解説

電磁場の微分形式とマクスウェルグリッド方程式 −Finite Integration Technique (FIT)−

Differential form of electromagnetics and Maxwell's grid equations
−Finite Integration Technique (FIT)−

川口　秀樹 (室蘭工業大学)

Hideki KAWAGUCHI　Member

1　はじめに

近年，電磁場の数値解析の研究において，従来のように，差分法，有限要素法，境界要素法など決められた定式化にしたがってマクスウェル方程式を離散化してシミュレーションする形態から，偏微分方程式を離散化するという概念よりもむしろ**離散化された空間上において電磁気学を体系化し，そこでマクスウェル方程式を再構成しその方程式に基づいて数値シミュレーションを行なうという形態**が指向されしつつある．

その代表的な概念の一つが，1977 年，T. Weiland によって提唱された Finite Integration Technique (FIT)[1] である．この度，本誌に直接その T. Weiland 教授よりこの FIT の解説記事を出筆いただけることになった．本稿では，詳細な説明に先立ち，読者にスムースにその概念を理解いただけるようあらかじめ簡単に解説を与え，さらにそこでは触れられていない FIT が考案された経緯についても解説しておく．

2　電磁場の微分形式

FIT は電磁場の離散化された微分形式表現とも解釈できる．すなわち，微分形式と密接に関係しており，これとうまく対比させることにより，よりスムースに FIT の概念が理解できる．このためまずはじめに，電磁場の微分形式について，とりわけ，後述の 2 重グリッドの概念の説明で重要となる点などに触れながらここに簡単にまとめておく．

数学あるいは物理では様々に定義が行なわれるが，最も簡単な微分形式の定義は，“p 階交代テンソル場をもって p 次微分形式とする” というものであろう．いま，空間が 3 次元であるとすると，微分形式は

1-形式：$\omega_1 = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$
2-形式：$\omega_2 = \omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx + \omega_{xy} dx \wedge dy$
3-形式：$\omega_3 = \omega_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz$

の 3 種類のみとなり，上記 dx, $dy \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$ などが各形式の単位基底，また ω_x, ω_{yz}, ω_{xyz} などをそれぞれの形式での成分という．このとき，1 形式も 2 形式も独立成分が同じ 3 個となっており，これは 3 次元の微分形式に特有な点である．同じ 3 つの独立成分があるとはいえその違いはそれぞれ 1 階テンソル (ベクトル) 表示，2 階テンソル表示にすれば明確になる．

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix},$$
$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & -\omega_{zx} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yx} \\ \omega_{zx} & -\omega_{yz} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

そしてこれらの間の対応を与えるのがテンソル代数でいう完全反対称テンソル (レビ・チビタテンソル) であり，微分形式ではホッジ演算子 $*$ (Hodge star operater) に対応する．

さて，上述のように微分形式では単なるテンソル場に過ぎないにもかかわらず，通常の座標軸の単位ベクトルの交代積 $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$ 等を用いず特別の記号 dx, $dy \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$ を用いて単位基底が表わされていた．それには確かに意味があり，その記号から連想されるように，1 形式，2 形式，3 形式はそれぞれ線積分，面積分，体積積分されることが前提としてそれらの記号が使われている．実際，$dy \wedge dz$, $dx \wedge dy \wedge dz$ 等の交代積は微小体積要素の代数をそのまま満たすため，“形式的” ではあるが，

$$\int_C \omega_1, \quad \int_S \omega_2, \quad \int_V \omega_3 \qquad (2)$$

をもってそれぞれ1形式の場の線積分，2形式の場の面積分，3形式の場の体積積分としてもなんら矛盾は生じない．したがって，ここであらためて上述の3つの独立な成分をもつそれぞれ別の種類の微分形式である1形式と2形式の違いが明確になる．すなわち，1形式とは線積分の対象になるベクトル場であり，2形式は面積分の対象になるベクトル場であると言える．この解釈にしたがうと，電磁場の各物理量をどのように表せばよいかが明確になる．すなわち，線積分して電圧降下や磁気的電圧降下になる $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ は1形式，面積分して電束や磁束になる $\boldsymbol{D}$ や $\boldsymbol{B}$ は2形式となる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e} &= E_x dx + E_y dy + E_z dz && \text{(3-1)}\\
\boldsymbol{h} &= H_x dx + H_y dy + H_z dz && \text{(3-2)}\\
\boldsymbol{d}_e &= D_x dy\wedge dz + D_y dz\wedge dx + D_z dx\wedge dy && \text{(3-3)}\\
\boldsymbol{b} &= B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy && \text{(3-4)}\\
\rho &= \rho dx\wedge dy\wedge dz && \text{(3-5)}\\
\boldsymbol{j} &= J_x dy\wedge dz + J_y dz\wedge dx + J_z dx\wedge dy && \text{(3-6)}
\end{aligned}$$

