(n+1)次元のフィンスラー空間内の超曲面の主法曲率の新しい特性付け

$(n+1)$ 次元のフィンスラー空間内の超曲面の主法曲率の新しい特性付け

永田幸令

New Characterizations of the Principal Normal Curvatures of a Hypersurface in an $(n+1)$-Dimensional Finsler Space

Yukiyoshi Nagata

Abstract

In this paper, the present author gives new characterizations of the principal normal curvatures of a hypersurface and the lines of curvature of a hypersurface in an $(n+1)$-dimensional Finsler space. And these characterizations are obtained by his using the idea, that is, the principal direction of a vector field in the hypersurface.

I 緒　　言

フィンスラー空間の部分空間の理論は，E. Cartan[1]，M. Haimovici[2]，H. Hombu[3]，及び E. T. Davies[4] 等に依つて研究された。この論文では E. T. Davies が取扱つた単一法線に沿つて element of support を持つフィンスラー空間内の超曲面を考え，その上の一つのベクトル野の法曲率，[5] 主方向等の概念を定義し，超曲面の主法曲率及び曲率曲線に新しい意味付けを与えた。

記号法は E. Cartan 及び E. T. Davies に倣つた。

II ベクトルの絶対微分

1 E. Cartan. Les espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79 (1934).

2 M. Haimovici. Les formules fondamentales dans la theorie des hypersurfaces d'un espace general, Annales Scientifiques de l'Univ. de Jassy, 20 (1934—1935), 39—58.

3 H. Hombu. Die Krümmungstheorie im Finslerschen Raume, Jour. Fac. of Sci. Hokkaido Univ., (1), 5 (1936), 67—94.

4 E. T. Davies. Subspace of a Finsler space, Proc. London Math. Soc., 49 (1945), 19—39.

5 Y. Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955).

基本二次形式

(1) $$ds^2 = g_{\lambda\mu}(x, x')dx^\lambda dx^\mu, {}^{6}$$

を持つ $(n+1)$ 次元のフィンスラー空間 F_{n+1} を考える。その中でのベクトル X^λ の絶対微分 DX^λ は次式によつて与えられる。[7]

(2) $$DX^\lambda = dX^\lambda + C_\mu{}^\lambda{}_\nu X^\mu dx'^\nu + \Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu X^\mu dx^\nu$$

こゝに,

(3) $$\Gamma_\mu{}^\lambda{}_\nu = \Gamma^*{}_\mu{}^\lambda{}_\nu + C_\mu{}^\lambda{}_\rho x'^\sigma \Gamma_\sigma{}^\rho{}_\nu$$

今, x'^i 方向の単位ベクトルを l^μ とし, $\omega^\mu = Dl^\mu$ とおけば, (2), (3) に依り

(4) $$\omega^\mu = dl^\mu + l^\nu \Gamma^*{}_\nu{}^\mu{}_\sigma dx^\sigma$$

が得られる。

又, DX^λ は次の形で書き表すこともできる。[8] 即ち

(5) $$DX^\lambda = (X^\lambda\|_\mu + X^\nu A_\nu{}^\lambda{}_\mu)\omega^\mu + X^\lambda|_\mu dx^\mu$$

こゝに

$$X^\lambda\|_\mu = \mathfrak{L}\frac{\partial X^\lambda}{\partial x'^\mu},$$

$$X^\lambda|_\mu = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} + X^\nu \Gamma^*{}_\nu{}^\lambda{}_\mu - \frac{\partial X^\lambda}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{\partial G^\nu}{\partial x'^\mu}$$

今,

(6) $$\overset{0}{\nabla}_\mu X^\lambda \equiv X^\lambda|_\mu, \qquad \overset{1}{\nabla}_\mu X^\lambda \equiv X^\lambda\|_\mu + A_\rho{}^\lambda{}_\mu X^\rho$$

とおけば,

(7) $$DX^\lambda = \overset{0}{\nabla}_\mu X^\lambda dx^\mu + \overset{1}{\nabla}_\mu X^\lambda \omega^\mu$$

