近はするが、Rayleigh 波の速度とは異なった値に近づき、周波数が一定値以上になると適用できない。

#### c) 曲げねじり波動 (図-6, 10)

この場合、前の2例と異なり、第1次分散曲線は St.-Venant のねじり理論と等しい値をとる。また、 $\alpha=0.1$ , 0.4 前後でそれぞれ極大値、極小値を示し、 $\alpha > 9.0$  では Rayleigh 波速度となる。第2, 第3次分散曲線も  $\alpha \approx 9.75$  前後でせん断波速度に漸近する。モード分布から、断面不変形を仮定して得られる分散曲線が、本解析法による解に対してよい一致をみるのは、ほぼ  $\alpha=0.1$  前後までである。また、 $\alpha$  の増加とともに、フランジ部の薄板の曲げの影響が強く波動に卓越することがわかる。さらに  $\alpha$  が増加すると Rayleigh 波速度に近づき、波動は断面の自由端部に局在するようになる。

はり理論の適用を分散曲線から読みとれば、St.-Venant のねじり理論は波長無限大の場合のみ有効であり、その影響を考慮した曲げねじり理論<sup>11)</sup>による結果も高周波領域で無限大となることから適用範囲は低周波領域に限定されると考えられる。Aggarwal と Cranch の理論<sup>2)</sup>は、高周波領域で一定速度に漸近するように工夫されているが Rayleigh 波速度に一致せず、周波数がある程度以上ではまったく異なったものとなる。

#### d) 縦波動 (図-7, 11)

この場合、3つの分散曲線とも  $\alpha \approx 0.1$  で音波より小さい速度となり双曲線的な形で速度が減少し、次に直線的に増加する。第1次分散曲線は  $\alpha=0.5$  前後で、第2, 第3次分散曲線もそれぞれ  $\alpha=1.0, 1.5$  前後で極小値をとる。これは、フランジの片持ち板の曲げ効果の影響と考えられる。そして、 $\alpha$  の増加とともに単調に増加して、前者は Rayleigh 波速度に、後者2曲線はせん断波速度に漸近する。モード分布からも  $\alpha=0.1$  でのフランジ部の片持ち板としての曲げの影響がよくわかる。 $\alpha$  の増加とともに、軸方向変位モードも断面内に複雑な分布を示

すようになる。また、 $\alpha=10.0$  のモードは Rayleigh 波の断面自由端部に波動が局在する状態を示している。

この場合も古典はり理論は、低周波領域のみ適用可能であることがわかる。

#### 4. む す び

動的平面応力のつり合い式と、動的平板曲げのつり合い式の基本方程式から導かれた薄板要素の境界断面力と境界変位の関係式を組み合わせて、薄肉H形断面ばりの固有行列式を導き、波動の位相速度分散曲線を求めた。結果を要約すれば、波動伝播特性はそのはりを構成する薄板要素の曲げ振動に大きく影響され、特に最低次分散曲線については次の3部分に分けられる。

(1) 低周波領域では、従来のはり理論による波動に支配される。

(2) 中間部周波数領域では、はりを構成する薄板要素の曲げ振動による波動に支配される。

(3) 高周波領域では自由端部における Rayleigh 波による波動に支配される。

以上の結果は、薄肉H形断面ばりだけでなく、その他の薄肉ばりについてもあてはまると考えられる。本論文に示した解析方法は、薄板要素からなる任意断面ばりに応用可能であるから、その他のはりについてさらに検討する予定である。薄板要素の曲げについては Mindlin Plate<sup>12)</sup> を用いれば、さらに高い周波数領域の位相速度を検討できるので、これを今後の課題としたい。

なお、ここに述べた解析理論は、特に面内変形に関してはポテンシャル論より誘導された矩形ばりの波動理論<sup>13)</sup>、また、面外変形については井口により誘導された理論式<sup>14)</sup>と一致することを確かめている。

また、数値計算は、北海道大学大型計算機センター FACOM 230-60, 230-75 を用いて行われたものである。



参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. : On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars, Phil.Mag., Series 6, Vol. 41, pp. 744~746, 1921.
- 2) Aggarwal, H.R. and E.T. Cranch : A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams, Jour. of Applied Mech., pp. 337~343, June, 1967.
- 3) 深沢泰晴 : 薄肉ばりの曲げねじれ振動波の伝播について, 土木学会年次講演会概要集, I-221, 1973.
- 4) 中村秀治 : 断面変形を考慮した薄肉ばりの振動解析, 土木学会論文報告集, 第223号, pp. 11~12, 1974年3月.
- 5) Abramson, H.N., H.J. Plass and E.A. Ripperger : Stress Wave Propagation in Rods and Beams, Advanced in Applied Mech., V, pp. 111~188, 1958.
- 6) 能町純雄・角田与史雄・岸 徳光 : ロングストリップエレメント法によるシャイベの波動伝播について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第31号, pp. 289~292, 昭和50年2月.
- 7) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, Chap. 3, McGraw-Hill, 1951.
- 8) McCormick, J.M. and M.G. Salvadori 著 清水留三郎 訳 : Fortran による数値計算プログラム, サイエンス社, pp. 53~62, 1972.
- 9) Cowper, G.R. : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Jour. of Applied Mech., pp. 335~340, June, 1966.
- 10) Cooper, J.L. : The Propagation of Elastic Waves in a Rod, Phil. Mag., Series 7, Vol. 38, pp. 1~22, Jan., 1947.
- 11) Gere, J.M. : Torsional Vibration of Beams of Thin-Walled Open Section, Jour. of Applied Mech., pp. 381~387, Decem., 1954.
- 12) Mindlin, R.D. : Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, Jour. of Applied Mech., pp. 31~38, Mar., 1951.
- 13) Ewing, W.M., W.S. Jardetzky and F. Press : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, pp. 281~288, 1957.
- 14) 井口鹿象 : 相対2辺が単純支承他の2辺が自由なる矩形版の振動に就て, 土木学会論説報告, 第26巻, 第4号, pp. 427~440, 1940年4月.