(ここに，微分形式で表現された物理量を通常のベクトル記号と区別して小文字を用いた．)　そして，マクスウェル方程式等は，外微分演算 d および時間微分 (·：ドット) をもちいて次のように表される．

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{e} &= -\dot{\boldsymbol{b}} && \text{(4-1)}\\
\mathrm{d}\boldsymbol{b} &= 0 && \text{(4-2)}\\
\mathrm{d}\boldsymbol{h} &= \boldsymbol{j} + \dot{\boldsymbol{d}} && \text{(4-3)}\\
\mathrm{d}\boldsymbol{d}_e &= \rho && \text{(4-4)}\\
\mathrm{d}\boldsymbol{j} + \dot{\rho} &= 0 && \text{(4-5)}
\end{aligned}$$

さてもう一つ必要なのが，構成方程式であるが，通常，誘電率 ε，透磁率 μ の乗算を通して直接結びつくはずの $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ や $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ は，上記でみるようにそれぞれ微分形式ではそれぞれ1形式と2形式という異なる形式でとなっている．このため微分形式では構成方程式は，ホッジ演算子を用いて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_e &= \varepsilon^* \boldsymbol{e}\\
\boldsymbol{b} &= \mu^* \boldsymbol{h} \qquad (5)
\end{aligned}$$

と表されることになる．このように，通常，電磁気学では，ともに単なる同じベクトルと認識されていた，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ は，微分形式では2種類に分類されるという一見なじみづらい様相となる．しかしながら，その全容は次に説明する2重格子空間を想定して考えれば極めてスムースに理解できる．

3　2重格子空間とマクスウェルグリッド方程式

電磁場の数値シミュレーションにあたってはいずれか空間を有限次元に落として表現する必要があり，そのもっとも簡単なものが格子化である．すると，上記微分形式のところで述べたような積分の形式を意識した電磁場の各物理量の格子上への自然な配置は Fig.1 のようになる．実際，それらは期待される通り有限格子表現でのファラディーおよびアンペールの法則に合致した描像となっている．　しかしながらこのとき，構成方程式で直接結びついているはずの $\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{H}$ あるいは $\boldsymbol{D}$ や $\boldsymbol{B}$ は，それぞれ辺上，面上と格子空間での別の場所にあることになり，物理量の配置に矛盾が生じる．これをうまく解決し電磁場の自然な描像を与えたのが，1977年に T.Weiland によって導入された2重グリッドの概念である．[1](Fig.2) すなわち，3次元空間を格子状に有限差分化する際，通常の格子 (G) に加え，x, y, z 方向に1／2格子ずれたもう一つの格子 (デュアルグリッド；$\tilde{G}$) を想定し，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ は G 上に，$\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ は $\tilde{G}$ 上にと，それぞれ別々の

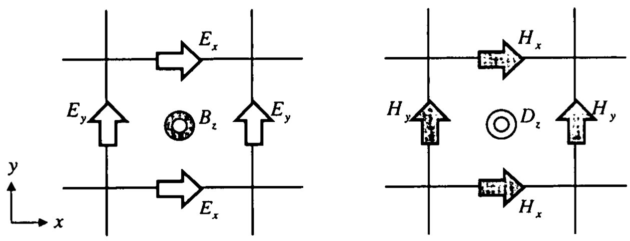

Fig. 1:　Allocation of E, B and D, H.

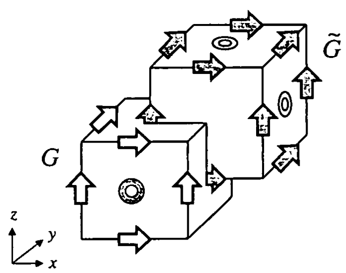

Fig. 2:　Electromagnetic fields on grid space.

グリッド空間に属するものと解釈する．このように2重グリッドを想定することで，実際に，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ および $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ は，それぞれ辺上，面上に配置でき，かつ，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ は，同じ位置に配置でき構成方程式の描像も満足できる．

さてつぎに，この2重グリッド上での電磁場の方程式について説明する．これまでみてきたように，電磁場の各物理量はいずれも線積分なり面積分なり，いずれ積分されてのみ意味のある量であることに着目すると，とりわけ有限化されたグリッド上での電磁場の方程式の記述には電場，磁場，電束密度，磁束密度などよりもむしろそれぞれその積分量である電圧降下，磁気的電圧降下，電束，磁束を用いるのが自然である．たとえば，Fig.1左，右に対して，電場，磁場を各辺の電位降下 (e)，あるいは磁気的な電位降下 (h) に，また，電束密度，磁束密度を各面内の電束 (d)，磁束 (b) に置き換えて表すと (Fig.3)，それぞれファラディ，アンペールの法則は，x-y 面内では次のような有限積分形に表される．

$$e_{x1}+e_{y2}-e_{x2}-e_{y1} = -\dot{b}_z \qquad (6)$$

$$h_{x1}+h_{y2}-h_{x2}-h_{y1} = \dot{d}_z \qquad (7)$$

したがって，例えば各グリッドの辺上の電圧降下の値に番号をふり，考えている3次元グリッド全ての面に対し (6) の要領で面毎のファラディの法則を構成したとすると，それは次のように行列表現される．