と表し得る。

Ⅲ 超曲面の基本量及びそれらの間の関係式

今, F_{n+1} 内で element of support を単一法線に沿つてもつ超曲面 S: $x^\lambda = x^\lambda(u^1, \cdot\cdot\cdot, u^n)$ を考える。

---

6 x'^λ はフィンスラー空間内の element of support と呼ばれるものを表はし, ギリシャ文字で書き表された添数は $1, \cdot\cdot\cdot, n+1$ なる値をとる。又, 右辺 $g_{\lambda\mu}(x, x')dx^\lambda dx^\mu$ の様に同一項の中に同一文字が下添数及び上添数として書かれているときには, その文字がとり得る総べての値に対して $g_{\lambda\mu}(x, x')dx^\lambda dx^\mu$ の形の項を作つて加え合わす事を意味するものとする。即ち, 右辺は $\sum_{\lambda=1}^{n+1}\sum_{\mu=1}^{n+1} g_{\lambda\mu}(x, x')dx^\lambda dx^\mu$ を簡畧して書き表したものである。尚詳細は L. P. Eisenhart. Riemannian geometry, Princeton University Press, (1949) の I 章を参照の事。

7 E. Cartan. Les espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79 (1934). I, VI

8 E. Cartan. Les espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79 (1934). VII

(8) $'g_{ab}(u)=g_{\lambda\mu}(x,x')B_a{}^\lambda B_b{}^\mu$,[9] $B_a{}^\lambda\equiv\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}$

とおき，$'g_{ab}(u)$ を S の基本計量テンゾルとして採用する。$|'g_{ab}|\neq0$ なるときには，次式によつて $'g^{bc}$ が定義される。即ち

(9) $'g^{ab}{}'g_{bc}=\delta_c{}^a$

従つて

(10) $B_\lambda{}^a={}'g^{ad}g_{\lambda\mu}B_d{}^\mu$

とおくことに依り $B_\lambda{}^a$ を導入することができる。

我々の考える場合に於いては，l^λ は S の法線方向を有つから次の関係式が成立する。[10]

(11) $\begin{cases} \text{a)}\ B_a{}^\lambda B_\lambda{}^b=\delta_a{}^b, & \text{d)}\ B_a{}^\lambda B_\mu{}^a=B_\mu{}^\lambda, \\ \text{b)}\ l_\lambda B_a{}^\lambda=0, & \text{e)}\ B_\mu{}^\lambda+l^\lambda l_\mu=\delta_\mu{}^\lambda \\ \text{c)}\ l_\lambda l^\lambda=1, & \end{cases}$

上式 (11) c) より $l_\lambda\omega^\lambda=0$ が得られるから

(12) $\omega^\lambda=B_a{}^\lambda\overline{\omega}^a,\qquad \overline{\omega}^a=B_\mu{}^a\omega^\mu$

となる。従つて (4) を利用すれば，超曲面上の方向 $dx^\lambda=B_c{}^\lambda du^c$ に対して (12) は次の形に表される。[11]

(13) $$\omega^\lambda=B_a{}^\lambda\left[B_\mu{}^a\left(\frac{\partial l^\mu}{\partial u^c}+\Gamma^*{}_\rho{}^\mu{}_\sigma l^\rho B_c{}^\sigma\right)\right]du^c=-B_a{}^\lambda\Omega.{}^a{}_c du^c$$

こゝに

$$\Omega.{}^a{}_c=-B_\mu{}^a\left(\frac{\partial l^\mu}{\partial u^c}+\Gamma^*{}_\rho{}^\mu{}_\sigma l^\rho B_c{}^\sigma\right)$$

従つて，方向 $dx^\lambda=B_c{}^\lambda du^c$ に対する F_{n+1} 中のベクトル X^λ の絶対微分は (7) 及び (13) に依つて

(14) $$DX^\lambda=(\overset{0}{\nabla}_\nu X^\lambda)B_c{}^\nu du^c-(\overset{1}{\nabla}_\nu X^\lambda)B_a{}^\nu\Omega.{}^a{}_c du^c=\overset{\circ}{D}_c X^\lambda du^c$$

