



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



室蘭工業大学研究報告 第2巻第1号 全1冊

| | |
|-------|--|
| メタデータ | 言語: eng 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-05-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属: |
| URL | http://hdl.handle.net/10258/2927 |

室蘭工業大學

研 究 報 告

第 二 卷 第 一 号

昭 和 三 十 年 六 月

MEMOIRS
OF
THE MURORAN UNIVERSITY OF ENGINEERING

VOL. 2 NO. 1
JUNE 1955

MURORAN HOKKAIDO
JAPAN

Editing Committee

| | | |
|--------------|-------------|---|
| S. Iguchi | Dr. Eng. | <i>President, Chairman of the Committee</i> |
| K. Inagaki | Prof. | <i>Biology</i> |
| I. Iwatzu | Asst. Prof. | <i>Mechanical Engineering</i> |
| G. Miura | Asst. Prof. | <i>Electrical Engineering</i> |
| K. Nishida | Asst. Prof. | <i>Metallurgical Engineering</i> |
| F. Sato | Prof. | <i>Mining Engineering</i> |
| H. Sato | Prof. | <i>Chemical Engineering</i> |
| T. Sakai | Prof. | <i>Civil Engineering</i> |
| D. Washiyama | Prof. | <i>Literature</i> |

All communications regarding the memoirs should be addressed to the chairman of the committee.

These publications are issued at irregular intervals. When they amount to about 800 pages, they form one volume.

室蘭工業大学研究報告 第二卷 第一号

目 次

| | 頁 | 総頁 |
|--|--------------------------|-------------|
| 長距離送電線における直列コンデンサの 定態運転特性 (第1報) …………… | 三浦 五郎 | 1 (1) 1 |
| Laplace変換による一変定数回路の解析…………… | 三浦 五郎 山 上 孝 | 1 (15) 15 |
| Heaviside 演算子の変定数回路に対する応用…………… | 山 上 孝 三浦 五郎 伊 達 隆三 | 1 (29) 29 |
| 北海道産ウスネア属地衣類の 成分に関する研究 (第4報) …………… | 佐藤 久次 | 1 (39) 39 |
| 泥炭のアンモニア化 (第3報) …………… | 佐々木 満雄 八幡 寿雄 佐藤 久次 | 1 (51) 51 |
| 市販真鍮線の応力腐蝕の研究…………… | 西田 惠三 | 1 (59) 59 |
| I-ピコリンの分光光電法による分析について…………… | 小松 藤男 | 1 (93) 93 |
| 振りもーめんとを受ける拱橋の 新解法について…………… | 中村 作太郎 | 1 (101) 101 |
| 不連続な基礎上に在る梁および矩形板の曲げ…………… | 能町 純雄 | 1 (133) 133 |
| リンモリブデン酸アンモニウムの 硝酸に対する溶解度…………… | 上野 幸三 | 1 (147) 147 |
| 電位差滴定における電極 (双金属) の 選択について——中和滴定…………… | 上野 幸三 太刀川 哲平 | 1 (153) 153 |
| 心靈現象に対する態度の研究…………… | 川村 信一 | 1 (163) 163 |
| 新中国における三反、五反運動と 運動下の財經工作…………… | 三木 毅 | 1 (173) 173 |
| 中国経済における封建性および 殖民地性の解剖…………… | 三木 毅 | 1 (185) 185 |
| (n+1)次元のフィンスラー空間内の 超曲面の主法曲率の新しい特性付け…………… | 永田 幸令 | 1 (205) 205 |
| Fundamental Viewpoints in the Theory of A Priori Measure …… | Yoshio Kinokuniya | 1 (211) 211 |
| On Numerical Differentiation…………… | Masao Yoshida | 1 (221) 221 |
| On Term by Term Integration…………… | Masao Yoshida | 1 (227) 227 |
| A Numerical Table of the Laguerre Functions …………… | Masao Yoshida | 1 (231) 231 |

長距離送電線における直列コンデンサ の定態運転特性 (第1報)

(挿入点が電力, 力率, コンデンサ容量等におよぼす影響と,
並列進相コンデンサの場合との比較)

三浦五郎

Steady Operation Characteristics of Series Capacitors in Long-distance Transmission Lines. (Part I)

(Effects of Insertion Places for Powers, Currents, Power-factors and
Capacitor Capacities, and Comparison with Parallel Capacitors.)

Goro Miura

Abstract

The research here is intended to quantitatively clarify the effects of insertion places of series capacitors for some steady-state operation characteristics of a high voltage transmission line, of which points have been kept indistinct so far. Investigations are made by numerical examples for watt and watt-less powers of sending and receiving ends, power-factors, line currents of both ends, capacitor currents, and so on.

As line resistances are neglected together with line leakage here to simplify their mathematical treatise, the formulae introducing numerical labors are rather of simple ones. Parallel capacitors are discussed also, mainly to compare their characteristics to that of series capacitor problems.

Author considers that physical interpretation are applicable to more complicated problems, such as containing salient-pole synchronous alternators.

I 緒 言

長距離高圧送電線に設置された直列コンデンサに関する研究は、大別して定常状態における系統の運転特性と、過渡状態における異常現象特性とに分れる。後者については筆者がすでに研究を開始している。^{1, 2, 3} 前者については山田、大森両氏⁴ 外各氏の研究結果が発表されて

1 三浦五郎：直列コンデンサ補償送電線における三相突流理論 (第1報), 電学誌, 73, 1345 (1952)

2 三浦五郎：同上 (第2報), 電学誌, 74, 930 (1953)

3 三浦五郎：凸極機による三相短絡時コンデンサ過渡尖頭電圧値について,
送電線直蓄専門委資料, 直 218 (昭30年1月)

4 山田太三郎, 大森武司：最近の直列コンデンサ, 電学誌, 72, 557 (1951)

いるし、また最近 Johnson 氏など⁵ が多くの数値計算により簡潔な定性結果を与えている。

本稿はこの定態運転特性についてさらに研討を加え、従来不明であつた直列コンデンサ挿入点の影響が、種々の電気的特性に及ぼす影響を、数量的に調べようとするものである。すなわち直列コンデンサを送電線の任意の点に挿入した場合の、送電定数の近似式を作りこれより主として挿入箇所と、送受電両端の有効並びに無効電力、力率、電流、コンデンサ電流との関係を明らかにした。なおこの中の一部はすでに中間発表を行つた⁶ が、ここに第1報として包括的にまとめ数学的解析の進展、近似式を使用する数値計算結果の研討について詳細に説明した。

さらに同一容量の並列コンデンサを使用して進相力率改善に資する場合につき考察し、同様に設置点を変化する場合の電気的特性を研討し、これらを直列コンデンサの場合の結果と比較できる様にした。

II 送電定数の表現

本稿ではすべて送電定数を、Povejsil 氏等⁷ の提唱する特性インピーダンス負荷 (kVA)、変圧器高圧側電圧 (kV) を基準量とする単位法によつて表現した。この時は送電線の特性インピーダンス Z_0 が基準インピーダンスとなり、したがつて定数中 B 、 C は不名数となり取扱いが甚だ容易である。

$$\text{特性インピーダンス} = \frac{(kV)^2}{Z_0} \times 10^3 (kW)$$

すなわち送電線 1km 当りの直列インピーダンスを $r+jx$ (Ω)、並列リアクタンス (リーカンスは無視) を $-jx'$ (Ω)、全線長を l (km) とする時は特性インピーダンス Z_0 は

$$Z_0 = \sqrt{(r+jx)(-jx')} = \sqrt{xx'} \cdot \varepsilon^{\xi}$$

$$Z_0 = \sqrt{xx'} \quad (1)$$

$$\xi = -\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{r}{x} \quad (2)$$

であつて、この Z_0 を単位インピーダンスにとる時は送電定数は次のごとく表示される。

$$\left. \begin{aligned} A &= \cosh \left[L \sqrt{-1 + j \frac{r}{x}} \right] \\ B &= \sinh \left[L \sqrt{-1 + j \frac{r}{x}} \right] \cdot \varepsilon^{\xi} \\ C &= \sinh \left[L \sqrt{-1 + j \frac{r}{x}} \right] \cdot \varepsilon^{-\xi} \\ D &= A \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

5 A. A. Johnson, J. E. Barkle & D. J. Povejsil : E. E. 70, 526 (1951)

6 三浦五郎 : 直列コンデンサ挿入点の定態運転特性に及ぼす影響, 送電線直蓄専門委資料, 頁 219 (昭30年1月)

7 D. J. Povejsil & A. A. Johnson : E. E. 70, 194 (1951)

$$\text{ただし } L = l \sqrt{\frac{x}{x'}} \quad (\text{radian}) \quad (4)$$

Povejsil 氏は $\sqrt{\frac{x}{x'}}$ は一定値で、60~, 哩当り 2.06×10^{-3} であると発表した。いまこれを、50~, km当りに換算する時は

$$L = (2.06 \times 10^{-3})l \times \frac{50}{60} \times \frac{1}{1.609} = (1.067 \times 10^{-3})l \quad (5)$$

となる。

この L の意味を考えるに、(1), (4) 両式より明らかに

$$L = \frac{x_l}{Z_0}$$

の関係を満足するから、 L は送電線全長の直列インピーダンスを、単位法で表わしたものである。したがっていま直列コンデンサ x_0 (単位法) をおく場合の補償度 α は

$$\alpha = \frac{x_0}{L} \quad (6)$$

のごとく表わされる。なお $L=1.0$ に相当する線長は $l=940$ (km) のごとく算出されるから、一般につねに

$$L < 1.0 < \frac{\pi}{2}$$

の条件が成立する。

さて(2)~(5)各式から r と x とがわかれば、その場合の送電4定数の厳密値が求まるのであるが、その計算は若干煩雑な故、近似式を求めておくことと便利である。普通 r/x は0.2程度で多くても0.4を越えないから、 r/x の3次以上の冪は省略する。また ξ は負号で不便なため

$$\theta = -\xi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{r}{x} \quad (7)$$

を用いる。

$$\theta \doteq \frac{r}{2x} \quad \xi^j \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2} - j\theta$$

$$\cos \theta \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \xi^{-j} \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2} + j\theta$$

$$\sin \theta \doteq \theta$$

したがって

$$\sqrt{-1+j} \frac{r}{x} = \sqrt[4]{1+\left(\frac{r}{x}\right)^2} / \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{r}{x}$$

$$\begin{aligned} & \doteq (1+\theta^2)(\sin\theta+j\cos\theta) \\ & \doteq \theta+j\left(1+\frac{\theta^2}{2}\right) \end{aligned}$$

これらの近似を(3)式に代入する。なおその際既に述べたごとく、 $L < 1$ であり普通の高圧送電線においては $L \leq 0.5$ の場合 ($l \leq 470\text{km}$) が多いから、 θL については近似を θ より一段下げ 2 次以上の冪を省略する。

$$\sinh(\theta L) \doteq \theta L$$

$$\cosh(\theta L) \doteq 1$$

$$\theta^2 L^2 \doteq 0$$

また $\theta^2 L^2/2$ と云う項も多数出てくるが、これも $-\frac{\theta^2 L^2}{2} = \theta L \left(-\frac{\theta L}{2} \right)$ で、 $\theta^2 L^2$ と同様の取扱いをなし得る。

かくして計算を行えば、4 定数の近似は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \cos L + j\theta L \sin L = D \\ B &= \theta[L \cos L + \sin L] + j[\sin L - \theta^2 L \cos L] \\ C &= \theta[L \cos L - \sin L] + j[\sin L + \theta^2 L \cos L] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

この近似式の精度は $r/x \leq 0.4$ に対し誤差は 2% 以内に納まる。

さらに $r=0$ とする時は上式は極めて簡単となり

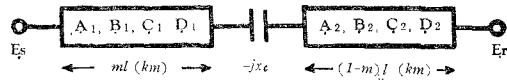
$$\left. \begin{aligned} A &= D = \cos L \\ B &= C = j \sin L \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。以下(9)式より送電線の中途にコンデンサをおいた場合について 4 定数を誘導してみる。

Ⅲ 直列または並列コンデンサを挿入する場合の定数

a). 直列コンデンサの場合

第1図に示すごとく送電線より ml (km) の位置 ($0 \leq m \leq 1$) に、 $-jx_c$ (単位法で表現) なる直列コンデンサを設置した場合について考える。



第1図 直列コンデンサ補償

補償点 m によつて区分された各線の送電定数を図の如くし、かつ $x_c=0$ 、すなわち無補償時の全長 l に対する定数を A, B, C, D とすれば、補償時の 4 定数は次のごとくなる。

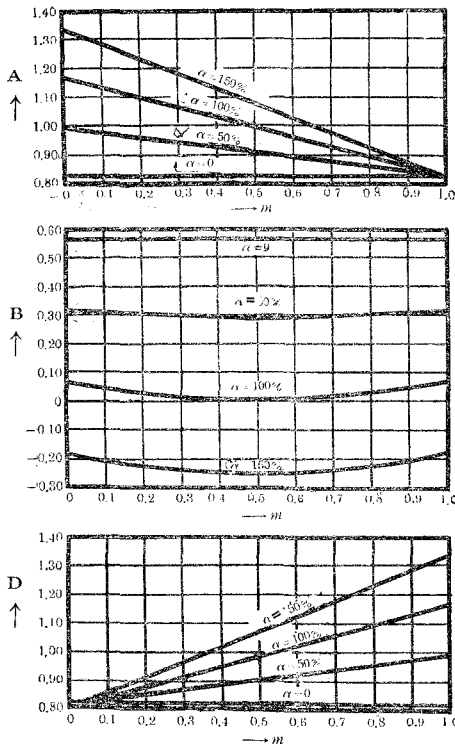
$$(4)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}' &= \dot{A} - jx_c \dot{A}_1 C_2 \\ \dot{B}' &= \dot{B} - jx_c \dot{A}_1 D_2 \\ \dot{C}' &= \dot{C} - jx_c \dot{C}_1 C_2 \\ \dot{D}' &= \dot{D} - jx_c \dot{C}_1 D_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

以下補償時定数の近似値を求めるため、上式に(9)式の関係を代入する。すなわち回路抵抗分を零と仮定する時は

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}' &= \cos L + \frac{x_c}{2} \left\{ \sin L - \sin(2m-1)L \right\} \\ \dot{B}' &= j \left[\sin L - \frac{x_c}{2} \left\{ \cos L + \cos(2m-1)L \right\} \right] \\ \dot{C}' &= j \left[\sin L + \frac{x_c}{2} \left\{ -\cos L + \cos(2m-1)L \right\} \right] \\ \dot{D}' &= \cos L + \frac{x_c}{2} \left\{ \sin L + \sin(2m-1)L \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

定数は補償点 m によつて相当に変化するが、いま一例として線長 563km の場合について、補償度 α をパラメーターとする各定数と m との関係調べれば、第2図のごとくなる。



第2図 $l=563\text{km}$ に相当する送電定数

一般的にいつて A は送電端において、 D は受電端において最高値を示し、また B 及び C は線路中央の補償によつて、それぞれ最少および最大値を示す。これより無負荷時及び短絡時の電圧、充電及び短絡電流の定性的性質が得られるが、これは末章においてのべる。

コンデンサを通る電流 I_c' 、送電端および受電端の電流は I_s' 、 I_r' 次のごとくなる。

$$I_c' = \frac{D_2 E_s - A_1 E_r}{B'} \quad (12)$$

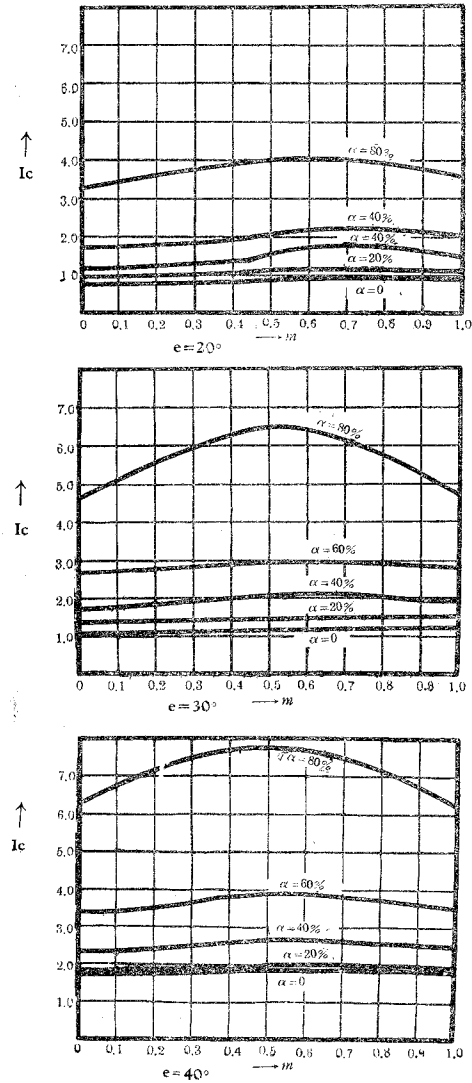
$$I_s' = \frac{D' E_s - E_r}{B'} \quad , \quad I_r' = \frac{E_s - A' E_r}{B'} \quad (13)$$

