

学術論文

電磁界解析における三次元対称性に着目した新しい積分方程式法のモデル縮約法

A new simplification method for integral-equation-method model using a view point of three-dimensional symmetry in electromagnetic field analysis

内藤 督

(室蘭工業大学)

坪井 始

(福山大学)

Tadashi NAITO

Member

Hajime TSUBOI

Member

In this paper, a new simplification method for geometric symmetry model is described. This method uses a view point of three-dimensional symmetry. Using not only the symmetry in x-y plane but also the reflective symmetry regard to z-axis, the effect of simplification increases. Firstly, mathematical theory is explained, then the applicability of the proposed method is shown by the computation result of a TEM (transverse-electromagnetic) cell model.

Key Words: Integral equation method, geometric symmetry, simplification method, electromagnetic field analysis.

1 はじめに

電磁現象の解析対象となる機器には、回転対称性や鏡映対称性を持つものが多い。筆者らはこの対称性を利用した積分方程式法での計算モデルの縮約法を研究し、大幅な必要記憶容量と計算量の軽減を可能としてきた [1]。

本研究は縮約法について、更に検討を進めた結果、従来の手法は、モデルを 2 次元的に捉えていたため利用できる対称性が回転、鏡映、及び、回転対称を含む鏡映の 3 種類の場合しか適用可能でない限界を越えることが可能な手法を開発した。同法では、モデルを 3 次元的に考察することで、従来の 2 次元モデルを x-y 平面に投影した場合の、z 軸に直行する鏡映面を持つ鏡映対称を利用する。この、鏡映対称は前述の 3 種の対称性とは併用可能なため、縮約効果は従来の手法の利点を損なわない長所もある。

本稿は、まず最初に、新手法の理論的検討を行い、

連絡先: 内藤督, 〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, 室蘭工業大学電気電子工学科

次いで、実際に計算を行いその結果を検証する。

2 理論的検討

本章ではまず、新縮約法の基礎となる、従来法 [1][2] について簡略に述べるとともに、その問題点について理論的に説明し、ついで、新しい手法について説明する。

2.1 従来の縮約法

まず、回転対称について説明する [1][2]。Fig.1 に計算モデルの例を示す。同図は 3 次元モデルを z 軸から見て、x-y 平面に投影している。このように、モデルの捉え方が 2 次元である。同図に示す様、対称性に従い分割された部分をセグメントと呼び、反時計方向に順にセグメント 1, 2, ..., N と呼ぶ。同モデルから境界要素法などで導かれる、最終的に解くべき連立方程式は、一般に次式で現される。

$$[S] \{A\} = \{J\} \quad (1)$$

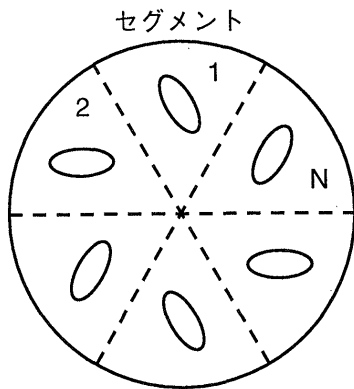


Fig. 1: Rotational symmetry model.

ここで, $[S]$: 係数行列, $\{A\}$: 変数ベクトル, $\{J\}$: 外部印加ベクトル ($\{J\}$ は任意).

係数行列 $[S]$ は作成時の座標系として回転座標系等を採用することで, 次の様なセグメント単位の巡回性を持つことができる.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & \cdots & S_{N-1} \\ S_{N-1} & S_0 & S_1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & S_{N-1} & S_0 & S_1 \\ S_1 & \cdots & \cdots & S_{N-1} & S_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

上式より係数行列の作成は, その巡回性から 1 セグメント分ですみ, 計算量は $1/N$ に軽減される. 次に, 係数行列の巡回性を利用して, 解析モデルの縮約をするため, 次のような変数変換を行う.

$$\{A_{n+1}\} = \sum_{k=0}^{N-1} a^{nk} \{F_k\} \quad (3)$$

$$(n = 0, 1, \dots, N - 1)$$

ここで, $\{A_{n+1}\}$: セグメント $(n+1)$ の変数ベクトル, $\{F_k\}$: 新変数ベクトル, a : 位相オペレータ. ただし, a は次のように与えられる.

$$a = e^{j2\pi/N} \quad (4)$$

(3) 式を統一して表現すれば

$$\{A\} = [C] \{F\} \quad (3')$$

ここで, $[C]$: 変換行列.

