



弾性基礎上一四邊、四隅共完全に自由なる板の曲げについて

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-05-20 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 能町, 純雄 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/3022

弾性基礎上四邊、四隅共完全に自由なる板の曲げについて

能 町 純 雄

On the Bending of Plates on Elastic Foundation whose Four Sides are completely free from any Stress

Sumio Nomachi

Abstract

For the differential equations which denote the elastic problems of a rectangular thin plate, the author had already obtained a general solution¹ applied to any boundary conditions by means of H. Kniess's² theory of "endliche Fourier-Transformation".

In this paper, as an application of the above result, he dealt with bending of the rectangular thin plate on elastic foundation, whose four sides are completely free from any stress. And there is first given a proof of convergency of the series, which were obtained by Dr. Iguchi³, to find boundary unknowns for the rectangular thin plate without two opposite simply supported sides. This paper also describes some numerical examples and shows a characteristic of this sort of plate.

I 記號並びに豫備公式

1 任意の函數の正弦函數についての Fourier 展開

變域 $(0, a)$ に於て定義された函數 $f(x)$ を, Fourier の正弦級數に展開すれば,

$$f(x) = \frac{2}{a} \sum_m \left(\int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi}{a} x dx \right) \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad (1)$$

$$m=1, 2, 3, \dots, a > x > 0.$$

今便宜上

$$S_m[f(x)] = \int_0^a f(x) \sin \frac{m\pi}{a} x dx \quad (2)$$

- 1 能町純雄; 矩形板の弾性諸問題, 特に弾性基礎上に在る四邊共自由な矩形板の曲げについて, 室蘭工業大學研究速報, 第5號 (昭和27年1月)
- 2 H. Kniess; Lösung von Randwertprobleme bei Systemengewöhnlicher Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation. Math. Zeitsch, 44 S. 266~290 (1939)
- 3 S. Iguchi; Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten. Berlin, S. 43 (1933)

とすれば, $S_m[f(x)]$ は, H. Kniess の endliche sinustransformation である。

今, $f(x)$ の α -次導函數を $f^{(\alpha)}(x)$ とすれば

$$S_m[f^{(\alpha)}(x)] = \int_0^a f^{(\alpha)}(x) \sin \frac{m\pi}{a} x dx,$$

上式の右邊に部分積分を施せば

$$\begin{aligned} S_m[f^{(\alpha)}(x)] = & -\left(\frac{m\pi}{a}\right) \left\{ (-1)^m f^{(\alpha-2)}(a) - f^{(\alpha-2)}(0) \right\} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \left\{ (-1)^m f^{(\alpha-4)}(a) - f^{(\alpha-4)}(0) \right\} \\ & - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^5 \left\{ (-1)^m f^{(\alpha-6)}(a) - f^{(\alpha-6)}(0) \right\} + \dots \\ & + (-1)^r \left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2r-1} \left\{ (-1)^m f^{(\alpha-2r)}(a) - f^{(\alpha-2r)}(0) \right\} + (-1)^r \left(\frac{m\pi}{a}\right)^{2r} S_m[f^{(\alpha-2r)}(x)]. \end{aligned} \quad (3)$$

同様の意味に於て, 變域 $(0, a)$, $(0, b)$ に於て定義された函數 ζ_{xy} に対して

$$S_m S_n[\zeta_{xy}] = \int_0^a \int_0^b \zeta_{xy} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy \quad (4)$$

と書くことが出来る。

$\frac{4}{ab} S_m S_n[\zeta_{xy}]$ は, 函數 ζ_{xy} を $\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$ に關する Fourier の複級數に展開した場合の Fourier 係數を表わす。

又 ζ_{xy} の xy に關する任意次の導函數を反轉すれば (3) と同じ反轉關係式を得る。

2 四階の偏導函數への應用

上記の公式 (3) を適用すれば, 直ちに次の關係式を得る。

$$\begin{aligned} S_m S_n \left[\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \right] = & -\frac{m\pi}{a} \left\{ (-1)^m S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{xy} \right] - S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{oy} \right] \right\} \\ & + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \left\{ (-1)^m S_n[\zeta_{ay}] - S_n[\zeta_{oy}] \right\} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 S_m S_n[\zeta_{xy}], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_m S_n \left[\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = & \frac{mn\pi^2}{ab} \left\{ (-1)^{m+n} \zeta_{ab} - (-1)^m \zeta_{ao} - (-1)^n \zeta_{ob} + \zeta_{oo} \right\} \\ & + \frac{m^2 n^2 \pi^3}{ab^2} \left\{ (-1)^m S_n[S_{ay}] - S_n[\zeta_{oy}] \right\} \\ & + \frac{m^2 n^2 \pi^3}{a^2 b} \left\{ (-1)^n S_m[\zeta_{ob}] - S_m[\zeta_{xo}] \right\} + \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} S_m S_n[\zeta_{xy}], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} S_m S_n \left[\frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right] = & -\frac{n\pi}{b} \left\{ (-1)^n S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xb} \right] - S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xo} \right] \right\} \\ & + \frac{n^3 \pi^3}{b^3} \left\{ (-1)^n S_m[\zeta_{ob}] - S_m[\zeta_{xo}] \right\} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} S_m S_n[\zeta_{xy}]. \end{aligned} \quad (7)$$

以上の公式の示す如く各導函數の反轉式中には, 常に ζ 又はその導函數の境界値が含まれてゐることは注目に値する。

3 函數 ζ の分解

前述の如く ζ は $a > x > 0, b > y > 0$, なる領域にて定義される函數である。

$$\begin{aligned} \zeta(xy) = & \frac{1}{4} \left\{ \zeta(xy) + \zeta(a-x, y) + \zeta(x, -b-y) + \zeta(a-x, b-y) \right\} \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \zeta(xy) + \zeta(a-x, y) - \zeta(x, b-y) - \zeta(a-x, b-y) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \{ \zeta(xy) - \zeta(a-x, y) + \zeta(x, b-y) - \zeta(a-x, b-y) \} \\
 & + \frac{1}{4} \{ \zeta(xy) - \zeta(a-x, y) - \zeta(x, b-y) + \zeta(a-x, b-y) \}
 \end{aligned}$$

と書くことが出来る。上式右邊の第1項は $x=a/2, y=b/2$ に関して共に對稱であり，第2項は $x=a/2, y=b/2$ に関して各々對稱，及び斜對稱であり，第3項は $x=a/2$ に関して各々對稱及び斜對稱であり，第4項は $y=b/2, \zeta=a/2$ に関して共に斜對稱なる函數である。

かくの如く ζ は $x=a/2, x=b/2$ に関して對稱，及び斜對稱な組合せによる四つの函數に分解出来る。

公式 (a) の Fourier-sine 變換をとれば

$$\begin{aligned}
 S_m S_n [\zeta_{xy}] = \frac{1}{4} S_m S_n [\zeta_{xy}] \cdot \{ & (1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n) + (1 - (-1)^m)(1 + (-1)^n) \\
 & + (1 + (-1)^m)(1 - (-1)^n) + (1 + (-1)^m)(1 + (-1)^n) \}
 \end{aligned}$$

となり， ζ_{xy} の Fourier-sine 展開に依る級數は， m, n が奇數なる和は， $x=a/2, y=b/2$ に関して對稱であり， m が奇數， n が偶數なる和は $x=a/2, y=b/2$ に関して各々對稱及び斜對稱であり， m が偶數， n が奇數なる和は $x=a/2, y=b/2$ に関して各々斜對稱，及び對稱であり， m, n が偶數なる和は $x=a/2, y=b/2$ に関して共に斜對稱である。

II 弾性基礎上にある矩形板

4 基本微分方程式の一般解

基礎係數 (Modulus of foundation) を K で表わせば，この場合の平衡の條件は，次の微分方程式で與えられる。

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{K}{N} W = \frac{q}{N} f(xy). \quad (8)$$

W = 任意點に於ける撓み， $qf(xy)$ = 任意點に於ける單位面積に對する荷重
 q = 定數

$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ = 板の曲げ剛度 (E = 弾性係數， h = 板の厚さ， ν = Poisson's ratio)

第1圖の如き矩形板に於て

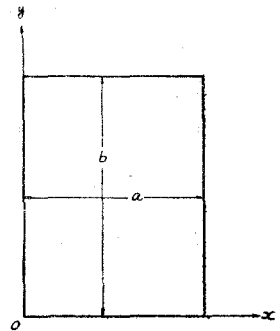
$$W = \frac{qh^4}{N} \zeta, \quad \frac{K}{N} = \lambda^4,$$

とおけば (8) 式は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \\
 + \lambda^4 \zeta = \frac{1}{b^4} f(xy). \quad (9)
 \end{aligned}$$

(9) 式に公式 (5)~(7) を適用すれば，

$$\begin{aligned}
 \pi^4 \left\{ \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \lambda^4 \right\} S_m S_n [\zeta_{xy}] = \frac{1}{b^4} S_m S_n [f(x, y)] \\
 + \frac{m\pi}{a} \left\{ (-1)^m S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{ay} \right] - S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{oy} \right] \right\} - \pi^3 \left(\frac{m^3}{a^3} + \frac{2mn^2}{ab^2} \right) \left\{ (-1)^m S_n [\zeta_{ay}] - S_n [\zeta_{oy}] \right\}
 \end{aligned}$$



第1圖

$$\begin{aligned}
& + \frac{n\pi}{b} \left\{ (-1)^n S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xb} \right] - S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xo} \right] \right\} - \pi^3 \left(\frac{n^3}{b^3} + \frac{2m^2 n}{a^2 b} \right) \left\{ (-1)^n S_m [\zeta_{xb}] - S_m [\zeta_{xo}] \right\} \\
& - \frac{2mn\pi^2}{ab} \left\{ (-1)^{m+n} \zeta_{a,b} - (-1)^m \zeta_{a,o} - (-1)^n \zeta_{o,b} + \zeta_{o,o} \right\}, \quad (10)
\end{aligned}$$

然るに

$$\zeta = \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n S_m S_n [\zeta_{xy}] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

故に

$$\frac{4}{ab} S_m S_n [f(xy)] = R_{mn},$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\pi^4}{a^4} \rho_m(\alpha_n) &= \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \lambda^4 = \frac{\pi^4}{a^4} (m^2 + \kappa_n^2) (m^2 + \kappa_n'^2), \\
\kappa_n^2 &= \alpha_n^2 + ic^2, \quad \kappa_n'^2 = \alpha_n^2 - ic^2, \quad \alpha_n = \frac{a}{b} n, \quad c = \frac{a\lambda}{\pi},
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\pi^4}{b^4} \rho_n(\beta_m) &= \pi^4 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2 + \lambda^4 = \frac{\pi^4}{b^4} (n^2 + \kappa_m^2) (n^2 + \kappa_m'^2), \\
\kappa_m^2 &= \beta_m^2 + ic'^2, \quad \kappa_m'^2 = \beta_m^2 - ic'^2, \quad \beta_m = \frac{b}{a} m, \quad c' = \frac{b\lambda}{\pi},
\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(11), (12) の如くおけば, (10) 式は次の如く變形される。

$$\begin{aligned}
\zeta &= \sum_m \sum_n \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \left[\frac{a^4}{b^4} \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} + 4 \frac{a^2}{b^2} \frac{m}{\pi^3 \rho_m(\alpha_n)} \left\{ (-1)^m S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{ay} \right] \right. \right. \\
& - S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{oy} \right] \left. \right\} - \frac{4}{b} \frac{m^3 + 2m\alpha_n^2}{\pi \rho_m(\alpha_n)} \left\{ (-1)^m S_n [\zeta_{ay}] - S_n [\zeta_{oy}] \right\} \\
& + \frac{4b^2}{a^2} \frac{n}{\pi^3 \rho_n(\beta_m)} \left\{ (-1)^n S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xb} \right] - S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xo} \right] \right\} \\
& - \frac{4}{a} \cdot \frac{n^3 + 2n\beta_m^2}{\pi \rho_n(\beta_m)} \left\{ (-1)^n S_m [\zeta_{xb}] - S_m [\zeta_{xo}] \right\} \\
& - \frac{8a^2}{b^2} \cdot \frac{mn}{\pi^2 \rho_m(\alpha_n)} \left\{ (-1)^{m+n} \zeta_{ab} - (-1)^m \zeta_{ao} - (-1)^n \zeta_{ob} + \zeta_{oo} \right\} \Big], \quad (13)
\end{aligned}$$

この式は, 荷重及び境界条件の如何に拘わらず當てはまる一般解式である。

(13) 式中 R_{mn} は荷重状態に依つて定まる既知數で, $\langle \rangle$ 中の各末知數は, 矩形板の境界条件に依つて決定する事が出来る。

5 四邊, 四隅共完全に自由なる矩形板

i) 撓み ζ の一般式

この場合の境界条件は, 次の如く與えられる。

邊 $x = a, x = 0$ に對して曲げモーメント及び反力零なる条件より

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

邊 $y = b, y = 0$ に對して曲げモーメント及び反力零なる条件より

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0, \quad (4) \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

