凍土造成用の交流部を持つ開放型二重管サーモサイフォンの開発 その２ 製氷過程の非定常熱伝導解析の２ ：準定常近似による解析

第23回　寒地技術シンポジウム

2007年12月12,13,14日

ＣＴＣ０７－Ⅱ－００４

凍土造成用の交流部を持つ開放型二重管サーモサイフォンの開発 その２　製氷過程の非定常熱伝導解析の２：準定常近似による解析

媚山政良*,
*室蘭工業大学

Development of the thermo−syphon with a cross flow section［Part２：analysis of the unsteady freezing process of water；２nd Analytical method with Quasi−Steady Approximation］

Masayochi KOBIYAMA*
*Muroran Institute of Technology

COLD REGION TECHNOLOGY CONFERENCE 2007

１．はじめに

雪の貯蔵と利用に関する技術開発を続けているが、冬季間の自然冷熱ｴﾈﾙｷﾞｰを貯蔵する媒体としては、天然の氷もあり、また、地中の水分が凍った凍土もある。

本報告ではｻｰﾓｻﾌｫﾝなど熱伝達素子による凍土層の造成速度を探る前段階として、静止した水の凍結問題についての解析手法について検討を行う。

薄い隔壁を有した伝達素子を含む伝熱系の非定常問題を数値解析する場合、隔壁に与えられる差分要素の寸法Δxは大きくは取れず、これに伴い時間刻み$\Delta\tau$は、小さな値とならざるをえず、数値解析における演算時間を長引かせている要因となっている。本研究においては非定常熱伝導問題の数値解析において、簡便で計算時間の短い解析手法の開発を試み本報告では準定常近似を用いた手法について説明を行う。

２．数値解析法

2.1 準定常近似

水の凍結速度は氷（凍結層）の熱伝導速度に比較すると遅く、直角座標系における定常熱伝導問題と同じく平板内での温度はほぼ直線状となる。この定常に準じた性質（準定常と呼ぶ）を用いると、水温が０℃の場合の凍結問題（Stefan の問題）を高い近似度をもって容易に数値解析することができる。この方法は、初期の水温が０℃以外の場合の凍結問題（Neumann の問題）にも拡張することができるが、この節では Stefan の問題に限って解法を示し、近似度の検討を行う。なお、Neumann 問題への適応は後述する。

図１に伝熱系を示す。ここで、θ_Sは冷却面の温度[℃]、θ_Fは凍結温度、X [m]は凍結面を示す。

準定常と近似し数値解析する方法を「準定常法」と呼び直角座標系におけるその計算手順を次に示す。

① ある凍結厚さΣX [m]に対し凍結厚さΔX [m]を与える。

② $x=0$ と $x=X$（$=\Sigma X+\Delta X$）の間の温度分布を直線近似し、熱流束q [kcal/m²h]を次式により計算する。ここで、λ_{ice} [kcal/(mh℃)]は氷の熱伝導率である。

$$q=-\lambda_{ice}\times\left(\theta_F-\theta_S\right)/X \cdots\cdots (1)$$

③ 氷の凍結速度をv_{ref} [m/h]とするとその値は次の式より求められる。

$$v_{ref}\ [\mathrm{m/h}]\times L\ [80\mathrm{kcal/kg}]\times\gamma\ [920\mathrm{kg/m^3}]$$
$$=-q\ [\mathrm{kcal/m^2h}]\cdots\cdots(2)$$

ここで、Lは水の凝固潜熱、γは氷の比重量を示す。

⑤ ΔXの氷を凍結するのに要する時間$\Delta\tau$ [h] は次式により計算され、凍結開始後の時間τはそれまでの凍結に要した時間の積算値$\Sigma\tau$との和として式(4)のように求められる。

$$\Delta\tau=\Delta X/v_{ref} \cdots\cdots (3)$$
$$\tau=\Sigma\tau+\Delta\tau \cdots\cdots (4)$$

