二層同心円柱を伝わるねじり波動の位相速度

二層同心円柱を伝わるねじり波動の位相速度

著者	松岡　健一，菅田　紀之，岸　徳光，能町　純雄
雑誌名	土木学会年次学術講演会講演概要集
巻	41
ページ	733-734
発行年	1986-11
URL	http://hdl.handle.net/10258/2341

I-367　二層同心円柱を伝わるねじり波動の位相速度

室蘭工業大学　正員　松岡健一
同　同　菅田紀之
同　同　岸　徳光
日本大学　同　能町純雄

1．まえがき　異質な材料からなる複合部材は、単一材料のものと異なる挙動をする。特に波動伝播問題でその差異が大きい。著者らは、これまで異なる弾性定数をもつ材料からなる二層同心円柱について、縦波動及び曲げ波動の位相速度及び波動モードを求め検討を加えた[1) 2)]。ねじり波動のみが、円柱軸方向に伝播する場合は、解析は簡単であるが、縦波動，曲げ波動と合せて、同様の手法により解析し、若干の数値計算を行ない考察する。

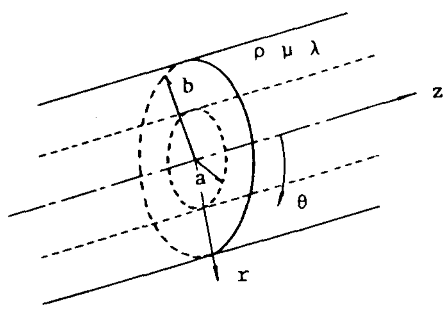
2．基礎変位式　角速度ωのねじり波動が、円柱軸方向へ伝播する定常波動伝播を考えるものとする。円柱座標を図－1のようにとり、r，θ，z軸方向の変位をu，v，w、応力成分をσ_r，σ_θ，σ_z，$\tau_{r\theta}$，$\tau_{\theta z}$，τ_{zr}とする。ねじり波動のみが伝播する場合

$$u = w = \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad ..(1)$$

とおくことが出来、ねじり波動の伝播速度をVとすれば、このとき残りの変位および応力成分は

$$f = \tilde{f}\exp\{i\omega(t-z/V)\} \quad ....(2)$$

と表わせる。この時の波動方程式は



図－1　円柱座標

$$\partial\tau_{rz}/\partial r + 2\tau_{rz}/r + \partial\tau_{\theta z}/\partial z = \rho\partial^2 v/\partial t^2 \quad ....(3)$$

であり、これの変位vおよび応力成分$\tau_{r\theta}$は円筒の場合に

$$\tilde{v} = \tilde{v}_b\, G^{(1)}(N_\mu r) + \tilde{v}_a\, G^{(2)}(N_\mu r) \quad ....(4) \qquad \tilde{\tau}_{r\theta} = N_\mu\{\tilde{v}_b\, \chi_p^{(1)}(N_\mu r) + \tilde{v}_a\, \chi_p^{(2)}(N_\mu r)\} \quad ....(5)$$

ただし、 $N_\mu^2 = \omega^2(1/V^2 - \rho/\mu) = (\omega/V)^2(1 - V^2/V_s^2) = (\pi/l)^2(1 - V^2/V_s^2)$， l：半波長

$$G^{(k)}(Nr) = R_{11}^{(k)}(Nr) / R_{11}^{(k)}(Na_k),\quad \chi_p^{(k)}(Nr) = R_{12}^{(k)}(Nr) / R_{11}^{(k)}(Na_k) \quad ....(6)$$

$$R_{1j}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr)\,K_1(Na_{k-1}) + (-1)^j I_1(Na_{k-1})\,K_j(Nr) \quad ....(7)$$

ここで、　$k=1，2，j=1，2，a_0=a_2=a，a_1=b$．

とする。円柱の場合は、$a=0$ とおけば $\tilde{v}_a=0$ であるから

$$\tilde{v}^c = \tilde{v}_b^c\, G^c(N_\mu r) \quad ....(8) \qquad \tilde{\tau}_{r\theta}^c = \tilde{v}_b^c N_\mu \chi_p^c(N_\mu r) \quad ....(9)$$

$$G^c(Nr) = I_1(Nr) / I_1(Nb),\qquad \chi_p^c(Nr) = I_2(Nr) / I_1(Nb) \quad ....(10)$$

とおけばよい。ここで、I，K は、変形第1種および第2種のベッセル関数である。

3．境界条件　二層同心円柱の解析は、円筒と円柱の解を重ね合せて行なうことが出来る。このときの境界条件は

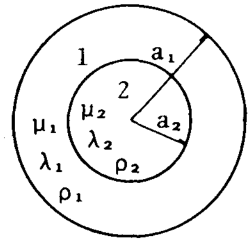
i）円筒と円柱の境界$r=a_2$で

$$\tilde{v}_{r=a_2} = \tilde{v}^c_{r=a_2},\quad \therefore\ \tilde{v}_{a_2} = \tilde{v}^c_{a_2} \quad ....(11)$$

$$\tilde{\tau}_{r\theta})_{r=a_2} = \tilde{\tau}^c_{r\theta})_{r=a_2} \quad ....(12)$$