数値例として $l=450\text{km}$ の送電線について、 I_c' 、 I_s' 、 I_r' の値を第3, 4, 5の各図に示す。

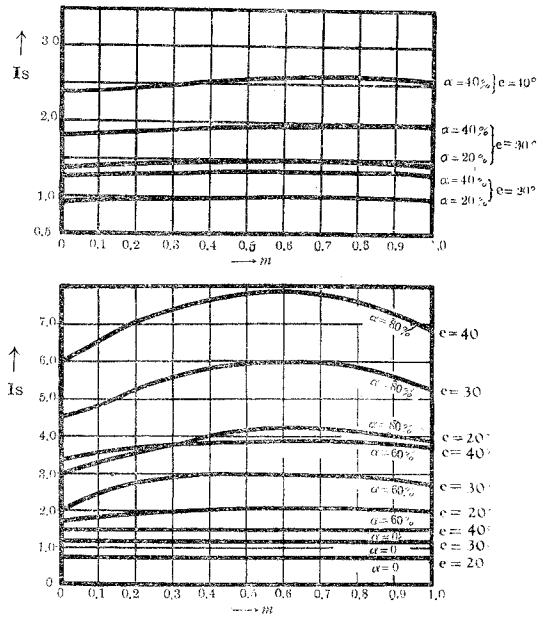
(12), (13) 両式より $B'=0$ であれば $I_c' = I_s' = I_r' = \infty$ となり、共振条件となる。これより共振を惹起する x_c は

$$x_c = \frac{2\sin L}{\cos L + \cos(2m-1)L} \quad (14)$$

である。



第3図 直列コンデンサ補償時コンデンサ電流



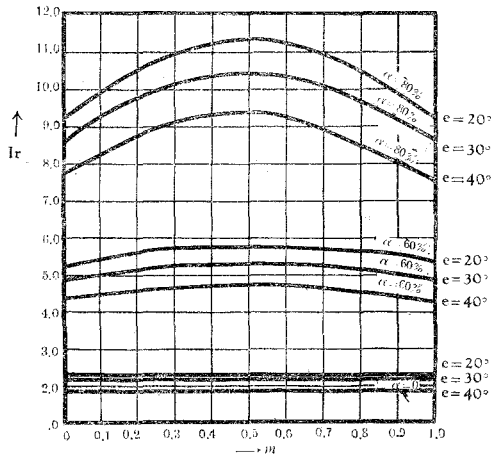
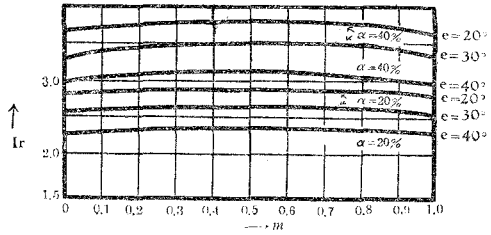
第4図 直列コンデンサ補償送電端電流

b). 並列コンデンサの場合

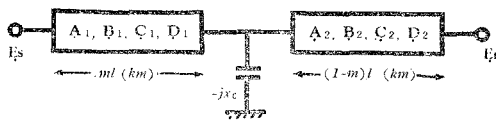
次に直列コンデンサのかわりに並列コンデンサを挿入する場合、同様に $r=0$ の仮定において、4定数 A'' , B'' , C'' , D'' およびコンデンサを流れる電流 I_c'' は、次のごとく算出される。この場合挿入点 m の変化を調べる目的で、低圧進相コンデンサを用いるための、遅降変圧器などの影響は無視するものとする。

$$\left. \begin{aligned} A'' &= \cos L - \frac{1}{2x_c} \left\{ \sin L + \sin(2m-1)L \right\} \\ B'' &= j \left[\sin L - \frac{1}{2x_c} \left\{ -\cos L + \cos(2m-1)L \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C'' &= j \left[\sin L + \frac{1}{2x_c} \{ \cos L + \cos(2m-1)L \} \right] \\ D'' &= \cos L - \frac{1}{2x_c} \{ \sin L - \sin(2m-1)L \} \end{aligned}$$



第5図 直列コンデンサ補償受電端電流



第6図 並列コンデンサ補償

IV コンデンサ挿入位置の力率に与える影響

a). 概説

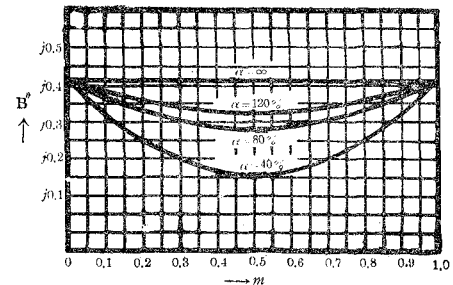
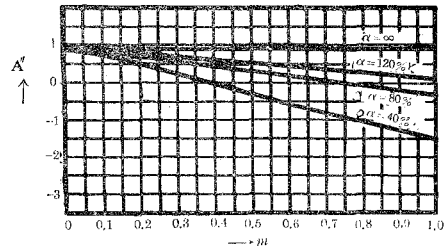
進相電力を正にとる時は、送受電各端における電力は

$$I_c'' = \frac{B_1 E_r + B_2 E_s}{-j x_c B''} \quad (16)$$

並列の場合も直列コンデンサと同形の曲線となるが、 x_c 従つて補償度は前と逆数の関係になる。共振条件の x_c は

$$x_c = \frac{\cos(2m-1)L - \cos L}{2 \sin L} \quad (17)$$

第7図は線長 400km に相当する場合の、定数 A'' , B'' について求めたものである。



第7図 $l=450\text{km}$ に相当する送電定数

$$\left. \begin{aligned}
 P_r &= -\frac{A}{B} E_r^2 \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{B} E_s E_r \cos(e - \beta) \\
 P_s &= \frac{D}{B} E_s^2 \cos(\delta - \beta) - \frac{1}{B} E_s E_r \cos(e + \beta) \\
 Q_r &= -\frac{A}{B} E_r^2 \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{B} E_s E_r \sin(e - \beta) \\
 Q_s &= \frac{D}{B} E_s^2 \sin(\delta - \beta) + \frac{1}{B} E_s E_r \sin(e + \beta)
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となる。ただし α, β, δ は A, B, D の微角で、 e は送受電端電圧間の位相角である。したがって各端の力率角 ϕ_s および ϕ_r は

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_s &= \tan^{-1} \frac{DE_s \sin(\delta - \beta) + E_r \sin(e + \beta)}{DE_s \cos(\delta - \beta) - E_r \cos(e + \beta)} \\
 \phi_r &= \tan^{-1} \frac{-AE_r \sin(\alpha - \beta) + E_s \sin(e - \beta)}{-AE_r \cos(\alpha - \beta) + E_s \cos(e - \beta)}
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ϕ_s, ϕ_r の状況を調べるには、近似的に抵抗 $r=0$ として充分で、この際の各電力、力率角は

$$\left. \begin{aligned}
 P_s &= P_r = -\frac{1}{B} E_s E_r \sin e \\
 Q_r &= \frac{E_r}{B} (AE_r - E_s \cos e) \\
 Q_s &= \frac{E_s}{B} (-DE_s + E_r \cos e)
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_s &= \tan^{-1} \frac{-DE_s + E_r \cos e}{E_r \sin e} \\
 \phi_r &= \tan^{-1} \frac{AE_r - E_s \cos e}{E_s \sin e}
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となり、 ϕ_s, ϕ_r が正か負かに従つて、送電端および受電端の力率が進みまたは遅れとなる。

b). 直列コンデンサを入れる場合

4定数に A', B', C', D' を用いる。

(i) 送電端力率

$$E_r \cos e \cong D' E_s = E_s \left[\cos L + \frac{x_c}{2} \left\{ \sin L + \sin(2m-1)L \right\} \right] \begin{cases} \text{進相} \\ \text{遅相} \end{cases} \quad (22)$$

例えばコンデンサを送電端に挿入すれば $m=0$ であるから

$$E_r \cos e \cong E_s \cos L$$

であり、受電端におけば $m=1$ で

$$E_r \cos \phi_r \cong E_s [\cos L + x_c \sin L]$$

また中央点に挿入する時は $m=0.5$ であるから

$$E_r \cos \phi_r \cong E_s [\cos L + 0.5 x_c \sin L]$$

(ii) 受電端力率

(21) 式より同様に $\phi_r \cong 0$ の条件は

$$A'E_r = E_r [\cos L + 0.5 x_c \{\sin L - \sin(2m-1)L\}] \cong E_s \cos \phi_s \begin{cases} \text{進相} \\ \text{遅相} \end{cases} \quad (23)$$

となる。したがって $m=0$, $m=1$ および $m=0.5$ の場合には, それぞれ

$$E_r [\cos L + x_c \sin L] \cong E_s \cos \phi_s$$

$$E_r \cos L \cong E_s \cos \phi_s$$

$$E_s [\cos L + 0.5 x_c \sin L] \cong E_s \cos \phi_s$$

のごとくなる。これより中央点設置の場合において, 送電端電力進相の時は, つねに受電端電力は遅相であるが, この逆はかならずしも成立しない。同様に受電端進相の時は, かならず送電端遅相であるが, この逆は何時も成立しない。但し $E_s \geq E_r$ の場合である。

(iii) 受電端力率 100% の条件

これは等号の成立する場合であるから

$$A'E_r = E_s \cos \phi_s$$

より力率を 1 ならしめるに必要な x_c の値は

$$x_c = \frac{2 \left\{ \frac{E_s}{E_r} \cos \phi_s - \cos L \right\}}{\sin L - \sin(2m-1)L} \quad (24)$$

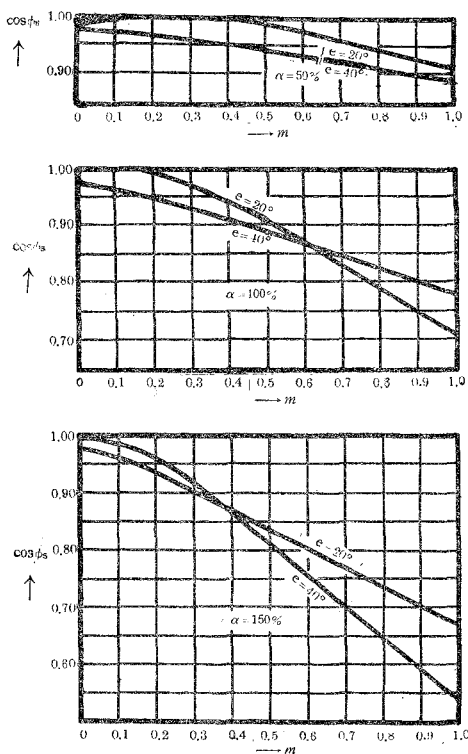
でこれより大きい値の x_c では進相となり, 小さい x_c では遅相となる。

第 8 ~ 11 図は, $l=563\text{km}$, $E_s=1.10$, $E_r=1.00$ に対する場合の送受電端力率 $\cos \phi_s$, $\cos \phi_r$ 及び無効電力 Q_s , Q_r を求めたものである。

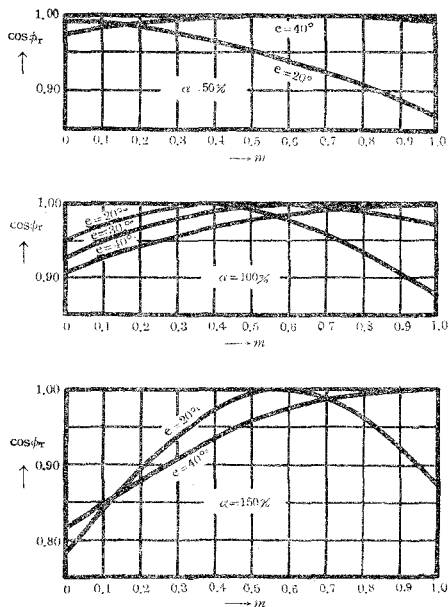
c). 並列コンデンサを入れる場合

(21) 式に 4 定数 A'' , B'' , C'' , D'' を用いるだけで, 他は前同様に扱う。即ち送電端力率は

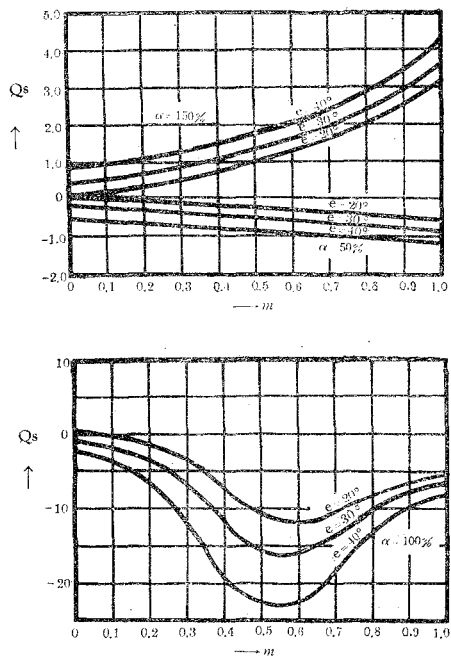
$$E_r \cos \phi_r \cong D'' E_s = E_s \left[\cos L - \frac{1}{2x_c} \{\sin L - \sin(2m-1)L\} \right] \begin{cases} \text{進相} \\ \text{遅相} \end{cases} \quad (25)$$



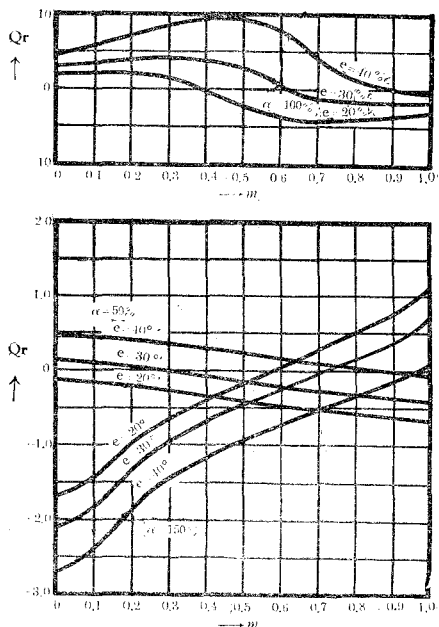
第 8 図 送電端力率の変化



第 9 図 受電端力率の変化



第 10 図 送電端無効電力の変化



第 11 図 受電端無効電力の変化

また受電端力率については

$$A''E_r = E_r \left[\cos L - \frac{1}{2x_c} \left\{ \sin L + \sin(2m-1)L \right\} \right] \cong E_s \cos \epsilon \begin{cases} \text{進相} \\ \text{遅相} \end{cases} \quad (26)$$

が成立する。なお $m=0.5$ の場合、直列コンデンサについていえたときと全く同様なことが成立する。また受電端力率が 100% の条件は

$$x_c = \frac{\sin L + \sin(2m-1)L}{2 \left\{ -\frac{E_s}{E_r} \cos \epsilon + \cos L \right\}} \quad (27)$$

であり、これより小さい値では遅相電力を与える。

V コンデンサの最大補償について

(20) 式より近似的に、抵抗分を省略した場合の有効輸送電力は、定数 B の大きさに反比例するから、 B 最小の時が最大補償になる。いま x_1 を一定にして挿入点 m を変化した場合の、 B 最小条件を求めると $\frac{\partial B}{\partial m} = 0$ より直列、並列何れの場合も $m=0.5$ であり、これより B_{\min} は次のごく算出される。(この時の x_c を特に x_c' または x_c'' と記す)

$$\left. \begin{array}{l} \text{直列コンデンサ} \quad B'_{\min} = \sin L - \frac{x_c'}{2} (1 + \cos L) \\ \text{並列コンデンサ} \quad B''_{\min} = \sin L - \frac{1}{2x_c''} (1 - \cos L) \end{array} \right\} \quad (28)$$

ただし直列の場合 $x_c' > \frac{2 \sin L}{1 + \cos L}$ の x_c' では、 B'_{\min} が負 (過補償) となるので $m=0.5$ は、リアクタンスの大きさから云えば最大点となることに注意を要する。

$m=0.5$ 以外のコンデンサ設置に対して、この最大補償時と等しい補償を行い、その輸送電力を同一とするにはそれぞれ

$$B' = B'_{\min}, \quad B'' = B''_{\min}$$

の関係を満足するコンデンサ容量を用いればよく、これを解けば

$$\left. \begin{array}{l} \text{直列コンデンサ} \quad x_c = \frac{\cos L + 1}{\cos L + \cos(2m-1)L} x_c' \\ \text{並列コンデンサ} \quad x_c = \frac{\cos(2m-1)L - \cos L}{1 - \cos L} x_c'' \end{array} \right\} \quad (29)$$

のごとくなる。これより直列では中央点でオーム当りの補償が最大、線路端でキャパシタンス当りの補償最大であるが、並列では中央点でオーム当りの補償が最小、即ちキャパシタンス当りの補償が最大であることがわかる。

次に B' と B'' について単にその大きさを比較することによつて、直列補償と並列補償の

特性を比べてみることにする。いま最大補償点 $m=0.5$ で、 $x_c'=x_c''=x_c$ のとき同一静電容量を有するコンデンサ x_c を施設したとすれば (28) 式より

$$B'\min - B''\min = \frac{1}{2x_c} \left\{ (1-x_c^2) - (1+x_c^2) \right\}$$

$$\text{故に } \frac{1-x_c^2}{1+x_c^2} \geq \cos L \text{ にしたがって } B'\min \geq B''\min$$

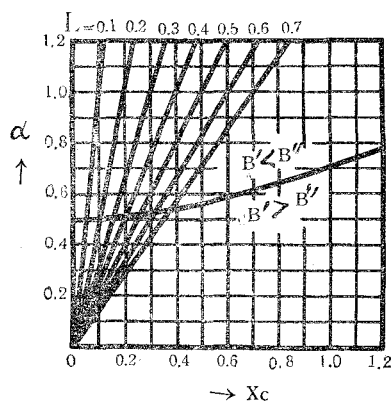
上に (6) 式の α を入れさらに普通 $L \leq 0.5$ として

$$\cos L \doteq 1 - 0.5L^2$$

の近似を行う時は

$$\alpha \geq 0.5\sqrt{1+x_c^2} \text{ にしたがって } B'\min \geq B''\min \quad (30)$$

のごとくなる。すなわち補償度がこれ以上でないと、同一キヤパシタンスのコンデンサでは直列の方が電力輸送が小となる。この関係を第12図に示してある。勿論これはコンデンサの静電容量、すなわちオーム数からのみ眺めたことであるから、耐圧 $x_c I_c$ 、電力容量 $x_c I_c^2$ 、価格、ひいては系統の安定度から全般的比較がされねばならない。



第12図 補償度と B との関係

VI 直列コンデンサ時の送電定数の解釈

いま無負荷時 ($I_r=0$) では、受電端電圧は A' に反比例し、送電端電流は C'/A' に比例する。受電端3相短絡時 ($E_r=0$) では送電端電流は D'/B' に、受電端故障電流は $1/B'$ にそれぞれ比例する。したがって (11) 式の送電4定数より容易に次のごとき定性的解釈を得る。

a). 直列コンデンサを送電端に挿入する場合 ($m=0$)

受電端無負荷時の受電端端子電圧および送電端無負荷 (充電) 電流は、他のいずれの位置 (任意の m) にコンデンサを入れる場合よりも最小である。受電端短絡時の、受電端および送電端電流は最小である。

b). 受電端挿入場合 ($m=1$)

無負荷時の受電端電圧および送電端電流は、最大で一定値である。一定というのはコンデンサ x_c の値に無関係である意をいう。受電端短絡時の受電端故障電流は最小 ($m=0$ の時と同一値) であり、また送電端電流はコンデンサによつて定まるある値となる。

c). 中央点設置の場合 ($m=0.5$)

受電端短絡時の受電端電流は最大値になる。(両端で同一最小値)

d). 受電端短絡時の送電端電流が最大となるごとき、コンデンサの挿入点は次のごとき値の m 点である。

$$m = 1 - \frac{1}{L} \tan^{-1} \frac{x_c}{2} \quad (31)$$

または近似的に

$$m \doteq 1 - 0.5\alpha^2 \quad (32)$$

e). 並列コンデンサについても、直列コンデンサにおいて示される上の諸項は、大体において悉く同一である。但し d) 項に相当する m 点は

$$m \doteq 1 - 2\alpha \quad (\text{ただし } 2x_c < L) \quad (33)$$

となる。

Ⅶ 結 言

以上述べたことにより明らかなごとく、直列コンデンサ補償送電線の定状的動作を、回路抵抗分を省畧することによつて純理論的に数学的取り扱いを試みたまでである。Johnson 氏等も述べているごとくこの抵抗分の影響は、實際上施行し得る α の限界、輸送電力の限度、および送電能率に重要な関係を有しているから、本稿はその意味から考えれば大体の定量的目安を与えたものであるといえる。勿論 (3) または (8) 式より厳密な4定数を計算して、以下同様に数値計算を行うことはできるから、個々の場合では正確な数値を得ることができる。この点については今後の研究に数多くまたねばならぬ処である。