四隅 $(a, b), (a, 0), (0b), (0, 0)$ に對して隅點反力零なる条件より (5) $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = 0.$

上式中 (1), (3), の正弦變換をとれば

$$\begin{aligned} S_n[\zeta_{oy}] &= \frac{b^2}{\nu n^2 \pi^2} S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{oy} \right] - \frac{b}{n\pi} \{ (-1)^n \zeta_{o,b} - \zeta_{o,o} \}, \\ S_n[\zeta_{ay}] &= \frac{b^2}{\nu n^2 \pi^2} S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{ay} \right] - \frac{b}{n\pi} \{ (-1)^n \zeta_{a,b} - \zeta_{a,o} \}, \\ S_m[\zeta_{x,o}] &= \frac{a^2}{\nu m^2 \pi^2} S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{x,o} \right] - \frac{a}{m\pi} \{ (-1)^m \zeta_{a,o} - \zeta_{o,o} \}, \\ S_m[\zeta_{x,a}] &= \frac{a^2}{\nu m^2 \pi^2} S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{x,b} \right] - \frac{a}{m\pi} \{ (-1)^m \zeta_{a,b} - \zeta_{o,b} \}. \end{aligned}$$

これ等の關係を公式 (13) に代入して $S_n[\zeta_{a,y}]$, ..., $S_m[\zeta_{x,b}]$, を消去し，且つ

$$\begin{aligned} S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{ay} \right] &= \frac{b}{4a^2} (A_n - A_n'), & S_n \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)_{oy} \right] &= \frac{b}{4a^2} (A_n + A_n'), \\ S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xb} \right] &= \frac{a}{4b^2} (B_m - B_m'), & S_m \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)_{xo} \right] &= \frac{a}{4b^2} (B_m + B_m') \end{aligned}$$

とおけば， ζ は次の如くなる。

$$\begin{aligned} \zeta = \sum_n \sum_m \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta & \left[\frac{a^4}{b^4} \frac{R_{mm}}{\pi^3 \rho_m(\alpha_n)} + \frac{c_m(\alpha_n)}{\nu \pi^3 \alpha_n^2} \{ (1 - (-1)^m) A_n + (1 + (-1)^m) A_n' \} \right. \\ & \left. + \frac{c_n(\beta_m)}{\nu \pi^3 \beta_m^2} \{ (1 - (-1)^n) B_m + (1 + (-1)^n) B_m' \} + \frac{4A_{mm}}{m n \pi^2} \left(1 - \frac{c^4}{\rho_m(\alpha_n)} \right) \right], \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \left. \begin{aligned} c_m(\alpha_n) &= \frac{m\alpha_n^2(1-\nu)}{\rho_m(\alpha_n)} + \frac{m(m^2 + \alpha_n^2)}{\rho_m(\alpha_n)}, \\ c_n(\beta_m) &= \frac{n\beta_m^2(1-\nu)}{\rho_n(\beta_m)} + \frac{n(n^2 + \beta_m^2)}{\rho_n(\beta_m)}, \\ A_{mn} &= (-1)^{m+n} \zeta_{ab} - (-1)^m \zeta_{ao} - (-1)^n \zeta_{ob} + \zeta_{oo} \\ &= (1 - (-1)^m (1 - (-1)^n) A_1 + (1 - (-1)^m (1 + (-1)^n) A_2 \\ &\quad + (1 + (-1)^m (1 - (-1)^n) A_3 + (1 + (-1)^m (1 + (-1)^n) A_4. \end{aligned} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{上式中 } 4A_1 &= \zeta_{ab} + \zeta_{ao} + \zeta_{ob} + \zeta_{oo}, & 4A_2 &= -\zeta_{ab} + \zeta_{ao} - \zeta_{ob} + \zeta_{oo}, \\ 4A_3 &= -\zeta_{ab} - \zeta_{ao} + \zeta_{ob} + \zeta_{oo}, & 4A_4 &= \zeta_{ab} - \zeta_{ao} - \zeta_{ob} + \zeta_{oo}. \end{aligned} \quad (16)$$

(14) 式中の無限級数の和を求めるため，次に示す井口博士の公式を用うることとする。即ち，公式 (11) 及び (12) に於て

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{k_n}{k_n'} \right\} &= \gamma_n \pm i\gamma_n', & \frac{k_m}{k_m'} \right\} &= \gamma_m \pm i\gamma_m' & \text{とすれば,} \\ \frac{\gamma_n}{\gamma_n'} \right\} &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\alpha_n^4 + c^4} \pm \alpha_n^2)}, \\ \frac{\gamma_m}{\gamma_m'} \right\} &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\beta_m^4 + c^4} \pm \beta_m^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (17) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{\sum_n \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{m}{\rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\xi}{\sum_n \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} \frac{m(m^2 + \alpha_n^2)}{\rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\xi} &= \frac{\pi}{2c^2} \left\{ \begin{aligned} P_n^{(1)}(\xi) \\ P_n^{(2)}(\xi) \end{aligned} \right\}, \\ \frac{\sum_m \frac{1 - (-1)^m}{1 + (-1)^m} \frac{n}{\rho_n(\beta_m)} \sin n\pi\eta}{\sum_m \frac{1 - (-1)^m}{1 + (-1)^m} \frac{n(n^2 + \beta_m^2)}{\rho_n(\beta_m)} \sin n\pi\eta} &= \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{aligned} Q_n^{(1)}(\xi) \\ Q_n^{(2)}(\xi) \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{但し } \frac{P_n^{(1)}(\xi)}{P_n^{(2)}(\xi)} &= \frac{\sinh \pi\gamma_n(1-\xi) \sin \pi\gamma_n'\xi \pm \sinh \pi\gamma_n\xi \sin \pi\gamma_n'(1-\xi)}{\cosh \pi\gamma_n \pm \cos \pi\gamma_n'}, \\ \frac{Q_n^{(1)}(\xi)}{Q_n^{(2)}(\xi)} &= \frac{\cosh \pi\gamma_n(1-\xi) \cos \pi\gamma_n'\xi \pm \cosh \pi\gamma_n\xi \cos \pi\gamma_n'(1-\xi)}{\cosh \pi\gamma_n \pm \cos \pi\gamma_n'}. \end{aligned}$$

これ等の公式から次の關係を得る。

$$\sum_m \frac{1 - (-1)^m}{1 + (-1)^m} c_m(\alpha_n) \sin m\pi\xi = \frac{\pi}{2c^2} \left\{ \alpha_n^2(1-\nu)P_n^{(1)}(\xi) + c^2 Q_n^{(1)}(\xi) \right. \\ \left. + \alpha_n^2(1-\nu)P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) \right\}, \quad (19)$$

$$\sum_n \frac{1 - (-1)^n}{1 + (-1)^n} c_n(\beta_m) \sin n\pi\eta = \frac{\pi}{2c^2} \left\{ \beta_m^2(1-\nu)P_m^{(1)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(1)}(\eta) \right. \\ \left. + \beta_m^2(1-\nu)P_m^{(2)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(2)}(\eta) \right\}. \quad (20)$$

更に又次の關係がある。

$$\left. \begin{aligned} \sum_m \sum_n \frac{(1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n)}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta &= \frac{1}{4}, \\ \sum_m \sum_n \frac{(1 - (-1)^m)(1 + (-1)^n)}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta &= \frac{(1 - 2\eta)}{4}, \\ \sum_m \sum_n \frac{(1 + (-1)^m)(1 - (-1)^n)}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta &= \frac{(1 - 2\xi)}{4}, \\ \sum_m \sum_n \frac{(1 + (-1)^m)(1 + (-1)^n)}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta &= \frac{(1 - 2\eta)(1 - 2\xi)}{4}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これらの公式を適用すれば、公式 (14) は、次の如く表わされる。

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{a^4}{b^4} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta + \frac{1}{2\nu\pi^2 c^2} \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2} \left[\alpha_n^2(1-\nu)P_n^{(1)}(\xi) \right. \\ &+ c^2 Q_n^{(1)}(\xi) \left. \right\} A_n + \left\{ \alpha_n^2(1-\nu)P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) \right\} A_n' \sin n\pi\eta \\ &+ \frac{1}{2\nu\pi^2 c'^2} \sum_m \frac{1}{\beta_m^2} \left[\left\{ \beta_m^2(1-\nu)P_m^{(1)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(1)}(\eta) \right\} B_m + \left\{ \beta_m^2(1-\nu)P_m^{(2)}(\eta) \right. \right. \\ &+ c'^2 Q_m^{(2)}(\eta) \left. \left. \right\} B_m' \right] \sin m\pi\xi + A_1 \left[1 + \frac{2c^2}{\pi} \sum_n \frac{1 - (-1)^n}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 P_n^{(1)}(\xi) \right. \right. \\ &+ c^2 Q_n^{(1)}(\xi) - c^2 \left. \left. \right\} \sin n\pi\eta \right] + A_2 \left[(1 - 2\eta) + \frac{2c^2}{\pi} \sum_n \frac{1 + (-1)^n}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 P_n^{(1)}(\xi) \right. \right. \\ &+ c^2 Q_n^{(1)}(\xi) - c^2 \left. \left. \right\} \sin n\pi\eta \right] + A_3 \left[(1 - 2\eta) + \frac{2c^2}{\pi} \sum_n \frac{1 - (-1)^n}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 P_n^{(2)}(\xi) \right. \right. \\ &+ c^2 Q_n^{(2)}(\xi) - c^2(1 - 2\xi) \left. \left. \right\} \sin n\pi\eta \right] + A_4 \left[(1 - 2\xi)(1 - 2\eta) \right. \\ &+ \left. \frac{2c^2}{\pi} \sum_n \frac{1 + (-1)^n}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) - c^2(1 - 2\xi) \right\} \sin n\pi\eta \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

ζ は $x = a/2$, $y = b/2$, に關して各對稱的及び、斜對稱的な四つの組合せによる四つの函數に分解出来るから、其の各々の場合について獨立に計算する事とする。

ii) ζ が二つの中心線 $x = a/2$, $y = b/2$ に關して對稱的な場合

この場合は、 $m, n = 1, 3, 5, \dots$

従つて $1 - (-1)^m = 2$, $1 + (-1)^m = 0$, $1 - (-1)^n = 2$, $1 + (-1)^n = 0$,

又 $\zeta_{ab} = \zeta_{ao} = \zeta_{ob} = \zeta_{oo} = A_1$

依つて、(22) 式から直ちに次の公式を得る。

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{a^4}{b^4} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ &+ \frac{1}{2\nu\pi^2 c^2} \sum_n \frac{A_n}{\alpha_n^2} \left\{ \alpha_n^2(1-\nu)P_n^{(1)}(\xi) + c^2 Q_n^{(1)}(\xi) \right\} \sin n\pi\eta \\ &+ \frac{1}{2\nu\pi^2 c'^2} \sum_m \frac{B_m}{\beta_m^2} \left\{ \beta_m^2(1-\nu)P_m^{(1)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(1)}(\eta) \right\} \sin m\pi\xi \end{aligned}$$

$$+ A_1 \left\{ 1 + \frac{4c^2}{\pi} \sum \frac{\alpha_n^2 P_n^{(1)}(\xi) + c^2 Q_n^{(1)}(\xi) - c^2 \sin n\pi\eta}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \right\}, \quad (23)$$

未知数 A_n , B_m 及び A_1 は境界条件

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=0} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0} = 0$$