ii）円筒の外周$r=a_1$で

$$\tilde{\tau}_{r\theta})_{r=a_1} = 0 \quad ....(13)$$



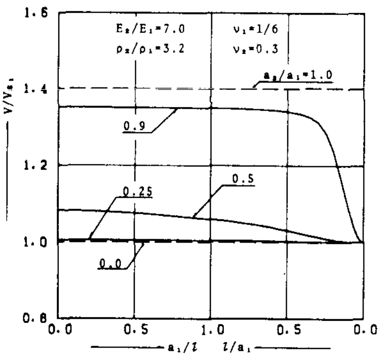
図－2　二層同心円柱

(11)，(12)式から

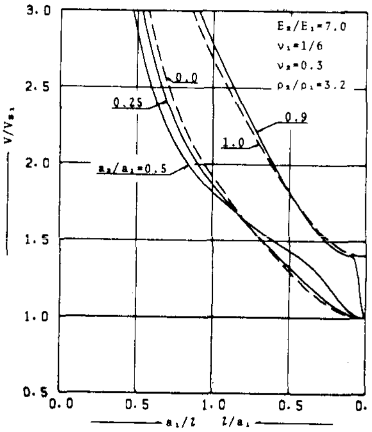
$$N_{\mu_1}\{\tilde{v}_{a_1}\chi_p^{(1)}(N_{\mu_1}a_2)+\tilde{v}_{a_2}\chi_p^{(2)}(N_{\mu_1}a_2)\}$$
$$=\tilde{v}_{a_2}^{c}N_{\mu_2}\chi_p^{c}(N_{\mu_2}a_2) \quad \dots\dots(14)$$
$$\tilde{v}_{a_1}\chi_p^{(1)}(N_{\mu_1}a_1)+\tilde{v}_{a_2}\chi_p^{(2)}(N_{\mu_1}a_1)=0 \quad \dots\dots(15)$$

二層円柱を伝播するねじり波動の位相速度は、境界条件式(13)，(14)式の係数からなる固有値行列式の根として求められる。

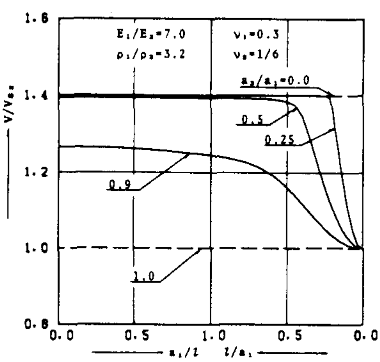
4．数値計算例　数値計算は、$E_2/E_1=7.0$，$\nu_1=1/6$，$\nu_2=0.3$，$\rho_2/\rho_1=3.2$ (Case-Ⅰ) $E_1/E_2=7.0$，$\nu_1=0.3$ $\nu_2=1/6$，$\rho_1/\rho_2=3.2$ (Case-Ⅱ) について、$a_1/a_2=0.0$，0.25，0.5，0.9，1.0 の場合について、一次及び二次の位相速度を求めた。



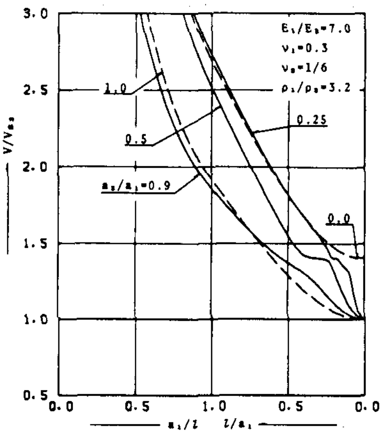
図－3　一次の分散曲線(Case-Ⅰ)



図－4　二次の分散曲線(Case-Ⅱ)



図－5　一次の分散曲線(Case-Ⅱ)



図－6　二次の分散曲線(Case-Ⅱ)

図－3は、Case－Ⅰの一次の位相速度を示したものであるが、波長無限大では、断面ねじりモーメントに応じた換算材料定数をもつ円柱としたときのせん断波の速度と一致し、波長零では、弾性定数の小さな方のせん断波の速度に一致している。$a_1/l<1.0$ の範囲では、あまり変化がなく、波長無限大の値に近い。波長が零に近ずくにつれて、半径比 a_2/a_1 が小さくなるにしたがってせん断波速度は、急激に減少し弾性定数の小さな方のせん断波速度に収束している。しかし、いずれの半径比でも、二層同心円柱は、それぞれ単独の円柱の場合の中間的な値をとっている。

図－4には、Case－Ⅰの二次の位相速度を示した。二次の位相速度は、一次の位相速度とは異なり、単独の円柱の場合の中間的な値をとらず、はずれる場合があるが、波長無限大では、位相速度も無限大となり、波長零ではやはり弾性定数の小さな方のせん断波速度に一致している。

図－5，6は、Case－Ⅱについて同様のものを示したものであるが、Case－Ⅰと同様、一次の場合は、波長無限大で換算材料定数をもつ円柱のせん断波速度と一致し、波長零ではやはり、弾性定数の小さな方のせん断波速度に一致している。二次の位相速度も、Case－Ⅰとほぼ同様である。

5．まとめ　二層同心円柱のねじり波動伝播問題を解析した。数値計算の結果、ねじり波動の場合も、一次の位相速度は、波長無限大では、換算弾性定数をもつ均一円柱のせん断波速度に一致し、波長零では、弾性定数の小さな方のせん断波速度に一致することがわかった。波動モードも求めているが、これは別な機会に示す。

＊参考文献＊　1) K.Matsuoka, S.Nomachi : Memoirs of The Muroran Inst. of Tech., Vol.10, No.4, p.619, 1982.　2) 松岡，菅田，能町，木田 : 構造工学論文集, Vol.32A, p.641, 1986.