また発変電所の凸極機械の影響を考慮する際は、解析は著しく複雑となつてくる。この場合筆者が発表した方法^{8,9}によつて、逐次数値計算を行うより方法がないが、この場合も本文のごとき簡潔な数式結果の応用より、その定性的意義を掴むことは比較的容易であろうと考えられる。

終りに当り本稿の数値計算の一部は大田紘君の勞に負うものであることを附記して、謝意を表す次第である。なお色々御批判下さつた北大小申教授ならびに本学電気工学科の諸教官に深謝する。

(昭和30年5月27日受付)

8 三浦五郎：長距離単一送電線に接続された凸極機動作の静止対称軸上における表示 (第1報) 支部連大 P. 264 (昭28—10月)

9 三浦五郎：同上 (第2報) 支部連大 P. 311 (昭29—10月)



Laplace 変換による

一変定数回路の解析

三浦五郎 山上孝

Analysis of a Variable Constant Electric Circuit by Laplacian Transformation

Goro Miura and Takashi Yamagami

Abstract

An electric circuit analyzed here is the one consisting of one resistance, one capacitance in series with one inductance of which constant varies in sinusoidal. Practically, the problem is seen in the behaviour of a single-phase synchronous alternator with salient-poles connected to series capacitors. Applying Laplacian Transformation and making allowable approximation, authors solved resulting currents, as in the following simple formula, which has been considered impossible or troublesome so far.

$$i(t) = \frac{-jE_1}{r + j\left\{\omega L' \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \alpha - \frac{1}{\omega C}\right\}} \sum_0^{\infty} (-b_1)^n \cos\{(2n+1)\omega t\}$$

I 緒 言

電気工学の交流回路において、抵抗とインダクタンス及びコンデンサが直列に接続された最も基本的な回路の種々な条件における過渡現象については、既にあまねく討議し尽されている。然しこれ等は何れも3者が一定の常数を持ついわゆる定集中定数回路であつて、これ等の中一つまたは二つが何等かの条件に従つて可変なる場合は、その一般的な数値解析法は甚だ難渋である。実際にはかような問題は多く見られるのであつて、例えばコイルの鉄芯部の磁気飽和を考慮する場合は、インダクタンスはBH曲線によつて変化するし、コンデンサの絶縁部分の誘電率を考慮する時は、ほぼ実験的に電荷の双曲線函数に従つて変化することが判つている。また直流発電機の過渡現象や交流同期発電機の運転特性を考慮する時は、回転子の凸極性に基つき、コイル・インダクタンスが正弦的函数によつて周期的に変化する。

本問題は同期機の凸極性を考慮した場合、いわゆるインダクタンスが同期速度の2倍の時間項によつて、正弦的に変化する場合の微分方程式の特解を求めたもので、電気工学的に云えば

単相交流発電機が、直列コンデンサを通じて永久短絡故障を起した場合の、定態時電流を求めることになる。解を単なる級数で表現することは容易であるが、適当な近似を行つてこれ等級数の、任意高調波における各振幅項の値を明確にし、その凸極性の影響を考察して、回路理論の見地に立つ解釈を下し得るものでなければならぬことは云う迄もない。

II 基礎微分方程式

$$ri + \frac{d}{dt}(L \cdot i) + \frac{1}{C} \int i dt = e \quad (1)$$

但し r は抵抗, C はコンデンサ静電容量であり, L は

$$L = L'(1 + 2\alpha \cos 2\omega t) \quad (2\alpha < 1) \quad (2)$$

また印加電圧 e は純正弦波起電力で

$$e = E_1 \sin \omega t \quad (3)$$

とする。従つて, (2), (3) 式を (1) 式に代入して

$$ri + \frac{d}{dt} \left\{ L'(1 + 2\alpha \cos 2\omega t) i \right\} + \int \frac{i}{C} dt = e \quad (4)$$

いま考察しようとする時間以前は電流が零であり, コンデンサ電荷も零であるとする時は

$$i(i \leq 0) = 0$$

$$q = \int i di (t \leq 0) = 0$$

(4) 式に Laplace 変換 (第1種) を施すのであるが

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}i(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon^{-pt} i(t) dt = I(p) \\ \mathfrak{L}e(t) = E(p) \\ \mathfrak{L} \frac{d}{dt} i(t) = p \mathfrak{L}i(t) - i(0) \\ \mathfrak{L} \int_0^t i(t) dt = \frac{1}{p} I(p) \end{array} \right.$$

となる。さて上の条件により, $t \leq 0$ に対しては

$$i(0) = 0$$

$$\int i dt = \left\{ \int_a^0 + \int_0^t \right\} i dt = \int_0^t i dt$$

であるから, これ等の変換式によつて

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{L} \frac{d}{dt} \{ L'(1+2\alpha \cos 2\omega t) i \} \\
 &= \mathfrak{L}' p \{ \mathfrak{L} i + \mathfrak{L} (2\alpha \cos 2\omega t \cdot i) \} \\
 &= L' p [I(p) + \alpha I(p+j2\omega) + \alpha I(p-j2\omega)] \\
 \\
 & \mathfrak{L} e = \mathfrak{L} E_1 \sin \omega t = \frac{\omega E_1}{p^2 + \omega^2} = E(p)
 \end{aligned}$$

従つて (4) 式は次の如き形式で表わされるのである。

$$\left\{ r + L'p + \frac{1}{Cp} \right\} I(p) + \alpha L'p I(p+j2\omega) + Conj = E(p) \quad (5)$$

但し *Conj* とはその直ぐ前項の共軛値を表わすことにする。

さて

$$r + L'p + \frac{1}{Cp} = Z(p) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
 K(p) &= \frac{\alpha L'p}{Z(p)} \\
 F(p) &= \frac{E(p)}{Z(p)}
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とすれば (5) 式は

$$I(p) + K(p) \{ I(p+j2\omega) + I(p-j2\omega) \} = F(p) \quad (8)$$

(8) 式は p に関する恒等式であるから、 p の代りに $p+j2n\omega$ ($n=-\infty \sim +\infty$) を代置してよい。かくする時は結局無限個の代数方程式が得られ、これは次の如き1個の無限マトリクス方程式を成立させる。

$$[y_n] = [a_{nm}] [x_m] \quad (9)$$

$$y_n = F(p+j2n\omega)$$

$$x_m = I(p+j2m\omega)$$

$[a_{nm}]$: 無限正方マトリクス

$$\left. \begin{aligned}
 a_{nm} &= 1 & m &= n \\
 a_{nm} &= K(p+j2n\omega) & m &= n+1 \text{ 及び } m = n-1 \\
 a_{nm} &= 0 & |m-n| &\geq 2
 \end{aligned} \right\}$$

(9) 式は次の如き形式を持つ。

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rightarrow m & & & & & & \\ & a_{-2-3} & a_{-2-2} & a_{-2-1} & & & \\ & & a_{-1-2} & a_{-1-1} & a_{-1-0} & & \\ & & & a_{0-1} & a_{0-0} & a_{0-1} & \\ & & & & a_{1-0} & a_{1-1} & a_{1-2} \\ & & & & & a_{2-1} & a_{2-2} & a_{2-3} \\ & & & & & & & \ddots \\ \downarrow & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$m=0$ とする時は Cramer の定理より (9) 式の解は

$$x_0 = I(p) = \frac{1}{|a_{nm}|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \times (a_{n0} \text{ の余因子})$$

$|a_{nm}|$ は $[a_{nm}]$ の行列式である。

一般に

$$\frac{1}{|a_{nm}|} (a_{n0} \text{ の余因子}) = A_n(p)$$

とおけば基礎方程式 (8) 式の解は

$$I(p) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(p) F(p+j2n\omega) \tag{10}$$

の如く無限級数を以て表示し得る。

III 解式の係数決定

問題は (10) 式の表現における係数 $A_n(p)$ を決定して、解析的解を得るにある。いま (10) 式を原式 (8) に代入する。即ち

$$I(p+j2\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(p+j2\omega) F(p+j2n+2\omega)$$

$$I(p-j2\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(p-j2\omega) F(p+j2n-2\omega)$$

であるから (10) 式に代入して

$$\begin{aligned}
 & \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(p) F(p+j2n\omega) + K(p) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(p+j2\omega) F(p+j2n+2\omega) \\
 & + K(p) \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(p-j2\omega) F(p+j2n-2\omega) = F(p)
 \end{aligned}$$

両辺の p 同次の項を比較する未定係数法により

$$n \neq 0 \quad A_n(p) + K(p)A_{n-1}(p+j2\omega) + K(p)A_{n+1}(p-j2\omega) = 0 \quad (11)$$

$$n = 0 \quad A_0(p) + K(p)A_{-1}(p+j2\omega) + K(p)A_1(p-j2\omega) = 1 \quad (12)$$

工学的見地よりみて $A_n(p)$ の級数は収斂するから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(p) = 0$$

従つて n が充分大きい処では (11) 式は

$$A_n(p) + K(p)A_{n-1}(p+j2\omega) \doteq 0 \quad (13)$$

が成立する。上式で p を $p-j2\omega$ とおけば

$$A_n(p-j2\omega) + K(p-j2\omega)A_{n-1}(p) = 0$$

(11) 式で n を $n-1$ におくと (n を一段下げた処)

$$A_{n-1}(p) + K(p)A_{n-2}(p+j2\omega) + K(p)A_n(p-j2\omega) = 0$$

以上2式より $A_n(p-j2\omega)$ を消去すると

$$\{1 - K(p)K(p-j2\omega)\}A_{n-1}(p) + K(p)A_{n-2}(p+j2\omega) = 0 \quad (14)$$

(13) 式が n の充分大きい処で成立するとすれば、 n を一段下げた $n-1$ 次数で (14) 式が同一形で誘導された。同様にしてこの次数を下げ、任意の n でこの形を求め得る。即ち (14) 式で p を $p-j2\omega$ とおき、(11) 式で n を $n-2$ とおいて両式より $A_{n-1}(p-j2\omega)$ を消去すると

$$\left\{1 - \frac{K(p)K(p-j2\omega)}{1 - K(p-j2\omega)K(p-j4\omega)}\right\}A_{n-2}(p) + K(p)A_{n-3}(p+j2\omega) = 0$$

上式で p を $p-j2\omega$ とおき、(11) 式で n を $n-3$ とおき両式より $A_{n-2}(p-j2\omega)$ を消去する。同様な方法を多数回繰返すことにより結局

$$Y_a(p)A_n(p) + K(p)A_{n-1}(p+j2\omega) = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Y_a(p) &= 1 - \frac{K(p)K(p-j2\omega)}{Y_a(p-j2\omega)} \\ &= - \frac{K(p)K(p-j2\omega)}{1 - \frac{K(p-j2\omega)K(p-j4\omega)}{1 - \dots}} \end{aligned} \quad (16)$$

以上は $n > 0$ に対してであるが、 $n < 0$ に対しても同様な方法による。即ち (11) 式はその儘 n を $-n$ と書き直し、 n の充分大きい処では $A_{-(n+1)} \doteq 0$ となるから

$$A_{-n}(p) + K(p)A_{-(n-1)}(p-j2\omega) \doteq 0$$

p を $p+j2\omega$ とおき、(11) 式で n を $n-1$ とおいて $A_{-n}(p+j2\omega)$ を消去する。以下同一方法を繰返せば $n < 0$ に対しては (15), (16) 式に対応して次式が得られる。

$$Y_a^*(p)A_{-n}(p) + K(p)A_{-n+1}(p-j2\omega) = 0 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_a^*(p) &= 1 - \frac{K(p)K(p+j2\omega)}{Y_a^*(p+j2\omega)} \\ &= 1 - \frac{K(p)K(p+j2\omega)}{1 - \frac{K(p+j2\omega)K(p+j4\omega)}{1 - \dots}} \\ &= Y_a \text{ の共軛値} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

さて (15) 式より

$$A_n(p) = -\frac{K(p)}{Y_a(p)} A_{n-1}(p+j2\omega)$$

である。\$n\$ を \$n-1\$, \$p\$ を \$p+j2\omega\$ に置換すれば

$$A_{n-1}(p+j2\omega) = -\frac{K(p+j2\omega)}{Y_a(p+j2\omega)} A_{n-2}(p+j4\omega)$$

同様に

$$A_{n-2}(p+j4\omega) = -\frac{K(p+j4\omega)}{Y_a(p+j4\omega)} A_{n-3}(p+j6\omega)$$

.....

従つて

$$\begin{aligned} A_n(p) &= (-1)^n \frac{K(p)}{Y_a(p)} \cdot \frac{K(p+j2\omega)}{Y_a(p+j2\omega)} \cdot \dots \cdot \frac{K(p+j2n-2\omega)}{Y_a(p+j2n-2\omega)} A_0(p+j2n\omega) \\ &= (-1)^n A_0(p+j2n\omega) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{K(p+j2\nu\omega)}{Y_a(p+j2\nu\omega)} \end{aligned} \quad (19)$$

同様にして \$n < 0\$ に対しては (17) 式より \$n\$ を \$n-1\$, \$p\$ を \$p-j2\omega\$ 等に置換して運算すれば

$$A_{-n}(p) = (-1)^n A_0(p-j2n\omega) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{K(p-j2\nu\omega)}{Y_a(p-j2\nu\omega)} \quad (20)$$

となる。(19), (20) 式中の \$A_0(p)\$ については次の如くして求められる。両式で \$n=1\$ とすると

$$A_1(p) = -A_0(p+j2\omega) \frac{K(p)}{Y_a(p)}$$

$$A_{-1}(p) = -A_0(p-j2\omega) \frac{K(p)}{Y_a^*(p)}$$

故に

$$A_1(p-j2\omega) = -A_0(p) \frac{K(p-j2\omega)}{Y_a(p-j2\omega)}$$

(20)

$$A_{-1}(p+j2\omega) = -A_0(p) \frac{K(p+j2\omega)}{Y_a^*(p+j2\omega)}$$

然るに (16), (18) 式より

$$Y_a(p) = 1 - \frac{K(p)K(p-j2\omega)}{Y_a(p-j2\omega)}$$

$$Y_a^*(p) = 1 - \frac{K(p)K(p+j2\omega)}{Y_a^*(p+j2\omega)}$$

であるから, これ等を (12) 式に代入して

$$A_0(p) = \frac{1}{Y_a(p) + Y_a^*(p) - 1} \quad (21)$$

の如くなる。

以上の数式により $A_n(p)$ はすべて求まった。問題は (6) 式・(7) 式等の実際の定数をこれ等に当て嵌めて $A_n(p)$ を求め、級数の形を決定することである。

IV 一般解法

(10) 式の電流解は Laplace 逆変換により求められる。即ち

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}I(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} e^{pt} I(p) dp$$

$$= \sum (e^{pt} I(p) \text{ の留数 })$$

$$I(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \text{ とすれば部分分数の公式より}$$

$$\frac{M(p)}{N(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{M(p)}{(p-p_k)N'(p_k)}$$

但し

$$N'(p_k) = \left[\frac{dN(p)}{dp} \right]_{p=p_k}$$

故に $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ で $I(p)$ は特異点を有する。 $p=p_k$ における $I(p)$ の留数は

$$C_k = \left[(p-p_k) I(p) \right]_{p=p_k} = \frac{M(p_k)}{N'(p_k)}$$

となる。故に

$$i(t) = \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{N'(p_k)} e^{p_k t} = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} \quad (22)$$

で表わされる。

上式より判る様に電流解は、無限個の指数函数項より成り立っている。実際の見地よりみて、

この変定数インダクタンスと抵抗及びコンデンサ直列回路の定態時電流は、無限個の奇数高調波より成り立つことが了承される。即ち(7)式の $F(p)$ における $E(p)$ は既に示した通り

$$E(p) = \mathcal{L}e = \frac{\omega E_1}{(p+j\omega)(p-j\omega)}$$

であるから、 $F(p \pm j2n\omega)$ ($n=0 \sim \infty$) によつて

$$F(p \pm j2n\omega) = \frac{1}{Z(p \pm j2n\omega)} \cdot \frac{\omega E_1}{(p \pm j2n+1\omega)(p \pm j2n-1\omega)}$$

となり $F(p \pm j2n\omega)$ の印加電圧によつて定態時には $p_k = \pm j2n+1\omega$ の特異点を有することが明らかである。故に(22)式は

$$i(t) = \mathcal{L} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{C_k}{p+j(2n+1)\omega} + \text{Conj} \right\} \tag{23}$$

の如く表現してもよい。

V 定態時電流式

前章で述べた如く $F(p+j2n\omega)$ は、明らかに $p_k = -j2n+1\omega$ の特異点を有するが、同特異点はまた $F(p+j2n+2\omega)$ によつても明らかに発生する。従つて留数 C_k は

$$C_k = \left\{ [p+j(2n+1)\omega] [A_n(p)F(p+j2n\omega) + A_{n+1}(p)F(p+j2n+2\omega)] \right\}_{p=-j(2n+1)\omega} \dots\dots\dots(24)$$

(19) 式により $A_n(p)$ 及び $A_{n+1}(p)$ を求めれば

$$A_n(p)_{p=-j(2n+1)\omega} = (-1)^n A_0(-j\omega) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{K[j(2\nu-2n+1)\omega]}{Y_a[j(2\nu-2n+1)\omega]} \tag{25}$$

$$A_{n+1}(p)_{p=-j(2n+1)\omega} = (-1)^{n+1} A_0(j\omega) \prod_{\nu=0}^n \frac{K[j(2\nu-2n+1)\omega]}{Y_a[j(2\nu-2n+1)\omega]} \tag{26}$$

さてここで特定の p 値に対応する $K(p)$, $Y_a(p)$ 等の、近似値を求めねばならない。これは既に連分数の形になつている $Y_a(p)$ 導入による、数式の複雑化を避けるためである。(6), (7) 式より

$$\left. \begin{aligned} K(p) &= \frac{p^2 \alpha CL'}{1+rCp+CL'p^2} = \frac{p^2 \alpha}{(p-x)(p-y)} \\ \left. \begin{aligned} x &= -\frac{r}{2L'} \pm j\omega' \\ y &= -\frac{r}{2L'} \pm j\omega' \end{aligned} \right\} \\ \omega' &= \sqrt{\frac{1}{CL'} - \left(\frac{r}{2L'}\right)^2} \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