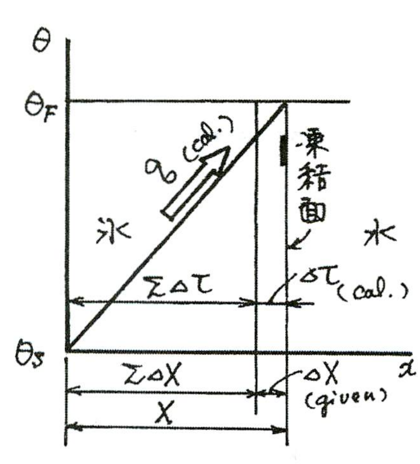


図１　座標と記号

媚山政良 室蘭工業大学(室蘭市水元町 27-1 Tel/Fax 0143-46-5305 E-Mail jrc98.mmm.muroran-it.ac.jp)

θ_S =-10℃、ΔX =0.001 m、(凍結温度 θ_F =0℃) とした場合の氷の凍結厚さの時間変化を 2.3.2 において示すK値法によるStefanの解と比較し図2に示す。また、Stefan の解に対する凍結厚さの相対誤差を図3に示す。氷の厚さの薄い場合には準定常法の Stefan の解に対する近似度は良好とは言いがたいが、厚くなると近似度は高まる。凍土の規模は数ﾒｰﾄﾙ単位なのでこの種の解析には十分利用できる。なお、ΔX を小さく与えると近似度は高くなる。図4に、後述の式(15)によるK値を示す。傾向は相対誤差に似ている。

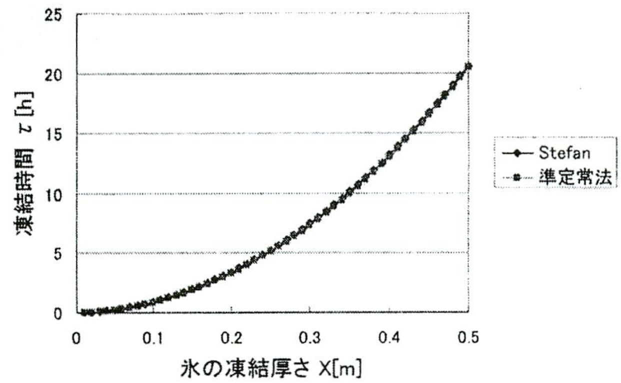


図2　氷の凍結厚さ

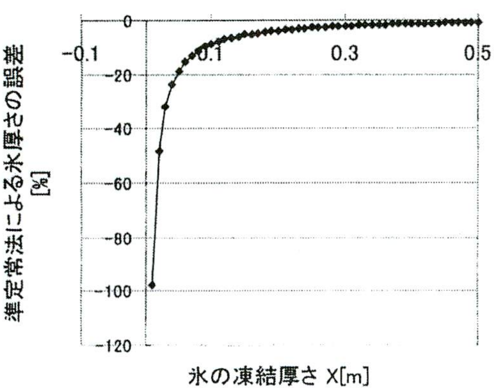


図3　誤差

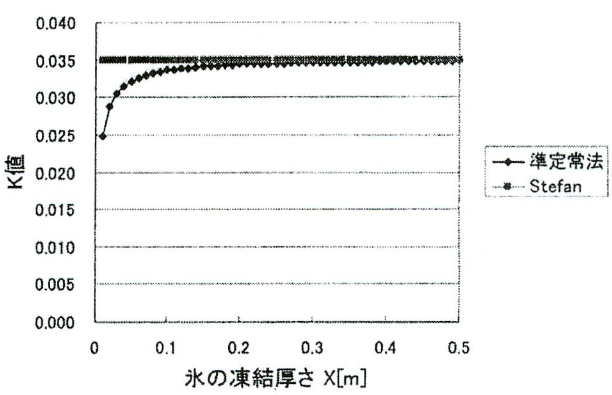


図4　K値

2.2 Stefanの問題での準定常法の応用

薄い隔壁を通した熱通過の非定常問題を数値解析する場合、隔壁に与えられる差分要素の寸法 Δx は大きくは取れず、これに伴い時間刻み $\Delta\tau$ は、a [m²/h]を温度伝導率とすると、$\Delta\tau \sim (\Delta x)^2 / a$ に示すような小さな値となり、数値解析における演算時間を長引かせている要因となっている。2.1において述べた準定常近似を用いるとこの欠点を回避できる。

