

放射熱伝達の解析に用いるモンテカルロ法の
演算時間の短縮に関する研究*

媚 山 政 良**

A Study on the Reduction of Computing Time of the Monte
Carlo Method Applied to the Radiative Heat Transfer

by Masayoshi KOBAYAMA

A modified Monte Carlo method is suggested to reduce the computing time and improve the convergent stability of the iteration process. This method succeeds the advantages of the usual Monte Carlo method, that is, adaptability to the complex geometry of the heat transfer system and to the variable property problem. And in this method, the numbers of the radiative bundles emitted from the control elements are proportional to the difference between the emissive energy by two successive iterative turns and the other kind of bundle is emitted to correct the variation of the radiative property between two iterative turns. The analytical examples show that this method is able to reduce the computing time remarkably and to improve the convergent stability sufficiently.

Key Words: Thermal Radiation, Monte Carlo Method, Variable Property, Computing Time, Convergent Stability, Iteration

1. 緒 言

放射熱伝達が系の伝熱現象を支配する、ないしは放射熱伝達を考慮せずには現象を説明できない伝熱系は工業分野において多く見受けられ、それぞれ重要な役割を果たしている。放射を含む熱伝達問題に関するエネルギー方程式は積分方程式ないしは微積分方程式となり数値解析により解かれることが多い。この放射熱伝達の数値解析に用いられる方法の一つとしてモンテカルロ法がある。確率的な計算方法であるモンテカルロ法は系の幾何学性が複雑であり、また、放射物性が一定でないような伝熱系への適応が容易であり、数学的取扱も簡単である。しかし、他の伝熱形式と共存する場合や、放射物性値が温度などの関数となりエネルギー式が非線形となる場合、反復計算を用い数値解を得るには極めて多くの放射束の確率的な追跡を必要とし、それに伴い長い演算時間を必要とする欠点も併せ持っていた。この欠点を解消するため、既報⁽¹⁾において、相続く反復回相互間の放射能差に比例した放射束数を確率的に追跡する方法を開発し DPE 法と略称し

報告した。しかし、この DPE 法では放射物性値が数値解析の対象とする従属変数の関数となる変物性問題への適応まではできず、利用上大きな制約があった。

本報では演算時間を顕著に短縮できるという上記 DPE 法の特長をあまり損なわず、非線形方程式を反復計算を用い解くという想定のもとに変物性問題に適応できるように同法を拡張し、また、その適応例について検討を行ったので報告する。

主 な 記 号

- A: 壁面の全面積
- ΔA : 壁面制御要素の面積
- c_p : 定圧比熱
- C_{rs} : 放射束の強さを決める係数
- E: 放射能 $= \sigma T^4$
- ΔE : 反復回相互間の放射エネルギー差〔式(22), (23)〕
- k: 放射線の壁面への入射ないしは反射回数
- l: 距離
- L: 放射束の追跡距離
- N_t : 全放射束数
- q_{in} : 内部発熱量
- q_R : 放射熱流束

* 昭和60年10月2日 第63期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和59年11月2日。

** 正員、室蘭工業大学(〒050 室蘭市水元町27-1)。

- S : 射出量補正放射束の強さ
 - s : 物性値補正放射束の強さ
 - t : 時間
 - T : 温度
 - V : 媒体の全体積
 - ΔV : 媒体制御要素の体積
 - y : 座標
 - y_0 : 2 平面間距離
 - ΔZ : 放射束の吸収確率の変化割合 [式(24), (25)]
 - ϵ : 壁面の放射率
 - κ : 放射吸収係数
 - λ : 熱伝導率
 - ρ : 密度
 - σ : ステファン・ボルツマン定数
 - ϕ, ϕ' : 壁面での放射線の入射角および反射角
 - Φ : 流体摩擦, 内部発熱などによる熱発生量
- 添 字
- i : 反復回数
 - g : 媒体
 - 0 : 着目要素
 - w : 壁

2. 計算方法

2.1 基礎方程式 放射, 対流および他の伝熱形式が共存する熱伝達場を考える。検討を容易にするため流れ場は既知であるとし, 図1に示す伝熱系を考え, 媒体および壁面に関するエネルギー式を次式で表す。

$$c_p \rho \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \Phi - \text{div } q_{Rg} \dots\dots\dots (1)$$

$$q_w = -\lambda \nabla T - q_{Rw} \dots\dots\dots (2)$$

ここで, D/Dt は流体力学上での偏微分演算子, ∇^2 はラプラスの演算子, ∇ はこう配を示す。式(1), (2)における $-\text{div } q_{Rg}, -q_{Rw}$ は次のように表される。

$$-\text{div } q_{Rg} = -4\kappa_0 E_{g0} + \kappa_0 \left[\int_V \kappa E_g P_g dV + \int_A \epsilon E_w P_g dA \right] \dots\dots\dots (3)$$

$$-q_{Rw} = -\epsilon_0 E_{w0} + \epsilon_0 \left[\int_V \kappa E_g P_w dV + \int_A \epsilon E_w P_w dA \right] \dots\dots\dots (4)$$

$$P_g = \frac{e^{-\int_0^t \kappa dl}}{\pi l^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\Pi_k^* (1 - \epsilon_k) \times \cos \phi_k \frac{e^{-\int_0^t \kappa dl}}{\pi l^2} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$P_w = \frac{e^{-\int_0^t \kappa dl}}{\pi l^2} \cos \phi'_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \Pi_k^* \dots\dots\dots (6)$$

$$\Pi_k^* = \frac{e^{-\int_0^t \kappa dl}}{\pi l_0^2} \cos \phi'_1 \left[\prod_{j=1}^{k-1} (1 - \epsilon_j) \times \cos \phi_j \cos \phi'_{j+1} \frac{e^{-\int_0^t \kappa dl}}{\pi l_j^2} \right] \dots\dots\dots (7)$$