但し

$$\overset{\circ}{D}_c X^\lambda=B_c{}^\nu\overset{0}{\nabla}_\nu X^\lambda-\overset{1}{\nabla}_\nu X^\lambda B_a{}^\nu\Omega.{}^a{}_c$$

に依り与えられる。

今，F_{n+1} 中のベクトル $B_a{}^\lambda$ を考えると，次式が導き出される。[12]

(15) $$DB_a{}^\lambda=\overset{\circ}{D}_c B_a{}^\lambda du^c=(\partial_c B_a{}^\lambda+\Gamma_\mu{}^\lambda{}_c B_a{}^\mu)du^c$$

---

9 ラテン文字で書き表された添数は 1, ・・・, n の間の値をとる。
10 E.T. Davies. Subspace of a Finsler space, Proc. London Math. Soc., 49 (1945), 19—39. 2, 8
11 E.T. Davies. Subspace of a Finsler space, Proc. London Math. Soc., 49 (1945), 19—39, 8
12 前出 11.

こゝに

$$\partial_c B_a{}^\lambda \equiv \frac{\partial B_a{}^\lambda}{\partial u^c}, \qquad \Gamma_\mu{}^\lambda{}_c \equiv \Gamma^*{}_\mu{}^\lambda{}_\nu B_c{}^\nu - A_\mu{}^\lambda{}_\nu B_d{}^\nu \Omega_\cdot{}^d{}_c$$

S の中での接続径数 (connection parameters) は

(17) $$\gamma_b{}^a{}_c = B_\lambda{}^a(\partial_c B_b{}^\lambda + \Gamma_\mu{}^\lambda{}_c B_b{}^\mu)$$

に依り定義される。

又，オイラー曲率テンソル (Eulerian curvature tensor) は次式に依つて与えられる。

(18) $$\Omega_{bc} = l_\lambda(\partial_c B_b{}^\lambda + \Gamma^*{}_\mu{}^\lambda{}_\nu B_b{}^\mu{}_c{}^\nu), \qquad B_b{}^\mu{}_c{}^\nu \equiv B_b{}^\mu B_c{}^\nu$$

(17)，(11) e) 及び (18) に依り

(19) $$\partial_b B_a{}^\alpha = B_c{}^\alpha \gamma_a{}^c{}_b - \Gamma_\mu{}^\alpha{}_b B_a{}^\mu + l^\alpha \Omega_{ab}$$

を得る。[13]

Ⅳ 定義及び結果

以下に於いて論じられる総べての空間の基本二次形式は正定値であると仮定する。S の各点に対して，任意の或る一つの単位ベクトル野 v^α を関連せしめ，(従つて v^α は $v^\alpha = v^a B_a{}^\alpha$, $'g_{ab}v^a v^b = 1$ を満す。) s を曲線に沿つての弧の長さとして，S 上の曲線を $C: u^a = u^a(s)$, $(a=1, \cdot\cdot\cdot, n)$ で表し，(19) を利用すると，C 上の一点 P で次の関係式を得る。[14]

(20) $$\frac{Dv^\alpha}{ds} = \frac{\overline{D}v^a}{ds} B_a{}^\alpha + \Omega_{ab} v^a \frac{du^b}{ds} l^\alpha$$

但し

$$Dv^\alpha = dv^\alpha + \Gamma_\mu{}^\alpha{}_b v^\mu du^b, \qquad \overline{D}v^a = dv^a + v^c \gamma_c{}^a{}_b du^b$$

(20) の右辺に得られた $\Omega_{ab} v^a \dfrac{du^b}{ds}$ を点 P に於ける**曲線 C に関するベクトル野 v^α の法曲率** (normal curvature) といゝ，$e \cdot {}_v k_n$ で書き表す。(但し，e は $\Omega_{ab} v^a \dfrac{du^b}{ds}$ が正のときには $+1$，負のときには -1 なる値をとる。) そして v^α が単位ベクトル野でないときには，もつと一般的に

(21) $$e \cdot {}_v k_n = \frac{\Omega_{ab} v^a du^b}{('g_{ab} du^a du^b\, 'g_{ef} v^e v^f)^{\frac{1}{2}}}$$