たとえば、ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝを通し温度 θ_{atm} [℃]の寒冷外気により水を凍らせ氷を作るｼｽﾃﾑを模擬した伝熱系を図5に示す。ここでは、直角座標系を用いている。

ここで、2.1において述べた温度分布の準定常近似を用いる。ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝは鋼により作られておりその熱伝導を λ_{Steel} [kcal/(m h ℃)]とする。また、外気に接する放熱部と氷と接触する吸熱部の作動媒体間で $\Delta\theta_{drop}$ (図5，6においては $\Delta\theta_f$)の温度差があるものとし、各部の熱伝達率 α [kcal/(m²h ℃)]を図のように与える。構成要素の鋼に相当する厚さを ΔS [m]とすると、この伝熱系は「定常状態における重ねた平行平面板」と等価となり、その温度分布は図6に示す通りとなる。このとき、熱流束 q は次式により計算される。

$$q = -\frac{(\theta_F - \theta_{atm})}{\sum_{j=1}^{all} \frac{\Delta S_j}{\lambda_S}} \cdots\cdots (5)$$

このとき、各部の温度 θ_j は次のように計算される。

$$\theta_j = \theta_{j-1} - \frac{\Delta S_j}{\lambda_{Steel}} \times q \cdots\cdots (6)$$

ここで、α に係る部分の鋼での熱伝導に相当する厚さ ΔS は式(7)、厚さ X の氷の鋼相当厚さ ΔS_{ice} は氷の熱伝導率を λ_{ice} と置くと式(8)により計算される。

$$\Delta S = \lambda_S / \alpha \cdots\cdots (7)$$

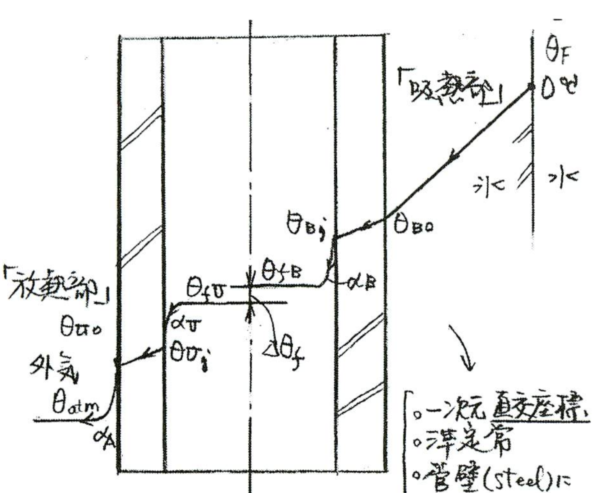
$$\Delta S_{ice} = \frac{\lambda_{Steel}}{\lambda_{ice}} \times X \cdots\cdots (8)$$

作動媒体間での温度差 $\Delta\theta_{drop}$ に係る鋼相当厚さ ΔS_{drop} は次式により計算される。

$$\Delta S_{drop} = -\left(\frac{\lambda_{Steel}}{q}\right) \times \Delta\theta_{drop} \cdots\cdots (9)$$