ここで, Σ^* は着目する受熱壁に k が該当する場合に加算することを意味する。なお, 式(3), (4)は媒体および壁面を灰色近似し, 媒体には等方射出性, 壁面には散乱面を仮定しているが, これらは本報で開発した方法 [以下 DPEV 法 (Differential Emissive Power Emission Method Applied to Variable Property Problem) と略称する] の拘束条件ではなく, 従来のモンテカルロ法と同様の適応範囲を有している。

数式の取扱いおよび検討を容易にするため次の置き換えを行う。

$$B_{g0} = \lambda \nabla^2 T + \Phi - c_p \rho \frac{DT}{Dt} \dots\dots\dots (8)$$

$$B_{w0} = -\lambda \nabla T - q_w \dots\dots\dots (9)$$

式(8), (9)を用いると式(1), (2)は次式となる。

$$4\kappa_0 E_{g0} = \int_V \kappa E_g P_g dV + \int_A \epsilon E_w P_g dA + B_{g0} \dots\dots\dots (10)$$

$$\epsilon_0 E_{w0} = \int_V \kappa E_g P_w dV + \int_A \epsilon E_w P_w dA + B_{w0} \dots\dots\dots (11)$$

2.2 モンテカルロ法についての検討 対象とする伝熱系において, 放射熱伝達が支配的であり, また, 放射物性が温度などに依存せず一定であるとする, 式(1), (2)は放射能 E に関し線形と近似でき, Howell⁽²⁾, 谷口⁽³⁾らが用いた, 数値解析上, 放射束の源を発熱体に置き, 放射束の射出・吸収・再放射の手続きを, 放射束が壁に吸収されるまで繰返し行うモンテカルロ法により解を得ることができる。この計算では反復計算を必要としない。しかし, このような条件下以外では, エネルギー式は非線形となり, 反復計算を用いた数値解析が必要となる。反復計算を行う場合には,

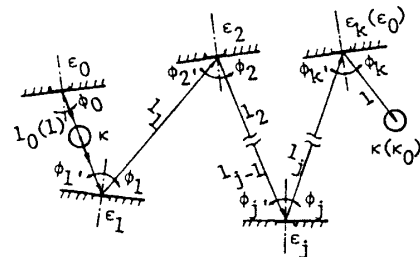


図1 座標系

エネルギー式により近い形で計算を行うほうが現象の理解に役立つと考えられ、着目する制御要素から放射エネルギーに比例した数の放射束を射出させ、その吸収を確率的に追跡する標準的な方法を提案し N 法⁽⁴⁾ (Normal Method applied to Nonlinear Problems) と略称し報告した。

一般にモンテカルロ法を用い放射熱伝達量を計算するには確率とみなせるほど十分多くの放射束を追跡する必要がある、これに伴い演算時間も長くなり、反復計算には適さない性質を有している。とくに、流れ場を支配する方程式など収束性の良くない方程式と連立し数値解析を行う場合には N 法を用い解析することは演算時間や解の精度のうえから実質的な制約を受けざるをえなかった。したがって、モンテカルロ法を効率良く反復計算に取り込むには特別な工夫が必要となり、この問題に対処する一つの方法として開発したものが先に報告した DPE 法 (Differential Emissive Power Emission Method) である。この方法では、個々の放射束の確率的な追跡方法は N 法と同じであるが、相続く反復回相互間の放射能差に比例した放射束数を追跡するため、解が収束解に漸近するにしたがい、放射能の反復回相互間の差が減少し、それに伴い追跡すべき放射束数が少なくなり、演算時間が顕著に短縮されるとともに確率的な値への収束安定性が改善された。しかし、この方法は反復回によらず、制御要素間の放射エネルギー量の交換割合が等しくなければならず、反復回に依存する放射物性の計算への取り込みは行えないという利用上の制約、短所があった。

したがって、本報ではこの制約を取り除き、N 法のように放射物性が従属変数の関数となる場合にも適応でき、また、DPE 法のように演算時間の短縮化にも役立つ方法 (DPEV 法) の開発を試みた。

2・3 本報で開発した方法 (DPEV 法) 反復計算の第 1 回め (場合によっては最初の数回) には N 法を用いるため、まず N 法の概要について述べ、次に本報で開発した DPEV 法について説明を行う。

2・3・1 N 法 (一つの標準的なモンテカルロ法) 反復計算の第零近似として T^0 を与え、物性値や ϕ^i の値を T^i ないしは他の従属変数の値から算出し、また式 (8), (9) の B^i の値を差分法などにより算出すると、一般に反復回 i 番めの解は式 (10), (11) を反復計算の形式で書き直した次式より算出される。

$$4\kappa_0^{i-1}E_{\omega 0}^i = \int_V \kappa^{i-1}E_g^{i-1}P_{\omega}^i dV + \int_A \varepsilon^{i-1}E_w^{i-1}P_{\omega}^i dA + B_{\omega 0}^{i-1} \dots (12)$$

$$\varepsilon_0^{i-1}E_{\omega 0}^i = \int_V \kappa^{i-1}E_g^{i-1}P_{\omega}^i dV + \int_A \varepsilon^{i-1}E_w^{i-1}P_{\omega}^i dA + B_{\omega 0}^{i-1} \dots (13)$$