に依つて v^α の曲線 C に関する法曲率を定義する。[15]

---

13 Y. Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955). §1

14 Y. Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955). §2

15 前出 14

定 義 1　$e\cdot{}_vk_n$ の零でない極値を S 中の点 P に於ける**ベクトル野** v^α **の主法曲率** (principal normal curvature) といゝ，その対応方向を点 P に於ける**ベクトル野** v^α **の主方向** (Principal direction) という。v^α の主法曲率は

(22)　$$|\psi_{ab}-({}_vk_n)^2{}'g_{ab}|=0, \qquad (a,\ b=1,\ \cdot\cdot\cdot,\ n)$$

の根に依つて与えられ，v^α の主方向は

(23)　$$\{\psi_{ab}-({}_vk_n)^2{}'g_{ab}\}du^b=0$$

をみたす du^b となる。こゝに ψ_{ab} は

(24)　$$\psi_{ab}=\frac{\Omega_{cb}\Omega_{da}v^cv^d}{{}'g_{ef}v^ev^f}$$

である。

又，各点での方向が一つのベクトル野 v^α の主方向となつている様な S 上の曲線をその**ベクトル野の曲率曲線**と名付ける。

定 義 2

(25)　$$|\Omega_{ab}-K'g_{ab}|=0$$

の根 K_h，$(h=1,\ \cdot\cdot\cdot,\ n)$ を S **の主法曲率**といゝ，

(26)　$$(\Omega_{ab}-K_h{}'g_{ab})\lambda^a{}_{(h)}=0$$

に依つて定められた方向 $\lambda^a{}_{(h)}$ を S **の主方向**という。又，$\lambda^a{}_{(h)}$ に依つて決定された曲線を S の**曲率曲線** (lines of curvature) と名付ける。

定 義 3　S の各点での方向が S の主方向を構成する様なベクトル野を S **の主ベクトル野**，或は**主野** (principal vector field, or principal field) と呼び，点 P での S の主野のベクトルの方向及びその方向に対応する S の主法曲率を夫々点 P に於ける S **の対応主方向** (corresponding principal direction) 及び S **の対応主法曲率** (corresponding principal normal curvature) と名付ける。又，S の主野に依つて決められた曲線を S **の対応曲率曲線** (corresponding line of curvature) と呼ぶことにする。

$v^\alpha=v^aB_a{}^\alpha$ とすれば，S 内の一点 P での v^α の主方向は (23) に依つて

(23)′　$$\{\psi_{ab}-({}_vk_n)^2{}'g_{ab}\}du^b=0, \qquad (a,\ b=1,\ \cdot\cdot\cdot,\ n)$$

をみたす du^b として与えられる。今，特に v^α が S の主ベクトル野であるとすれば，v^a は

(27)　$$\{\Omega_{ab}-K'g_{ab}\}v^a=0, \qquad (a,\ b=1,\ \cdot\cdot\cdot,\ n)$$

を満す。こゝに，K は S の対応主法曲率である。(23)′ より

$$({}_vk_n)^2=\frac{\psi_{ab}v^adu^b}{{}'g_{ab}v^adu^b}$$

を得る。従つて (24)，(27) を利用する事により $({}_vk_n)^2=K^2$ が導かれ，点 P に於いて

$e\cdot{}_{v}k_{n}=K$ を得る。

即ち，次の定理を得る。

定理　点 P での S の主ベクトル野の主方向及び主法曲率は，夫々点 P での S の対応主方向及び対応主法曲率になる。従つて S の主ベクトル野の曲率曲線は S の対応曲率曲線となる。

V 結　　言

本論文は内地研究（於北大理学部）期間中に修得した研究結果[16] に引き続き，それに関連して新しく得られた結果を簡単に記述したものである。この意味において，内地研究期間中に色々と懇切なる御指導を賜つた北海道大学理学部教授河口商次先生に対し，ここに厚く感謝の意を表したい。又，その期間中，種々御協力下さつた本学理科教室の教官各位に対しても，謝意を表する次第である。

（昭和30年5月12日受付）

16　Y.Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955).