計算手順は 2.1 での①～⑤と同様であるが、q が求められなければ式(9)の ΔS_{drop} は決まらないため、③において反復計算を行う。

図５　寒冷外気により水を凍らせ氷を作るｼｽﾃﾑを模擬した伝熱系



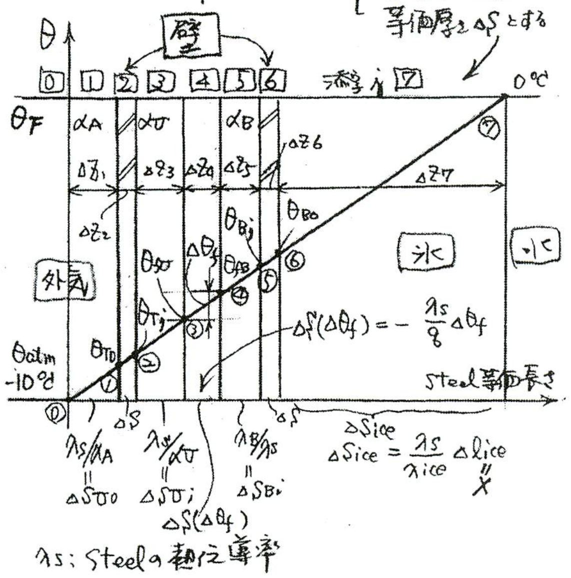


図６　鋼の相当厚さと温度分布

N88BASIC によるﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑの例を図７に示す。

計算例として本研究の目的であるｻｰﾓｻｲﾌｫﾝなどの伝熱素子の製氷能力について簡単な条件を与え比較する。熱伝達率αおよび外気に接する放熱部と氷と接触する吸熱部の作動媒体間で温度差$\Delta\theta_{drop}$を表１のように与える。

表１　計算例の条件

	α_A	α_U	α_B	$\varDelta\theta_{drop}$
	[kcal/(m2h°C)]			[°C]
ﾋｰﾄﾊﾟｲﾌﾟ	40	15000	15000	0.1
交流部二重管TS 1)	40	400	400	2
単管TS	40	100	100	4

θ_{atm} =-10℃のときの各種伝熱素子の製氷速度を図８に示す。本研究開発を行っている交流部を持つ二重管ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝ(TS)[1]の製氷能力はﾋｰﾄﾊﾟｲﾌﾟに比較すると80%以上の能力を示し、単管のｻｰﾓｻｲﾌｫﾝでは 50%程度にとどまることと比較すると簡単な構造の割には能力の低下の割合が低いことが分かる。

交流部二重管ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝとﾋｰﾄﾊﾟｲﾌﾟでの各部の温度分布を図９に示す。両者の熱伝達率の違いによる製氷能力の差異は少なく、むしろ、外気に接する放熱部と氷と接触する吸熱部の作動媒体間で温度差$\Delta\theta_{drop}$によることが分かる。これは交流部二重管ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝ内での動作流体の循環速度に起因しており、交流部二重管ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝは開放型であることから、たとえば、ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝの頭部に簡単な風車を取り付け、これにより作動媒体を強制的に循環させるとさらに性能を向上させることは可能であることが容易に想像できる。なお、寒冷気に放熱を行う部位でのﾌｨﾝの装着はいずれの伝熱素子に対しても必須である。このように本解析方法は、各部位の熱伝導率が既知であるとき、伝熱素子の性能評価、改良に役立つ。