となる。上式で r は微小であるし、また不足補償であれば恒に

$$\frac{1}{\omega C} \leq \omega L' \quad \therefore \frac{1}{\omega^2 CL'} \leq 1$$

が成立するから (27) 式は $p \geq |\pm 2j|$ に対しては

$$K(p) = \alpha \quad (28)$$

と近似することができる。この際 $\omega L'$ は恒に $1/\omega C$ より小さいと云う条件が必要で、そうでない時は第 2, 第 3 高調波等で共振現象を惹起することになり, (28) 式の近似は成立しない。この条件は普通行われている同期機を含む送電線のコンデンサ補償においては, 実際的に成立することである。

さてこの時は

$$Y_a(p) \underset{p \leq -2j\omega}{=} Y_a^*(p) \underset{p \geq 2j\omega}{=} 1 - \frac{\alpha^2}{1 - \dots} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}}{2} \quad (29)$$

(2\alpha < 1)

従つて (25), (23) 式の Π 値は

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{K(j(2\nu-2n+1)\omega)}{Y_a(j(2\nu-2n+1)\omega)} \\ = \underbrace{\frac{K(j(-2n+1)\omega)}{Y_a(j(-2n+1)\omega)} \dots \frac{K(-j3\omega)}{Y_a(-j3\omega)}}_{n \text{ 個}} \\ = \left[\frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}} \right]^n = b_1^n \quad (30) \end{aligned}$$

但し

$$b_1 = \frac{2\alpha}{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^2}} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=0}^n \frac{K(j(2\nu-2n+1)\omega)}{Y_a(j(2\nu-2n+1)\omega)} \\ = \underbrace{\frac{K(j(-2n+1)\omega)}{Y_a(j(-2n+1)\omega)} \dots \frac{K(-j3\omega)}{Y_a(-j3\omega)} \cdot \frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)}}_{n+1 \text{ 個}} \\ = b_1^n \frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)} \quad (32) \end{aligned}$$

$p \neq \pm 2j\omega$ に対しては上式の如き近似ができないので次の様に求める。先ず (27) 式より

$$K(p) = \frac{p^2 \alpha}{\left(p + \frac{r}{2L'} + j\omega'\right) \left(p + \frac{r}{2L'} - j\omega'\right)}$$

故に

$$(23)$$

$$\left. \begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{-\alpha}{\left\{ \frac{r}{2\omega L'} + j\left(1 + \frac{\omega'}{\omega}\right) \right\} \left\{ \frac{r}{2\omega L'} + j\left(1 - \frac{\omega'}{\omega}\right) \right\}} \\ K(-j\omega) &= [K(j\omega)]^* \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$K(j\omega)K(-j\omega) = \frac{\alpha^2}{\left\{ \left(1 + \frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{r}{2\omega L'}\right)^2 \right\} \left\{ \left(1 - \frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{r}{2\omega L'}\right)^2 \right\}}$$

(16), (30) 式より

$$Y_a(j\omega) = 1 - \frac{K(j\omega)K(-j\omega)}{1 - b_1 K(-j\omega)}$$

に上記の式を代入して

$$\left. \begin{aligned} Y_a(j\omega) &= 1 - \frac{\alpha^2}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega} + \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} + \frac{r}{j2\omega L'}\right)} \cdot \\ &\quad \frac{1}{\left\{ \left(1 + \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) - b_1 \alpha \right\}} \\ Y_a^*(-j\omega) &= [Y_a(j\omega)]^* \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

次に同様にして

$$\left. \begin{aligned} Y_a(-j\omega) &= 1 - b_1 K(-j\omega) \\ &= 1 - \frac{b_1 \alpha}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right)} \\ Y_a^*(j\omega) &= [Y_a(-j\omega)]^* \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

以上より (21) 式の $A_0(j\omega)$, $A_0(-j\omega)$ は次の如く計算される。

$$\left. \begin{aligned} A_0(j\omega) &= \frac{1}{Y_a(j\omega) + Y_a^*(j\omega) - 1} \\ &= \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\omega'}{\omega} + \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} + \frac{r}{j2\omega L'}\right) \cdot \\ &\quad \left\{ \left(1 + \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) - b_1 \alpha \right\} \\ R &= \left\{ \left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - b_1 \alpha \right\} \cdot \\ &\quad \left\{ \left(1 - \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - b_1 \alpha \right\} - \alpha^2 \\ A_0(-j\omega) &= [A_0(j\omega)]^* \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

また (32) 式の末尾に表われる $\frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)}$ についても (33), (35) 両式より

$$(24)$$

$$\frac{K(-j\omega)}{Y_a(-j\omega)} = \frac{\alpha}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) - b_1 \alpha} \quad (38)$$

となる。以上より (25), (26) 式に (30), (32), (36), (37) 及び (38) の各式を代入して, $A_n(p)$, $A_{n+1}(p)$ の $p = -j(2n+1)\omega$ における値を計算することができる。

次に留数 C_k の $A_n(p)$ 以外の部分について計算を施す。

$$\begin{aligned} & \left\{ [p + j(2n+1)\omega] F(p + j2n\omega) \right\}_{p = -j(2n+1)\omega} \\ &= -\frac{E_1}{2\omega L'} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} - \frac{r}{j2\omega L'}\right)} \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [p + j(2n+1)\omega] F(p + j2n+2\omega) \right\}_{p = -j(2n+1)\omega} \\ &= -\frac{E_1}{2\omega L'} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega'}{\omega} + \frac{r}{j2\omega L'}\right) \left(1 - \frac{\omega'}{\omega} + \frac{r}{j2\omega L'}\right)} \quad (40) \end{aligned}$$

よつてこれ等の悉くを (24) 式に代入し, 留数 C_k の値は次の如くなるのである。

$$C_k = -\frac{E_1}{2\omega L'} (-b_1)^n \frac{1}{R} \left\{ \left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - (1 + b_1)\alpha \right\} \quad (41)$$

R は (36) 式で示される様な実数値である。

さて (41) 式の儘でよいのであるが, この振幅項は甚だ複雑で, 工学的解釈が難渋である。

それで許し得る仮定として, 更に (36) 式の R について最初の第 1 項の $\left\{ \right\}$ 内の

$\left(1 - \frac{r}{j2\omega L'}\right)$ を, $\left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)$ と近似する。実際問題として $-\frac{r}{j2\omega L'}$ は 1 に比し negligible small であり, この近似は充分妥当である。かくする時は

$$\begin{aligned} R &= \left\{ \left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - b_1 \alpha \right\} - \alpha^2 \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + (1 + b_1)\alpha \right\} \cdot \\ & \quad \left\{ \left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - (1 - b_1)\alpha \right\} \end{aligned}$$

となり (41) 式は

$$C_k = -\frac{E_1}{2\omega L'} (-b_1)^n \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{j2\omega L'}\right)^2 - \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + (1 - b_1)\alpha}$$

然して (27) 式より

$$\omega'^2 = \frac{1}{CL'} - \left(\frac{r}{2L'}\right)^2$$

であるから結局

$$C_k = -\frac{E_1}{2}(-b_1)^n \frac{j}{r+j\left[\omega L' - \frac{1}{\omega C} + \omega L'(1-b_1)\alpha\right]} \quad (42)$$

よつて電流解は, (22) または (23) 式により

$$\begin{aligned} i(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \varepsilon^{b_k t} = \sum_0^{\infty} \left\{ C_k \varepsilon^{b_k t} + C_{0n} j \right\} \\ &= -E_1 \frac{j}{r+j\left\{\omega L' \left(1 + \frac{1}{b_1}\right)\alpha - \frac{1}{\omega C}\right\}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-b_1)^n \cos\{(2n+1)t\} \quad (43) \end{aligned}$$

の如く求まつたことになる。

VI 結果の研 討 と 結 言

ここで甚だ興味深い結果は, 實際上許し得る近似をもつて各振幅項が極めて簡単な結果で導き得られたことで, かつその可変定数インダクタンスは (30) 式より計算される如く

$$\omega L' \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \alpha = \frac{\omega L'}{2} \left\{1 + 2\alpha + \sqrt{1 - 4\alpha^2}\right\}$$

の如き特殊な値を有することが判明したのである。 $\alpha=0$ とおけば, 勿論定インダクタンス回路で $\omega L'$ となる。 $\alpha=0.5$ とおけば, このインダクタンスは 0 と $2\omega L'$ の間を正弦函数的に変化する変定数で, この場合結果のインダクタンスはやはり $\omega L'$ となる。

また収斂級数は b_1 によつて変化し, $\alpha=0$ では $b_1=0$ で高調波 ($n \geq 2$) は発生しないし, $\alpha=0.5$ では $b_1=1$ で永久に減衰しない, それぞれ相等しい振幅項を有する無限の高調波を含有する。 $\alpha=0 \sim 0.5$ の間ではにこの中間の現象となる。

これ等高調波のため, 電流波形は非常に尖鋭となつてくることが判る。因みにその尖頭値を求めてみれば, (43) 式で $\omega t = \pi$ においては

$$i(t)_p = \frac{E_1}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L'^2 \left\{\left(1 + \frac{1}{b_1}\right)\alpha - \frac{1}{\omega C}\right\}^2}} \cdot \frac{1}{1+b_1}$$

となり基本波のそれより小となるが, 若し印加電圧が $E_1 \sin \omega t$ でなく, $E_1 \cos \omega t$ の時は $\frac{1}{1-b_1}$ の如くなつてくることが容易に察される。

またコンデンサ両端の電圧は

$$v_c = \int \frac{i(t)}{\omega C} dt$$

より求まり, 上記と全く同様な解釈を下し得る。

以上述べることにより不足補償（コンデンサ・リアクタンスがインダクタンス・リアクタンスより小）の場合は、充分な正確さを以て、従来困難視されていたこの問題を解き得たのである。然し過補償となると、任意の高調波次数により

$$n\omega = \frac{1}{\sqrt{CL' \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \alpha}}$$

の如き共振現象が起るため、本式は不成立であるが、この場合はその特定次数に対する不足補償範囲内で、以上と同様な式を樹立すればよい。然しその一般的表示は相当複雑なものとなるであろう。本問題は若し実際の同期発電機の如く、2次的回路要素の制動捲線や回転子捲線を有する場合、また短絡瞬時の過渡現象を扱う場合の、直列コンデンサの解法^{1, 2} に対し種々の示唆を与えるであろうと信ずる。

終りに当り種々の御鞭撻を頂いた本学電気工学科の諸教官に深謝する。

（昭和30年5月27日受付）

1 三浦：電学誌 73, 1345 (1952)

2 三浦：電学誌 74, 940 (1953)

Heaviside 演算子の変定数回路に対する応用

山 上 孝 三 浦 五 郎 伊 達 隆 三

An Application of Heaviside Operators to Variable-constant Circuit Problem

Takashi Yamagami, Goro Miura and Ryuzo Date

Abstract

The paper treats a differential equation of a L, C series circuit of which L makes periodical variation with time. This equation has the following form.

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} (1+y) + C \right\} i = e \cos(t+\varphi)$$
$$y = z \cos 2(t+\varphi), \quad |y| < 1$$

Making Maclaurin Expansion in the neighbor of $y=0$ by the partial differentiation, and applying Heaviside's Expansion Theorem to each term, a strict solution of the equation can be obtained as in the following formula.

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left(\frac{\partial^n i}{\partial y^n} \right)_{y=0} \cos^2(t+\varphi)$$

The procedure for getting evaluation of $\left(\frac{\partial^n i}{\partial y^n} \right)_{y=0}$ is discussed in detail.

I 緒 言

電気回路の解析にあたり、吾々は多くの定係数微分方程式に遭遇するが、実際にはそうでない場合も少くない。例えば回路が週期的に変化するもの、あるいは非線型のものなどはこれに属し、これ等の多くは Hill の微分方程式¹ に帰着せしめられるのである。本報は週期的変化の回路要素を有する一変定数回路の解析に資せんとするべく、凸極同期機が無負荷の長距離送電線に接続される場合に、惹起された不平衡故障の際に現われる微分方程式の、厳密解を取り扱ったものである。

この場合一般に数値計算を除いては厳密な解析的解は出し得ないのである。平衡故障を起した場合のこの問題については、すでに筆者の一人が幾多にわたり発表した。しかし不平衡故障の場合は本報告別頁にある如く、ある特定の近似のもとで Laplace 変換を行つた近似解を求

1 E. T. Whittaker & G. N. Watson : A Course of Modern Analysis, P. 406

める方法以外には、本報告を除いては数学的取り扱いはず不可能ではないかと考える。工学的見地より眺めて、結果が解析解であることはもちろんのことであり、実際の計算を行う場合を考え級数で表現した方が好都合である。

すなわち抵抗が r 、インダクティブ・リアクタンスが $A+B\cos 2(t+\varphi)$ 、キャシティブ・リアクタンスが x_c のごとき直列共振回路に、正弦波交番電圧 $e_0 \sin(t+\varphi)$ を印加した場合の、一般解は普通は求めることができない。(単位法を採用して $\omega=1$ とおく) キャパシタンスが無い場合は近似的に解は求まる。^{2,3} キャパシタンスがある場合でも、その particular solution については二階の常微分方程式である故、無限級数の形として導出されることは明らかである。これについてはすでに別頁に発表した。⁴

しかるに筆者等はまず抵抗 r が零の、いわゆる非減衰共振回路の場合について、Heaviside 演算子法を巧みに応用することによつて、この一般解を一挙に導くことができた。ここに報告するのはその結果である。抵抗をも考慮した場合の式は一層複雑するため、いまだ結果を得て居らず検討中であるが、多分この場合も同一の演算により解き得るものと思惟する。

得た結果はただし、相当に複雑であつてこれより簡単な物理的解釈を得ることは到底困難である。しかしかような解析が未着手のまま今日まで放置されていたことより鑑み、一般解導出にともあれ光明を見たことは、今後の研究に資する処ありと考察し発表した次第である。

II 変定数微分方程式の取り扱い

既述のごとく変定数インダクタンスとキャパシタンスならびに抵抗の直列回路について

$$ri + \frac{d}{dt}(A+B\cos 2\theta)i + \int x_c i dt = e_0 \sin \theta \quad (1)$$

$$\theta = t + \varphi$$

のごとき微分方程式が成立する。両辺を一度 t で微分してさらに

$$\frac{B}{A} = z, \quad \frac{r}{A} = R, \quad \frac{x_c}{A} = c, \quad \frac{e_0}{A} = e \quad (2)$$

のごとくおく。 z はインダクタンス不変化分に対する変化分振幅の割合を表わすもので、電気回路においてはこの値は 1 より小さい。

$$|z| < 1 \quad (3)$$

$\frac{d}{dt} = p$ のごとく書き表わせば (1) 式は

2 三浦五郎：25回連大 5—27 (昭26年5月)

3 三浦五郎，秋山稠：東京支部連大 5—20 (昭26年11月)

4 三浦五郎，山上孝：Laplace 変換による一変定数回路の解析，本研究報告 2, P. 15 (1955)

$$\{p^2(1+z\cos 2\theta)+pR+c\}i = e\cos\theta \quad (4)$$

となる。また $R=0$ とする時は

$$\{p^2(1+z\cos 2\theta)+c\}i = e\cos\theta \quad (5)$$

である。(4) または (5) 式を普通の形に表わすには p^2 などを小括弧の右に持ち来らせばよく

$$p^2 z\cos 2\theta = z\cos 2\theta \cdot p^2 - 4z\sin 2\theta \cdot p - 4z\cos 2\theta$$

となることに注意して書き表せば、(4) 式は

$$[(1+z\cos 2\theta)p^2 + (R-4z\sin 2\theta)p + (c-4z\cos 2\theta)]i = e\cos\theta$$

すなわち

$$\left\{p^2 + \frac{R-4z\sin 2\theta}{1+z\cos 2\theta}p + \frac{c-4z\cos 2\theta}{1+z\cos 2\theta}\right\}i = \frac{e\cos\theta}{1+z\cos 2\theta} \quad (6)$$

となる。各係数は θ についてそれぞれ次のごとく Fourier 級数に展開できる。⁵

$$\frac{1}{1+z\cos 2\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu b^\nu \cos 2\nu\theta \right]$$

$$\frac{\sin 2\theta}{1+z\cos 2\theta} = \frac{2}{1+\sqrt{1-z^2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} b^{\nu-1} \sin 2\nu\theta$$

$$\frac{\cos 2\theta}{1+z\cos 2\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-z^2}(1+\sqrt{1-z^2})} \left[-\frac{z}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} b^{\nu-1} \cos 2\nu\theta \right]$$

$$b = \frac{\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z}}{\sqrt{1+z} + \sqrt{1-z}}$$

(3) 式より $|z| < 1$ である。

(6) 式より明らかなごとくもし $R=4z\sin 2\theta$ という条件が仮りにあれば、該式は Hill の微分方程式

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\theta_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu \cos 2\nu t \right) x = 0$$

の $\theta_0=0$ の場合に相当する。即ち (6) 式は Hill の微分方程式の一般的な形となつている。

さてこの様に複雑な恰好にしたのでは到底解けないから、(6) 式ではなく (5) 式をその儘解こうとするのである。すなわちいま

$$y = z\cos 2\theta \quad (7)$$

とおいて (5) 式を

5 Bromwich: An Introduction to Theory of Infinite Series, P. 186

$$\{p^2(1+y)+c\}i = e\cos\theta \quad (8)$$

とする。もちろん y は t の関数であつて $p^2y \neq yp^2$ なることは明らかである。

(3) 式より判る通り $|y| < 1$ であり、上式を y で偏微分した場合の導函数は一価連続であることより、(8) 式の i を $y=0$ の近傍において Maclaurin 展開ができるはずである。

$$i = i_0 + \frac{i_0'}{1!}y + \frac{i_0''}{2!}y^2 + \frac{i_0'''}{3!}y^3 + \dots \dots \dots \infty \quad (9)$$

ただし i_0 は (8) 式で、 $y=0$ とおいて求めた電流演算子解であり

$$(p^2+c)i_0 = e\cos\theta$$

$$i_0 = \frac{e}{p^2+c} \cos\theta$$

i_0' は (8) 式を y で偏微分した結果に $y=0$ とおいて、得られた i に上の i_0 を代入し演算子解を行つたもので

$$p^2i + \{p^2(1+y)+c\} \frac{\partial i}{\partial y} = 0$$

$$p^2i_0 + (p^2+c)i_0' = 0$$

$$i_0' = \left(\frac{\partial i}{\partial y} \right)_{y=0} = - \frac{p^2}{p^2+c} i_0 = - \frac{(-1)1!p^2}{(p^2+c)^2} e\cos\theta$$

i_0'' は同様 y で 2 度偏微分した結果に、 $y=0$ および i_0' を代入して求まり

$$p^2 \frac{\partial i}{\partial y} + p^2 \frac{\partial i}{\partial y} + \{p^2(1+y)+c\} \frac{\partial^2 i}{\partial y^2} = 0$$

$$2p^2i_0' + (p^2+c)i_0'' = 0$$

$$i_0'' = \left(\frac{\partial^2 i}{\partial y^2} \right)_{y=0} = - \frac{2p^2}{p^2+c} i_0' = - \frac{(-1)^2 2! p^4}{(p^2+c)^3} e\cos\theta$$