より求められるのである。

A_n , B_m , A_1 を求めるにさきだつて、次の公式を掲げておく、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} P^{(1)}(\xi) &= -\frac{\pi}{a} \left\{ \gamma_n U_n^{(2)}(\xi) - \gamma_n' V^{(2)}(\xi) \right\}, \\ U_n^{(2)}(\xi) &= \frac{\cosh \pi \gamma_n (1-\xi) \sin \pi \gamma_n' \xi - \cosh \pi \gamma_n \xi \cdot \sin \pi \gamma_n' (1-\xi)}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'}, \\ V_n^{(2)}(\xi) &= \frac{\sinh \pi \gamma_n (1-\xi) \cos \pi \gamma_n' \xi - \sinh \pi \gamma_n \xi \cdot \cos \pi \gamma_n' (1-\xi)}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'}, \\ \frac{d}{dx} P_n^{(1)}(\xi) \Big|_{x=0} &= \frac{\pi}{a} \frac{\gamma_n \sin \pi \gamma_n' + \gamma_n' \sinh \pi \gamma_n}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(1)}(\xi) &= \frac{\pi^2}{a^2} \left\{ \alpha_n^2 P_n^{(1)}(\xi) - c^2 Q_n^{(1)}(\xi) \right\}, \\ &= -\frac{\pi^2}{a^2} c^2, \quad x=0 \text{ のとき,} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} P_n^{(1)}(\xi) &= -\frac{\pi^3}{a^3} \left\{ (\gamma_n \alpha_n^2 - \gamma_n' c^2) U_n^{(2)}(\xi) - (\gamma_n' \alpha_n^2 + \gamma_n c^2) V_n^{(2)}(\xi) \right\}, \\ \frac{d^3}{dx^3} P_n^{(1)}(\xi) \Big|_{x=0} &= \frac{\pi^3}{a^3} \cdot \frac{(\gamma_n \alpha_n^2 - \gamma_n' c^2) \sin \pi \gamma_n' - (\gamma_n' \alpha_n^2 + \gamma_n c^2) \sinh \pi \gamma_n}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_n^{(1)}(\xi) &= -\frac{\pi}{a} \left\{ \gamma_n' U_n^{(2)}(\xi) + \gamma_n V_n^{(2)}(\xi) \right\}, \\ \frac{d}{dx} Q_n^{(1)}(\xi) \Big|_{x=0} &= \frac{\pi}{a} \frac{\gamma_n' \sin \pi \gamma_n' - \gamma_n \sinh \pi \gamma_n}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} Q_n^{(1)}(\xi) &= \frac{\pi}{a} \left\{ c^2 P_n^{(1)}(\xi) + \alpha_n^2 Q_n^{(1)}(\xi) \right\}, \\ &= \frac{\pi^2}{a^2} \alpha_n^2, \quad x=0 \text{ のとき,} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3}{dx^3} Q_n^{(1)}(\xi) &= -\frac{\pi}{a^3} \left\{ (\gamma_n' \alpha_n^2 + \gamma_n c^2) U_n^{(2)}(\xi) + (\gamma_n \alpha_n^2 - \gamma_n' c^2) V_n^{(2)}(\xi) \right\}, \\ \frac{d^3}{dx^3} Q_n^{(1)}(\xi) \Big|_{x=0} &= \frac{\pi}{a^3} \frac{(\gamma_n' \alpha_n^2 + \gamma_n c^2) \sin \pi \gamma_n' - (\gamma_n \alpha_n^2 - \gamma_n' c^2) \sinh \pi \gamma_n}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

上記の各結果を適用すれば、

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y^2} \Big|_{x=0} = 0$$

上式は次の如くなる。

$$H_n^{(1)} A_n - \frac{4}{\pi} \frac{a^2}{b^3} \sum_r \frac{n \beta r \left\{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2) c'^4 / \beta r \right\}}{\rho_n(\beta r)} B_r + 8\nu \pi c^2 I_n^{(1)} A_1 \quad \left| \right.$$

$$= 2\nu\pi^2 \frac{a^4}{b^4} \sum_r \frac{R_{rn} \{r^3 + (2-\nu)r dn^2\}}{\pi^4 \rho_r(\alpha_n)} \quad \left. \right\} (30)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} H_n^{(1)} &= \frac{1}{\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n'} \left[\left\{ \frac{\sqrt{\alpha_n^4 + c^4}}{\alpha_n^2 c^2} (\gamma_n^2 c^2 - \gamma_n \alpha_n^2 (1-2\nu)) - \nu^2 \gamma_n \frac{\alpha_n^2}{c^2} \right\} \sin \pi \gamma_n' \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\sqrt{\alpha_n^4 + c^4}}{\alpha_n^2 c^2} (\gamma_n' c^2 - \gamma_n \alpha_n^2 (1-2\nu)) - \nu^2 \gamma_n' \frac{\alpha_n^2}{c^2} \right\} \sinh \pi \gamma_n' \right], \\ I_n^{(1)} &= \frac{\langle \gamma_n' c^2 - \gamma_n \alpha_n^2 (1-\nu) \rangle \sin \pi \gamma_n' + \langle \gamma_n c^2 + \gamma_n' \alpha_n^2 (1-\nu) \rangle \sinh \pi \gamma_n}{n \sqrt{\alpha_n^4 + c^4} (\cosh \pi \gamma_n + \cos \pi \gamma_n')} \\ &\quad r, n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} (31)$$

全く同様に、境界条件

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y=0} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{より } H_m^{(1)} B_m - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m \alpha_s \langle (1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2)c'^4 / \alpha_s^2 \rangle A_s}{\rho_m(\alpha_s)} + 8\nu\pi c'^2 I_m^{(1)} A_1 \\ = 2\nu\pi^2 \sum_s \frac{R_{ms} \{s^3 + (2-\nu)s \beta_m^2\}}{\pi^4 \rho_r(\beta_m)} \end{aligned} \right\} (32)$$

$m, s = 1, 3, 5, \dots$

上式中、 $H_m^{(1)}$ 及び $I_m^{(1)}$ は、公式 (31) 中の $H_n^{(1)}$ 、 $I_n^{(1)}$ の $n, \alpha_n, \gamma_n, \gamma_n', c$ の代りに、夫々 m, β_m, β_m', c' とおいたものである。

最後に、条件 (3) を (22) に適用すれば、計算の結果次の公式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{b^4} \sum_r \sum_s \frac{r \cdot s}{\pi^2} \frac{R_{rs}}{\rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2\nu c^2} \sum_s \frac{s H_s^{(1)'} A_s}{\alpha_s^2} + \frac{1}{2\nu c'^2} \sum_r \frac{r H_r^{(1)'} B_r}{\beta_r^2} \\ = 4\pi c^2 A_1 \sum_s \frac{I_s^{(1)'}}{\sqrt{\alpha_s^4 + c^4}}, \end{aligned} \quad (33)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} H_s^{(1)'} &= \frac{\gamma_s (\sqrt{\alpha_s^4 + c^4} - \gamma_s \alpha_s^2) \sin \pi \gamma_s' - \gamma_s' (\sqrt{\alpha_s^4 + c^4} + \nu \alpha_s^2) \sinh \pi \gamma_s}{\cosh \pi \gamma_s + \cos \pi \gamma_s'}, \\ H_r^{(1)'} &= \frac{\gamma_r (\sqrt{\beta_r^4 + c'^4} - \nu \beta_r^2) \sin \pi \gamma_r' - \gamma_r' (\sqrt{\beta_r^4 + c'^4} + \nu \beta_r^2) \sinh \pi \gamma_r}{\cosh \pi \gamma_r + \cos \pi \gamma_r'}, \\ I_s^{(1)'} &= \frac{\gamma_s \sin \pi \gamma_s - \gamma_s' \sinh \pi \gamma_s'}{\cosh \pi \gamma_s + \cos \pi \gamma_s'} \\ &\quad r, s = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} (34)$$

公式 (30), (32), (33) から A_1 及び任意の m, n に對應する A_n, B_m の値を算出することが出来る。

この實際の計算方法については後に述べる。

iii) ζ が中心線 $x=a/2$ に関して對稱的、 $y=b/2$ に関して斜對稱的な場合この場合には

$$m = 1, 3, 5, \dots, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

であるから

$$4A_2 = -\zeta_{ab} + \zeta_{a0} - \zeta_{0b} + \zeta_{00}.$$

依つて (21) 式から直ちに次の公式を得る。

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{a^4}{b^4} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ & + \frac{1}{2\nu\pi^2 c^2} \sum_n \frac{A_n}{\alpha_n^2} \left\{ \alpha_n^2(1-\nu)P_n^{(1)}(\xi) + c^2 Q_n^{(1)}(\xi) \right\} \sin n\pi\eta \\ & + \frac{1}{2\nu\pi^2 c'^2} \sum_m \frac{B_m'}{\beta_m^2} \left\{ \beta_m^2(1-\nu)P_m^{(2)} + c'^2 Q_m^{(2)}(\eta) \right\} \sin m\pi\xi \\ & + A_2 \left\{ (1-2\eta) + \frac{4c^2}{\pi} \sum_n \frac{\alpha_n^2 P_n^{(1)}(\xi) + c^2 Q_n^{(1)}(\xi) - c^2}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \sin n\pi\eta \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

$$m=1, 3, 5, \dots, \quad n=2, 4, 6, \dots$$

$x=0$, に對する境界條件 (1) は, m が奇數であるから, x 方向に關しては前回と同型である。

従つて其の計算結果も公式 (30) と同様に

$$\begin{aligned} H_n^{(1)} A_n - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n\beta_r \left\{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2)c'^4/\beta_r^2 \right\} B_r'}{\rho_n(\beta_r)} + 8\nu\pi c^2 I_n^{(1)} A_2 \\ = 2\nu\pi^2 \frac{a^4}{b^4} \sum_r \frac{R_{rn} \left\{ r^3 + (2-\nu)r\alpha_n^2 \right\}}{\pi^4 \rho_r(\alpha_n)}. \quad (36) \end{aligned}$$

$$r=1, 3, 5, \dots, \quad n=2, 4, 6, \dots$$

$y=0$ に對する境界條件を求むる, 計算の便宜のため, 次の公式を掲げておく

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} P_m^{(2)}(\eta) &= -\frac{\pi}{b} \left\{ \gamma_m U_m^{(1)}(\eta) - \gamma_m' V_m^{(1)}(\eta) \right\}, \\ U_m^{(1)}(\eta) &= \frac{\cosh \gamma_m(1-\eta) \sin \pi \gamma_m' \eta + \cosh \pi \gamma_m \eta \sin \pi \gamma_m'(1-\eta)}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'}, \\ V_m^{(1)}(\eta) &= \frac{\sinh \pi \gamma_m(1-\eta) \cos \pi \gamma_m' \eta + \sinh \pi \gamma_m \eta \cos \pi \gamma_m'(1-\eta)}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} P_m^{(2)}(\eta) \Big|_{y=0} &= -\frac{\pi}{b} \frac{\gamma_m \sin \pi \gamma_m' - \gamma_m' \sinh \pi \gamma_m}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'}, \\ \frac{d^2}{dy^2} P_m^{(2)}(\eta) &= \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ \beta_m^2 P_m^{(2)}(\eta) - c'^2 Q_m^{(3)}(\eta) \right\}, \\ \frac{d^2}{dy^2} P_m^{(3)}(\eta) \Big|_{y=0} &= -\frac{\pi^2}{b^2} c'^2, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3}{dy^3} P_m^{(2)}(\eta) &= -\frac{\pi^3}{b^3} \left\{ (\gamma_m \beta_m^2 - \gamma_m' c'^2) U_m^{(1)}(\eta) - (\gamma_m' \beta_m^2 + \gamma_m c'^2) V_m^{(1)}(\eta) \right\}, \\ \frac{d^3}{dy^3} P_m^{(2)}(\eta) \Big|_{y=0} &= \frac{\pi^3}{b^3} \frac{(\gamma_m' \beta_m^2 + \gamma_m c'^2) \sinh \pi \gamma_m - (\gamma_m \beta_m^2 - \gamma_m' c'^2) \sin \pi \gamma_m'}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dy} Q_m^{(2)}(\eta) &= -\frac{\pi}{b} \left\{ \gamma_m' U_m^{(1)}(\eta) + \gamma_m V_m^{(1)}(\eta) \right\}, \\ \frac{d}{dy} Q_m^{(2)}(\eta) \Big|_{y=0} &= -\frac{\pi}{b} \cdot \frac{\gamma_m \sinh \pi \gamma_m + \gamma_m' \sin \pi \gamma_m'}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} Q_m^{(2)}(\eta) &= \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ c'^2 P_m^{(2)}(\eta) + \beta_m^{(3)} Q_m^{(2)}(\eta) \right\}, \\ \frac{d^2}{dy^2} Q_m^{(2)}(\eta) \Big|_{y=0} &= \frac{\pi^2}{b^2} \beta_m^2, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3}{dy^3} Q_m^{(2)}(\eta) &= -\frac{\pi^3}{b^3} \left\{ (\gamma_m' \beta_m^2 + \gamma_m c'^2) U_m^{(1)}(\eta) + (\gamma_m \beta_m^2 - \gamma_m' c'^2) V_m^{(1)}(\eta) \right\}, \\ \frac{d^3}{dy^3} Q_m^{(2)}(\eta) \Big|_{y=0} &= \frac{\pi^3}{b^3} \frac{(\gamma_m' \beta_m^2 + \gamma_m c'^2) \sin \pi \gamma_m' + (\gamma_m \beta_m^2 - \gamma_m' c'^2) \sinh \pi \gamma_m}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

又公式 (35) の ξ の A_2 の項に関して計算すれば

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left\{ (1-2\eta) + \frac{4c^2}{\pi} \sum_m \frac{\beta_m^2 P_m^{(2)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(2)}(\eta) - c^2(1-2\eta) \sin m\pi\xi}{m(\beta_m^4 + c'^4)} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{b^3} \sum_m \frac{4c^2 \sin m\pi\xi}{m\sqrt{\beta_m^4 + c'^4}} \left[\frac{(\gamma_m c'^2 + \gamma_m' \beta_m^2(1-\nu)) \sinh \pi \gamma_m - (\gamma_m' c'^2 - \gamma_m \beta_m^2(1-\nu)) \sin \pi \gamma_m'}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(2-\nu)c'^2 \beta_m}{\pi(\beta_m^4 + c'^4)} \right]. \end{aligned}$$