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{x2} \\ \vdots \\ e_{y1} \\ e_{y2} \\ \vdots \\ e_{z1} \\ e_{z2} \\ \vdots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{b}_{x1} \\ \dot{b}_{x2} \\ \vdots \\ \dot{b}_{y1} \\ \dot{b}_{y2} \\ \vdots \\ \dot{b}_{z1} \\ \dot{b}_{z2} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (8)$$

また，同じような要領で有限グリッド上でそれぞれ電場，磁場のガウスの法則を表現すると (Fig.4 参照)

$$b_{x1}-b_{x2}+b_{y1}-b_{y2}+b_{z1}-b_{z2} = 0 \quad (9)$$

$$d_{x1}-d_{x2}+d_{y1}-d_{y2}+d_{z1}-d_{z2} = \rho \quad (10)$$

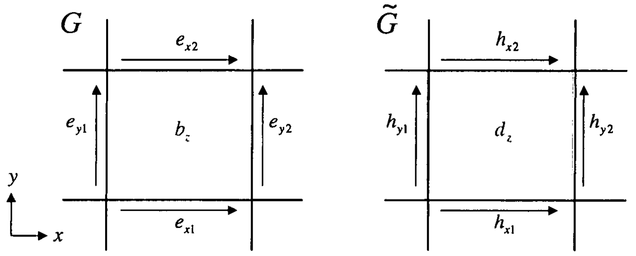

Fig. 3: Electric voltage drop - magnetic flux, and magnetic voltage drop - electric flux.

そして同様に，例えば (9) を全グリッドに対して行列表現すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{x1} \\ b_{x2} \\ \vdots \\ b_{y1} \\ b_{y2} \\ \vdots \\ b_{z1} \\ b_{z2} \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \qquad (11)$$

などとなる．いま，(8) の行列の部分をシンボリックに C, 電圧降下のベクトルを e, 磁束のベクトルを b と書くとすると，それは，

$$Ce = -\dot{b} \qquad (12-1)$$

となる．(ただし，行列 C は一般に正方行列となならない．) すなわち，通常のマクスウェル方程式でのファラディの法則とくらべると，(12-1) の行列 C は有限グリッド表現における rot 演算子と考えることができる．同様に，(11) の行列を S と書くことにすると，(4-2)~(4-4) の有限グリッド上での表現は，

$$Sb = 0 \qquad (12-2)$$

$$\tilde{C}h = j + \dot{d} \qquad (12-3)$$

$$\tilde{S}b = \rho \qquad (12-4)$$

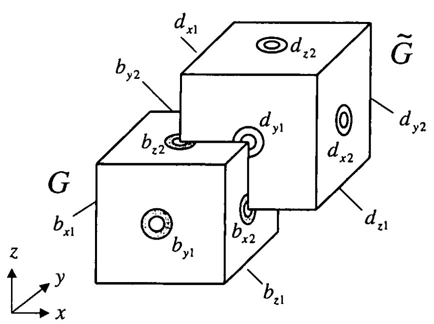

Fig. 4: Electromagnetic fields on grid space (II).

と書き表わされる．ただし，～のついた演算子は，デュアルグリッド $\tilde{G}$ 上での演算子であることを表す．また，j,ρ はそれぞれ対応する電流と電荷のベクトルを表す． そしてこのとき，