同様に

$$i_0''' = \left(\frac{\partial^3 i}{\partial y^3} \right)_{y=0} = - \frac{(-1)^3 3! p^6}{(p^2+c)^4} e\cos\theta$$

一般に

$$i_0^{(n)} = \left(\frac{\partial^n i}{\partial y^n} \right)_{y=0} = - \frac{(-1)^n n! p^{2n}}{(p^2+c)^{n+1}} e\cos\theta \quad (10)$$

である。

(10) 式の一般解を得れば、その集合である (9) 式が表現され解が得られる訳である。以下 (10) 式の演算解を導出せんとするが、見る通りかなり複雑な過程であり到底簡潔な結果ではないが、ともあれ変定数インダクタンス回路の非減衰共振回路の過渡電流はかくも複雑となるのである。初期条件は $i=0$ にて電流及び電荷が無いすなわち $i=0$, $q = \frac{di}{dt} = 0$ である

が、これは Heaviside 演算子の解中に自動的に含まれるため、何等の考慮の必要はない。

III 変定数回路の演算子解

(10) 式の演算子解は次の様にして解き得る。

$$\theta = t + \varphi$$

$$c = \lambda^2$$

とおけば

$$\begin{aligned} i_0^{(n)} &= \frac{(-1)^n n! p^{2n}}{(p^2 + \lambda^2)^{n+1}} \cdot e^{-\frac{p^2 \cos \varphi - p \sin \varphi}{p^2 + 1} t} \\ &= \frac{(-1)^n n! e(p^{2n+2} \cos \varphi - p^{2n+1} \sin \varphi)}{(p+j\lambda)^{n+1} (p-j\lambda)^{n+1} (p+j)(p-j)} \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式は λ 及び $-j\lambda$ のそれぞれ $n+1$ 重根と j および $-j$ の単根を有している。さて2種の重根を有する場合の展開定理は公式集より次のごとく与えられる。⁶

$$\begin{aligned} \frac{M(p)}{N(p)} &= \frac{M(p)}{(p-p_1)^r (p-p_2)^s N_1(p)} \\ &= \frac{1}{(-p_1)^r (-p_2)^s} \cdot \frac{M(0)}{N_1(0)} + \sum_{n=3}^m \frac{1}{(p_n-p_1)^r (p_n-p_2)^s} \cdot \frac{M(p_n)}{p_n N_1'(p_n)} \varepsilon^{p_n t} \\ &\quad + \frac{1}{(r-1)!} \left[\frac{\partial^{r-1}}{\partial p^{r-1}} \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(p-p_2)^s} \cdot \frac{M(p)}{N_1(p)} \varepsilon^{pt} \right\} \right]_{p=p_1} \\ &\quad + \frac{1}{(s-1)!} \left[\frac{\partial^{s-1}}{\partial p^{s-1}} \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(p-p_1)^r} \cdot \frac{M(p)}{N_1(p)} \varepsilon^{pt} \right\} \right]_{p=p_2} \end{aligned} \quad (12)$$

ただし p_n ($n=3, 4, \dots, m$) は $N_1(p)=0$ の根。

(12) 式によつて (11) 式を展開すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} M(p) = (-1)^n n! e(p^{2n+2} \cos \varphi - p^{2n+1} \sin \varphi) \\ M(0) = 0 \\ M(j) = -n! e^j \varepsilon^{j\varphi} \\ M(-j) = [M(j)]^* \\ N_1(p) = p^2 + 1 \\ N_1'(j) = 2j, \quad N_1'(-j) = -2j \end{array} \right.$$

を用いて次のごとくなる。

$$\begin{aligned} i_0^{(n)} &= \frac{(-1)^{n+1} n! e}{(1-\lambda^2)^{n+1}} \cdot \frac{\varepsilon^{j\varphi} \varepsilon^{jt}}{2} + \text{Conj} \\ &\quad + (-1)^n e \left[\frac{\partial^n}{\partial p^n} \left\{ \frac{p^{2n+2} \cos \varphi - p^{2n+1} \sin \varphi}{(p+j\lambda)^{n+1}} \cdot \frac{\varepsilon^{pt}}{(p+j)(p-j)} \right\} \right]_{p=j\lambda} + \text{Conj} \end{aligned}$$

6 電気工学ハンドブック, P.186

ただし $M(p)^*$ は $M(p)$ の共軛値を表わし, $Conj$ とはその直前の項の共軛値を表わすことにする。

さて Leibnitz の定理より函数の積の高次導函数は

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^n {}_n C_r u^{(r)} v^{(n-r)} \tag{13}$$

であるから, これを用いて $i_0^{(n)}$ の p に関する n 次導函数 $\frac{\partial^n}{\partial p^n} [\quad]$ を展開する。

$$\begin{aligned} i_0^{(n)} &= \frac{n!e}{(\lambda^2-1)^{n+1}} \cos(t+\varphi) \\ &+ (-1)^n e \left[\sum_{q=0}^n {}_n C_q \left\{ \frac{p^{2n+1} \cos \varphi - p^{2n} \sin \varphi}{(p+j\lambda)^{n+1} (p+j)(p-j)} \right\}^{(q)} \cdot (\varepsilon^{pt})^{(n-q)} \right]_{p=j\lambda} + Conj \\ &\dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここで

$$(\varepsilon^{pt})^{(n-q)} = \frac{\partial^{n-q}}{\partial p^{n-q}} \varepsilon^{pt} = t^{n-q} \varepsilon^{pt}$$

であり, 一方中括弧の内部の q 次導函数 (仮にこれを F としよう) については, 前同様 (13) 式の応用により分離する。一般に

$$\frac{d^r x^n}{dx^r} = {}_n P_r x^{n-r} \quad (x > 0)$$

であるから

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \frac{p^{2n+1} \cos \varphi - p^{2n} \sin \varphi}{(p+j\lambda)^{n+1} (p+j)(p-j)} \right\}^{(q)} \\ &= \sum_{r=0}^q {}_q C_r \left\{ p^{2n+1} \cos \varphi - p^{2n} \sin \varphi \right\}^{(q-r)} \left\{ \frac{1}{(p+j\lambda)^{n+1} (p+j)(p-j)} \right\}^{(r)} \\ &= \sum_{r=0}^q {}_q C_r \left\{ {}_{2n+1} P_{q-r} p^{2n-q+r+1} \cos \varphi - {}_{2n} P_{q-r} p^{2n-q+r} \sin \varphi \right\} \cdot \\ &\quad \sum_{s=0}^r {}_r C_s \left\{ \frac{1}{(p+j\lambda)^{n+1}} \right\}^{(r-s)} \left\{ \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j} - \frac{1}{p+j} \right) \right\}^{(s)} \end{aligned}$$

ここでも一般に

$$\frac{d^r x^{-n}}{dx^r} = \frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{1}{x^n} \right) = (-1)^r {}_{n+r-1} P_r x^{-(n+r)} \quad (x > 0)$$

および

$$\frac{d^r}{dx^r} \left(\frac{1}{x+a} \right) = \frac{(-1)^r r!}{(x+a)^{r+1}}$$

であることを利用して展開すれば

$$F = \sum_{r=0}^q \sum_{s=0}^r {}_q C_r \cdot {}_r C_s \cdot {}_{n+r-s} P_{r-s} \cdot (-1)^r \cdot s! \cdot \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{(p+j\lambda)^{n+r-s+1}} \left\{ \frac{1}{(p-j)^{s+1}} - \frac{1}{(p+j)^{s+1}} \right\} \cdot p^{2n-q+r} \{ {}_{2n+1} P_{q-r} p \cos \varphi - {}_{2n} P_{q-r} \sin \varphi \}$$

上記の F を (14) 式に代入して $p=j\lambda$ の注入を行う。かつ

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$j^{-1} = 1$$

に注意して運算すると

$$i_0^{(n)} = \frac{n!2}{(\lambda^2-1)^{n+1}} \cos \theta + e \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^q \sum_{s=0}^r \frac{(n+r-s)!}{(n-q)!(q-r)!(r-s)!} \cdot \frac{\lambda^{n-q+s-1}}{2^{n+r-s+2}} \cdot \left\{ \frac{1}{(\lambda-1)^{s+1}} - \frac{1}{(\lambda+1)^{s+1}} \right\} t^{n-q} \cdot (-1)^{n+r} \cdot j^{n-q+1} \varepsilon^{j\lambda t} \cdot \{ {}_{2n+1} P_{q-r}(j\lambda) \cos \varphi - {}_{2n} P_{q-r} \sin \varphi \} + Conj$$

$$= \frac{n!2}{(\lambda^2-1)^{n+1}} \cos \theta + e \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^q \sum_{s=0}^r (-1)^{n+r} \frac{(n+r-s)!}{(n-q)!(q-r)!(r-s)!} \cdot \frac{\lambda^{n-q+s-1}}{2^{n+r-s+1}} \cdot \left\{ \frac{1}{(\lambda-1)^{s+1}} - \frac{1}{(\lambda+1)^{s+1}} \right\} t^{n-q} \cdot \left[- {}_{2n+1} P_{q-r} \lambda \cos \varphi \cdot j^{n-q} \cdot \frac{\varepsilon^{j\lambda t} + (-1)^{n-q} \varepsilon^{-j\lambda t}}{2} - {}_{2n+1} P_{q-r} \sin \varphi \cdot j^{n-q} \cdot \frac{\varepsilon^{j\lambda t} - (-1)^{n-q} \varepsilon^{-j\lambda t}}{2} \right] \quad (15)$$

(15) 式の [] の内部は $n-q$ が偶数か奇数かによつて、符号が異なるが一般に

$$j^{n-q} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-q}{2}} & (n-q \text{ が偶数の時}) \\ -\frac{1}{j} (-1)^{\frac{n-q+1}{2}} & (n-q \text{ が奇数の時}) \end{cases}$$

であるから、これより大括弧の内部は

$$[-{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi \cdot (-1)^{\frac{n-q}{2}}\cos\lambda t + {}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi \cdot (-1)^{\frac{n-q}{2}}\sin\lambda t] \quad (n \text{ が偶数})$$

$$[-{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi \cdot (-1)^{\frac{n-q+1}{2}}\sin\lambda t + {}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi \cdot (-1)^{\frac{n-q-1}{2}}\cos\lambda t] \quad (n \text{ が奇数})$$

となる。したがって $n-q$ の奇数、偶数の如何を問わずこれは

$$-\left[{}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi \cos\left(\lambda t + \frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right) - {}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi \cdot \sin\left(\lambda t + \frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right) \right]$$

のごとく表わされる。したがって (15) 式に代入して、 $i_0^{(n)}$ は次の様になるのである。

$$\begin{aligned} i_0^{(n)} &= \frac{n!z}{(\lambda^2-1)^{n+1}} \cos\theta \\ &+ e \sum_{q=0}^n \sum_{r=0}^q \sum_{s=0}^r (-1)^{n+r-1} \frac{(n+r-s)!}{(n-q)!(q-r)!(r-s)!} \cdot \\ &\frac{\lambda^{n-q+s-1}}{2^{n+r-s+1}} \left\{ \frac{1}{(\lambda-1)^{s+1}} - \frac{1}{(\lambda+1)^{s+1}} \right\} t^{n-q} \cdot \\ &\left\{ {}_{2n+1}P_{q-r}\lambda\cos\varphi \cos\left(\lambda t + \frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right) - {}_{2n}P_{q-r}\sin\varphi \sin\left(\lambda t + \frac{\pi}{2}\overline{n-q}\right) \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

IV 数式の物理的意義と結言

故に題意のごとき変定数回路を流れる電流は (9) 式より

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n i_0^{(n)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} i_0^{(n)} \cos^2 2\theta \quad (17)$$

のごとく算出された訳であつて、これは (8) 式の厳密解である。

(3) 式に表わした通り $|z| < 1$ であるから $|z|$ の値如何によつては、 i の収斂は甚速になつたり緩慢になつたりする。普通の場合は通常 $n=3$ 位までで、充分の精度があるうと推察される。

級数は $\cos^2 2\theta$ の形となるが、一般に

$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{2} (\cos 4\theta + 1)$$

$$\cos^4 2\theta = \frac{1}{4} (\cos 6\theta + 3\cos 2\theta)$$

$$\cos^6 2\theta = \frac{1}{8} (\cos 8\theta + 4\cos 4\theta + 3)$$

$$\cos^8 2\theta = \frac{1}{16} (\cos 10\theta + 5\cos 6\theta + 10\cos 2\theta)$$

で無限の偶数高周波から成り立つが、(17) 式は (16) 式が乗るのであり、しかも (16) 式

は一見わかるごとく $\cos\theta$ なる基本波と、他は λt で変化する正弦函数と t^n の項からなつて
いる。したがつて $\cos\theta$ の項は偶数高調波との積により、無限の奇数高調波を発生することが
判る。一方 λt および t^n の項はこれに無限偶数調波を乗じた形となる。

もし回路抵抗分を考慮する時は、(16) 式の第 1 項は抵抗分によつて減衰しない項であつて
定常電流となり、第 2 項は抵抗分によつて定まるある減衰率で減衰しつつに消去する項である。
いま第 1 項だけを求めてみると

$$i_1 = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda^2 - 1)^{n+1}} \cos\theta \cdot \cos^n 2\theta \quad (18)$$

実際の計算を行うには (16) 式に $n=0, 1, 2, \dots$ などの数値を代入した結果を用いるの
であつて、いくらでも精密な結果を得ることができる訳である。しかし実際問題として、(16)
式の計算はそれ程容易でもない。試みに $n=0, 1, 2$ の結果を示すと次のごとくなる。

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{e}{\lambda^2 - 1} \left\{ \cos\theta - \cos\varphi \cos\lambda t + \frac{1}{\lambda} \sin\varphi \sin\lambda t \right\} \\ i_0' &= \frac{e}{(\lambda^2 - 1)^2} \left\{ \cos\theta - \cos\varphi \cos\lambda t + \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda} \right) \sin\varphi \sin\lambda t \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{\lambda^2 - 1} t \left\{ -\frac{\lambda}{2} \cos\varphi \sin\lambda t - \frac{1}{2} \sin\varphi \cos\lambda t \right\} \right\} \\ i_0'' &= \frac{e}{(\lambda^2 - 1)^3} \left\{ 2\cos\theta - 2\cos\varphi \cos\lambda t + \left(-\frac{\lambda^3}{4} + \frac{3\lambda}{2} + \frac{3}{4\lambda} \right) \sin\varphi \sin\lambda t \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{(\lambda^2 - 1)^2} t \left\{ \left(\frac{3\lambda^3}{4} - \frac{7\lambda}{4} \right) \cos\varphi \sin\lambda t + \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{5}{4} \right) \sin\varphi \cos\lambda t \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{(\lambda^2 - 1)} t^2 \left\{ \frac{\lambda^2}{4} \cos\varphi \cos\lambda t - \frac{\lambda}{4} \sin\varphi \sin\lambda t \right\} \right\} \end{aligned}$$

これらの級数は普通凸極機の計算で行う様な Fourier 級数ではないため一見変つた表現に
見える。ともあれ変定数回路の解析に一方法として提示したままであつて、これより高調波共
振の周波数やインピーダンス、コンデンサの両端子間尖頭電圧値について、同様な方法によつ
て推察することが今後に残された問題となろう。

(昭和 30 年 5 月 27 日受理)



北海道産ウスネア属地衣類の 成分に関する研究 (第4報)

バルバチン酸関係化合物の合成

佐藤久次

Studies on Components of Usneaceae in Hokkaido IV Syntheses of Barbatic Acid and its Derivatives

Hisatsugu Sato

Abstract

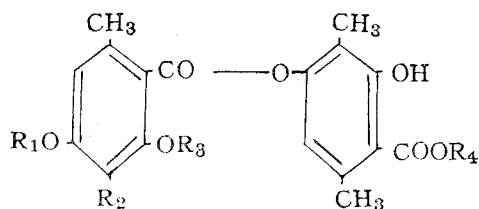
In the previous paper, the author reported on several depsides separated from lichens of Usneaceae in Hokkaido. The depsides were barbatic acid, diffractaic acid and dehydrobarbatic acid. Diffractaic acid was proved to be a methyl ether of barbatic acid. All of them were identified by their decomposition products.

In the present paper, the synthetic method of the depsides and their decomposition products, viz. rhizonic acid and rhizonic acid methyl ether, were treated. The syntheses were carried on by processes of manifest route, using substances of known simple chemical constitutions as β -orcinol.