依つて公式 (35) に境界条件 (2) を適用すれば次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} H_m^{(2)} B_m' - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m\alpha_s \{ (1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2)c^4/\alpha_s^2 \}}{\rho_m(\alpha_s)} A_s + 8\nu\pi c'^2 I_m^{(2)} A^2 \\ + \frac{16(2-\nu)\nu c'^4 \beta_m}{\beta_m^4 + c'^4} A_2 = 2\nu\pi^2 \sum_s \frac{R_{ms} \{ s^3 + (2-\nu)s\beta_m^2 \}}{\pi^4 \rho_s(\beta_m)}. \end{aligned} \quad (43)$$

$m=1, 3, 5, \dots, \quad s=2, 4, 6, \dots$

上式中

$$\left. \begin{aligned} H_m^{(2)} &= \frac{1}{\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m'} \left[-\left\{ \frac{\sqrt{\beta_m^4 + c'^4}}{\beta_m^2 c'^2} (\gamma_m' c'^2 - \gamma_m \beta_m^2(1-2\nu)) - \frac{\nu^2 \beta_m^2 \gamma_m'}{c'^2} \right\} \sin \pi \gamma_m' \right. \\ & \quad \left. + \left\{ \frac{\sqrt{\beta_m^4 + c'^4}}{\beta_m^2 c'^2} (\gamma_m c'^2 + \gamma_m' \beta_m^2(1-2\nu)) - \frac{\nu^2 \beta_m^2 \gamma_m'}{c'^2} \right\} \sinh \pi \gamma_m \right], \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} I_m^{(2)} &= -\frac{(\gamma_m' c'^2 - \gamma_m \beta_m^2(1-\nu)) \sin \pi \gamma_m' - (\gamma_m c'^2 + \gamma_m \beta_m^2(1-\nu)) \sinh \pi \gamma_m}{m\sqrt{\beta_m^4 + c'^4} (\cosh \pi \gamma_m - \cos \pi \gamma_m')} \\ &= \frac{a^4}{b^4} \sum_r \sum_s \frac{r \cdot s R_{rs}}{\pi^2 \rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2\nu c^2} \sum_s \frac{s H_s^{(1)}}{\alpha_s^2} A_s + \frac{1}{2\nu'^2} \sum_r \frac{r H_r^{(1)'}}{\beta_r^2} B_r' \\ &= 4\pi c^2 A^2 \sum_s \frac{I_s^{(1)'}}{\sqrt{\alpha_s^4 + c^4}}. \end{aligned} \quad (45)$$

$r=1, 3, 5, \dots, \quad s=2, 4, 6, \dots$

上式中, $H_s^{(1)'}$ 及び $I_s^{(1)'}$ は, 公式 (34) に示す通りで, $H_r^{(2)'}$ は, 次の式で與へられる。

$$H_r^{(2)'} = -\frac{\gamma_r (\sqrt{\beta_r^4 + c^4} - \nu \beta_r^2) \sin \pi \gamma_r' + \gamma_r' (\sqrt{\beta_r^4 + c^4} + \nu \beta_r^2) \sinh \pi \gamma_r}{\cosh \pi \gamma_r - \cos \pi \gamma_r'} \quad (46)$$

iv) ζ が s 中心線 $x=a/2$ に関して斜對稱的, $y=b/2$ に関して對稱的な場合

$$m=2, 4, 6, \dots, \quad n=1, 3, 5, \dots$$

となるから $4A_3 = -\zeta_{ab} - \zeta_{a0} + \zeta_{0b} + \zeta_{00}$.

故に

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{a^4}{b^4} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ &+ \frac{1}{2\nu\pi^2 c^3} \sum_n \frac{A_n'}{\alpha_n^2} \left\{ \alpha_n^2(1-\nu) P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) \right\} \sin n\pi\eta \\ &+ \frac{1}{2m\pi^2 c'^2} \sum_m \frac{B_m}{\beta_m^2} \left\{ \beta_m^2(1-\nu) P_m^{(1)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(1)}(\eta) \right\} \sin m\pi\xi \\ &+ A_3 \left\{ (1-2\xi) + \frac{4c^2}{\pi} \sum_n \frac{\alpha_n^2 P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) - c^2(1-2\xi)}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \sin n\pi\eta \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

三つの境界条件式から，次の方程式を得る。

$$H_n^{(2)} A_n' - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n\beta_r \{(1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2)c^4/\beta_r^2\} B_r}{\rho_n(\beta_r)} + 8\nu\pi c^2 I_n A_3$$

$$+ \frac{16\nu(2-\nu)c^4 \alpha_n A_3}{\alpha_n^4 + c^4} = 2\nu\pi^2 \frac{a^4}{b^4} \sum_r \frac{R_{rn} \{r^3 + (2-\nu)r\alpha_n^2\}}{\pi^4 \rho_r(\alpha_n)}, \quad (48)$$

$$H_m^{(1)} B_m - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m\alpha_s \{(1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2)c^4/\alpha_s^2\} A_s'}{\rho_m(\alpha_s)} + 8\nu\pi c^2 I_m^{(1)}$$

$$= 2\nu\pi^2 \sum_s \frac{R_{ms} \{s^3 + (2-\nu)s\beta_m^2\}}{\pi^4 \rho_s(\beta_m)}, \quad (49)$$

$$\frac{a^4}{b^4} \sum_r \sum_s \frac{rsR_{rs}}{\pi^2 \rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2\nu c^2} \sum_s \frac{sH_s^{(2)'}}{\alpha_s^2} A_s' + \frac{1}{2\nu c^2} \sum_r \frac{rH_r^{(1)'}}{\beta_r^2} B_r$$

$$= 4\pi c^2 A_3 \sum_r \frac{I_r^{(1)'}}{\sqrt{\beta_r^4 + c^4}}, \quad (50)$$

上式中 $H_n^{(2)}$ 及び $I_n^{(2)}$ は，公式 (44) の $H_m^{(2)}$ ， $I_m^{(2)}$ の c' ， β_m ， r_m ， r_m' に，夫々 c ， α_n ， r_n ， r_n' を代入したもので， $H_m^{(1)}$ ， $I_m^{(1)}$ は，公式 (31)， $H_r^{(1)'}$ ， $I_r^{(1)'}$ は，公式 (34)， $H_s^{(2)'}$ は，公式 (46) に依つて與えられる。

v) ζ が中心線 $x=a/2$ ， $y=b/2$ に関して斜對稱的な場合

この場合には， $m, n=2, 4, 6, \dots$

となるから， $4A_4 = \zeta_{ab} - \zeta_{a0} - \zeta_{0b} + \zeta_{00}$ 。

$$\text{故に } \zeta = \frac{a^4}{b^4} \sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_n)} \sin m\pi\eta \cdot \sin n\pi\eta$$

$$+ \frac{1}{2\nu\pi^2 c^2} \sum_n \frac{A_n'}{\alpha_n^2} \{ \alpha_n^2 (1-\nu) P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) \} \sin n\pi\eta$$

$$+ \frac{1}{2\nu\pi^2 c'^2} \sum_m \frac{B_m'}{\beta_m^2} \{ \beta_m^2 (1-\nu) P_m^{(2)}(\eta) + c'^2 Q_m^{(2)}(\eta) \} \sin m\pi\xi$$

$$+ A_4 \left\{ (1-2\xi)(1-2\eta) + \frac{4c^2}{\pi} \sum_n \frac{\alpha_n^2 P_n^{(2)}(\xi) + c^2 Q_n^{(2)}(\xi) - c^2(1-2\xi)}{n(\alpha_n^4 + c^4)} \right\} \sin n\pi\eta. \quad (51)$$

三つの境界条件式より

$$H_n^{(2)} A_n' - \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \sum_r \frac{n\beta_r \{(1-\nu)^2 n^2 + (\nu-2)c^4/\beta_r^2\} B_r'}{\rho_n(\beta_r)} - 8\nu\pi c^2 I_n^{(2)} A_4$$

$$+ \frac{16\nu(2-\nu)c^4 \alpha_n A_4}{\alpha_n^4 + c^4} = 2\nu\pi^2 \frac{a^4}{b^4} \sum_r \frac{R_{rn} \{r^3 + (2-\nu)r\alpha_n^2\}}{\rho_r(\alpha_n)}, \quad (52)$$

$$H_m^{(2)} B_m' - \frac{4}{\pi} \frac{b^3}{a^3} \sum_s \frac{m\alpha_s \{(1-\nu)^2 m^2 + (\nu-2)c^4/\alpha_s^2\} A_s'}{\rho_s(\alpha_s)} - 8\nu\pi c'^2 I_m^{(2)} A_4$$

$$+ \frac{16\nu(2-\nu)c'^4 \beta_m A_4}{\beta_m^4 + c'^4} = 2\nu\pi^2 \sum_s \frac{R_{ms} \{s^3 + (2-\nu)s\beta_m^2\}}{\pi^4 \rho_s(\beta_m)}, \quad (53)$$

$$\frac{a^4}{b^4} \sum_r \sum_s \frac{rsR_{rs}}{\pi^4 \rho_r(\alpha_s)} + \frac{1}{2\nu c^2} \sum_s \frac{sH_s^{(2)'}}{\alpha_s^2} A_s' + \frac{1}{2\nu c'^2} \sum_r \frac{rH_r^{(2)'}}{\beta_r^2} B_r'$$

$$= A_4 \left(4\pi c^2 \sum_r \frac{I_r^{(2)'}}{\sqrt{\beta_r^4 + c^4}} + \sqrt{2}\pi c \cdot \frac{\sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}}}{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} - \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}}} \right). \quad (54)$$

$$I_s^{(2)} = - \frac{\gamma_s' \sinh \pi \gamma_s + \gamma_s \sin \pi \gamma_s'}{\cosh \pi \gamma_s - \cos \pi \gamma_s'} \quad (55)$$

vi) 未知係数の計算法

未知係数 A_n, A_n', B_m, B_m' の値を算出するには、色々の方法があるが、ここでは井口博士の方法を挙げる事とする⁴。

四組の未知数 $(A_n, B_m, \Lambda_1), (A_n, B_m, \Lambda_2), (A_n, B_m, \Lambda_3)$, 及び (A_n', B_m', Λ_4) は、何れも次の如き三方程式で関係付けられてゐる。

$$A_n + \sum_r \phi_{rn}^{(1)} B_r + J_n^{(1)} \Lambda = L_n^{(1)}, \quad (a)$$

$$B_m + \sum_s \phi_{ms} A_s + J_m^{(2)} \Lambda = L_m^{(2)}, \quad (b)$$

$$\sum_s \psi_s^{(1)} A_s + \sum_r \psi_r B_r + J^{(3)} \Lambda = L^{(3)}. \quad (c)$$

(b) 式の両邊に $\phi_{rn}^{(1)}$ を乗じて各項の \sum_r をとれば、

$$\sum_r \phi_{rn}^{(1)} B_r + \sum_r \sum_s \phi_{rn}^{(1)} \phi_{rs}^{(2)} A_s + \Lambda \sum_r \phi_{rn}^{(1)} J_r^{(2)} = \sum_r \phi_{rn}^{(1)} L_r^{(2)},$$

これと (a) 式から、 $\sum_r \phi_{rn}^{(1)} B_r$ を消去すれば、

$$\begin{aligned} A_n - \sum_r \sum_s \phi_{rn}^{(1)} \phi_{rs}^{(2)} A_s &= L_n^{(1)} - \sum_r \phi_{rn}^{(1)} L_r^{(2)} + \Lambda (\sum_r \phi_{rn}^{(1)} J_r^{(2)} - J_n^{(1)}), \\ \sum_r \phi_{rn}^{(1)} \phi_{rs}^{(2)} &= K_{ns}, \quad L_n^{(1)} - \sum_r \phi_{rn}^{(1)} (L_r^{(2)} - L_n), \quad \sum_r \phi_{rn}^{(1)} J_r^{(2)} = L_n' \end{aligned} \quad (56)$$

とおけば、 A_n は一般に次の式で表わされる。

$$A = L_n + \Lambda L_n' + \sum_s K_{ns} A_s. \quad (57)$$

この式で s は一記號に過ぎないから書き換えて

$$A_n = L_n + \Lambda L_n' + \sum_{s_1} K_{ns_1} A_{s_1}$$

とすれば、 A_n を A_{s_1} に逐次代入する事によつて

$$\begin{aligned} A_n &= L_n + L_n' \Lambda + \sum_{s_1} K_{ns_1} (L_{s_1} + \Lambda L_{s_1}') + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} (L_{s_2} + \Lambda L_{s_2}') \\ &\quad + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} (L_{s_3} + \Lambda L_{s_3}') + \dots \\ &\quad + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} \dots \sum_{s_t} K_{s_{t-1} s_t} (L_{s_t} + \Lambda L_{s_t}') \\ &\quad + \sum_{s_1} K_{ns_1} \sum_{s_2} K_{s_1 s_2} \sum_{s_3} K_{s_2 s_3} \dots \sum_{s_{t+1}} K_{s_t s_{t+1}} A_{s_{t+1}}. \end{aligned} \quad (58)$$

上式中によつて A_n は計算出来る。全く同様に B_m も求められ、最後に Λ は、(c) より與えられる。

公式 (58) の右邊の収斂に關しては、後述する。

6 井口博士の方法と Fredholm 第二種積分方程式

i) 條件式 (57) の Fredholm 第二種積分方程式への反轉

$$(56) \text{ 式を再録すれば} \quad A_n = L_n + \Lambda L_n' + \sum_s K_{ns} A_s.$$

變域 $0 < y < 1, 0 < x < 1$ に於て A_n, L_n, L_n', K_{ns} の Objektfunktion (原像函數)⁵ を a_s, l_y, l_y', k_{ys} , とすれば、兩者の間に次の關係がある。

4 S. Iguchi; Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten. Berlin. S, 43 (1933)

5 佐藤常三; 定積分とフーリエ級數 p. 482.