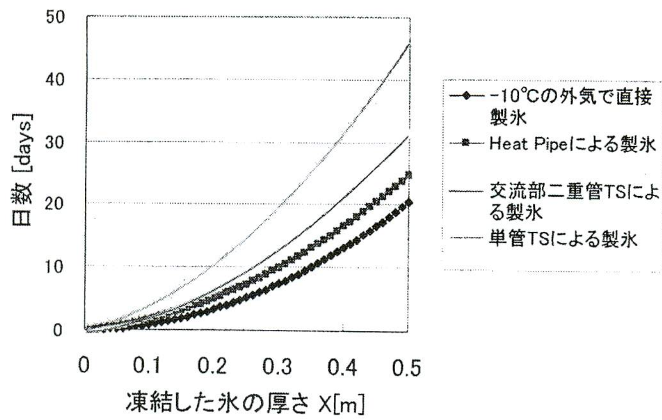


図８　各種の製氷伝熱素子の能力の比較

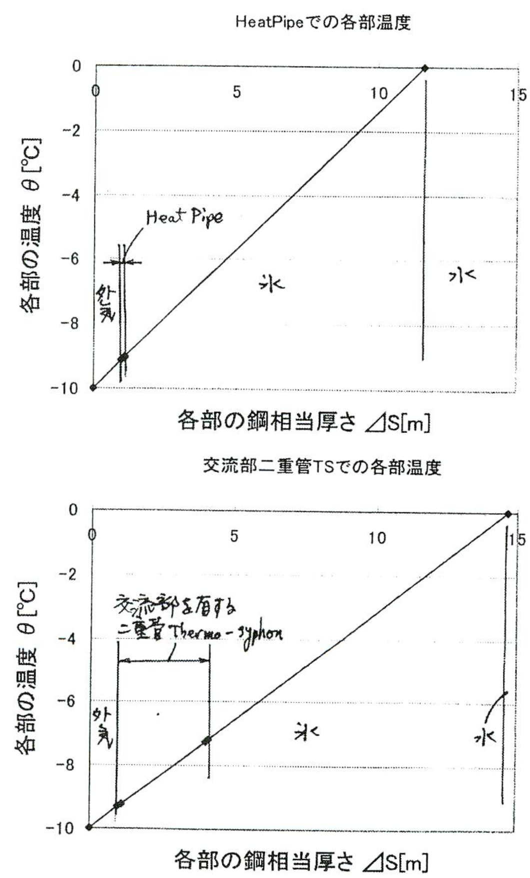


図９　各部の温度分布

2.3 準定常法の Neumann 問題への拡張

2.3.1 凍結厚さ X の近似計算（K 値法）

Neumann の解析によると凍結面の位置（凍結厚さ）X は次式により与えられる。

$$X = 2g\sqrt{a_I \tau} \cdots\cdots (10)$$

ここで g は次の方程式の解である。

$$\frac{\exp(-g^2)}{erf(g)} - \frac{\lambda_W}{\lambda_I}\sqrt{\frac{a_I}{a_W}}\left(\frac{\theta_\infty - \theta_F}{\theta_F - \theta_S}\right)\frac{\exp(-a_I g^2 / a_W)}{erfc\left(g\sqrt{a_I / a_W}\right)}$$
$$= \frac{gL\sqrt{\pi}}{c_I(\theta_F - \theta_S)}$$
$$\cdots\cdots (11)$$

ここで、a [m²/h]は温度伝導、c [kcal/kg℃]は比熱であり、θ_∞ は図 10 に示す無限遠方での水の初期温度である。また、$erf(z)$ は誤差関数である。添え字 i は氷を、w は水を示す。ここで、$\Theta_W = (\theta_\infty - \theta_F)$、$\Theta_S = (\theta_F - \theta_S)$ と置き、次の範囲で式(11)より $g\{[\Theta_S, \Theta_W], [\lambda_i, \lambda_w, \lambda_w, a_i, a_w, c_i, L]\}$ を求めると式(13)に示す近似式を得る。

$$-19 \le \Theta_S \le -1、\ 0 \le \Theta_W \le 4 \cdots\cdots (12)$$

$$g = 1.0032 \times (0.0543 - 0.0006 \times \Theta_W) \times \sqrt{\Theta_S}$$
$$\cdots\cdots (13)$$

ここで、g を式(10)に代入し $a_i = 0.0042$ [m²/h]とし、また、K の値を次式とすると式(15)を得る。

$$K = 0.6370 \times (0.0543 - 0.0006\Theta_W) \cdots\cdots (14)$$

$$X = K \times \sqrt{\Theta_S(\tau / 24)} \cdots\cdots (15)$$

式(15)の $\sqrt{\ }$ 内の値は積算寒度[℃-day]を示し、K を K 値と呼ぶ。この値を利用し、また、準定常と近似した冷却面と氷側の温度分布を求める方法を「K 値を用いた準定常近似による解析方法」と呼ぶ。なお、式(14)に示した関数近似は近似度を高めておく必要があり、近似度は式(12)の範囲において-5%～+1%である。また、Neumann の解との近似度もこの範囲にある。

なお、式(14)において $\Theta_W = 0$ とおくと Stefan の問題の場合の K 値となり、$K = 0.03459$ を得、$K = 0.035$ となる。この場合の温度分布は図 2 に示したものである。

2.3.2 Neumann 問題への準定常法の適応

Stepan 問題に対する氷を通した熱流速 q は未凍結である水側からの伝熱量が 0 であるため、式(1)により与えられるが、Neumann 問題の場合には有限の値となり、考慮する必要がある。その関係を図 10 に示す（同図では分かりやすくするため熱流束の方向を x 方向に対し逆転して示してある）。各熱量束は次のように表すことができる。

$$q_{outf} = -\lambda_i(\theta_F - \theta_S) / X \cdots\cdots (16)$$

$$q_{latent} = v_{ref} \times L \times \gamma \cdots\cdots (17)$$

$$q_{\inf} = -\lambda_w\left(\partial\theta_w / \partial x\right)_X \cdots\cdots (18)$$