ただし、

$$B_{\omega 0}^{i-1} = \lambda^{i-1} \nabla^2 T^{i-1} + \phi^{i-1} - c_p \rho \frac{DT^{i-1}}{Dt} \dots (14)$$

$$B_{\omega 0}^{i-1} = -\lambda^{i-1} \nabla T^{i-1} - q_w^{i-1} \dots (15)$$

$$i \geq 1 \dots (16)$$

ここで、 P^i は式 (5), (6) に従う、モンテカルロ法による放射エネルギー量の伝達確率である。なお、 P^i の計算時に放射束が壁面に到達した場合、Howell⁽²⁾ や谷口⁽³⁾ の方法では乱数により吸収か反射を判定するが、後述するように放射物性の反復回による変化の補正も放射束を用い行うことから放射束が吸収される時のエネルギー量を相対的に小さな値としておきたいという希望および確率計算を用いずに済む値は計算機乱数を用いまいほうが精度の高い解が得られるとの判断から、壁面へ到達した放射束は壁面の放射率に比例した量が壁面において吸収され、残量が反射するものとして取扱う。なお、放射束の強さ、すなわち 1 本の放射束が射出時に有する放射熱量 S^i は次式による。

$$S^i = \left[\sum_{\text{all } V} 4\kappa^{i-1}E_g^{i-1}\Delta V + \sum_{\text{all } A} \varepsilon^{i-1}E_w^{i-1}\Delta A \right] / N_i \dots (17)$$

ここで、 N_i は全放射束数であり、 $\Delta V, \Delta A$ は各々制御体積、制御面積の体積、面積である。これより、各制御要素から射出される放射束数 N^i は次式となる。

$$N_g^i = 4\kappa^{i-1}E_g^{i-1}\Delta V / S^i \dots (18)$$

$$N_w^i = \varepsilon^{i-1}E_w^{i-1}\Delta A / S^i \dots (19)$$

なお、各放射束が媒体、壁面に伝達する放射エネルギー量 S^{*i} は次式となる。

$$S_g^{*i} = S^i \left[\prod_{j=1}^i (1 - \varepsilon_j^{-1}) \right] \dots (20)$$

$$S_w^{*i} = \sum_{k=1}^i \left\{ S^i \left[\prod_{j=1}^k (1 - \varepsilon_j^{-1}) \right] \right\} \dots (21)$$

2・3・2 DPEV 法 (本報で改良したモンテカルロ法)

反復解の少なくとも第 1 回めは N 法によるが、それ以降は次の方法に従う。

a. 計算方法 ΔE^i および ΔZ^i を次式で定義し用いる。

$$\Delta E_g^i = \kappa^{i-1}E_g^{i-1} - \kappa^{i-2}E_g^{i-2} \dots (22)$$

$$\Delta E_w^i = \varepsilon^{i-1}E_w^{i-1} - \varepsilon^{i-2}E_w^{i-2} \dots (23)$$

$$\Delta Z_g^i = 1 - P_g^{i-1}/P_g^i \dots (24)$$

$$\Delta Z_w^i = 1 - P_w^{i-1}/P_w^i \dots (25)$$

$\Delta E^i, \Delta Z^i$ および P^i を用い、放射熱伝達量 C_0^i を次式により算出する。

$$C_{\omega 0}^i = C_{\omega 0}^{i-1} + \int_V [\Delta E_g^i + \kappa^{i-2}E_g^{i-2}\Delta Z_g^i] P_{\omega}^i dV$$

$$+ \int_A [\Delta E_w^i + \epsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta Z_w^i] P_w^i dA \dots\dots\dots (26)$$

$$C_{w0}^i = C_{w0}^{i-1} + \int_V [\Delta E_v^i + \kappa^{i-2} E_v^{i-2} \Delta Z_v^i] P_v^i dV$$

$$+ \int_A [\Delta E_w^i + \epsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta Z_w^i] P_w^i dA \dots\dots\dots (27)$$

$$i \geq 2 \dots\dots\dots (28)$$

式(26), (27)を用い式(10), (11)を表すと次式を得る。

$$4\kappa_0^{i-1} E_{v0}^i = C_{v0}^i + B_{v0}^{i-1} \dots\dots\dots (29)$$

$$\epsilon_0^{i-1} E_{w0}^i = C_{w0}^i + B_{w0}^{i-1} \dots\dots\dots (30)$$

すなわち, 式(22), (23)の ΔE^i を用い, 式(26), (27)の積分項中の第1項を N 法と同様にモンテカルロ法により計算(これを射出量補正放射束と呼ぶ)し, また, 放射束を用い ΔZ^i に関与する値を算出(これを物性値補正放射束と呼ぶ)して同第2項を求め, 全演算領域にわたる計算の結果として着目する制御要素の $C_0^i - C_0^{i-1}$ を求め, 式(29), (30)に代入の後, N 法と同じく反復回 i 番めの温度ないしは放射能を算出する。なお, $P^i = P^{i-1}$ が成立する場合, すなわち, 放射物性が各場所において一定であり反復回に依存しない場合には式(24), (25)より $\Delta Z^i = 0$ となり, 先の DPE 法と同じくなる。

b. 計算に用いる諸量 まず, 射出量補正放射束の射出時の強さ S^i を次式とする。

$$S^i = S^{i-1} / C_{js}^i, \quad C_{js}^i \geq 1 \dots\dots\dots (31)$$

ここで, C_{js}^i は S^i の大きさを制御する変数である。式(31)および式(22), (23)より各要素に割りつけられる放射束数 N^i は次式となる。

$$N_v^i = |\Delta E_v^i| \Delta V / S^i \dots\dots\dots (32)$$

$$N_w^i = |\Delta E_w^i| \Delta A / S^i \dots\dots\dots (33)$$

ただし, ΔE^i の正, 負により S^i は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta E^i \geq 0 : S^i &= |S^i| \\ \Delta E^i < 0 : S^i &= -|S^i| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