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \int_0^1 a_y \sin n\pi y \, dy, & (i) \quad L_n &= \int_0^1 l_y \sin n\pi y \, dy, & (ii) \\ L_n' &= \int_0^1 l_y' \sin n\pi y \, dy, & (iii) \quad K_{ns} &= \int_0^1 \int_0^1 K_{yx} \sin n\pi y \sin s\pi x \, dy \, dx. & (iv) \end{aligned} \right\} (59)$$

公式 (59) (i), (iv), 式より直ちに次の関係を得る。

$$\sum_s K_{ns} A_s = \int_0^1 \sum_s K_{ns} a_x \sin s\pi x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 k_{yx} a_x \sin n\pi y \, dx \, dy. \quad (v)$$

式 (i), (ii), (iii), (v) を (56) に代入すれば，即ち

$$\int_0^1 \left[a_y - l_y - \Delta l_y' - \frac{1}{2} \int_0^1 k_{yx} a_x \, dx \right] \sin n\pi y \, dy = 0,$$

依つて

$$a_y - \frac{1}{2} \int_0^1 k_{yx} a_x \, dx = l_y + \Delta l_y'. \quad (60)$$

上式は Fredholm の第二種積分方程式に外ならない。

積分方程式論⁶によれば k_{yx} が x, y について連続，若しくわ特異性がある制限された極を持つ場合 (60) 式は必ず解を有す。

a_y を Neumann 級数⁷にて表示すれば

$$\begin{aligned} a_y &= l_y + \Delta l_y' + \frac{1}{2} \int_0^1 k_{yx} (l_x + \Delta l_x') \, dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 k_{yx_1} k_{x_1 x_2} (l_{x_2} + \Delta l_{x_2}') \, dx_1 \, dx_2 \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^r \int_0^1 \int_0^1 k_{yx_1} k_{x_1 x_2} \dots k_{x_{r-1} x_r} (l_{x_r} + \Delta l_{x_r}') \, dx_1 \dots dx_r. \end{aligned}$$

上式中の a_y, k_{xy} を Fourier 展開すれば

$$\begin{aligned} A_n &= L_n + \Delta L_n' + \sum_s K_{ns} (L_s + \Delta L_s') + \dots + \\ &\quad + \sum_{s_1} \dots \sum_{s_r} K_{ns_1} K_{s_1 s_2} \dots K_{s_{r-1} s_r} (L_{s_r} + \Delta L_{s_r}'). \end{aligned}$$

これ即ち井口博士の級数表示そのものである。故に井口博士の方法は (60) の積分方程式の解を Neumann 級数に依つて求むる事に歸着する。

ii) Neumann 級数の収斂について

前述したる如く公式 (58) の級数は，積分方程式 (60) に於ける Neumann 級数⁸の寫像である。故に公式 (58) の計算法による級数の収斂を検するには，(65) 式に依る Neumann 級数の収斂を吟味すれば良い。又一般に Neumann 級数による Fredholm 第二種積分方程式の解は，必ずしも収斂する事を保証しない⁹。故にその収斂の吟味はこの種の解法に於ける肝要な問題である。

iii) k_{yx} の性質と，公式 (58) に示めされる級数の収斂について

公式 (59) 中 (iv) より

$$k_{yx} = \sum_n \sum_s 4K_{ns} \sin n\pi y \, 4i \sin s\pi x,$$

上式中， $m, n, s = 1, 3, 5, \dots$ とする。

6 池田芳郎；積分方程式論 p. 80~90.

7 佐藤常三；グリーン函数と積分方程式 p. 10.

8 佐藤常三；定積分とフーリエ級数 p. 482.

9 佐藤常三；グリーン函数と積分方程式 p. 186~p. 157.

然る時は、(56) の関係より

$$k_{yx} = \sum_n \sum_s \sum_r 4\phi_{rn}^{(1)} \phi_{rs}^{(2)} \sin n\pi y \sin s\pi x.$$

$\phi_{rn}^{(1)}$ の値は、

$$\phi_{rn}^{(1)} = \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{\beta_r n^3 (1-\nu)^2 - (2-\nu)n \cdot c^4 / \beta_r}{\rho_n(\beta_r) \cdot H_n^{(1)}}.$$

上式中、右邊の第1項を s_1 、第2項を s_2 とすれば

$$s_1 = \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{\beta_r n^3 (1-\nu)^2}{\rho_n(\beta_r) \cdot H_n^{(1)}}.$$

然るに、 $H_n^{(1)}$ 中の c^4 、 $\sqrt{d_n^4 + c^4}$ を γ_n 、 γ_n' におき換へ $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \alpha_n$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n' = c^2 / 2\alpha_n$ の関係を考えれば、

$$H_n^{(1)} > (3+\nu)(1-\nu)\alpha_n / 2 + c^4 / 2\alpha_n^3 > (3+\nu)(1-\nu)\alpha_n / 2.$$

となることは明らかである。

更に $\rho_n(\beta_r) > 2n\beta_r(n^2 + \beta_r^2)$ 、が成立するから

$$s_1 < \frac{(1-\nu)}{(3+\nu)} \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{n}{n^2 + \beta_r^2},$$

次に s_2 の場合は

$H_n^{(1)} > (3+\nu)(1-\nu)\alpha_n / 2 + c^4 / 2\alpha_n^3$ と $\rho_n(\beta_r) > 2(n^2 + \beta_r^2)c^{1/2}$ とを適用すれば

$$s_2 > \frac{(2-\nu)}{(3+\nu)(1-\nu)} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{a^3}{b^3} \times \frac{\alpha_n^4 \cdot c^{1/4}}{n(n^2 + \beta_r^2) \cdot c^{1/2} \left(\alpha_n^4 + \frac{c^4}{(3+\nu)(1-\nu)} \right)}.$$

$$s_2 > \frac{2a^3(2-\nu)}{\pi b^3 \{3+\nu\} (1-\nu)^{1/2}} \cdot \frac{n}{n^2 + \beta_r^2}.$$

若し、上式中、 $\nu < 0.51$ とおけば

$$s_2 < \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{n}{n^2 \beta_r^2}.$$

故に、

$$\phi_{rn}^{(1)} = s_1 - s_2 < \frac{4}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{n}{n^2 + \beta_r^2}.$$

全く同様の論法で

$$\phi_{rs}^{(2)} < \frac{4b^3}{\pi a^3} \cdot \frac{r}{r^2 + \alpha_s^2}.$$

今、次に示す境界値方程式

$$\left. \begin{aligned} A_n + \sum_n \frac{4a^3}{\pi b^3} \frac{n}{n^2 \beta_r^2} B_r &= L_n^{(1)} - J_n^{(1)} A, \\ B_m + \sum_m \frac{4b^3}{\pi a^3} \frac{m}{m^2 + \alpha_s^2} A_s &= L_m^{(2)} - J_m^{(2)} A \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

を新たに考えれば、これの原像函数によつて作られる積分方程式の Neumann 級数は、積分方程式 (60) の Neumann 級数より常に優なる級数であるから、これの収斂を吟味すれば良い、新たなる積分方程式の核は次の様に與えられる。

$$k_{yx} = \sum_s \sum_r \sum_r 4 \frac{n}{n^2 + \beta_r^2} \frac{r}{r^2 + \alpha_s^2} \sin n\pi y \sin s\pi x = 2 \int_0^1 I_1 \cdot I_2 d\xi, \quad (62)$$

但し

$$I_1 = \sum_n \sum_r \frac{4a^3}{\pi b^3} \cdot \frac{n}{n^2 + \beta_r^2} \sin n\pi y \sin r\pi \xi,$$

$$I_2 = \sum_r \sum_s \frac{4b^3}{\pi a^3} \frac{r}{r^2 + \alpha_s^2} \sin r\pi \xi \sin s\pi x.$$

I_1, I_2 を単一級数に書けば

$$I_1 = \sum_r \frac{\cosh \pi \beta_r y + \cosh \pi \beta_r (1-y)}{\cosh \pi \beta_r + 1} \sin r\pi \xi,$$

$$I_2 = \sum_s \frac{\cosh \pi \alpha_s \xi + \cosh \pi \alpha_s (1-\xi)}{\cosh \pi \alpha_s + 1} \sin s\pi x.$$

従つて次の関係が成立する。

$$I_1 < \sum_r \left[\exp(-\pi \beta_r y) + \exp\{-\pi \beta_r (1-y)\} \right] \sin r\pi \xi.$$

この右邊の和を求めて

$$I_1 < Gy \cdot \xi + G(1-y) \cdot \xi$$

但し

$$\left. \begin{aligned} Gy \cdot \xi &= \frac{\sin 2\pi \xi \cdot \exp(-\beta\pi y)}{1 - 2\cos 2\pi \xi \cdot \exp(-2\beta\pi y) + \exp(-4\beta\pi y)}, \\ G(1-y) \cdot \xi &= \frac{\sin 2\pi \xi \cdot \exp \pi \beta (1-y)}{1 - 2\cos 2\pi \xi \cdot \exp\{-2\pi \beta (1-y)\} + \exp\{-4\pi \beta (1-y)\}}. \end{aligned} \right\} (63)$$

$Gy \cdot \xi, G(1-y) \cdot \xi$ の形から直ちに， I_1 は $y \rightarrow 0$ にて $\xi \rightarrow 0$ なる時に一位の無限大となることが解るが，計算の結果，次の関係がある。即ち

$$I_1 < \frac{e^{\pi \beta}}{2\beta \sin \pi y}, \quad I_2 < \frac{e^{\pi \alpha}}{2\alpha \sin \pi \xi}, \quad (64)$$

$$\int_0^1 I_1 \frac{d\xi}{\sin \pi \xi} < \frac{2}{\pi \beta} \frac{1}{\sin \pi y}. \quad (65)$$

故に，(64)，(65) 及び (62) より，

$$\frac{1}{2} k_{yx} < \frac{1}{\pi} \frac{e^{\pi \alpha}}{\sin \pi y}.$$

次に

$$\int_0^1 \frac{1}{2} k_{yx} \frac{1}{\sin \pi x} dx = \int_0^1 \int_0^1 I_1 I_2 \frac{1}{\sin \pi x} d\xi dx.$$

I_1 と I_2 が同じ性質なることを考えて，上式に (65) を適用すれば

$$\int_0^1 \frac{1}{2} k_{yx} \frac{1}{\sin \pi x} dx < \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{\sin \pi y}$$

なる不等関係を得る。

故に

$$\frac{1}{2} k_{yx} < \frac{e^{\pi \alpha}}{\pi \sin \pi y} \delta,$$

$$\frac{1}{4} \int_0^1 k_{yx} k_{xx} dx < \frac{e^{\pi \alpha}}{\pi \sin \pi y} \delta^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^r \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 k_{yx} k_{xx} \dots k_{x_r} x_{r+1}}_r < \frac{e^{\pi \alpha}}{\pi \sin \pi y} \delta^r.$$

但し $|\delta| = \frac{4}{\pi^2}$ である。従つて新らしく作つた方程式 (61) に對應する Neumann 級数は、齊一收斂することが解る、依つて積分方程式 (60) より作られたる Neumann 級数も必ず齊一收斂する。

以上は m, r, n, s の奇數の場合について論じたが、 (m, r) 或は (n, s) のいづれか一組又は、兩方共、偶數ならば、 m, n, r, s が凡て奇數の時に比べて劣級數であるから、一樣收斂することは勿論である。

故にこの計算方法によつて、 m, r, n, s を充分大きくとれば、項を重ねるに従つて正確値に近づく、又實用的には、若干項を採用する事によつて、満足すべき結果を得るものと考えられる。この場合 $\nu < 0.51$ についてより證明をして居ないが、實際上の ν の値はこの條件を満足するものである。