ここで、θ_w は水側の温度を示し、凍結面 F において準定常近似を用いると次の熱平衡式が成り立つ。

$$q_{latent} = q_{outf} - q_{\inf} \cdots\cdots (19)$$

ここで、$q_{\inf}$ に係る温度勾配 $\left(\partial\theta_w / \partial x\right)_X$ を Neumann の解析より式(20)より求め、関数近似を行っておくと、q_{latent} は計算され、2.2 において示した Stefan の問題での準定常法におけると同様に（ただし、$q = q_{latent}$ と置く）温度分布、氷の成長速度が計算される。

$$\left(\partial\theta_w / \partial x\right)_X / \Theta_W =$$
$$1/erfc\left(g\sqrt{a_i / a_w}\right) \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(g\sqrt{a_i / a_w}\right)\right]$$
$$\cdots\cdots (20)$$

式(20)は式(13)に示す g（と a_i、a_w）のみの関数となる。式(20)の計算を行い、関数近似を行うと次式を得る。

$$\left(\partial\theta_w / \partial x\right)_X / \Theta_W =$$
$$3.276966 \times (4.387597g + 1.0918) \cdots\cdots (21)$$

なお、式(20)による計算では、式(21)の値は 3.276966 倍小さいため、式(21)の値は、次の数値微分により得ている。

$$\left(\partial\theta_w / \partial x\right)_X = \lim_{\Delta x \to enoughSmall}\frac{\theta_w(X + \Delta X) - \theta_w(X)}{\Delta X}$$
$$\cdots\cdots (22)$$

ここで、3.276966 の数値の由来は不明である。なお、式(21)の近似度は式(12)の範囲において-1%～+1%である。

2.2 Stefan の問題での準定常法の応用において示した相当厚さを導くにあたり、氷の相当厚さを用いると水の氷相当厚さ ΔS_w は次の式により与えられる。なお、

g の値は式(13)より計算し、式(23)の右辺の分母の値は式(21)より計算する。

$$\Delta S_w = 1/[\left(\partial\theta_w / \partial x\right)_X / \Theta_W] \cdots\cdots (23)$$