なお, 各放射束が伝達する放射熱量 S^{*i} は式(20), (21)より算出される。

次に, 物性値補正放射束について考える。モンテカルロ法を用い放射熱伝達量を計算する場合に最も演算時間を必要とするのは, 乱数の発生と放射束の追跡に関してである。したがって, 使用放射束の重複をさけ演算時間の短縮を図るため, 物性値補正放射束の数を射出量補正放射束の数, 式(32), (33)と同一とし, また同一の確率的な光学的軌跡を描くものとする。すなわち, ΔZ^i の値の計算は P^i の計算に従い行う。任意の放射束が距離 L において媒体に吸収されるまで k 回の反射を行うと ΔZ_k^i は次と書かれる。

$$\Delta Z_v^i = 1 - \frac{\kappa_0^{i-2} \left[\prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j^{i-2}) \cos \phi_j^{i-2} \cos \phi_j'^{i-2} \right]}{\kappa_0^{i-1} \left[\prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j^{i-1}) \cos \phi_j^{i-1} \cos \phi_j'^{i-1} \right]}$$

$$\frac{/\pi (l_j^{i-2})^2 \left[e^{-\int_0^l \kappa^{i-2} dL} / \pi (l^{i-2})^2 \right]}{/\pi (l_j^{i-1})^2 \left[e^{-\int_0^l \kappa^{i-1} dL} / \pi (l^{i-1})^2 \right]} \dots\dots\dots (35)$$

ここで, 右辺第2項は P_w^i / P_w^{i-1} を示しており, P_w^{i-1} での軌跡は P_w^i での軌跡をたどることから式(35)は次のように書かれる。

$$\Delta Z_v^i = 1 - \left(\frac{\kappa_0^{i-2}}{\kappa_0^{i-1}} \right) \left[\prod_{j=1}^k \frac{(1 - \epsilon_j^{i-2})}{(1 - \epsilon_j^{i-1})} \right]$$

$$\times \exp \left[- \int_0^L (\kappa^{i-2} - \kappa^{i-1}) dL \right] \dots\dots\dots (36)$$

同様に, ΔZ_w^i についても次式を得る。

$$\Delta Z_w^i = 1 - \left(\frac{\epsilon_0^{i-2}}{\epsilon_0^{i-1}} \right) \left[\prod_{j=1}^{k'-1} \frac{(1 - \epsilon_j^{i-2})}{(1 - \epsilon_j^{i-1})} \right]$$

$$\times \exp \left[- \int_0^{L_{k'-1}} (\kappa^{i-2} - \kappa^{i-1}) dL \right] \dots\dots\dots (37)$$

ここで, $L_{k'-1}$ は壁への入射回数 $k'-1$ に至るまでの距離を示す。式(26), (27)および式(36), (37)より, 物性値補正放射束が媒体, 壁面に伝達する放射熱量 s^{*i} は射出時の強さ s^i を次式とおくと, 式(40), (41)と表される。

$$s_v^{*i} = \kappa^{i-2} E_v^{i-2} \Delta V / N_v^i \dots\dots\dots (38)$$

$$s_w^{*i} = \epsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta A / N_w^i \dots\dots\dots (39)$$

$$s_v^{*i} = s_v^i \left[\prod_{j=1}^k (1 - \epsilon_j^{i-1}) \right] \Delta Z^i \dots\dots\dots (40)$$

$$s_w^{*i} = \sum_{k'=1}^k s_w^i \left[\prod_{j=1}^{k'-1} (1 - \epsilon_j^{i-1}) \right] \Delta Z^i \dots\dots\dots (41)$$

ここで, ΔZ^i は式(26), (27)に対応して, ΔZ_v^i ないしは ΔZ_w^i をとる。また, 射出量補正放射束の強さ S^i と物性値補正放射束の強さ s^i とを比較すると, S^i は反復回相互間の放射エネルギー差に比例するのに対し s^i は放射エネルギーそのものに比例するため, 反復回が進むにつれ後者のほうが相対的に大きな値となり, それに伴い放射束数の計算時の打ち切り誤差は後者のほうが大きくなる。また, この誤差は式(26), (27)の漸化式の形を用いる DPEV 法では集積する傾向にある。したがって, 計算条件によっては各反復回ごと, 物性値補正放射束の熱収支からこの誤差を打ち消しておく必要がある。式(24), (25)の ΔZ の定義から十分放射束が多い場合, 次の関係を得る。

$$\int_V \kappa^{i-2} E_v^{i-2} \Delta Z_v^i dV + \int_A \epsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta Z_w^i dA = 0 \dots\dots\dots (42)$$

しかし, 前述のように打ち切り誤差を生じるため, ここではその打ち切り誤差を, 計算の簡素化のため各制御要素の放射エネルギー量に比例していると近似する。

したがって、補正割合 Δz^i は式(42)を用い次と表され、打ち切り誤差の補正量 $\Delta \delta^i$ は式(44), (45)となり数値計算上 C_0^i に加算される。

$$\Delta z^i = \frac{\int_V \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} \Delta Z_\theta^i dV + \int_A \varepsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta Z_w^i dA}{\int_V \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} dV + \int_A \varepsilon^{i-2} E_w^{i-2} dA} \dots\dots\dots (43)$$

$$\Delta \delta_\theta^i = -\kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} \Delta V \Delta z^i \dots\dots\dots (44)$$

$$\Delta \delta_w^i = -\varepsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta A \Delta z^i \dots\dots\dots (45)$$

c. DPEV 法が N 法と同一の解を得ることの証明
検討を簡単化するため次の置き換えを行う。

$$C_{\theta\theta 0}^i = C_{\theta\theta 0}^{i-1} + \int_V [\Delta E_\theta^i + \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} \Delta Z_\theta^i] P_\theta^i dV \dots\dots\dots (46)$$

$$C_{w\theta 0}^i = C_{w\theta 0}^{i-1} + \int_A [\Delta E_w^i + \varepsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta Z_w^i] P_\theta^i dA \dots\dots\dots (47)$$

$$C_{\theta w 0}^i = C_{\theta w 0}^{i-1} + \int_V [\Delta E_\theta^i + \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} \Delta Z_w^i] P_w^i dV \dots\dots\dots (48)$$

$$C_{ww 0}^i = C_{ww 0}^{i-1} + \int_A [\Delta E_w^i + \varepsilon^{i-2} E_w^{i-2} \Delta Z_w^i] P_w^i dA \dots\dots\dots (49)$$