前報¹に於て北海道産ウスネア属地衣類の数種につき、そのエーテル抽出物の成分に関して報告した。その報告に於て、いずれの地衣中にも著量(3~5%)のD-ウスネン酸の存在することを明かにし、又デプシドとして *Usnea longissima Ach.* からはバルバチン酸(I) *Usnea diffracta Wain.* からはジフラクタ酸(II)が得られることを証明した。その他特殊な一品種からは、バルバチン酸に近縁な組成を有するデヒドロバルバチン酸を見出した。これ等の物質の存在については、主としてその物質並にそのアルカリによる分解生成物の元素分析値、融点、呈色反応等の諸性質が、文献所載と一致することを以て確認したのであるが、本報においては、これ等の物質の合成について報告する。

これ等のデプシドは、 β -オルチン型のフェノールカルボン酸二分子がエステル型に結合した次の如き構造式を有し、概ね白色結晶性で、特有の塩化鉄反応を示す物質である。

1 佐藤：室工大研報, 1, 619 (1954)



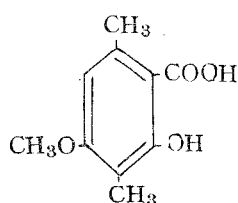
一般式

(I) バルバチン酸 $R_1, R_2 = \text{CH}_3, R_3, R_4 = \text{H}$

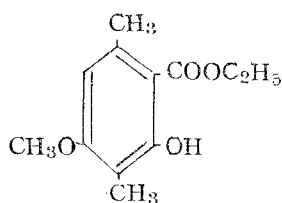
(II) ジフラクタ酸 $R_1, R_2, R_3 = \text{CH}_3, R_4 = \text{H}$

バルバチン酸は最初 Stenhouse, Groves² によつて, *Usnea ceratina* 及び *U. barbata* から分離されたものであるが, その後 *Cladonia* 属地衣類の多数からも発見され³, 又歐洲並に本州産の *Usnea longissima* からその存在が報告された⁴. 尙その他の種々の地衣類からも発見され⁵, 名称も種々異なるものがあつたが⁶, 現在それ等がすべてバルバチン酸に他ならないことが明かになつている。

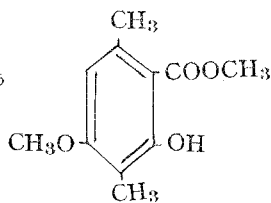
バルバチン酸の構造式については, Pfau⁷ がそのアルカリに依る分解生成物のリゾニン酸(III)の構造式を正して前記(I)の式を提出した。リゾニン酸はβ-オルチンカルボン酸モノメチルエーテルに相当する。本物質は融点においては分解が著しく, 正確な融点を認めることが困難なので, 前報においては, バルバチン酸のエタノリシスによつて生成するリゾニン酸エチルエステル(IV)としてこれを証明した。本報告においては, リゾニン酸のメチル化又は



(III)



(IV)

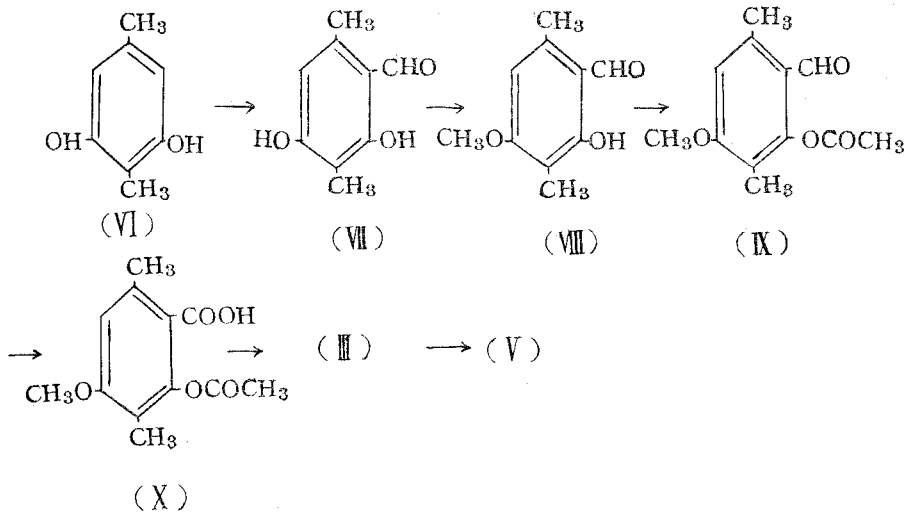


(V)

- 2 Stenhouse, Groves : Ann. 203, 302 (1880)
- 3 朝比奈 : 植物研, 12, 868 (1936). 13, 856 (1937)
朝比奈, 藤川 : Ber., 67, 1793 (1934)
- 4 朝比奈, 塚本 : 薬学雑誌, 53, 1325 (1931)
- 5 Hesse : J. prakt. Chem., (2) 58, 526 (1898). 63, 14 (1903) Ber., 31, 664 (1898)
朝比奈, 藤川 : Ber., 67, 1793 (1934)
朝比奈, 三ツ野 : 植物研, 13, 856 (1937)
- 6 Hesse : Ann. 284, 175 (1895)
Zopf : Ann. 300, 330 (1898). 327, 339 (1903)
- 7 Pfau : Helv. Chim. Acta, 11, 864 (1928)

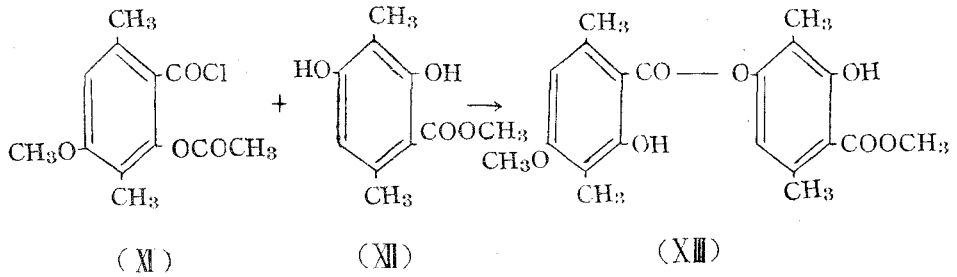
バルバチン酸のメタノリシスによつて、リゾニン酸メチルエステル(V)⁸を得、一方定位の明かな Robertson-Stephenson⁹の方法に従い、これを次の如くにして合成し、両者の一致することによつてこれを確認した。

即ち β-オルチン(VI)から Gattermannの方法で β-オルチルアルデヒド(VII)を得、これを Robertson-Robinson¹⁰の方法に従いアセトン溶液中でヨードメチルによつて部分的メチル化してリゾナルデヒド(VIII)となし、更にアセチル化(IX)した後、過マンガン酸カリ溶液を以て酸化してアセチルリゾニン酸(X)を得た。アセチルリゾニン酸を苛性ソーダで加水分解してリゾニン酸(III)を遊離せしめ、更にジメチル硫酸でメチル化して、融点 95°C のリゾニン酸メチルエステル(V)となし、前記のバルバチン酸の加水分解によつて得られたものとの混融によつてその一致することを認めた。



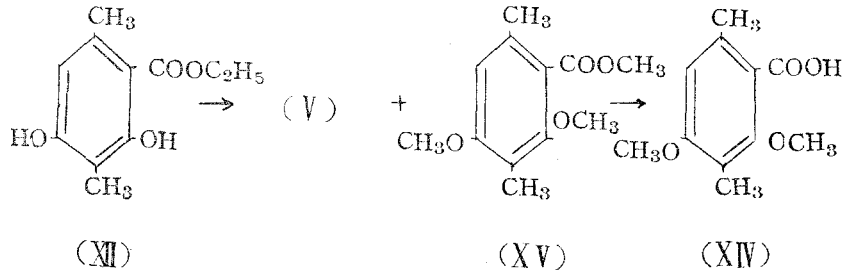
バルバチン酸の合成については、藤川¹¹の方法もあるが、著者はRobertson-Stephenson¹²の方法に従い、アセチルリゾニクロリド(XI)と β-オルチンカルボン酸メチルエステル(XII)とからバルバチン酸メチルエステル(XIII)を合成し、それが地衣から得られたバルバチン酸のメチル化によつて生成するものと一致することを確認した。

- 8 朝比奈, 赤木 : Ber., 68, 1130 (1935)
 9 Robertson, Stephenson : J. Chem. Soc., 1930, 313.
 10 Robertson, Robinson : J. Chem. Soc., 1928, 1455.
 11 藤川 : 薬学雑誌, 56, 227 (1936)
 12 Robertson, Stephenson : J. Chem. Soc. 1932, 1675
 13 朝比奈, 藤川 : 薬学雑誌, 52, 206, 991 (1932)

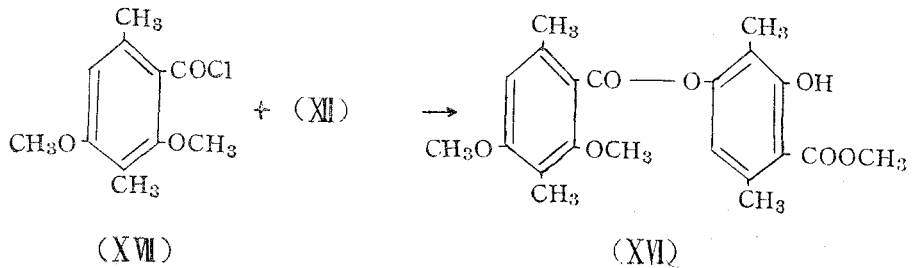


(XIII) 一般式 $R_1, R_2, R_4 = \text{CH}_3, R_3 = \text{H}$

ジフラクタ酸は朝比奈及び藤川¹³が初めて *Usnea diffracta* Wain. から分離し、且つその構造式を決定したものであつて、バルパチン酸のメチルエーテルに相当する。著者も概ね同氏等の方法に倣つてこれを合成した。即ち先ずジフラクタ酸のアルカリ分解によつて生成するリゾニン酸メチルエーテル (XIV) を次の如くにして合成した。 β -オルチンカルボン酸メチルエステル (XII) をジメチル硫酸によつてメチル化し、リゾニン酸メチルエーテルメチルエステル (XV) となし、これを加水分解してリゾニン酸メチルエーテルを得た。この合成の途中に於てリゾニン酸メチルエーテルメチルエステル (XV) と共にリゾニン酸メチルエステル (V) も生成する。又リゾニン酸メチルエーテルメチルエステルはリゾニン酸の完全メチル化生成物であるが、沸点 165°C (12mm) の液体で、長時間強く冷却しても結晶しない。しかし酒精カリで加水分解すれば前記の如くリゾニン酸メチルエーテルを遊離する。



ジフラクタ酸については、そのメチルエステル (XVI) を β -オルチンカルボン酸メチルエステル (XII) とメチルエーテルリゾニン酸クロリド (XVII) から合成して、地衣から得られたものと一致することを証明した。



本研究の第2報に於て示したように、北海道産ウスネア属地衣中におけるデブシドの含有率はいずれも高いのであるが、その中でもジフラクタ酸の方がバルバチン酸よりも一般に高い。これはバルバチン酸がジフラクタ酸に比べて不安定なことにも関係があると思われる。即ちバルバチン酸は比較的熱又はアルカリによつて分解を受け易く、例えばメタノール又はエタノールと共に長時間加熱すれば分解し、分解によつて生じたりゾニン酸はアルコールと作用してエステルを生成する。しかしジフラクタ酸は同様の処理を施してもアルコリスを生起しない。又バルバチン酸をジフラクタ酸と同様に10%苛性カリで分解した際のりゾニン酸の収率は極めて低い。従つて前報の如くバリタ水を使用しなければ分解生成物の収率は充分でない。

北海道にはウスネア属地衣類は広く分布しており、特に *U. diffracta Wain.* は全道に亘つて多量に生産し、北部地方では *U. longissima Ach.* も相当多量に得られる。これ等地衣中のデブシドの含有率が前記の如く高く、これをアルカリ分解すればいずれのデブシドからもβ-オルチンが相当の収量で得られる。β-オルチンの簡単にして収量よき合成はまだ知られていないから、上記地衣類のデブシドはβ-オルチンの原料として適当であると思われる。

実 験 の 部

1. リゾニン酸メチルエステル (V)

(1) バルバチン酸のバリタ水による分解によつて得られたりゾニン酸 1g を、10%炭酸ソーダ溶液 10cc に溶解し、ジメチル硫酸1gを加える。終つて6規定アンモニア水 5cc を加え、既に析出した結晶をエーテルに転溶分離し、芒硝で脱水後エーテルを去り、アルコールから再結晶すれば、無色針状結晶となる。収量 0.3g. 融点 95°C。本物質はエーテル、アセトンに易溶、アルコールには冷時難溶である。混融でりゾニン酸メチルエステルであることを確めた。

元 素 分 析

| | | | |
|-------|--|---------------------------|----------------------------|
| 物 質 | 3.882mg | CO ₂ : 8.990mg | H ₂ O : 2.240mg |
| 分 析 値 | | C : 63.15% | H : 6.44% |
| 計 算 値 | C ₁₁ H ₁₄ O ₄ | C : 62.82% | H : 6.72% |

(2) 次の方法によればりゾニン酸の分解を伴い易いアルカリの使用を避け、且つ簡単な操作でエステルが得られる。

りゾニン酸 0.3g を無水メタノール 200cc 中で還流冷却器を附して4時間加熱する。終つてメタノールを追出し、約 5cc を残して冷却すれば結晶が析出する。これに適量の水とエーテル 30cc を加えて振盪すれば結晶はエーテルに移行する。エーテル層を分離し、脱水後エーテルを溜去、アルコールから再結晶すれば無色針状結晶 0.1g を得る。融点 95°C。混融の結果りゾニン酸メチルエステルと一致する。

元素分析

| | | | |
|-----|--|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.635mg | CO ₂ : 8.377mg | H ₂ O : 2.153mg |
| 分析値 | | C : 62.55% | H : 6.58% |
| 計算値 | C ₁₁ H ₁₄ O ₄ | C : 62.82% | H : 6.72% |

(3) バルパチン酸のメタノリシス：バルパチン酸 1g を無水メタノール 50cc に加温溶解し，還流冷却器を附して湯浴上で12時間強く加熱する。次でメタノールを減圧溜去し，残留物をエーテル 100cc に溶解，先ず10%炭酸ソーダ溶液 20cc ずつで3回，最後に5%苛性カリ溶液 20cc で洗滌し，芒硝で脱水後エーテルを溜去すれば約 0.2g の白色物質が残留する。これをアルコールから再結晶すれば無色針状晶を得る。融点 94~95°C，性状全く上記エステルと一致し，混融で融点の降下を認めない。

2. リゾニン酸メチルエステルの合成

(1) β-オルチルアルデヒド (VII)：— β-オルチン 10g を 100cc の無水エーテルに溶解し，これに 20g の青化亜鉛 Zn(CN)₂ を加え，乾燥塩酸ガスを通ずる。約 2 時間で反応が終末に近づくれば，次第に無色稜状結晶が析出し，塩酸ガスが放出される。そこで塩酸ガスの送入を止め一夜放置する。エーテルを濃縮して濾過，結晶をエーテルで洗い，200cc の水と共に湯浴上で加熱すれば最初稍溶解し，濃縮されるに従つて針状結晶が析出する。放冷後吸引濾過し，アルコールに溶解し，徐々に温湯を加え，白濁を生ずるに至つて放冷すれば無色の針状結晶が析出する。収量約 10g。本品は結晶水を有するので 105°C で恒量になるまで乾燥する。融点 165°C。エーテル，アルコール及びアセトンに易溶，ベンゾール，クロロホルムに温時可溶，水に難溶である。アルコール溶液は塩化鉄反応赤紫色，漂白粉では黄色を呈する。

元素分析

| | | | |
|-----|---|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.250mg | CO ₂ : 7.758mg | H ₂ O : 1.746mg |
| 分析値 | | C : 65.10% | H : 5.97% |
| 計算値 | C ₉ H ₁₀ O ₃ | C : 65.02% | H : 6.07% |

(2) リゾンアルデヒド (VIII)：— β-オルチルアルデヒド 10g とヨードメチル 8.2g，炭酸カリ 10g 及びアセトン 75cc の混合物を還流冷却器を附して90分間加熱する。更に 4.5g のヨードメチルを加え反応終了後，不溶の炭酸カリを濾去し，醋酸酸性にすればリゾンアルデヒドが析出する。これを濾過した後母液のアセトンを濃縮して醋酸を加えると更にアルデヒドが得られる。これを集めて50%アルコールから再結晶すれば，無色の細長い針状結晶となる。収量約 8g。融点 136°C。塩化鉄アルコール溶液では暗青紫色を呈し，水で稀釈すると赤紫色に変ずる。

リゾンアルドオキシム：— アルデヒド 0.5g，ヒドロキシルアミン塩酸塩 0.3g を 3%ア

ルコホル製苛性ソーダ 5cc に溶解し、温浴上で約 5 分温めた後一夜放置する。次で水蒸気蒸溜して未反応アルデヒドを除き、残留物を大量の水から再結晶する。最後に昇華によつて精製する。淡黄色粉末。融点 188~189°C。苛性ソーダ溶液に可溶。塩化鉄反応は紫色。

元素分析

| | | |
|-----|--|--------------------------------------|
| 物質 | 3.825mg | 0.255cc N ₂ (19°C, 745mm) |
| 分析値 | | N : 7.18% |
| 計算値 | C ₁₀ H ₁₃ O ₃ N | N : 7.64% |

(3) アセチルリゾナルデヒド (IX) :— 上記アルデヒド 10g を無水醋酸 75cc 及び無水醋酸ソーダ 10g と共に湯浴上に 3 時間熱する。終つて減圧下に無水醋酸を去り、残留物をアルコールに溶解する。不溶物質を濾去し、アルコールを追出し、含水アルコール (40%) から再結晶すれば融点 71°C の無色針状結晶が得られる。収量 10g。塩化鉄反応は著明でない。

元素分析

| | | | |
|-----|--|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.438mg | CO ₂ : 8.135mg | H ₂ O : 1.925mg |
| 分析値 | | C : 64.53% | H : 6.22% |
| 計算値 | C ₁₂ H ₁₁ O ₅ | C : 64.86% | H : 6.31% |

(4) アセチルリゾニ酸 (X) :— アセチルリゾニアルデヒド 8g を 100cc のアセトンに溶解し、これを 50°C に保ち攪拌しつつ過マンガン酸カリ溶液 (10g を 150cc の水にとかしたものを) を滴下する。加れ終れば水で冷却し、亜硫酸ガスを通じて液を脱色し、減圧下にアセトンを除けば結晶が析出する。これ集めてアセトンと水の同容の混液から再結晶すれば無色板状結晶 5g を得る。融点 146°C で発泡分解する。

元素分析

| | | | |
|-----|--|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.885mg | CO ₂ : 7.878mg | H ₂ O : 2.338mg |
| 分析値 | | C : 60.84% | H : 6.02% |
| 計算値 | C ₁₂ H ₁₁ O ₅ | C : 60.50% | H : 5.88% |

(5) リゾニ酸 (III) :— 上記の結晶 5g を 4% 苛性ソーダ溶液 100cc にとかし、室温に 3 時間放置した後 2 規定塩酸で酸性にすればリゾニ酸が析出する。析出物をアセトンに溶解し、白濁の生ずるまで温湯を加えて放置すれば、無色粒状結晶を析出する。含水アルコールから再結晶する。本物質は 210°C 附近で熔融と同時に分解し、塩化鉄アルコール溶液では紫色、塩化鉄水溶液では青紫色の反応を呈する等の諸性質すべてリゾニ酸と一致する。

元素分析

| | | | |
|-----|---------|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.660mg | CO ₂ : 8.165mg | H ₂ O : 1.983mg |
| 分析値 | | C : 60.84% | H : 6.02% |

計算値 $C_{10}H_{12}O_4$ C : 61.22% H : 6.17%

(6) リゾニン酸メチルエステル (V) : — 上記リゾニン酸 0.8g をヂメチル硫酸を用いて常法に従つてメチル化してメチルエステルを得た。収量 0.2g。融点 $95^{\circ}C$ 。塩化鉄アルコール溶液では紫色を呈する。本物質をバルバチン酸の分解によつて得たリゾニン酸メチルエステルと混融しても融点は降下しない。

元素分析

| | | | |
|-----|-------------------|------------------|------------------|
| 物質 | 3.422mg | CO_2 : 7.980mg | H_2O : 1.980mg |
| 分析値 | | C : 62.65% | H : 6.43% |
| 計算値 | $C_{11}H_{14}O_4$ | C : 62.82% | H : 6.72% |

3. バルバチン酸メチルエステル (XIII)