7 荷重項の分解

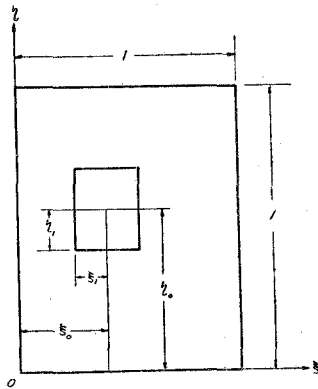
公式 (21) の ζ 中、荷重位置が任意で、矩形型等分布荷重の場合における二重級數としての荷重項は、Navier 氏¹⁰ に依り、更にそれを單一級數とせるものは井口鹿象博士¹¹ によつて與えられて居る。而し本論の計算方法による時は、中心線 $x = a/2, y = b/2$ 、に關して各々對稱及び斜對稱なる四つの組合せによる四つの函數に荷重項を分ける必要がある。

Navier 氏に依れば、

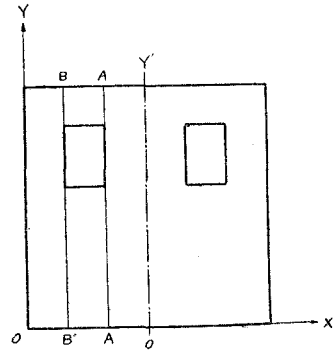
$$R_{mn} = \frac{16}{\pi^2 mn} \sin m\pi\xi_0 \cdot \sin m\pi\xi_1 \cdot \sin n\pi\eta_0 \cdot \sin n\pi\eta_1$$

故に荷重項は、次の如く書くことが出来る。

$$\sum_m \sum_n \frac{R_{mn}}{\pi^4 \rho_m(\alpha_1)} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta = \sum_m \sum_n 4A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta$$



第2圖



第3圖

10 A. Nádai; Elastischen Platten S, 114~119.

11 S. Iguchi; Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten, Berlin, S, 28. (1933)

但し
$$A_{mn} = \frac{4 \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1}{\pi^5 mn\rho_m(\alpha_n)}$$

$$\xi_1 = x_1/a, \quad \xi_0 = x_0/a, \quad \eta = y_1/b, \quad \eta_0 = y_0/b,$$

$$m = n = 2, 3, 4, \dots$$

上式中， $m=1, 3, 5, \dots$ の場合をには荷重は $x=a/2$ に関して對稱であるから，荷重項の \sum_m を求めるにあつて，第 3 圖の OY, BB, AA, OA によつて分かれたる三つの範圍について計算する。

ξ が O-Y と B-B の間にある時，

$$\xi < \xi_0 - \xi_1, \quad \xi < \xi_0 + \xi_1,$$

故に (a) 式右邊に

$$\begin{aligned} & 4 \sin m\pi\xi_0 \sin m\pi\xi_1 \sin m\pi\xi \\ & = \sin m\pi(\xi_0 - \xi_1 + \xi) + \sin m\pi(\xi_0 - \xi_1 - \xi) \\ & \quad - \sin m\pi(\xi_0 + \xi_1 + \xi) + \sin m\pi(\xi_0 + \xi_1 - \xi) \end{aligned}$$

を代入して， m について加え合わせれば

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n 2(1 - (-1)^m) A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ & = \sum_n \frac{\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \sin n\pi\eta}{\pi^5 n c^2 (\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 (P_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}^{(1)} - P_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}^{(1)} \right. \\ & \quad - P_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}^{(1)} + P_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}^{(1)} + c^2 (Q_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}^{(1)} - Q_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}^{(1)} \\ & \quad \left. - Q_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}^{(1)} + Q_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}^{(1)}) \right\} \end{aligned} \tag{66}$$

ξ が B-B と A-A の間にある時， $\xi_0 + \xi_1 > \xi > \xi_0 - \xi_1$ ，

故に
$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n 2(1 - (-1)^m) A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ & = \sum_n \frac{\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \sin n\pi\eta}{\pi^5 n \cdot c^2 (\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 (P_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}^{(1)} + P_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}^{(1)} - P_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}^{(1)} + P_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + c^2 (Q_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}^{(1)} + Q_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}^{(1)} - Q_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}^{(1)} + Q_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}^{(1)}) - 2c^2 \right\} \end{aligned} \tag{67}$$

ξ が A-A と O-Y' との間にある時は， $\xi > \xi_0 - \xi_1$ ， $\xi < \xi_0 + \xi_1$ ，

故に
$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_n 2(1 - (-1)^m) A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ & = \sum_n \frac{\sin n\pi\eta_0 \sin n\pi\eta_1 \sin n\pi\eta}{\pi^5 n \cdot c^2 (\alpha_n^4 + c^4)} \left\{ \alpha_n^2 (P_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}^{(1)} - P_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}^{(1)} - P_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}^{(1)} - P_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}^{(1)}) \right. \\ & \quad \left. + c^2 (Q_{n,\xi_0-\xi_1+\xi}^{(1)} + Q_{n,\xi_0-\xi_1-\xi}^{(1)} - Q_{n,\xi_0+\xi_1+\xi}^{(1)} - Q_{n,\xi_0+\xi_1-\xi}^{(1)}) \right\} \end{aligned} \tag{68}$$

公式 (66), (68) に於て $P_n^{(1)}$ を $P_n^{(2)}$ に， $Q_n^{(1)}$ を $Q_n^{(2)}$ におく時は， ξ が O-Y と B-B, B-B と A-A 及び，A-A と O-Y' の間にある場合の $x=a/2$ に関して斜對稱な荷重項の部分となる。

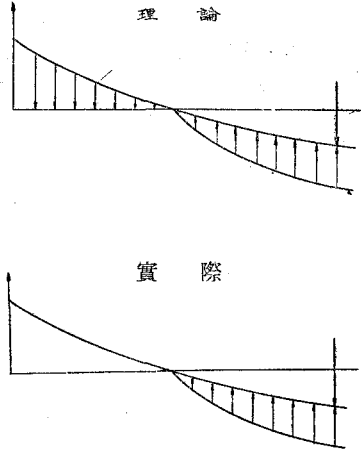
以上述べた凡ての結果に於て， n を奇數にとれば， $y=b/2$ に関して對稱な， n を偶數にとれば，斜對稱な荷重項の部分となる。

8 特殊な場合に於ける數値計算例

本例の應用としては、舗裝板、滑走路板、Floating Foundation 等を考える事が出来るが、板に浮き上りを生ずる荷重状態の際は、實際と理論の間に一つの矛盾が存在する。即ち、第4圖に示す如く實際の場合には、浮き上つた部分が基礎と絶縁して、基礎反力は存在しないにも拘らず、理論では、負の基礎反力が恰も荷重の如く作用することである。然し、浮き上りは、常に荷重の位置より離れた所に生ずるから、最大曲げ應力や、最大沈下に及ぼす影響は、非常に小さいと考える事が出来る。

數値計算に對する諸係數の値は次の如くである。

$$\begin{aligned}
 E &= 210,000 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Youngs 係數)}, \\
 a &= 400 \text{ cm (邊の長さ)}, \nu = 1/6 \text{ (ポアソン比)}, \\
 K &= 10 \text{ g/cm}^3 \text{ (基礎係數)}, h = 15 \text{ cm (板の厚さ)}, \\
 \lambda^4 &= \frac{K}{N} = 1,6461 \times 10^{-7}, \\
 N &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 60,748,000 \text{ kg cm}
 \end{aligned}$$



第4圖

勿論板は凡て弾性基礎にある場合で、次の三種の境界條件について計算をなした。

即ち、i) 四邊四隅共完全に自由なる板、ii) 四邊共完全に自由で、四隅のみ支持される板、iii) 四邊共單純支承なる板の場合を採用した。

iii) は i), ii) に對する比較のために計算したのである。

i) 四邊四隅共完全に自由な板

a) 矩形型部分分布荷重のある場合

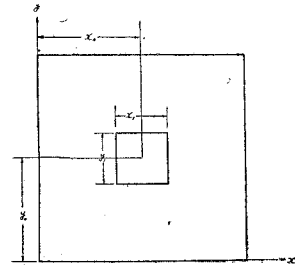
荷重の位置は、第5圖に示す通りである。

$$\begin{aligned}
 \text{従つて} \quad x_1 = y_1 &= 50 \text{ cm}, \quad \xi_1 = \eta_1 = 1/8, \\
 x_0 = y_0 &= 200 \text{ cm}, \quad \xi_0 = \eta_0 = 1/2,
 \end{aligned}$$

此の場合、荷重状態は、中心線 $x = a/2, y = b/2$ に關して共に對稱であるから、公式 (30), (32), (33) を適用することとする。

$$a/b = \alpha = \beta = 1, \quad A_n = B_n$$

の關係より、(30) と (32) は同型となる。故に (30), (33) より A_n と Δ_1 を求め得る。(30), (33) は



第5圖

$$\left. \begin{aligned}
 H_n^{(1)} A_n - \frac{4}{\pi} \sum_r \frac{r n^3 (1-\nu)^2 + (\nu-2) c^4 n / r}{(r^2 + n^2)^2 + c^4} A_r + 8 \nu \pi c^2 I_n^{(1)} \Delta_1 \\
 = 2 \nu \pi^2 \sum_r \frac{R_{rn} \{ r^3 + (2-\nu) \nu \alpha_n^2 \}}{\pi^4 \rho_r (h)}
 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

(75) は、次の如く書く事が出来る。

$$\left. \begin{aligned}
 A_n &= \sum_r \Phi_{rn}^{(1)} A_r + \Lambda_1 J_n = L_n, \\
 \Phi_{rn} &= \frac{4}{\pi} \frac{n r \{ (1-\nu)^2 n^2 + (\nu+2) c^4 / r^2 \}}{H_n^{(1)} \{ (n^2 + r^2)^2 + c^4 \}}, \\
 J_n &= \frac{8 \nu \pi c^2 I_n^{(1)}}{H_n^{(1)}}, \\
 L_n &= 2 \nu \pi^2 \sum_{\beta r} \frac{R_{rn} \{ r^3 + (2-\nu) r \beta_m^2 \}}{\rho_r(\beta_m)}, \\
 R_{mn} &= \frac{16 \sin m \pi^{1/2} \sin n \pi^{1/2} \sin n \pi^{1/2} \sin n \pi^{1/2}}{\pi^2 n m}
 \end{aligned} \right\} (73)$$

井口博士の計算方法に従つて A_n を展開すれば次の如くである通りである。

$$A_n = L_n + \sum_r \Phi_{rn} L_r + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \Phi_{r_1 n} \Phi_{r_2 r_1} L_{r_2} + \dots$$

$$- \Lambda_1 (J_n + \sum_r \Phi_{rn} J_r + \sum_{r_1} \sum_{r_2} \Phi_{r_1 n} \Phi_{r_2 r_1} J_{r_2} + \dots).$$

$$\left. \begin{aligned}
 U_n^{(1)}, V_n^{(1)} \text{ を次の如くおく} \quad [1/8 c^4 \pi \nu] \cdot \sum_r \Phi_{rn} J_r &= U_n^{(1)}, \\
 [1/8 c^4 \pi \nu] \cdot \sum_{r_1} \sum_{r_2} \Phi_{r_1 n} \Phi_{r_2 r_1} J_{r_2} &= U_n^{(2)}, \\
 \dots \dots \dots & \\
 [1/8 c^4 \pi \nu] \cdot \sum_{r_1} \cdot \sum_{r_i} \Phi_{r_1 n} \Phi_{r_2 r_1} \dots \Phi_{r_i r_{i-1}} J_{r_i} &= U_n^{(i)},
 \end{aligned} \right\} (74)$$

$$\left. \begin{aligned}
 [\pi^3/2 \nu] \cdot \sum_r \Phi_{rn} L_r &= V_n^{(1)}, \\
 [\pi^3/2 \nu] \cdot \sum_{r_1} \sum_{r_2} \Phi_{r_1 n} \Phi_{r_2 r_1} L_{r_2} &= V_n^{(2)}, \\
 [\pi^3/2 \nu] \cdot \sum_{r_1} \sum_{r_i} \Phi_{r_1 n} \Phi_{r_2 r_1} \dots \Phi_{r_i r_{i-1}} L_{r_i} &= V_n^{(i)},
 \end{aligned} \right\} (75)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n \\ \gamma_n' \end{aligned} \right\} = \sqrt{\frac{\nu n^4 + c^4 \pm n^2}{2}},$$

$$c^4 = 43.2652.$$

$\gamma_n, \gamma_n', H_n^{(1)}$ は第1表に依つて與えられる。

又 Φ_{rn} の値は第2表に、 $V_n^{(i)}, U_n^{(i)}$ は、第3表に示めされる通りである。

第 1 表

n	$\gamma_n \pi$	n	$\gamma_n' \pi$	n	$H_n^{(1)}$
1	6, 14524	1	5, 28151	1	14, 0718
3	9, 97110	3	3, 25556	3	5, 0631
5	15, 8410	5	2, 04891	5	6, 8540
7	22, 0405	7	1, 47661	7	9, 3306
9	28, 2976	9	1, 14699	9	11, 9195
11	34, 5702	11	0, 93889	11	14, 5382
13	40, 8484	13	0, 79454	13	17, 1677
15	47, 1289	15	0, 68869	15	19, 8013