この時、式(26), (27)は次のように書かれる。

$$C_{\theta 0}^i = C_{\theta\theta 0}^i + C_{w\theta 0}^i \dots\dots\dots (50)$$

$$C_{w 0}^i = C_{\theta w 0}^i + C_{ww 0}^i \dots\dots\dots (51)$$

ここで、例えば式(46)を式(22), (24)を用い展開すると次式を得る。

$$\begin{aligned} C_{\theta\theta 0}^i &= \int_V [\Delta E_\theta^i + \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} \Delta Z_\theta^i] P_\theta^i dV \\ &+ \int_V [\Delta E_\theta^{i-1} + \kappa^{i-3} E_\theta^{i-3} \Delta Z_\theta^{i-1}] P_\theta^{i-1} dV + \dots + \\ &+ \int_V [\Delta E_\theta^2 + \kappa^0 E_\theta^0 \Delta Z_\theta^2] P_\theta^2 dV \\ &+ \int_V \kappa^0 E_\theta^0 P_\theta^0 dV \\ &= \int_V \kappa^{i-1} E_\theta^{i-1} P_\theta^i dV + \int_V [\kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} P_\theta^{i-1} \\ &- \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} P_\theta^i + \kappa^{i-2} E_\theta^{i-2} \Delta Z_\theta^i] dV + \dots + \\ &+ \int_V [\kappa^0 E_\theta^0 P_\theta^1 - \kappa^0 E_\theta^0 P_\theta^0 + \kappa^0 E_\theta^0 \Delta Z_\theta^2] dV \\ &= \int_V \kappa^{i-1} E_\theta^{i-1} P_\theta^i dV + \sum_{i'=2}^i \left\{ \int_V [\kappa^{i'-2} E_\theta^{i'-2} \right. \\ &\times (P_\theta^{i'-1} / P_\theta^{i'} - 1 + \Delta Z_\theta^{i'}) P_\theta^{i'} dV \left. \right\} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

ここで、式(24)の関係から式(52)の右辺第2項は零となる。したがって、式(52)は次のように書かれる。

$$C_{\theta\theta 0}^i = \int_V \kappa^{i-1} E_\theta^{i-1} P_\theta^i dV \dots\dots\dots (53)$$

同様に式(47)~(49)は次のように書かれる。

$$C_{w\theta 0}^i = \int_A \varepsilon^{i-1} E_w^{i-1} P_\theta^i dA \dots\dots\dots (54)$$

$$C_{\theta w 0}^i = \int_V \kappa^{i-1} E_\theta^{i-1} P_w^i dV \dots\dots\dots (55)$$

$$C_{ww 0}^i = \int_A \varepsilon^{i-1} E_w^{i-1} P_w^i dA \dots\dots\dots (56)$$

式(53)~(56)を式(50), (51)へ代入すると次式を得る。

$$C_{\theta 0}^i = \int_V \kappa^{i-1} E_\theta^{i-1} P_\theta^i dV + \int_A \varepsilon^{i-1} E_w^{i-1} P_\theta^i dA \dots\dots\dots (57)$$

$$C_{w 0}^i = \int_V \kappa^{i-1} E_\theta^{i-1} P_w^i dV + \int_A \varepsilon^{i-1} E_w^{i-1} P_w^i dA \dots\dots\dots (58)$$

式(57), (58)を式(29), (30)に代入すると、N 法でのエネルギー式(12), (13)と同じくなり、DPEV 法は N 法と同一の解を得ることができ、等価であることがわかる。

3. DPEV 法の適応例

DPEV 法の適応例を示す。本報では、DPEV 法による演算時間の短縮程度、収束安定性の検討を併せ行うため、その検討に必要な条件を備えた伝熱系として、図2に示す内部発熱を伴う一次元の熱伝達モデルを考える。ここでは、無限長の平行平板間に放射性媒体が存在し、中央部において内部発熱が存在する場合であ

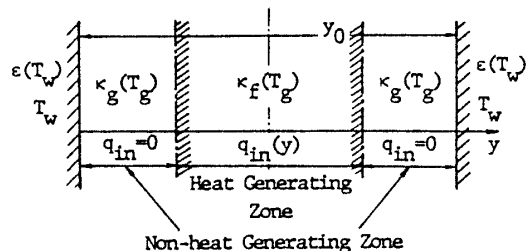


図2 内部発熱を伴う熱伝達モデル

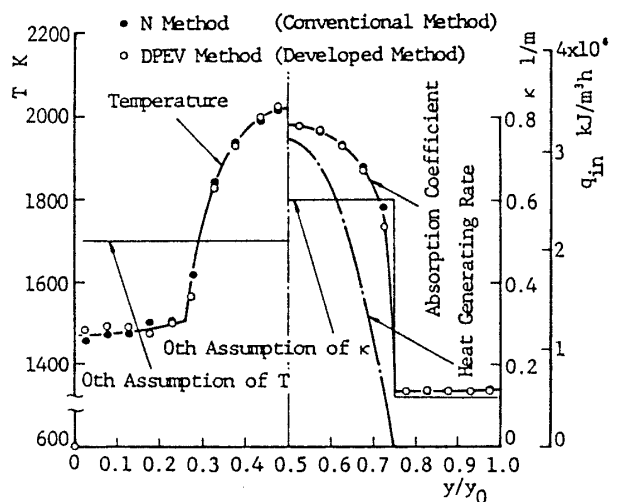


図3 温度分布および計算に用いた諸量

る。媒体は灰色ガスとし、その放射吸収係数は温度の関数とするが、発熱領域と非発熱領域とでは異なる関数形に従うものとする。また、壁面は等温の乱射出面とする。なお、流れ、伝導による熱伝達および流体摩擦による発熱は無視できるものとし、系は定常状態にあるものとする。この条件を式(1)、(2)に代入すると次のエネルギー式を得る。