バルバチン酸 0.5g を 50cc のエーテルに溶解し、冷却しつつジアゾメタンのエーテル溶液 (ニトロソメチルウレタン 0.5cc より発生) 30cc を滴下する。液が黄色となれば直ちに氷醋酸 1 滴を添加し、液を 5% 炭酸ソーダ溶液 20cc で洗い、芒硝で脱水後エーテルを溜去すれば無色針状結晶が析出する。これをメタノールから再結晶すれば融点 $171^{\circ}C$ となる。収量 0.3g。本物質はエーテル、醋酸エチル、アセトンには冷時、アルコール、メタノール、リグロイン及びベンゾールには温時可溶である。塩化鉄アルコール溶液では紫色を呈する。

元素分析

| | | | |
|-----|-------------------|------------------|------------------|
| 物質 | 3.343mg | CO_2 : 7.884mg | H_2O : 1.814mg |
| 分析値 | | C : 64.32% | H : 6.03% |
| 計算値 | $C_{20}H_{22}O_7$ | C : 64.14% | H : 5.93% |

4. バルバチン酸メチルエステルの合成

アセチルリゾニクロリド (XI) (融点 $84^{\circ}C$ 。アセチルリゾニン酸 (X) と五塩化磷から製したもの) 1.25g, β -オルチンカルボン酸メチルエステル (XII) 1g, ピリジン 5cc の混合物を室温に 3 日間放置し、次で 6% 醋酸 100cc 中に投入する。液中結晶が析出するに及んでエーテル 100cc を 3 回に分けてこれを抽出し、エーテル液を初め水 5cc, 次で重炭酸ソーダ飽和溶液 25cc で洗滌し、芒硝で脱水後エーテルを溜去する。残留物質を 5% メタノール製苛性ソーダ 12cc に溶解し、15 分間室温に放置後、液を重炭酸ソーダの 1% 溶液 120cc 中に注ぐ。液は白濁し放置すれば無色針状結晶を析出する。析出物を集めてメタノールから再結晶すれば融点 $171^{\circ}C$ となり、性状、混融結果は地衣から得た前記のバルバチン酸のメチルエステルと一致した。

5. リゾニン酸メチルエーテル (XIV) の合成

(1) β -オルチンカルボン酸 : — β -オルチンアルデヒド (VII) 9g をクロル炭酸エチル

15g と共に 100cc のアセトンに溶解し、これを強く攪拌しつつ 8%苛性ソーダ溶液 65cc を徐々に加える。30分後重炭酸ソーダ飽和溶液 50cc を加え、次で水 300cc で稀釈すれば油状物質が分離する。器壁を摩擦すれば油は固化する。これはアルデヒドのジカルボエトオキシ化合物である。リグロインから再結晶すれば羽毛状無色の結晶が得られる。収量 12g。融点 90°C。アセトンに易溶。塩化鉄反応を与えないからフェノール性水酸基は遊離していない。

上記物質 5g をアセトン 80cc に溶解し、50°~55°C に保ちつつこれに過マンガン酸カリ溶液 (8g を 150cc の水にとかしたもの) を徐々に加える。15分後液を氷冷しつつ亜硫酸ガスを通じて脱色し、静にアセトンを追出せば無色の固体が分離する。3日の後析出物を集め、4%の苛性ソーダ溶液 25cc にとかし、約30分間室温に放置した後 0°C に冷却し、直ちに 10%塩酸を僅に酸性となるまで加える。この時析出した沈澱を重炭酸ソーダ飽和溶液約 100cc にとかし不溶解物を濾去する。溶液を再び 10%塩酸で酸性にすれば β -オルチンカルボン酸が析出する。収量約 1.5g。これを更にアセトンに温時溶解し、その溶液に温水を注加し、僅かに濁りを生ずるに止めて放冷すれば、細長い絹糸状の結晶が得られる。本品はアルコール、アセトンに極めて易溶、冷水には難溶である。100°C に熱すれば容易に炭酸ガスを発生して分解し β -オルチンを残す。塩化鉄アルコール溶液では青紫色を呈し、漂白粉水溶液では血赤色の反応を与えるが褪色し易い。

元素分析

| | | | |
|-----|---|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.423mg | CO ₂ : 6.143mg | H ₂ O : 1.710mg |
| 分析値 | | C : 59.10% | H : 5.55% |
| 計算値 | C ₉ H ₁₀ O ₄ | C : 59.34% | H : 5.49% |

(2) β -オルチンカルボン酸メチルエステル (XII) : — 上記の β -オルチンカルボン酸 1g を無水メタノール 25cc に溶解し、還流冷却器を附して 5 時間加熱する。次で液を冷却し、1%重炭酸ソーダ溶液 50cc を加えるとメチルエステルは沈澱析出する。50%メタノールから再結晶し無色細長い稜状結晶が得られた。収量 0.3g。融点 143°C。塩化鉄アルコール液では緑褐色を呈する。

元素分析

| | | | |
|-----|--|---------------------------|----------------------------|
| 物質 | 3.852mg | CO ₂ : 8.665mg | H ₂ O : 2.087mg |
| 分析値 | | C : 61.35% | H : 6.02% |
| 計算値 | C ₁₀ H ₁₂ O ₄ | C : 61.22% | H : 6.13% |

(3) リゾニン酸メチルエステル (V) : — β -オルチンカルボン酸メチルエステル 5g を 10%苛性ソーダ溶液 10cc にとかし、30°~40°C に保ち強く攪拌しつつジメチル硫酸 4g を滴下する。冷却すれば針状結晶が析出するが一夜放置した後、10%アンモニア水を加え生成する

結晶を分離、アルコールから再結晶すると白色針状結晶 2.2g が得られた。融点 $94\sim 95^{\circ}\text{C}$ 。アルコール溶液はアルコール製塩化鉄によつて紫色を呈し、メチル化されないフェノール性水酸基の存在を示す。混融の結果リゾニン酸メチルエステル (V) と一致することを知つた。

(4) リゾニン酸メチルエーテルメチルエステル (XV) (リゾニン酸の完全メチル化):—上記の結晶を除いた母液を湯浴上で減圧濃縮すれば油状物質が残留する。減圧 (12mm) で蒸溜すれば $165\sim 167^{\circ}\text{C}$ で無色の液が溜出する。これを冷却放置するも結晶しない。本物質は塩化鉄反応を示さないから、遊離のフェノール性水酸基は存在せず、ジメチルエーテルメチルエステルと考へられる。

(5) 上記の物質 0.5g を 10% 酒精カリにとかし、 $50\sim 60^{\circ}\text{C}$ の水浴上で 3 時間加水分解する。直ちにアルコールを溜去し、水を加えて残渣を溶解し、塩酸々性になると白濁を生ずる。これをエーテルに転溶し、脱水後エーテルを追出し、リグロインから再結晶すると無色針状結晶を得る。収量 0.3g。融点 105°C 。塩化鉄反応は陰性である。ジフラクタ酸の分解によつて得たリゾニン酸メチルエーテルと混融しても融点降下を認めなかつた。

元素分析

| | | | |
|-----|--|-------------------------|--------------------------------|
| 物質 | 3.665mg | CO_2 : 8.450mg | H_2O : 2.125mg |
| 分析値 | | C : 62.88% | H : 6.44% |
| 計算値 | $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{O}_4$ | C : 62.86% | H : 6.72% |

メトオキシ基の定量 (ツアイゼル法)

| | | | |
|-----|--|------------------------|------------------------|
| 物質 | 0.0885g | AgI : 0.1990g | CH_3 : 29.72% |
| 計算値 | $\text{C}_8\text{H}_8\text{O}_2(\text{OCH}_3)_2$ として | | 29.52% |

6. ジフラクタ酸メチルエステル (XVI)

ジフラクタ酸 1g を 100cc のエーテルに溶解し、水を用いて冷却しつつジアゾメタンのエーテル溶液 (0.5cc のニトロソメチルウレタンを 20cc のエーテルに溶解し、25%メタノール製カリ 2cc を加えて発生したもの) を滴下し、窒素ガスの発生が止み、液が黄色を呈するに及んで 2~3 滴の水醋酸を加え、未反応のジアゾメタンを分解する。エーテル溶液を 5%炭酸カリ溶液 20cc と振つて残存のジフラクタ酸を除き、芒硝で脱水後エーテルを溜去する。残渣をアルコールから再結晶すれば無色針状結晶が得られる。収量 0.8g。融点 127.5°C 。アセトン、ベンゾール、エーテルによく溶け、冷メタノール、冷アルコールには難溶である。アルコール溶液はアルコール製塩化鉄で赤紫色を呈する。

元素分析

| | | | |
|-----|---------|-------------------------|--------------------------------|
| 物質 | 3.138mg | CO_2 : 7.442mg | H_2O : 1.683mg |
| 分析値 | | C : 64.68% | H : 5.96% |

計 算 値 $C_{21}H_{24}O_7$ C : 64.91% H : 6.23%

7. ジフラクタ酸メチルエステルの合成

(1) β -オルチンカルボン酸メチルエステル (XII) 5g を 25cc の 1 規定苛性ソーダに溶かし、30cc のアセトンを加える。この液を氷と塩で充分冷却し、攪拌しつつ 30cc のアセトンに溶解したメチルエーテルリゾニン酸クロリド (XVII) (融点 65°C 。リゾニン酸メチルエーテルと五塩化燐から製する) 6g を滴下する。加え終つた後室温で 1 時間攪拌する。次にアセトンの大部分を溜去し、水 50cc を加え、塩酸々性とし、更にアルコール 100cc を加えて充分攪拌しつつ冷却すれば結晶が析出する。これをアルコールから再結晶すれば針状結晶を得る。収量 0.8g。融点 $127\sim 128^\circ\text{C}$ 。これを前記のジフラクタ酸メチルエステルと混融しても融点降下を見ない。

元 素 分 析

| | | | |
|-------|-------------------|-------------------------|--------------------------------|
| 物 質 | 3.685mg | CO_2 : 8.815mg | H_2O : 2.010mg |
| 分 析 値 | | C : 65.24% | H : 6.06% |
| 計 算 値 | $C_{21}H_{24}O_7$ | C : 64.91% | H : 6.23% |

メトオキシシル基の定量 (ツアイゼル法)

| | | | |
|-------|-----------------------------------|---------------|--------------------------------|
| 物 質 | 0.00642g, | AgI : 0.1142g | CH_3O : 23.97% |
| 計 算 値 | $C_{18}H_{20}O_4(\text{OCH}_3)_3$ | | 23.49% |

(2) ジフラクタ酸の生成 :— 上記のメチルエステル 0.5g を 2% 苛性ソーダ溶液に溶解し、湯浴上に約 20 分間加温、次で急冷し酸性にすれば白濁を生ずる。これをエーテルに転溶し、脱水後ベンゾールから再結晶すれば白色針状結晶 0.2g を得る。アルコール製塩化鉄反応は青色、混融の結果はジフラクタ酸と一致した。

8. バルバチン酸の苛性カリ分解

バルバチン酸 1g を 10% 苛性カリ溶液 20cc と共に常法により加熱分解する。加熱 2 時間後冷却し、塩酸々性とし、析出する白色物質をエーテルに転溶する。エーテル溶液を 10% 重炭酸カリ溶液と振つて酸性物質を分取する。この液を更に充分エーテルで洗滌後、塩酸で酸性にすれば僅に白濁する。これをエーテルに転溶し、芒硝で脱水後エーテルを除き、50% アルコールから再結晶すれば白色結晶を得る。本物質は融点で著しく分解するも、諸性状リゾニン酸に一致するが、その収量は極めて小さい。

9. ジフラクタ酸のアルコールシス

ジフラクタ酸 1g を 50cc 無水アルコールに加温溶解し、20 時間湯浴上で加熱する。終つてアルコールを減圧で溜去し、残溜物をエーテルに溶解し、エーテル溶液を 10% 苛性ソーダ溶液 30cc ずつで 3 回、5% 苛性カリ溶液 30cc で 1 回洗滌する。次でエーテル溶液を芒硝で脱水後

エーテルを溜去するも殆ど残留物を認めない。アルカリ洗滌液を集め、塩酸で酸性にすれば白濁を生ずる。これをエーテルに転溶し、エーテル液を芒硝で脱水後エーテルを溜去すれば白色固体を残留する。ベンゾールから再結晶すれば約 0.9g の白色針状結晶が得られる。融点 190°C 。諸性状並に混融の結果はジフラクタ酸に一致する。即ち大部分のジフラクタ酸は未反応のまま回収されたものと認められる。

本研究はその一部を著者が北海道大学在職中に行つたものである。研究の遂行に対し現北海道大学長杉野目晴貞博士の御援助をうけたこと多大である。茲に記して深く感謝の意を表するものである。

(昭和 30 年 5 月 30 日受付)

泥炭のアンモニア化 (第3報)

泥炭の接觸的硝酸酸化

佐々木満雄 八幡寿雄 佐藤久次

Ammoniation of Peat III

Contact Oxidation with Dilute Nitric Acid

Mitsuo Sasaki, Toshio Yahata and Hisatsugu Sato

Abstract

On oxidation of peat with dil. nitric acid, the most favourable condition was found to be 60°C at temperature and 6 hours in time. It was seemed to be a handicap for industrialization of the process to take such a long time as 6 hours for oxidation.

For the purpose of saving time for oxidation, the contact process was studied using various catalysts, i.e. iron powder, iron nitrate, vanadium oxide, manganese dioxide and pyrite cinder. Vanadium oxide and pyrite cinder were found to be the most favourable catalysts for the oxidation of peat to increase a content of humic acid in it. The content of humic acid was amounted to about 70% in the oxidized peat by best condition. The original content of humic acid in Ishikari peat was about 30%. Moreover, the time was remarkably saved by catalytic oxidation with dil. nitric acid, and it required about one fourth of time of ordinary oxidation.

緒 言

本研究の第1報及第2報においては泥炭を原料とする有機質窒素肥料製造に関し、基礎的研究および予備的中間試験についてを報告した。その結果製品中の窒素量は、泥炭中のフミン酸量におおむね比例する事を知った。よつて泥炭のアンモニア化に先だち、稀硝酸による酸化あるいは空気酸化等の前処理を行い、いわゆる再生フミン酸を生成せしめ泥炭中のフミン酸量の増加をはかつた。

泥炭の酸化については野田、斎藤などの苛性ソーダ水溶液で処理するアルカリ性湿式酸化¹、アンモニアガスと酸素との混合ガスによるアルカリ性乾式酸化²、及び湿式酸性酸化法³などの

1 野田、斎藤：工化，52，203（1949）

2 斎藤、鳥居、野田：工化，53，20（1950）

3 斎藤：山梨大学工学部研究報告，4，77（1953）

研究がある。この中酸性酸化法においては硝酸を用いているが、酸化反応終了後、溶液のまま直ちにアンモニアを作用させるものであるから、その生成物は泥炭とアンモニアの反応生成物のほか、硝酸アンモンその他のものを含んでいる。したがってこれを乾燥する場合の所要熱量及び硝酸アンモンの吸湿性などに関し、工業化の場合相当問題となる。その上泥炭と硝酸が作用した場合、水溶液中に溶解するものは、おおむね泥炭の有機質が著しく分解された低分子物質であるから、有機質肥料としては極めて価値の乏しいものである。土壌および肥料の専門家は、泥炭を主成分とする有機質肥料に対して、できるだけ有機質成分の破壊の程度の少いことを要求している。又濃硝酸処理を行った場合は、泥炭の分解と共に硝酸の消費量も著しく大となる。

稀硝酸酸化に関しては第1報⁴ および第2報⁵ において報告したごとく、酸化処理に相当長時間を要し最適条件は60°Cにおいて約6時間である。この事実は本法の工業化の場合操業上の隘路となることはもちろんであるが、その上熱源の消費と硝酸の損失をともない著しくコストが高くなる。そこで我々は硝酸処理時間の短縮を図る目的をもつて、適当な触媒を選択添加し、これらの触媒による接触的硝酸酸化を行ったのでここに報告する次第である。その結果安価な触媒としては硫化鉄シンダー、最も優秀な触媒としては五酸化バナジウムである事を知つた。又酸化時間については、空気酸化の場合程に短縮する事は出来なかつたが、尙且つ従来の処理時間に対して触媒の性能に従いおおむね二分の一乃至四分の一程度に短縮する事が出来た。硝酸消費量についても大体満足できる程度である事がわかつた。

空気酸化法に関してはすでに⁶ 発表した所であるが、その結果は第1表の通りである。稀硝酸酸化法においては最適酸化時間約6時間でフミン酸量61%のものを得たが、空気酸化法では40分ないし1.5時間で硝酸酸化法と同程度のフミン酸量に達する事ができた。

しかし一方この空気酸化処理を施した泥炭をアンモニア化した場合、製品の窒素成分中、速効性窒素に属するものは15~20%位であつた。此れに対し稀硝酸処理を施した泥炭よりのアンモニア化製品においては速効性窒素は30%前後であり、前処理における酸化の方法がかなり製品の肥効に影響を与えるものであることが知られる。故に空気酸化法は、処理時間が大変短い点はずぐれているが、製品の性能の点から考えて稀硝酸酸化法に劣るものと考えられる。

基礎的研究において以上の事実を知ることができたので、中間試験においては常に稀硝酸酸化法による前処理を採用することとした。

しかし前述の如く酸化時間が長過ぎる嫌いがあるので、適当な触媒を用いて酸化時間の短縮を図つた訳である。

4 佐藤久次, 佐々木満雄: 室工大研報, **1**, 361 (1952)

5 佐藤久次, 佐々木満雄: 室工大研報, **1**, 653 (1953)

6 佐藤久次, 佐々木満雄, 八幡寿雄 昭和28年10月 日本化学会北海道支部大会にて発表

第1表 空 気 酸 化 法

| 実験番号 | 酸化時間 | 酸化温度 (°C) | 送入空気量 | 硝酸濃度 (%) | 硝酸消費量 (%) | フミン酸量 (%) | フミン酸増加率 (%) | 備考 |
|------|--------|-----------|-----------------------|----------|-----------|-----------|-------------|------|
| 1 | 6 hr | 60 | — | 5 | 9.0 | 61.0 | 204 | 稀硝酸 |
| 2 | 3 hr | 60 | — | 5 | 7.3 | 40.0 | 133 | 酸化法 |
| 3 | 20 min | 100 | 52 m ³ /hr | — | — | 49.0 | 163 | 流動法に |
| 4 | 40 min | 100 | 56 m ³ /hr | — | — | 63.0 | 210 | よる空気 |
| 5 | 60 min | 100 | 55 m ³ /hr | — | — | 60.5 | 202 | 酸化法 |
| 6 | 1.0 hr | 100 | 2.0 l/min | — | — | 52.0 | 173 | 回転炉に |
| 7 | 1.5 hr | 100 | 2.0 l/min | — | — | 57.0 | 190 | よる空気 |
| 8 | 2.0 hr | 100 | 2.0 l/min | — | — | 47.8 | 159 | 酸化法 |