第 2 表

$$\phi_{r_n} \cdot H_n^{(1)}$$

r	$n=1$	$n=3$	$n=5$	$n=7$	$n=9$	$n=11$	$n=13$	$n=15$
1	-2, 117988	-1, 947939	-0, 548291	-0, 158680	-0, 039044	+0, 004428	+0, 020788	+0, 028746
3	-0, 216438	-0, 079938	+0, 136149	+0, 197878	+0, 200264	+0, 186525	+0, 169891	+0, 154155
5	-0, 021902	+0, 049013	+0, 177585	+0, 249132	+0, 269621	+0, 265092	+0, 250810	+0, 233724
7	-0, 003238	+0, 031345	+0, 127109	+0, 209591	+0, 258641	+0, 279145	+0, 281927	+0, 275198
9	-0, 000483	+0, 022251	+0, 083216	+0, 156462	+0, 216843	+0, 256280	+0, 271971	+0, 276336
11	+0, 000037	+0, 013873	+0, 054771	+0, 113042	+0, 171560	+0, 219163	+0, 252533	+0, 272948
13	+0, 000124	+0, 009048	+0, 037102	+0, 081766	+0, 133239	+0, 180808	+0, 220081	+0, 249083
15	+0, 000127	+0, 006143	+0, 025969	+0, 059933	+0, 102563	+0, 146785	+0, 187090	+0, 220503

第 3 表

n	$J_n/8c^4\pi\nu$	$U_n^{(1)}$	$U_n^{(2)}$	$U_n^{(3)}$	$U_n^{(4)}$	$U_n^{(5)}$	$J_n/8c^4\pi\nu + \sum_{i=1}^5 U_n^{(i)}$
1	+0, 02306	-0, 00388	+0, 00073	-0, 00012	+0, 00002	-0, 00000	+0, 01981
3	+0, 02572	-0, 00918	+0, 00162	-0, 00031	+0, 00005	-0, 00001	+0, 01789
5	+0, 00801	-0, 00104	+0, 00007	-0, 00002	+0, 00001	0, 00000	+0, 00705
7	+0, 00307	+0, 00041	-0, 00020	+0, 00004	-0, 00001	0, 00000	+0, 00331
9	+0, 00146	+0, 00069	-0, 00021	+0, 00004	-0, 00000	0, 00000	+0, 00198
11	+0, 00080	+0, 00059	-0, 00018	+0, 00004	-0, 00001	0, 00000	+0, 00124
13	+0, 00048	+0, 00041	-0, 00020	+0, 00004	-0, 00001	0, 00000	+0, 00074
15	+0, 00031	+0, 00038	-0, 00018	+0, 00004	-0, 00001	0, 00000	+0, 00054

第 4 表

n	$\pi^3/2\nu \times L_n$	$V_n^{(1)}$	$V_n^{(2)}$	$V_n^{(3)}$	$V_n^{(4)}$	$V_n^{(5)}$	$\pi^3/2\nu \times L_n + \sum_{i=1}^5 V_n^{(i)}$
1	-0, 0007139	+0, 0001151	-0, 0000218	+0, 0000041	-0, 0000006	+0, 0000001	-0, 0006170
3	-0, 0004972	+0, 0002829	-0, 0000483	+0, 0000092	-0, 0000017	+0, 0000002	-0, 0002549
5	+0, 0000396	+0, 0000433	-0, 0000026	+0, 0000011	-0, 0000001	0, 0000000	+0, 0000863
7	-0, 0000009	-0, 0000027	+0, 0000051	-0, 0000006	+0, 0000001	0, 0000000	+0, 0000028
9	0, 0000000	-0, 0000051	+0, 0000052	-0, 0000004	+0, 0000001	0, 0000000	-0, 0000002
11	0, 0000000	-0, 0000058	+0, 0000044	-0, 0000004	+0, 0000001	0, 0000000	-0, 0000017
13	0, 0000000	-0, 0000052	+0, 0000035	-0, 0000003	+0, 0000001	0, 0000000	-0, 0000019
15	0, 0000000	-0, 0000044	+0, 0000027	-0, 0000002	+0, 0000001	0, 0000000	-0, 0000018

以上の数値より, A_1 を求めれば,

$$A_1 = -0, 667 \times 10^{-5},$$

故に, 隅点の沈下は

$$\frac{qb^4}{N} A_1 = -0, 002809. q. \text{ cm}$$

即ち, 浮き上りを示す, この値より A_n は, 第4表の如く與えられる。

更に，計算を行なうことに依つて， x 方向曲げモーメント M_x 及び沈下 W は，第5表の如く求められる。

計算値の検算

この板上の外力の平衡を考えるのに，

$$\int_A W \cdot K \cdot dA = \int_A q \cdot f(xy) dA.$$

第5表より與えられる各點の W の値に依つて，上式の左邊を梯形則により，數値積分すれば，

$$\int_A W \cdot K dA \approx \sum W \cdot K = 1.087 \times q \cdot m^2$$

第4表

n	A_n
1	-0,001024
3	-0,001843
5	+0,001194
7	+0,000461
9	-0,000274
11	-0,000168
13	-0,000099
15	-0,000074

第5表 弾性基礎上四邊，四隅共完全自由なる板

		$W(\text{cm } q)$				
ξ	n	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8	0/8	-0,00281	-0,00212	-0,00174	-0,00166	-0,00166
1/8	1/8	-0,00212	0,00096	0,00123	0,00307	0,00394
2/8	2/8	-0,00174	0,00123	0,00557	0,01099	0,01374
3/8	3/8	-0,00166	0,00307	0,01099	0,02253	0,02893
4/8	4/8	-0,01066	0,00394	0,01374	0,02893	0,03784

		$M_x(\text{kg} \cdot \text{cm } q)$				
ξ	n	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8	0/8		4	-1	-2	-1
1/8	1/8		-6	-9	12	21
2/8	2/8		-36	-40	50	124
3/8	3/8		-77	-98	147	373
4/8	4/8		-110	-134	214	447

然るに右邊の値は

$$\int_A q f(xy) dA = q \cdot m^2,$$

故に，この検算による誤差は，8.7% である。これは A_n の決定に際して，15 項以上を無視し，積分を梯形則によつたことに起因する誤差である。第6圖，第7圖は，各々 x 方向曲げモーメント圖及び等沈下曲線圖を示す。

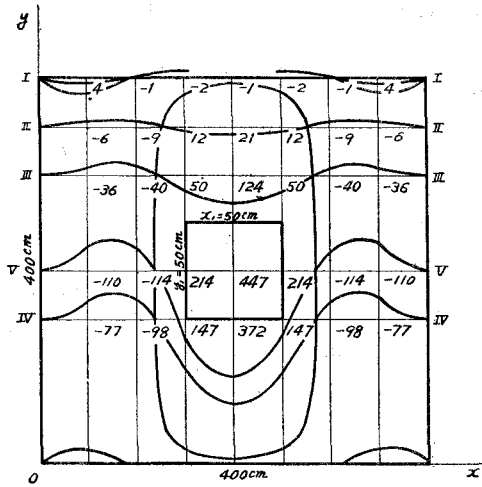
b) 四隅に各々點荷重 Q がかかる場合
この場合は

$$2N(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = Q$$

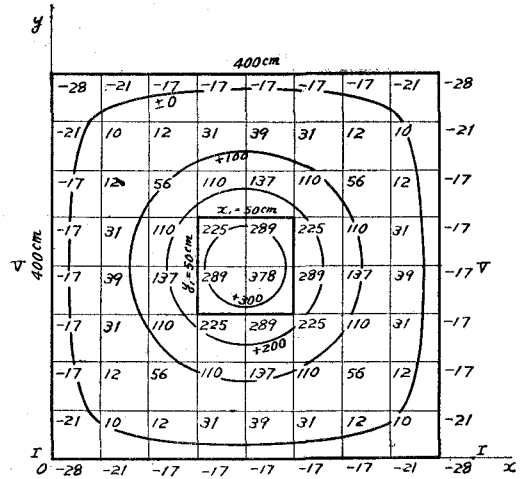
となり，これより (33) 式は

$$\sum_r \sum_s \frac{rsR_{rs}}{\rho_r(s)} + 2 \sum_s \frac{H_s^{(1)'}}{s} + 4A_1 \sum_s \pi c^2 \frac{I_s^{(1)'}}{\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{Q}{2(1-\nu)a^2}$$

(121)



第6圖 x 方向各断面 M_x 曲線圖



第7圖 等沈下曲線圖

$w = w' \times 10^{-4} q$ 圖は w' を示す

上式より A_1 を決定することが出来る。 A_n の値は b) の結果より直ちに求められ、 x 方向曲げモーメント M_x 、対角線方向主曲げモーメント M_1, M_2 、沈下 W は、第6表に示される通りで、最大曲げモーメントは隅点、対角線方向に生ずる。

数値の検算

第6表 弾性基礎上四邊完全自由なる板
 $W(\text{cm} \cdot 2500 Q)$

η	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8	0, 1035	0, 0514	0, 0171	0, 0038	0, 0007
1/8	0, 0514	0, 0316	0, 0050	0, 0015	0, 0030
2/8	0, 0171	0, 0050	0, 0042	0, 0041	0, 0044
3/8	0, 0038	0, 0015	0, 0041	0, 0046	0, 0042
4/8	0, 0007	0, 0030	0, 0044	0, 0042	0, 0034

$M_x(\text{kg} \cdot \text{cm} 1000 Q)$

η	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		322	236	118	76
1/8		243	230	174	138
2/8		143	140	99	80
3/8		94	79	43	37
4/8		72	77	24	8

$M_1(\text{kg} \cdot \text{cm} 1000 Q)$

ξ	0/8	1/8
η	0/8	1/8
	500	340

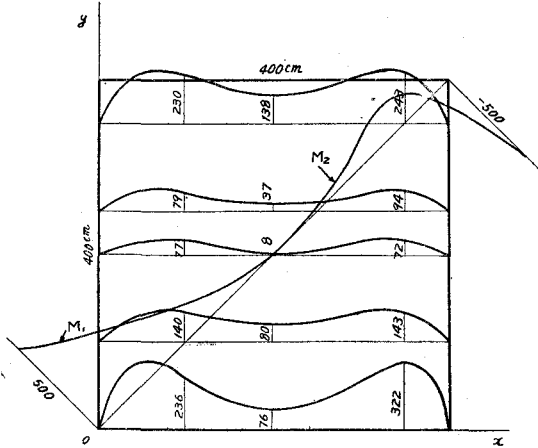
$M_2(\text{kg} \cdot \text{cm} 1000 Q)$

ξ	7/8	8/8
η	7/8	8/8
	120	-500

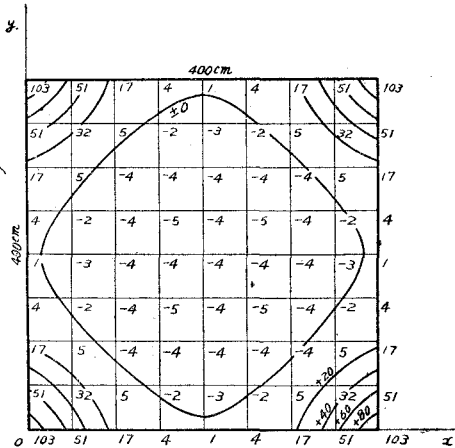
a) と同様に、数値積分をなせば、

$$\int_A W \cdot K dA = 1.075 \times 4Q$$

然るに、荷重は $4 \times Q$ であるから、誤差は、7.5% である。第8圖、第9圖は、曲げモーメント圖及び等沈下曲線圖を示す。



第8圖 x 方向各断面 M_x 曲線圖



第9圖 等沈下曲線圖

$w = w' \times 10^{-3}$ 圖は w' を示す

ii) 四邊共完全に自由で、四隅のみ支持される板

c) 矩形型部分分布荷重のある場合

荷重の位置は、a) と同様である。

$$x_1 = y_1 = 50 \text{ cm}, \quad \xi_1 = \eta_1 = 1/8,$$

$$x_0 = y_0 = 200 \text{ cm}, \quad \xi_0 = \eta_0 = 1/2.$$

第7表 弾性基礎上四邊完全自由にして四隅支持せる板

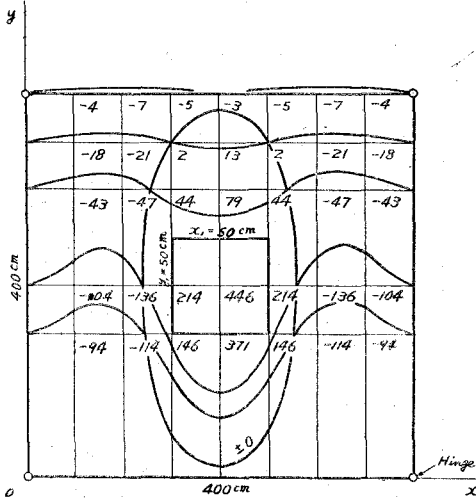
$W(\text{cm} \cdot q)$					
$\frac{\xi}{\eta}$	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8	0, 00000	-0, 00073	-0, 00128	-0, 00156	-0, 00164
1/8	-0, 00073	0, 00007	0, 00137	0, 00303	0, 00386
2/8	-0, 00128	0, 00137	0, 00551	0, 01088	0, 01362
3/8	-0, 00156	0, 00303	0, 01088	0, 02241	0, 02882
4/8	-0, 00164	0, 00386	0, 01362	0, 02882	0, 03754