$$SC=0, \quad \tilde{S}\tilde{C}=0 \qquad (13-1)$$

$$C\tilde{S}^T=0, \quad \tilde{C}S^T=0 \qquad (13-2)$$

などの恒等式がこれらの行列に成り立つことが直接の計算で確認できる．これらは明らかに，それぞれベクトル解析での恒等式，

$$div\ rot=0 \qquad (14-1)$$

$$rot\ grad=0 \qquad (14-2)$$

あるいは，微分形式での恒等式

$$dd \quad = \quad 0 \qquad (15)$$

に対応する．また，グリッドとデュアルグリッドの間のトポロジー的関係を代数的に表した恒等式として

$$C \quad = \quad \tilde{C}^T \qquad (16)$$

なる関係も成り立つことがわかっており，これは微分形式でいうホッジ演算子による対偶演算に対応する．

このように，有限2重グリッド上でマクスウェル方程式に対応する表現を**マクスウェルグリッド方程式(MGE)**といい，それは3次元実空間上でのベクトル解析や微分形式による表現同様，有限グリッド空間上で閉じた無矛盾な理論体系を構成している．そして，このMGEに基づいて行なう数値計算法は，**Finite Integration Technique (FIT)**と呼ばれている．このように有限なグリッド空間なりにその中で閉じた体系の電磁気学に基づいて数値解析を行なうことで，極めて安定なシミュレーションが可能となる．そしてさらに，サブグリッド，スムース境界などの非常に数値ノイズの影響を受けやすい定式化においても安定解を得る強力な指針が与えられることになる．実際，数値モデルにおいて部分的に微細構造がありサブグリッド化を行ないたい場合，通常のサイズのグリッドとサブグリッドとの間の場の変数の補間公式では，さまざまな選択枝のうちあくまで上記の公式(13),(16)が成立するよう補間係数を選ぶことにより，数万回，数十万回の時間発展の計算においても安定な数値解が得られることがわかっている．[2] また，境界がかならずしも格子に沿わず格子を斜めに横切るような場合，従来，境界部分では境界形状にあわせて格子をカットし多角形化し，その周辺に沿って積分を行なうコントアパス積分の方法がポピュラーに行なわれていた．FITではこのコントアパス積分法により上記の公式(13),(16)が満たされなくなるのを避け，むしろ多角形状化の影響を構成方程式に組み込む方法で定式化することによりやはり多数時間ステップでも極めて安定な解を得ることができることが示されている．

4 FITとホイットニー形式による有限要素法

(8),(11)にみられるように，演算子 C や S が-1, 0, 1だけの成分からなっていることから，公式(13),(16)は，グリッドのトポロジー的な性質によるもので，定式化の際に前提とした座標系のとり方などとは無関係に成り立ち，有限グリッド空間において本質的な関係式であることを示唆している．微分形式の体系が座標系の概念とは無関係に多様体上で成り立ち，前節でみたように電磁場の各成分の格子上への配置がその微分形式の理念に矛盾しないようFITの2重グリッド構造が導入されたことを思い出すと，(13),(16)が本質的な関係式であることもまた理解できる．近年，このような試みは有限要素でも行なわれつつあり，とりわけ，ホイットニー形式に基づいた有限要素法に2重グリッドの概念を取り入れる研究が，Bossavit教授により活発に議論されている．[3] すなわち，FITもホイットニー形式FEMも，ともに有限次元空間上でのマクスウェル方程式の再定式化を行なうもの(FITのマクスウェルグリッド方程式に対応するもの)で，その違いは数値解析対象を表現する座標空間の違いのみであるということができる．

5 FITとFDTD

もう一点，FITとFDTDとの相違ついて簡単にふれておく．これまでみたようにFITとは，MEGをベースに構成された数値解析手法全般をさすもので，電磁波の方程式を中心差分化したFDTDとは基本概念を異にしている．しかしその一方で，FITの2重グリッドは，やはりYee格子を拡張的に修正したものと考えることもできるわけで，電磁波に対する数値解析の実際のプログラムコードのレベルの公式では，FITはFDTDとほぼ同じものになっている．

6 FIT が考案された経緯

FIT の基本概念はその名のとおり (6), (7), (9), (10) に見られるマクスウェル方程式の有限積分表現である．1975~1977 年，T. Weiland は，当時，ダルムシュタット工科大学での博士論文で，その最初の着想を導波路の周波数領域解析を通して見い出した．その後，1978 年に CERN に移り，そのころ計画が進行中であった LEP 加速器の加速空洞の設計応用に際し時間領域解析へと展開させた．そして，1980 年さらに DESY に移った後，現在 MAFIA として知られている商用コード開発に着手し，その基礎概念として FIT を用いた．MAFIA はその後，彼自身によって設立した CST 社から発表された．FIT の実用プログラムコードの開発経緯は次のようである．

1980	BCI コード (軸対象航跡場周波数領域解析)
1981	TBCI コード (同時間領域解析コード)
1983	URMEL コード (共振空洞固有モード解析)
1984	MAFIA ver.1(FIT 商用化コード, UNIX)
	その後、ver.2 (1985), ver.3(1989), ver.4(1995)
1999	CST Microwave Studio (PC 用商用化コード)
2002	CST Electromagnetics Studio, Design Studio

参考文献

[1] T. Weiland, Electronic Networks, Devices and Fields, *Int. J. Num. Model.*, Vol.9, (1996), pp.295-319.

[2] P. Thoma and T. Weiland, Electronic Networks, Devices and Fields, *Int. J. Num. Model.*, Vol.9, (1996), pp.359-374.

[3] A. Bossavit and L. Kettunen, Electronic Networks, Devices and Fields, *Int. J. Num. Model.*, Vol.12, (1999), pp.129-142.