$$q_{in} - \text{div } q_{Rg} = 0 \dots\dots\dots(59)$$

$$q_w + q_{Rw} = 0 \dots\dots\dots(60)$$

ただし、 $-\text{div } q_{Rg}$ 、 $-q_{Rw}$ は式(3)、(4)を一次元に変換し用いる。また、放射吸収係数 κ 、放射率 ϵ の温度依存性についての報告は種々あるが、ここでは次式によるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \text{発熱領域} &: \kappa = 0.5(T_g/1500)^{1.5} \text{ m}^{-1} \\ \text{非発熱領域} &: \kappa = 0.2(T_g/1000)^{-1} \text{ m}^{-1} \\ \text{壁面} &: \epsilon = 0.8(T_w/600)^{0.1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

なお、発熱量 q_{in} は流路中央部で最大、発熱領域外縁で零となる放物形分布で与え、平均値を 2.09×10^6 kJ/($\text{m}^3 \cdot \text{h}$) (5×10^5 kcal/($\text{m}^3 \cdot \text{h}$)) とし、その分布を図3に併記した。また、壁温 T_w は 600 K、2 平面間距離 $y_0 = 1$ m、要素数は $n = 20$ 、N 法での各反復回における全放射束数 $N_t = 100\,000$ 、 $C_{fs} = 1$ とした。

ここで、図2に示す伝熱系の壁面が黒体で、また、

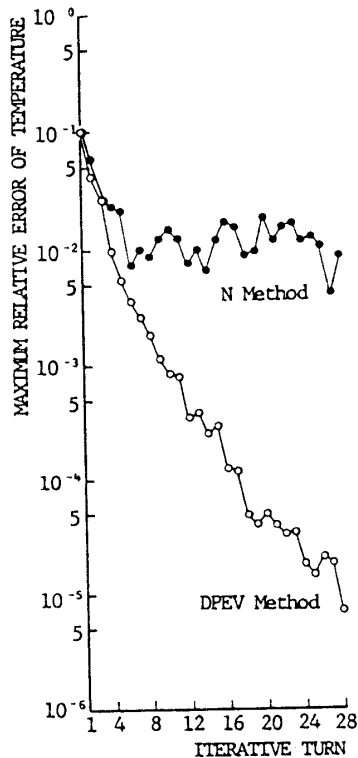


図4 温度の最大相対誤差の収束状態

発熱量および放射吸収係数が一定の場合には Usiskin⁽¹⁾が用いたモデルと、また壁面の放射率をもパラメータとすると谷口⁽²⁾の用いたモデルと一致し、そのいずれのモデルについても解析を行い解の一致を確認した。

解析結果の温度分布の一例を図3の左側に示す。なお、図3に示す N 法による温度分布は DPEV 法において反復計算が収束した反復回 28 回めに対応する解である。壁近傍の非発熱領域において、確率計算固有の温度のばらつきは認められるが、発熱領域、非発熱領域とも DPEV 法の解は N 法の解と良く一致し、解析方法の妥当性が確かめられる。なお、図3には温度の第零近似も併記してある。また、図3の右側には発熱量分布および左側の温度分布に対応する放射吸収係数の分布を示してある。

図4に各反復回における温度の最大相対誤差を示す。N 法では反復回が進んでも 10^{-2} 程度の誤差近傍で振動を起し、いわゆる数学的な感覚での収束は達成できず、細部の現象までを明らかとする反復計算に用いるには不適當であることがわかる。しかし、後述する温度の収束状態および系の熱収支を考え併せると反復回 14 回程度でかなり収束解に近い値が得られているものと考えられる。これに対し、DPEV 法では、 $C_{fs} = 1$ とし、N 法におけると同一の放射束の強さを用い計算しているにもかかわらず安定した収束状況を示している。