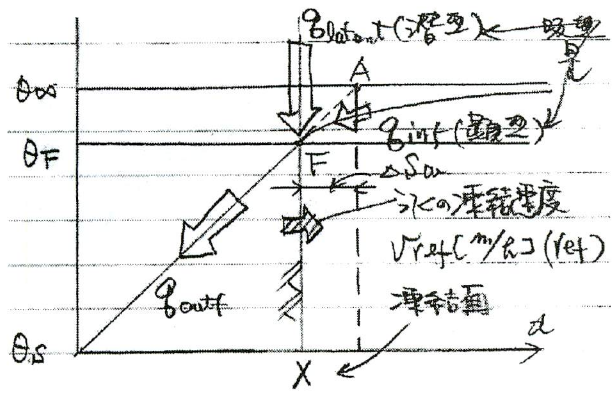


図 10　凍結に係る熱の流れ

```
1000 '==========================================================================
1010 '  【準定常法」HPvsTS15                                  (^0^)/~~        Dr.M
1020 '==========================================================================
1030 DIM CT(100),DZEQ(100),ZEQ(100), ZICE(1000),DAYS(1000),DTH(1000)
1040 '
1050   RAMS=40.: RAMICE=1.9                          :'Steeと Iceの熱伝導率 kca/mhC
1060   ALFA=40.: ALFU=100.*4.: ALFB=100.*4.: DTF=2.  : TITLE$="Mk2: Dual pipes with fins"
1070 '( ALF:' kcal/m2hC   DTF:Temp.rise and loss by mixing & etc.)
1080 '
1090  DS=3.5/1000.                :'パイプの厚さ m
1100  CATM=-10. : CFRZ=0.         :'外気と凍結温度 ℃
1110 '
1120  ITMEND=50 : DINC=10./1000.  :'氷の増量 m
1130 '
1140 '--------------------------------------------------------------------------
1150  PRINT : PRINT TITLE$ : PRINT USING"  Δtf=#.##℃";DTF
1160  ZICE(0)=0. : ZEQ(0)=0. : COMREF=0. :  COMTMH=0. : COMCDAY=0.
1170 '---------------------------------------------------
1180  CT(0)=CATM : CT(7)=CFRZ
1190 '
1200  DSTO=RAMS/ALFA : DST=DS     : DSTI=RAMS/ALFU : DSBI=RAMS/ALFB : DSB=DS :'Steel等価厚さ m
1210  DZEQ(1)=DSTO   : DZEQ(2)=DST : DZEQ(3)=DSTI   : DZEQ(4)=0.  :DZEQ(5)=DSBI : DZEQ(6)=DSB
1220  FOR I=1 TO 6 : ZEQ(I)=ZEQ(I-1)+DZEQ(I) : NEXT : ZEQ12356=ZEQ(6)          :'Steel等価長さ m
1230 '
1240 '    ---DZEQ4(DSDTF)の反復計算の準備---
1250  SQD=-RAMS/ZEQ(6)*(CFRZ-CATM) : DZEQ(4)=-RAMS/SQD*DTF
1260 '
1270 '++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
1280 FOR ITM=1 TO ITMEND
1290 '    ---氷厚さの増量---
1300  ZICE(ITM)=ZICE(ITM-1)+DINC : DSICE=RAMS/RAMICE*ZICE(ITM) : DZEQ(7)=DSICE
1310 '    ---DZEQ4(DSDTF)の反復計算と熱流束SQの計算---
1320  ZEQ(7)=ZEQ12356+DZEQ(4)+DZEQ(7)
1330   SQ=-RAMS/ZEQ(7)*(CFRZ-CATM)  : DZEQ(4)=-RAMS/SQ*DTF :' DSDTF=DZEQ(4)
1340   FOR I=1 TO 7 : ZEQ(I)=ZEQ(I-1)+DZEQ(I) : NEXT
1350   REER=ABS((SQD-SQ)/SQD) : SQD=SQ : IF REER>0.000001 THEN GOTO 1330
1360 '   ---------------------------------------------
1370 FOR I=1 TO 6 : CT(I)=CT(I-1)-DZEQ(I)/RAMS*SQ : NEXT I
1380 '   ---------------------------------------------
1390 '    ---凍結速度と時間の計算----
1400  DREF=-SQ/(80.*920.) : DREFTMH=DINC/DREF : COMTMH=COMTMH+DREFTMH : DAYS(ITM)=COMTMH/24.
1410 '    ---理論的凍結速度係数Kとの比較計算---
1420  COMCDAY=COMCDAY-CT(6)*DREFTMH/24.          :' 積算寒度 (℃*Day)
1430  CK=ZICE(ITM)/SQR(COMCDAY)                  :' HP, TSを通したK値 (理論値=0.035)
1440  H=0.035*SQR(-CATM*DAYS(ITM))               :' 外気温度Catm直接接触における理論氷厚さ
1450  DTH(ITM)=(ZICE(ITM)/0.035)^2/(-CATM)        :' 理想値での凍結時間
1460 '
1470  PRINT USING " ITM=### Zice=##.###m Day=##.##d << Dth=##.##d";ITM,ZICE(ITM),DAYS(ITM),DTH(ITM)
1480 NEXT ITM
1490    FOR I=0 TO 7 : PRINT USING" i=## Zeq=##.####m CT=###.####C"; I,ZEQ(I),CT(I) : NEXT I
1500 END
```

図７　準定常法のﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑ例

３．おわりに

本研究においては非定常熱伝導問題の数値解析において、簡便で計算時間の短い解析手法の開発を試み本報告では準定常近似を用いた手法について説明を行った。本数値解析手法の開発には、未だ説明のつかない部分もあるが、実用に供せるﾚﾍﾞﾙではあるように思う。

参考文献

1) 藤本・媚山・山森・榎・河村、「交流器をもつ開放型二重管ｻｰﾓｻｲﾌｫﾝに関する基礎研究（実験とｼﾑﾚｰｼｮﾝ)、日本機械学会北海道支部講演会概要集、No.072-2、1999.pp5-6.