(3) 式の変換により, (2) 式は次のような, 等価な N 個の, 変数の数が $1/N$ の連立方程式に変換される.

$$[U_k] \{F_k\} = \{I_k\} \quad (5)$$

$$(k = 0, 1, \dots, N - 1)$$

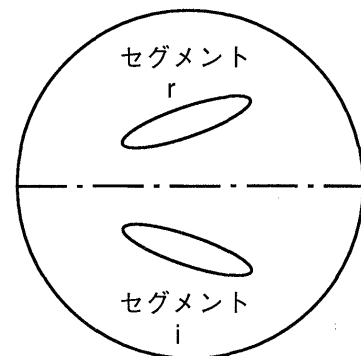
ここで, 新しい係数行列と外部印加ベクトルは次式で与えられる.

$$[U_k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^{nk} [S_n] \quad (6)$$

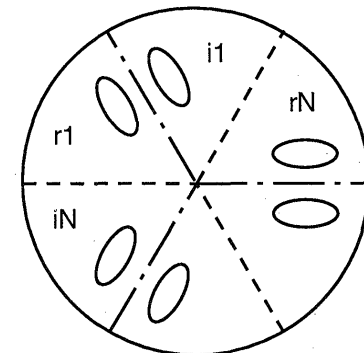
$$\{I_k\} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} a^{-nk} \{J_n\} \right] / N \quad (7)$$

この時, 連立方程式の計算は変数の数の三乗に比例するため, 大幅に計算量は軽減される.

次いで, Fig.2 に示す鏡映対称と回転対称を含む鏡映対称について説明する [1][2]. 同図に示すように, 鏡映面に対して一方を実像として r (real) セグメント, 他方を虚像として i (imaginary) セグメントと呼ぶ. 同図 (a) の鏡映対称のみのものは, 回転対称を含むもののセグメント数 1 と一致するので後者について



(a) only reflective



(b) including rotational symmetry

Fig. 2: Reflective symmetry model.

て説明する。\$r\$ セグメントに右手, \$i\$ セグメントに左手座標系を適用すれば次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} S & S_M \\ S_M & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_r \\ A_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_r \\ J_i \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ただし, \$[S_M]\$: \$r\$ セグメントと \$i\$ セグメント間の相互分。

上式に次なる, 変数変換を施す [1].

$$\begin{aligned} \{A_r\} &= \{A_I\} + \{A_{II}\} \\ \{A_i\} &= \{A_I\} - \{A_{II}\} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, \$\{A_I\}\$ と \$\{A_{II}\}\$ は第 I 群と第 II 群の変数ベクトル。

これにより, 第 I 群と第 II 群は次のよう独立となる。

$$\begin{aligned} [S + S_M] \{A_I\} &= \{J_I\} \quad : \text{第 I 群} \\ [S - S_M] \{A_{II}\} &= \{J_{II}\} \quad : \text{第 II 群} \end{aligned} \quad (10)$$

このようにモデルは \$1/2\$ に縮約されるが, 更に回転対称を利用するため, \$[S_M]\$ が次なる鏡映対称と回転対称性を混合した性質を持つことから回転対称性を利用する。

$$\begin{aligned} [S_M] &= \begin{bmatrix} S'_1 & \cdots & \cdots & S'_{N-1} & S'_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & S'_0 & S'_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S'_{N-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S'_0 & S'_1 & \cdots & \cdots & S'_{N-1} \end{bmatrix} \\ &= [K_D] [S'] \end{aligned} \quad (11)$$

ただし,

$$[K_D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & E \\ 0 & \cdots & \cdots & E & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & E & \cdots & \cdots & 0 \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S'] = \begin{bmatrix} S'_0 & S'_1 & \cdots & S'_{N-2} & S'_{N-1} \\ S'_{N-1} & S'_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & S'_1 \\ S'_1 & \cdots & \cdots & S'_{N-1} & S'_0 \end{bmatrix}$$