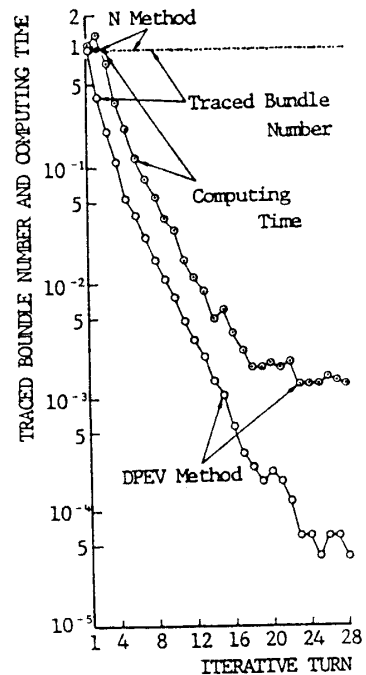


図5 追跡放射束数および演算時間

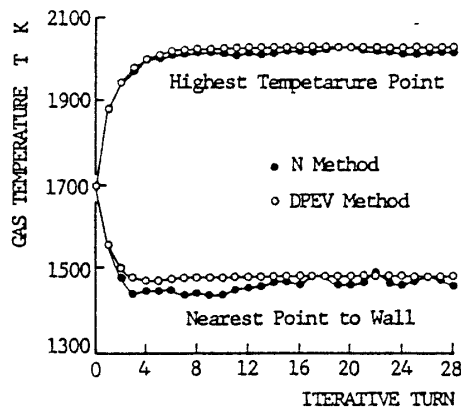


図 6 温度の収束状態

図5は各反復回での追跡放射束数と放射熱伝達の計算に関連する演算時間をN法における平均値との比をとって示している。DPEV法では反復解が進むにつれ、指数関数的に追跡放射束数は減少し、反復回16回めでは1/1000以下にまでになっている。また、追跡放射束数の減少に伴い、演算時間の減少も顕著である。なお、反復回2回めではDPEV法において追跡放射束数が減少しているにもかかわらず演算時間が増加しているが、これは単一放射束に対し射出量補正と物性値補正の二重の役割を課していることと、それに関連する計算量が増加したためである。したがって、単一放射束の追跡に必要な演算時間はN法の2.5~3倍程度であるという結果を利用し、反復回1, 2回めにN法を利用し、3回め以降にDPEV法へ移行すると演算時間をさらに短縮できる。なお、図5に示す結果においてDPEV法での放射熱伝達の計算に関連した演算時間の総和はN法における同演算時間の総和の約15%以下であった。

図6に媒体各部の温度の収束状態を示す。高温部でN法とDPEV法は良く似た収束状態を示すが、低温部ではN法による解は確率計算特有の振動を示す。これは、低温部において吸収される放射束の数が少ないためである。しかし、DPEV法では局所的な放射エネルギーの大小を問わないため、その部分での収束安定性に優れていることがわかる。なお、DPEV法では N_i が少ない場合にも、確率的な値への収束安定性に優れており、多次元問題への適応が容易である。

図7に系の熱収支の収束状態を示す。この例では追跡放射束数がかかなり多いため、N法においても、反復回の初期から中期にかけて多少不安定な状態が現れているものの、それ以降は安定し、DPEV法より1けた精度の低い 10^{-3} 程度の値に収束している。

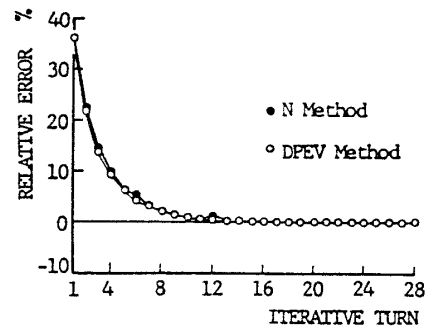


図 7 熱収支の収束状態

以上の検討から、反復回のごく初期を除き、DPEV法は、演算時間の短縮、反復計算の安定性に優れていることがわかる。とくに、反復回が多くなる場合、たとえば流体力学的に複雑な流れ場に関する方程式とともに、放射を伴うエネルギーを連立して解析を行う場合などの数値解析では、本報で示したDPEV法の採用による演算時間の短縮と反復計算の安定性は大きな利得となるものと考えられる。

4. 結 言

放射熱伝達の数値解析に用いられるモンテカルロ法の複雑な幾何学形状をもつ伝熱系への適応の容易さ、物性値の変化を計算に取り込みやすい柔軟性などの優れた特性を損なわず、数値解析に必要な演算時間の短縮を図る方法を開発し、提示した。この方法は相続く反復回相互間の放射エネルギー差に比例した放射束の確率的な追跡を行うと同時に、反復回により変化する放射物性の値を逐次、放射束を用い補正していくものである。解析例を用い、この方法は確率的な値への収束安定性に優れ、また、反復回が進み解が収束するにつれ、演算時間の短縮が顕著となる優れた性質を有し、他の伝熱形態と共存する場合や、物性値が他の従属変数の関数となる場合などの数値解析に有効に用いることのできることを明らかとした。

本研究を進めるにあたり、室蘭工業大学 早川友吉氏のご協力を得た。付記し、謝意を表す次第である。

文 献

- (1) Usiskin, C. M. and Sparrow, E. M., *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1-1 (1960), 28.
- (2) Howell, J. R. and Perlmutter, M., *Trans ASME, Ser. C*, 86-1 (1964), 116.
- (3) 谷口, 機論, 33-247 (昭42), 407.
- (4) 媚山・ほか2名, 機論, 44-385 (昭53), 3124.

討 論

〔質問〕 田中 貞行〔福井工業高等専門学校〕

(1) 449 ページの壁面に到達した放射束の取扱いについて、適用例のような条件であれば確かに本文のとおりと思う。しかし、かなり簡便化したとしてもほとんどの幾何学的構成や熱的条件下では乱数による処理が必要かと思われる。そこでこのこととも関連して、吸収反射の判定に乱数を使う場合の貴提案手法への影響がどの程度のものであるかお示しいただきたい。

(2) 452 ページの図 4 に関する考察の中で「細部の現象」とあるが、数学的意味での収束は得られずとも一応の収束解(N法の温度分布)は得られており、しかも図 3 の結果はかなり良い一致を示す中で、これは具体的に何を指すのか。

(3) 図 7 の説明に熱収支とあるが、どのような内容を言っておられるのか。

(4) この場合総放射束数が多いため貴提案手法の優秀性を明らかにするような結果になっていないが、例えば壁面熱流束比 $q_w, n/q_{wDPEV}$ はどのようになっているのか。