$M_x(\text{kg} \cdot \text{cm} \cdot q)$

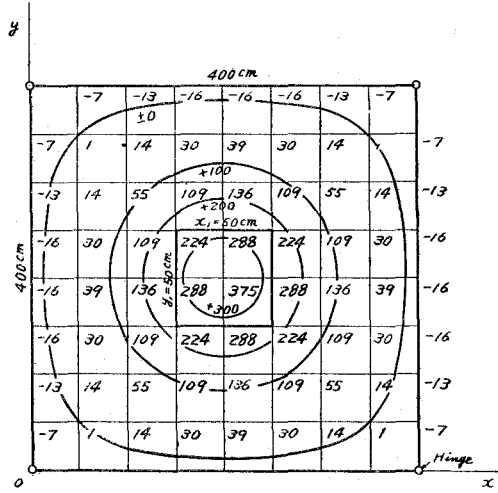
$\frac{\xi}{\eta}$	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		-4	-7	-5	-3
1/8		-18	-21	2	13
2/8		-43	-47	44	119
3/8		-94	-114	146	371
4/8		-104	-136	214	446

A_1, A_{12} の値は, a) の $V_n^{(1)}$ より求められ, x 方向曲げモーメント M_x , 沈下 W は, 第7表に示されて居る。

又第10圖, 第11圖は, 各々曲げモーメント圖及び等沈下曲線圖を表わす。



第10圖 x 方向各断面 M_x 曲線圖



第11圖 等沈下曲線圖

$w = w' \times 10^{-4} q$ 圖は w' を示す

d) 板全面に等分布荷重のある場合,
この場合,

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 = 200 \text{ cm}, & \quad \xi_0 = \eta_0 = 1/2, \\ x_1 = y_1 = 200 \text{ cm}, & \quad \xi_1 = \eta_1 = 1/2. \end{aligned}$$

A_n の値は, a) の $U_n^{(1)}$ より求められ, x 方向曲げモーメント M_x , 対角線方向曲げモーメント M_1, M_2 及び沈下 W は, 第8表に示す如くであり, 第12圖, 第13圖は, 各々曲げモーメント圖及び等沈下曲線圖を示す。b) を反対にした場合と同型である。

第8表 弾性基盤上四邊完全自由にして四隅支持せる板
 $W(\text{cm } q)$

ξ η	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8	0,0000	0,0503	0,0836	0,0964	0,0994
1/8	0,0503	0,0695	0,0952	0,1015	0,1029
2/8	0,0836	0,0952	0,1041	0,1040	0,1043
3/8	0,0964	0,1015	0,1040	0,1044	0,1041
4/8	0,0994	0,1029	0,1043	0,1041	0,1038

iii) 四邊共單純に支持される板

e) 矩形型部分分布荷重のある場合

荷重の位置は, a) と同一とする。

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 = 50 \text{ cm}, & \quad \xi_1 = \eta_1 = 1/8, \\ x_0 = y_0 = 200 \text{ cm}, & \quad \xi_0 = \eta_0 = 1/2. \end{aligned}$$

$M_x(\text{kg}\cdot\text{cm } q)$

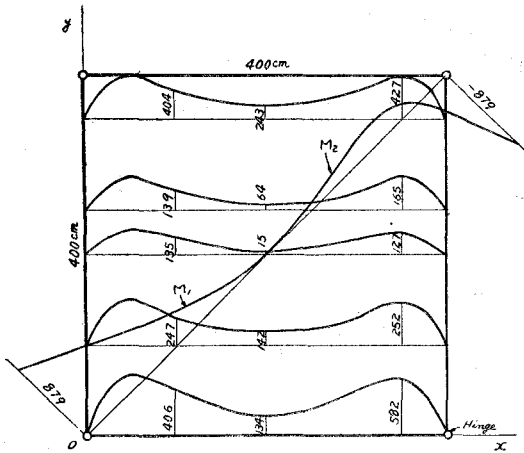
ξ η	0/8	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		582	406	208	134
1/8		427	404	306	243
2/8		252	247	174	142
3/8		165	139	75	64
4/8		127	135	46	15

$M_1(\text{kg}\cdot\text{cm } q)$

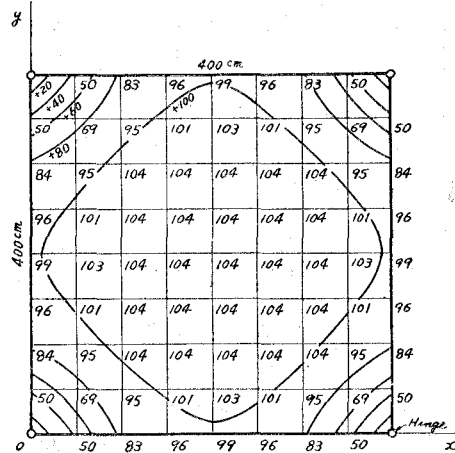
ξ	0/8	1/8
η	0/8	1/8
	879	616

$M_2(\text{kg}\cdot\text{cm } q)$

ξ	7/8	8/8
η	7/8	8/8
	-879	238



第12圖 x 方向各断面 M_x 曲線圖



第13圖 等沈下曲線圖
 $w = w' \times 10^{-3} q$ 圖は w' を示す

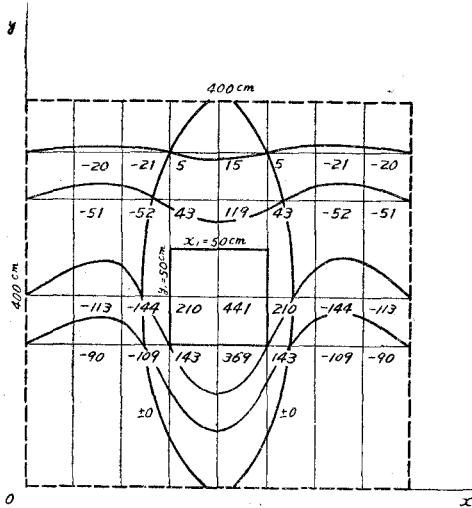
x 方向曲げモーメント及び沈下 W は、第9表に示され、尙、第14圖、第15圖は、各々曲げモーメント圖及び等沈下曲線圖を示す。

第9表 弾性基礎上四邊單純支承なる板
 $W(\text{cm } q)$

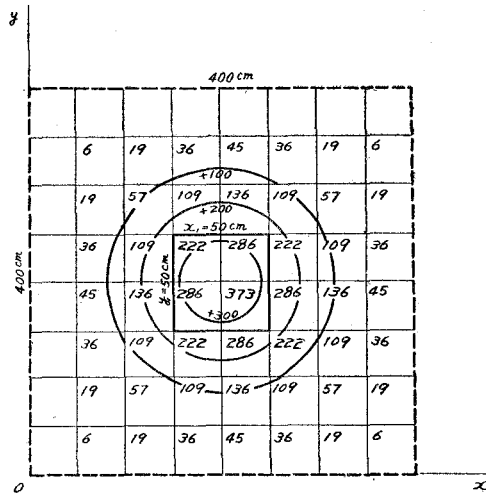
η	ξ	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1/8		0,00065	0,00194	0,00363	0,00447
2/8		0,00194	0,00570	0,01093	0,01364
3/8		0,00363	0,01093	0,02225	0,02861
4/8		0,00447	0,01364	0,02861	0,03728

$M_x(\text{kg/cm } q)$

η	ξ	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		0	1	0	0
1/8		-20	-21	5	15
2/8		-51	-52	43	119
3/8		-91	-104	143	369
4/8		-113	-144	210	444



第14圖 x 方向各断面 M_x 曲線圖



第15圖 等沈下曲線圖
 $w = w' \times 10^{-4} q$ 圖は w' を示す

f) 板全面に等分布荷重のある場合

$$x_1 = y_1 = 200 \text{ cm}, \quad \xi_1 = \eta_1 = 1/2,$$

$$x_0 = y_0 = 200 \text{ cm}, \quad \xi_0 = \eta_0 = 1/2.$$

この場合の x 方向曲げモーメント M_x , 対角線方向主曲げモーメント M_1, M_2 及び沈下 W は, 第 10 表に示されて居る。又第 16 圖, 第 17 圖は, 各々曲げモーメント圖及び等沈下曲線圖を表わす。

第 10 表 弾性基礎上四邊單純支承なる板
 $W(\text{cm } q)$

η	ξ	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1/8		0,0373	0,0572	0,0646	0,0661
2/8		0,0572	0,0912	0,1009	0,1035
3/8		0,0646	0,1009	0,1146	0,1176
4/8		0,0661	0,1035	0,1176	0,1206

$M_x(\text{kg}\cdot\text{cm } q)$

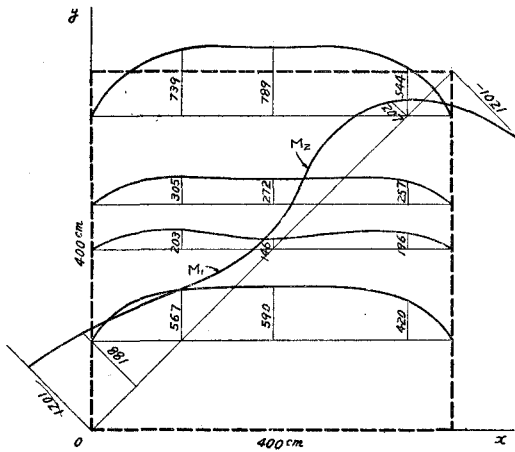
ξ	η	1/8	2/8	3/8	4/8
0/8		0	0	0	0
1/8		544	739	782	789
2/8		420	567	592	590
3/8		257	305	286	272
4/8		196	203	165	146

$M_1(\text{kg}\cdot\text{cm } q)$

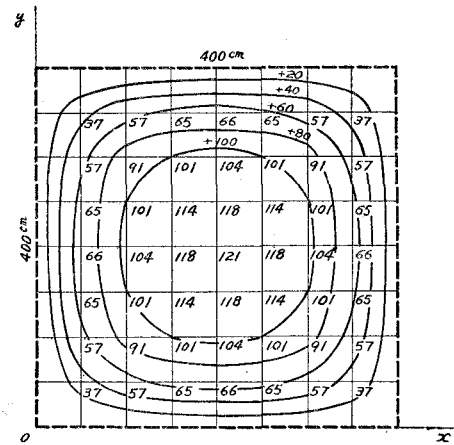
ξ	η	0/8	1/8
	8/8	1021	881

$M_2(\text{kg}\cdot\text{cm } q)$

ξ	η	7/8	8/8
	7/8	207	-1021



第 16 圖 x 方向各断面 M_x 曲線圖



第 17 圖等沈下曲直圖

$w = w' \times 10^{-3} q$ 圖は w' を示す

iv) 數値計算例に對する考察

矩形型部分分布荷重に對して，b), d), f), の三種の境界條件場合につき比較するに，この場合荷重の位置が板の中心部に在るために，境界の影響は，僅少で，その最大曲げモーメントは三者殆ど等しく 1% 前後の差異を示すに過ぎない。故にかかる荷重状態に際しては，單純支持の板として計算し，その結果を他の境界の板に對して，充分適用出来る。

結 言

以上弾性基礎上に在る，四邊四隅共完全に自由なる板，例えばコンクリート舗装路の如きも

のに於ける曲げの二、三の性質を示すことが出来た。更に著者は、理論による結果と、実際に行なわれた実験の結果との比較をなし、この種理論の應用について、研究を進る積りである。

終りに、室蘭工業大學長井口鹿象博士の指導を受け、又圖表作成にあつて、室蘭工業大學土木教室助手牧野正友氏の援助を受けた。此處に記して謝意を表す次第である。

(昭和 28 年 2 月 27 日受)