ここで, \$[E]\$: 単位行列。

上式の \$[K_D]\$ は鏡映対称を表し, \$[S']\$ は \$[S]\$ と全く同一の回転対称による巡回性を持っている。(10) 式に回転対称時の変換式 (3) を施すと \$[S_M]\$ 部は次のようになる。

$$\begin{aligned} [C]^{-1} [S_M] [C] &= ([C]^{-1} [K_D] [C]) ([C]^{-1} [S] [C]) \\ &= \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & aE \\ \cdots & \cdots & \cdots & a^2 E & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a^{N-1} E & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} * \\ & * \begin{bmatrix} U'_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & U'_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & U'_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & U'_{N-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U'_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & aU'_{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & a^2 U'_{N-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a^{N-1} U'_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, \$[U'_k]\$ は (6) 式右辺の \$[S_n]\$ を \$[S'_n]\$ に置換したもの。

これより連立方程式 (10) は次のようになる。

$$\begin{aligned} [U_0 \pm U'_0] \{F_0\} &= \{I_0\} \\ \begin{bmatrix} U_m & \pm a^m U'_{N-m} \\ \pm a^{-m} U'_m & U_{N-m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_m \\ F_{N-m} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} I_m \\ I_{N-m} \end{Bmatrix} \\ &(m = 1, \dots, M) \\ [U_{N/2} \pm U'_{N/2}] \{F_{N/2}\} &= \{I_{N/2}\} \quad (13) \\ &(N \text{ 偶数時のみ}) \end{aligned}$$

ここで, 正負の符号は第 I 群が正, 第 II 群が負となる。\$M\$ は次のよう与えられる。

$$\begin{aligned} M &= (N-1)/2 : N \text{ 奇数} \\ &= N/2 - 1 : N \text{ 偶数} \end{aligned}$$

これまでの説明で, 係数行列作成の計算量が \$1/2N\$ まで低減できることが知られたが, 上式のような殆どの成分で \$\{F_m\}\$ と \$\{F_{N-m}\}\$ が連成するため, 特殊な場合を除き連立方程式の次元は \$1/N\$ にしかならず, 鏡

映対称の利点は反映できない。これは鏡映対称性と回転対称性が、同一平面で存在するため、実像と虚像のセグメントの番号が前者は反時計方向に、後者は時計方向に振られるため生ずる行列 $[K_D]$ により、(12) 式で示されるよう非対角項、従って連成が生ずる。もし、鏡映対称性と回転対称性が異なる平面にあれば、連成が発生しないことが期待できる。以降では、そのような場合を検討する。

2.2 新縮約法

前述の如く従来の対称性は、2次元平面に投影したものを対象としていた。しかしながら、 $x-y$ 平面を俯瞰している z 軸に関する鏡映対称が存在するならば、これを利用した一層の縮約が可能ではないかと考えられる。以下に、縮約法について検討する。Fig.3 に回転対称モデルが、更に z 軸を直交する平面に関して鏡映対称の場合のモデルを図示する。同図に示すよう上部に属する変数ベクトルを $\{A_u\}$ 、下部のそれを $\{A_l\}$ とし、更にセグメントの番号付を共に反時計方向に取り、座標系を上部と下部で z 成分を逆方向に取ると、導かれる連立方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} S & M \\ M & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_u \\ A_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_u \\ J_l \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 $[M]$ ：上部と下部間の相互分。

$[M]$ は Fig.3 に示すよう上部と下部のにセグメントの番号が同一回転方向となるので、次のように $[S]$ と同一な巡回性を持つ。

$$[M] = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_{N-1} \\ M_{N-1} & M_0 & \cdots & M_{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_1 & \cdots & M_{N-1} & M_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

また、(9) 式の変換と同様な変換を $\{A_u\}, \{A_l\}$ に施せば (14) は次のようになる。

$$[S \pm M] (\{A_u\} \pm \{A_l\}) = \{J_u\} \pm \{J_l\} \quad (16)$$

上式では、正符号は第 I 群、負符号は第 II 群を示す。上式の係数行列は両群共に前述の回転対称時モデルと同一の性質を持っている。従って、変換行列 $[C]$ を用いて、更に $1/N$ に縮約でき、トータルでは $1/2N$ モデルに縮約され鏡映対称の縮約効果がストレートに利用できる。

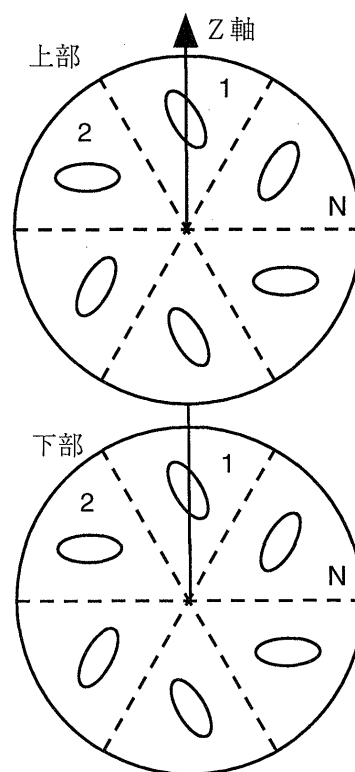


Fig. 3: Rotational plus reflective symmetry model.