(5) 適用例では総放射束数を特定しておられるが、その影響、例えば 1/2 に減らすような場合、安定性、演算時間の総和などは、どのような振舞を示すか。

(6) 適用例からは C_{fs} の効用が明らかにならないが、この係数の貴提案手法への寄与はどのようなものか。

〔回答〕 (1) 壁面の幾何学性は放射束の反射時の計算に取り込んであり、また、熱的条件の温度などによる変化も反復計算途中に取り込んであるため、壁面での吸収-反射の取扱いははん用性があり特殊なものではない。吸収反射の判定に乱数を用いる影響は N 法、DPEV 法ともに同じであり、媒体の吸収係数が小さい場合には、放射熱の吸収量の分布にさらに確率的なばらつきを招くことが予想される。

(2) 全放射束数 N_t が同一であれば、DPEV 法による解も N 法による解と同程度の確率的な分布を示すことは 2・3・1 項の c. の検討で明らかであるが、その確率的な値への収束状態は DPEV 法のほうが優れており、また、反復計算が進むにつれ演算時間も急激に少なくなる。これは発散傾向の強い方程式や収束性の悪い方程式と連立し反復計算を用い数値解析を行うことを可能ならしめており、これにより確率計算の範囲内ではあるが、さらに解析の対象が広がり、また、

制御要素を小さくし解析することも可能であるという意味である。

(3) 図 2 に示すような伝熱系では定常状態を考えると発熱領域での発生熱量はすべて壁面に吸収される。このような場合の熱収支の相対誤差は次式と表され、本研究でもこれを用いている。

$$(\sum q_{in} \Delta V - \sum q_w \Delta A) / \sum q_{in} \Delta V$$

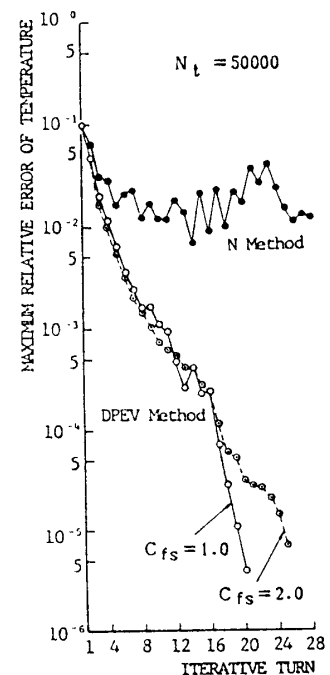
(4) 反復回 28 回めを例にとると次のとおりである。

$$(\sum q_w \Delta A)_N / (\sum q_w \Delta A)_{DPEV} = 1.00920$$

(5) 全放射束数を本文の適用例の 1/2、すなわち $N_t = 50000$ とした場合の図 4 に対応する温度の最大相対誤差の収束状態を付図 1 に示す。N 法では収束安定性の低下を招いているが、DPEV 法 ($C_{fs} = 1$) では、この条件下においても安定性が保たれている。なお、放射熱伝達に関連した DPEV 法的全演算時間は N 法のその約 20% であった。

(6) 反復回によらず $C_{fs} = 2 (N_t = 50000)$ とした場合の結果を付図 1 に併記して示す。 $C_{fs} = 1$ の場合よりもめらかに収束し、収束安定性がさらに改善されていることがわかるが、演算時間は約 3 倍多く必要とした。

〔質問〕 谷口 博〔北海道大学工学部〕



付図 1

(1) 449 ページ左欄 8 行めの「…確率とみなせるほど…」の表現は何を意味しているか。説明願いたい。

(2) 449 ページ左欄 25 行めの反復回はモンテカルロ法の反復回を意味していると思うが、3 ページ左欄 30 行めの反復回はむしろエネルギー式全体の反復回を意味しているように見受けられる。この両者の表現が同じでは誤解を生ずると思われるがいかがか。

(3) 図 4~7 は放射のみの場合を例にとって表したものであって、著者の研究目的の最も重要なエネルギー式(流れ, 対流共存)全体を解く場合への例とは見受けられない。この論文の結論を延長してこのようなエネルギー式全体を解く際の見通し, すなわち収束状況および計算時間の面での有利性を説明願えると, 実用化への適用が理解できると思われるがいかがか。

〔回答〕 (1) 母集団から抽出した複数の標本の集合が母集団の性質を引き継ぐ場合を確率論的解析手法上確率とみなせると表現している。具体的には $N_1 = 10^7$ の場合の結果を母集団の性質とみなし, $N_2 = 10^3 \sim 10^6$ での計算を行い, それらの結果の比較検討により本文の条件を採っている。

(2) 本論文ではエネルギー式全体の反復回と放射熱伝達の反復回とを一对一に同期させている。ご指摘の

ように両者を必ずしも一对一に同期させる必要はなく, エネルギー式全体としてより速く収束解を得ることを意図し, 両者を同期させつつ, どちらかの反復回を増減することは可能である。なお, 反復回を示す上添字 i により放射熱伝達に関する項とそれ以外の項およびエネルギー式全体を同期させ反復計算を進めていくことは読みとれるため, 本文の書式で誤解を生ずるおそれはないものと考えている。

(3) 本報は温度に関し非線形となるエネルギー式の数値解法の改善を放射熱伝達に着目し行ったもので, 数式の展開および適応例はいずれもこの条件を満たしている。また, 対流熱伝達等が共存する場合には, どのような流れ場などを考えるかということがあらためて問題となり, 本論文で意図する焦点が定まらないおそれがあるため, 本文に示す適応例を採った。なお, 対流熱伝達等と共存する場合には, 放射項の反復計算途中での安定性はエネルギー式全体としての収束安定性にも寄与するものと期待できる。また, DPEV 法が放射熱伝達項の演算時間の短縮に役立つことは本報での適応例と同様であり, 放射項以外の演算時間の短縮に関しても収束安定性を通し間接的に効果があるものと考えられる。