【付録 A】 有限 Fourier 変換および逆変換<sup>7)</sup>

関数  $f(x)$  が  $0 < x < a$  で Diriclet の条件を満足するものとして, これの有限 Fourier 変換を次のように表わすと,

$$S_n[f(x)] = \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \dots\dots\dots (A.1)$$

$$C_n[f(x)] = \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx \dots\dots\dots (A.2)$$

ただし

$$n=1, 2, 3, \dots$$

この逆変換は  $0 < x < a$  でそれぞれ次のように求められる。

$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} S_n[f(x)] \sin \frac{n\pi}{a} x \dots\dots\dots (A.3)$$

$$f(x) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n[f(x)] \cos \frac{n\pi}{a} x \dots\dots\dots (A.4)$$

【付録 B】 有限 Fourier 変換公式

有限 Fourier 変換公式はすでに発表されているが, ここでは, 本論に必要な公式のみを述べる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \lambda_i^2} \sin n\pi\eta = \frac{\pi}{2} Q_i(\eta) \quad (0 < \eta \leq 1) \dots\dots\dots (B.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \lambda_i^2} \cos n\pi\eta = \frac{1}{2\lambda_i^2} \{ \pi\lambda_i \xi_i(\eta) - 1 \} \quad (0 \leq \eta \leq 1) \dots\dots\dots (B.2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + \lambda_i^2)(n^2 + \lambda_j^2)} \sin n\pi\eta = -\frac{\pi}{2(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)} \{ Q_i(\eta) - Q_j(\eta) \} \quad (0 \leq \eta \leq 1) \dots\dots\dots (B.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + \lambda_i^2)(n^2 + \lambda_j^2)} \cos n\pi\eta = \frac{\pi}{2(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)} \{ \lambda_i \xi_i(\eta) - \lambda_j \xi_j(\eta) \} \quad (0 \leq \eta \leq 1) \dots\dots\dots (B.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2 + \lambda_i^2)(n^2 + \lambda_j^2)} \sin n\pi\eta = \frac{\pi}{2(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)} \{ \lambda_i^2 Q_i(\eta) - \lambda_j^2 Q_j(\eta) \} \quad (0 < \eta \leq 1) \dots\dots\dots (B.5)$$

ここで,  $\lambda_i^2 > 0$  の場合, 関数  $Q_i(\eta)$ ,  $\xi_i(\eta)$  は次のように表わされる。

$$Q_i(\eta) = \frac{\cosh \pi\lambda_i(2-\eta) - \cosh \pi\lambda_i\eta}{\cosh 2\pi\lambda_i - 1} \dots\dots\dots (B.6)$$

$$\xi_i(\eta) = \frac{\sinh \pi\lambda_i(2-\eta) + \sinh \pi\lambda_i\eta}{\cosh 2\pi\lambda_i - 1} \dots\dots\dots (B.7)$$

さらに,  $Q_i(\eta)$  と  $\xi_i(\eta)$  は, 次のように関係づけられる。

$$\frac{dQ_i(\eta)}{d\eta} = -\pi\lambda_i \xi_i(\eta) \dots\dots\dots (B.8)$$

$$\frac{d\xi_i(\eta)}{d\eta} = -\pi\lambda_i Q_i(\eta) \dots\dots\dots (B.9)$$

また,  $\lambda_i^2 < 0$  の場合は  $\lambda_i^2 = -\lambda_i^{*2}$  とすることにより, 類似の公式が求められる。なお, サフィックス  $j$  の場合についても, サフィックス  $i$  の場合に順ずるものとする。さらに, 諸式の煩雑さを避けるため次のような置き換えをおこなった。すなわち

$$\bar{Q}_{ij}(\eta) = Q_i(\eta) - Q_j(\eta) \dots\dots\dots (B.10)$$

$$\bar{Q}_{\alpha ij^2}(\eta) = \alpha_i^2 Q_i(\eta) - \alpha_j^2 Q_j(\eta) \dots\dots\dots (B.11)$$

$$\bar{\xi}_{ij}(\eta) = \xi_i(\eta) - \xi_j(\eta) \dots\dots\dots (B.12)$$

$$\bar{\xi}_{\alpha ij}(\eta) = \alpha_i \xi_i(\eta) - \alpha_j \xi_j(\eta) \dots\dots\dots (B.13)$$

$$\bar{\xi}_{\alpha ij^3}(\eta) = \alpha_i^3 \xi_i(\eta) - \alpha_j^3 \xi_j(\eta) \dots\dots\dots (B.14)$$

$$\bar{\xi}_{\alpha ij^5}(\eta) = \alpha_i^5 \xi_i(\eta) - \alpha_j^5 \xi_j(\eta) \dots\dots\dots (B.15)$$

である。ただし,  $i, j=1, 2, 3, 4$  である。