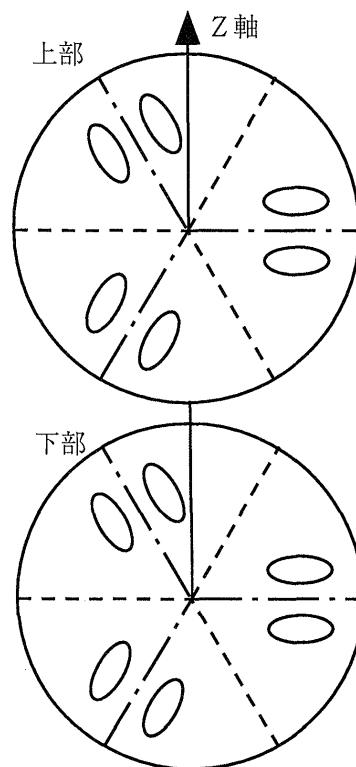


Fig. 4: Reflective including rotational symmetry plus reflective symmetry model.

Table 1: Reduction ratios of calculating time.

対称性	係数行列作成	ガウスの消去法	
		N: 奇数	N: 偶数
回転	1/N	1/N ²	1/N ²
回転+鏡映	1/(2N)	(4N-3)/(4N ³)	(2N-3)/(2N ³)
回転+鏡映+鏡映	1/(4N)	(4N-3)/(32N ³)	(2N-3)/(16N ³)

(注) (回転+鏡映+鏡映) が新縮約法.

次に Fig.4 に示すよう、回転対称を含む鏡映対称モデルが z 軸に垂直な鏡映面を持つ場合にも同様な縮約効果が期待できる。座標系は回転対称と同様に z 方向のみ逆向きにとれば、次式が与えられる。

$$\begin{bmatrix} S & S_M & N & M_M \\ S_M & S & M_M & M \\ M & M_M & S & S_M \\ M_M & M & S_M & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{ur} \\ A_{ui} \\ A_{lr} \\ A_{li} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{ur} \\ J_{ui} \\ J_{lr} \\ J_{li} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$[M_M]$ はセグメントの番号付と座標系の取り方で、次のよう $[S_M]$ と同一の性質を持つ。

$$[M_M] = [K_D][M'] \quad (18)$$

ここで、

$$[M'] = \begin{bmatrix} M'_0 & M'_1 & \cdots & M'_{N-1} \\ M'_{N-1} & M'_0 & \cdots & M'_{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M'_1 & \cdots & M'_{N-1} & M'_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

以下、変換 (9) を適用すれば、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} S \pm M & S_M \pm M_M \\ S_M \pm M_M & S \pm M \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} A_{ur} \\ A_{ui} \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} A_{lr} \\ A_{li} \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} J_{ur} \\ J_{ui} \end{Bmatrix} \pm \begin{Bmatrix} J_{lr} \\ J_{li} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

上式の正符号は第 I 群、負符号は第 II 群成分である。上式の係数行列は回転対称を含む鏡映対称時の係数行列と同一の性質を持つので、同一の手法で縮約を行うことができる。

以上より、 z 軸に直交する鏡映面を持つ鏡映対称モデルは、従来の対称モデルの利便性を損なうことなく、更に 1/2 モデルに縮約できることが知られた。

Table 1 に、各種対称性での計算時間の減少率 [2] を比較掲示する。

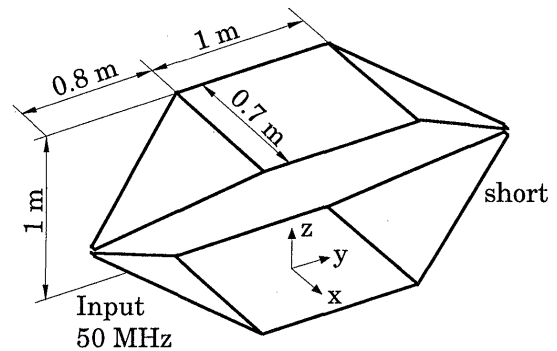


Fig. 5: Numerical model.

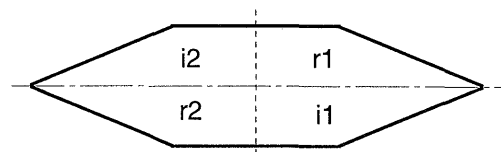


Fig. 6: Numbering of segments.

3 数値的検討 [3]

前章で述べた理論を検証するため、Fig.5 に図示する電磁波発生器である TEM セルモデル [3] で数値的検討を行う。同モデルを $x-y$ 平面に投影し、セグメントの番号付したモデルを Fig.6 に図示する。同モデルの縮約効果は、 z 軸に関する鏡映対称で 1/2、回転および鏡映対称のセグメント数は 2 なので、計算量は Table 1 より係数行列作成で 1/8、連立方程式の解法で 1/128 と大幅な低減効果が得られる。

Fig.7 に電流を未知変数とするモーメント法 [3] により電流分布を計算した結果を図示する。計算時間は理論検討の通り低減され、また、計算精度も縮約を行わないものと比較しても、全ての電流値が 0.1% 以内の誤差内に収まっていた。

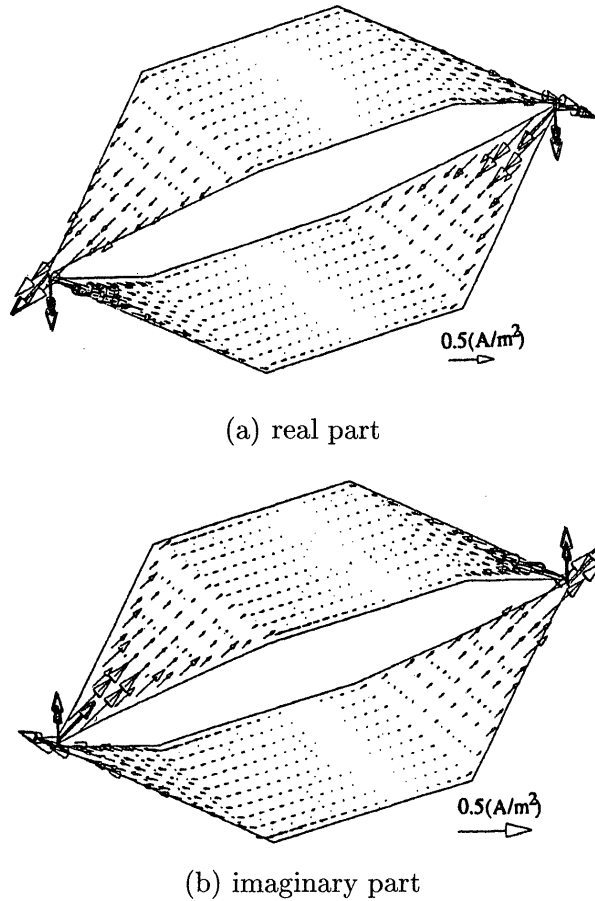


Fig. 7: Calculated distribution of current density vectors.

4 むすび

新しい縮約法により，解くべき連立方程式の係数行列作成，及び，解法の計算量が，従来の縮約法に比べても大幅に低減されることを理論的に示した．次いで実際に数値的検討を行い，精度低下を招くことなく，理論通り計算量の低減が可能であることを確認した．

新しい縮約法は，回転，あるいは回転および鏡映などの対称性を $x-y$ 平面に投影した場合， z 軸に関する鏡映対称性が存在するならば適用可能である．その手順は以下の通りである．

1. z 軸に関する鏡映対称を利用し，モデルを縮約する．
2. 次いで，回転対称性を利用した縮約法を適用する．
3. 鏡映対称性が存在するならば，更に鏡映対称の縮約法を適用する．

(1999年4月8日受付)

参考文献

- [1] 坪井，内藤編著：数値電磁界解析法の基礎，養賢堂，(1994)．
- [2] 坪井，内藤，桜井：空間固有モードを用いた境界要素法による電磁界解析，電気学会論文誌A，Vol.111，No.8 (1991)，pp.719-726．
- [3] H. Tsuboi, T. Naito, et al.: Reduction of Vector Unknowns Using Geometric Symmetry in a Triangular-Patch Moment Method for Electromagnetic Scattering and Radiation Analysis, *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. MAG-28 (1992), pp.1720-1723.