実 験 お よ び 考 察

(1) 試 料

石狩金沢産泥炭を数ヶ月間風乾し、12メッシュ以下に粉碎したものを試料とした。試料の工業分析結果は第2表の通りである。

第2表 石狩金沢産ヨシ泥炭工業分析表

| 実験番号 | 水分 (%) | 灰分 (%) | 揮発分 (%) | 固定炭素 (%) | フミン酸量 (%) |
|------|--------|--------|---------|----------|-----------|
| 1 | 14.9 | 16.8 | 38.5 | 29.8 | 30.1 |
| 2 | 15.5 | 16.2 | 38.3 | 30.0 | 29.9 |
| 平均 | 15.2 | 16.5 | 38.4 | 29.9 | 30.0 |

(2) 装 置

容量 1l の三口コルベンを使用し、反応温度維持のためにコルベンを電気湯煎器の中に入れて加温し酸化を行つた。コルベンには温度計および還流冷却器を取付け、中央の口に翼を備え水銀シールしたガラス製の攪拌器を取付けた。

(3) 操 作

試料 70gr を 5%硝酸の10倍量の中に浸漬し、これに適当量の触媒を加え、良く攪拌しつゝ 60°Cで反応させた。酸化処理後濾過し、硝酸根がなくなるまで水洗いし、80°Cで乾燥させた。

これについて1% NaOHを用いて常法によりフミン酸を抽出し、塩酸で再生させてフミン酸を定量した。

(4) 触 媒

本法のごとき場合粒状触媒であれば回収可能であるが粉触媒では回収出来ない。従つて粉触媒を使用する場合はできるだけ安価な触媒でなければならないが一応酸化触媒として鉄粉、硝酸鉄、二酸化マンガン、五酸化バナジウム及硫化鉄シダーの5種を選び、これらについて実験を行つた。この場合の五酸化バナジウム触媒としてはヲサメ化学の粒状触媒を使用した。

実験結果は第3表の通りである。

第3表 硝酸化における触媒の影響

| 実験 番号 | 触 媒 の 種 類 | 泥炭量に対する触 媒添加量 (%) | 硝酸消費量 (%) | フミン酸量 (%) | フミン酸増加率 (%) |
|----------|-----------|-------------------------|--------------|--------------|----------------|
| 1 | 鉄 粉 | 1.3 | 25 | 45.6 | 152 |
| 2 | 〃 | 2.5 | 30 | 53.4 | 173 |
| 3 | 〃 | 5.0 | 37 | 60.6 | 202 |
| 4 | 硝 酸 鉄 | 2.5 | — | 49.8 | 165 |
| 5 | 〃 | 5.0 | 7 | 54.6 | 182 |
| 6 | 〃 | 7.5 | 12 | 63.6 | 212 |
| 7 | 二酸化マンガン | 0.4 | 11 | 54.0 | 180 |
| 8 | 〃 | 0.8 | 12 | 56.4 | 185 |
| 9 | 〃 | 1.6 | 14 | 58.5 | 195 |
| 10 | 五酸化バナジウム | 0.072 | 12 | 60.5 | 202 |
| 11 | 〃 | 0.144 | 14 | 68.2 | 224 |
| 12 | 硫化鉄シダー | 1.0 | 8 | 56.3 | 188 |
| 13 | 〃 | 2.0 | 10 | 63.0 | 210 |
| 14 | 〃 | 4.0 | 12 | 55.4 | 185 |

備考 酸化処理は凡て3時間で行つた。

実験の結果、鉄粉は触媒としてすぐれているのであるが、硝酸と反応するため、硝酸の消費量が30ないし35%にも達する。本法を工業化する場合、硝酸消費量は10%程度であることが望ましいので、この点において触媒として鉄粉は適当でないことが判つた。他の触媒は概ね硝酸

消費量の点では満足すべきものであつた。二酸化マンガ及硝酸鉄は大量に用いなければ触媒効果があらはれず、工業用触媒としては使用にたえないことが明らかとなつた。実験結果により五酸化バナジウム触媒と硫化鉍シンダーが最適の触媒である事を知ることができた。

(5) 最適条件の決定

実験結果から優秀と認められた五酸化バナジウム触媒と硫化鉍シンダー触媒を用いて硝酸々化を行う場合、処理時間および触媒使用量の最適条件を求めるための実験を行った。

実験結果は第4表及び第5表の通りである。

第4表 硫化鉍シンダー触媒の影響

| 実験番号 | 泥炭量に対する添加量 (%) | 酸化時間 (hr) | フミン酸量 (%) | フミン酸増加率 (%) |
|------|----------------|-----------|-----------|-------------|
| 1 | 0.5 | 3.0 | 51.0 | 170 |
| 2 | 1.0 | 1.5 | 40.2 | 134 |
| 3 | 1.0 | 3.0 | 56.3 | 185 |
| 4 | 2.0 | 1.5 | 52.3 | 175 |
| 4 | 2.0 | 3.0 | 63.0 | 210 |
| 6 | 4.0 | 1.5 | 58.5 | 195 |
| 7 | 4.0 | 3.0 | 54.0 | 180 |

第5表 五酸化バナジウム触媒の影響

| 実験番号 | 泥炭量に対する添加量 (%) | 酸化時間 (hr) | フミン酸量 (%) | フミン酸増加率 (%) |
|------|----------------|-----------|-----------|-------------|
| 1 | 0.072 | 1.5 | 49.4 | 165 |
| 2 | 0.072 | 3.0 | 60.6 | 202 |
| 3 | 0.103 | 1.5 | 62.1 | 207 |
| 4 | 0.103 | 3.0 | 63.6 | 212 |
| 5 | 0.144 | 3.0 | 68.2 | 224 |
| 6 | 0.154 | 1.5 | 62.6 | 215 |
| 7 | 0.154 | 3.0 | 70.0 | 233 |
| 8 | 0.206 | 1.5 | 54.0 | 180 |
| 9 | 0.206 | 3.0 | 61.8 | 205 |

a) 硫化鉍シンダー触媒

実験に用いた硫化鉍シンダーの組成は次のごときものであつた。

硫化鉍シンダー組成 (%)

| S | Fe | SO ₃ | Al ₂ O ₃ | CaO | MgO | Mn | Zn | Cu | As | SiO ₂ | Se |
|-------|------|-----------------|--------------------------------|------|------|------|-------|-------|------|------------------|-------|
| 1.873 | 0.33 | 1.775 | 0.24 | 0.05 | 0.09 | 0.08 | 0.196 | 0.039 | 0.01 | 33.85 | 0.167 |

実験の結果使用泥炭量に対し使用触媒量が比較的少量の場合でも、フミン酸を相当量増加せしめる事が出来た。しかし工業化の場合はおおむねフミン酸増加率は200%を越える事が望ましく、よつて触媒添加量を泥炭量に対し2~4%とし、酸化時間を3ないし2.5時間とすることが最適であると認められた。

b) 五酸化バナジウム触媒

実験に使用した触媒はフサメ化学の粒状触媒であつて、V₂O₅含有量7.2%のものであつた。尙ほ表中の触媒添加量 (%) は V₂O₅として計算してある。

本触媒について実験の結果、酸化処理時間を3時間とした場合には、常にフミン酸増加率は200%を越えており、触媒添加量0.072%ですでに所期の目的を達する事が出来た。触媒添加量0.154%が最高使用限界で、これ以上触媒添加量を増加させると、フミン酸量は却つて減少する傾向があつた。

酸化処理時間を1.5時間とした場合には、触媒添加量0.103ないし0.154%においてフミン酸増加率が最高を示した。

以上の結果より使用泥炭量に対し触媒を0.103%添加し、酸化処理時間を1.5時間とすることが最適条件と思われる。

次に五酸化バナジウム触媒の寿命を知るために、回収触媒について反復使用の効果について実験を行つた。

実験結果は第6表の通りである。

(a) 第 6 表 (b)

| 使用回数 | フミン酸量 (%) | フミン酸増加率 (%) | 使用回数 | フミン酸量 (%) | フミン酸増加率 (%) |
|------|-----------|-------------|------|-----------|-------------|
| 1 回目 | 61.8 | 205 | 1 回目 | 69.0 | 230 |
| 2 回目 | 60.6 | 202 | 2 回目 | 67.4 | 224 |
| 3 回目 | 57.9 | 193 | 3 回目 | 66.0 | 220 |
| 4 回目 | 55.3 | 185 | 4 回目 | 63.0 | 210 |
| 5 回目 | 54.0 | 180 | 5 回目 | 62.1 | 207 |
| 6 回目 | 54.0 | 180 | 6 回目 | 61.8 | 205 |
| | | | 7 回目 | 61.7 | 205 |

備考 (a) は五酸化バナジウム添加量 0.205%で酸化時間は3時づつ行つた。
(b) は五酸化バナジウム添加量 0.154%で酸化時間は3時づつ行つた。

実験の結果触媒効果は次第に減少して行くが、相当に長期間にわたり回収使用することが出来る事を知った。

結 語

泥炭の硝酸化によつてフミン酸の増加を行う場合において、触媒を添加して接触的硝酸酸化を行う事により、無触媒硝酸化の場合のフミン酸増加率および硝酸の消費量を変える事なく、酸化処理時間をおおむね $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{4}$ に短縮する事ができた。即ち安価な硫化鉍シンダー触媒においては泥炭量に対し添加量 2~4%，酸化時間 3~2.5 時間で所期目的を達する事が出来、五酸化バナジウム触媒の場合は添加量 0.103%，酸化時間 1.5 時間が最適条件である事がわかつた。

なほ五酸化バナジウム触媒は高価ではあるが使用後回収して反復使用出来るので、コストを低下することができるから、本法の目的に対しては最も良い触媒であると思われる。

次に五酸化バナジウム触媒や硫化鉍シンダー触媒はある一定量以上に添加すると、一般にフミン酸量はかえつて減少する傾向がある。此の現象は空気酸化の場合においてもある程度以上の空気を通じた時観察されることである。すなわち空気酸化による酸化時間はある一定時間において酸化平衡に達し、この時間以上になるとフミン酸量は減少するのである(第1表参照)。これはアンモニア化についても観察されたことである⁷。此の原因については現在研究中である。

本研究を行うに当り東洋高压工業株式会社北海道工業所の御援助を受けたこと多大である。又実験については坂田誠司君、木村漢君の援助を得た。こゝにあわせて厚く感謝の意を表する。本研究の費用の一部は文部省科学試験研究費によつた。

(昭和 29 年 10 月 6 日 日本化学会北海道支部大会にて発表)

(昭和 30 年 5 月 31 日受理)

7 佐藤久次, 佐々木満雄: 室工大研報, 1 (1953)

市販真鍮線の応力腐蝕の研究

西 田 恵 三

On the Stress Corrosion of Commercial Brass Wire

Keizo Nishida

Abstract

Commercial brass wire (2m/m dia.) was corroded with various tensile stresses in the ammoniacal atmosphere vapored from 4.4% aqueous solution of ammonia.

Then the relation between initial stress and time to failure and the cracked structures were observed with as drawn or annealed samples.

Though our stress-corrosion apparatus was very simple and had some error, with attention duly paid its result was found considerably reliable and very convenient to compare the data of the as drawn with those of the annealed.

As the results of this study, some details were found as follows:

1. With the as drawn state, the failure occurs in shorter time under a certain or less stress than annealed state, in which brass wire has minimum limit of stress-corrosion failure. Therefore, the worked brass must be avoided to use in such an atmosphere.

2. In a shorter time of corrosion, the cracking proceeds from the intergranular type to the transgranular eventually, that is more liable with the as drawn.

3. In the inner grains, the pre-existed twinned planes of as drawn samples are preeminently corrosion-cracked, but much less of annealed ones. However, these differences of cracking type are not of substance, but only of degree of magnitude.

The mechanism of the above mentioned phenomena of stress-corrosion was qualitatively discussed in the end.

【 緒 言

腐蝕雰囲気における金属材料はその降伏点以下の応力を加えられる場合でも異常に早く破断することは、古くより知られている真鍮の脱亜鉛現象、時に時季割れと関連して注目する処となり、現在までこれらに関係した研究が相当広範囲に行われており、¹ これらの現象を総合して「応力腐蝕」と云っている。応力腐蝕を生ずるには、ある材料に対しては特定の雰囲気

1 主なる論文集としては「Symposium on Stress Corrosion Cracking of Metals」(1945)である。以後これを単に「Symposium」とのべる。

あげられている。² たとえば、真鍮ではアンモニアガス又は水溶液およびアミン類があげられそれぞれ研究されている。著者は、現在市販されている真鍮線を用い、これがいかなる応力腐蝕を行うか、又その機構はいかなるものであるかを研究する目的で、市販材そのままのものとこれを焼鈍したものに対して、引張応力のもとでアンモニアガス雰囲気中の腐蝕を行った。その結果を報告する。

II 実験材料とその研究方法

実験材料としては市販真鍮線でその直径は約2m/mである。この分析結果は表に示す通りでの真鍮であるが鉄が幾分多い。市販のままの材料 (今後はこれを加工材という) の顕微鏡組織は写真1. にあげたが、これによると割合に粒子が大きく双晶面がゆがむ程加工変形を受けている。³ この材料の応力-歪曲線は第1図の様であつて0.2%の永久歪を生ずる応力を降伏点とすると、この値は49.5kg/mm²である。さらに電気抵抗-歪曲線をも求めた。

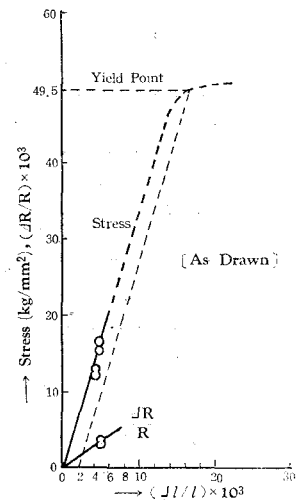
第1表 試料の分析値(重量パーセント)

| Cu | Zu | Fe | Pb | Sn |
|-------|-------|------|----|----|
| 66.96 | 32.78 | 0.28 | — | — |

焼鈍材を作るには、空气中で常温より600°Cまで加熱(これに要する時間は約1.5時間)し、600°Cで1時間保持、常温まで炉冷した。この方法で得られた組織は写真2. のように、著しくその表面での粒間腐蝕が現れていたので黒鉛末中で加熱する方法を行った結果、この現象が非常に軽減されたけれども、念のため直径1.9m/mに仕上げた。⁴

焼鈍材の内部組織は写真3. の通りで、先の加工材と比較するに、粒子の大きさが比較的小さくなつており形も整つていことがわかる。本材料の応力-歪曲線は第2図に示されたごとく降伏点は13kg/mm²である。

実験装置としては、第3-a図に示した通り、L字型鋼製の枠に上部からネジ込み式の鋼製チャックで試料を吊し、これに腐蝕容器をつけ更に試料の下端も同様のチャックで掴み、これに荷重をのせる台をつけた。これに一定荷重をのせて試料に引張応力を生ぜしめた。



第1図 応力-歪曲線および電気抵抗-歪曲線(加工材)

2 R. B. Mears; R. H. BrownおよびE. H. Dix, Jr, "A Generalized Theory of Stress Corrosion of Alloys," Symposium

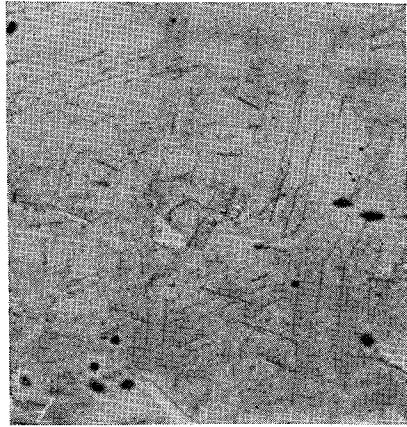
C. Edeleanu, "Transgranular Stress Corrosion in Cr-Ni Stainless Steels", J. Iron and steel Inst., vol. 173, Part 2 (1953)

3 したがつて本試料は焼鈍後仕上げまで加工をうけていることがわかる。

4 後には直径2m/mのものを用いることが出来た。材料の実際の寸法は、2.2m/m前後の直径であり各実験ごとに直径を測定して2m/m直径のものにした。



写真 1 加工材の内部組織



×300



写真 2 焼鈍材表面層の焼鈍による変化 ×300

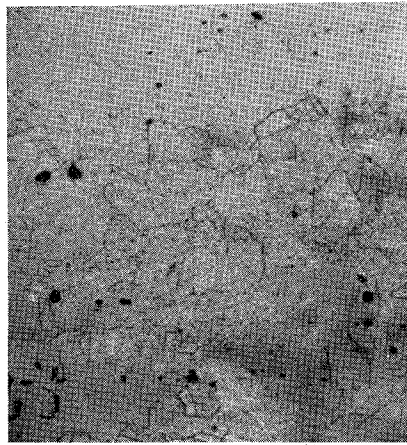
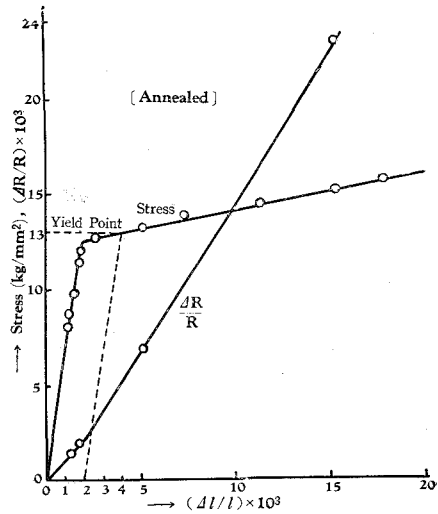
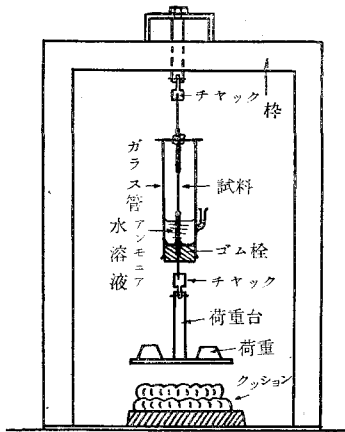


写真 3 焼鈍材の内部組織 ×300

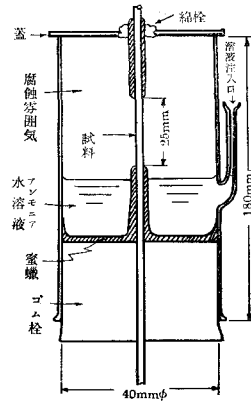
腐蝕容器は第3-b図にその細部を示した通り、ガラス製筒(直径約40mm)で、側方に溶液を注入する口をつけてこゝから溶液を入れた。筒の下端はゴム栓でおさえてこれに試料線を貫通させ、かつ溶液が試料と直接接触しないために図の斜線部分(試料の上下共)は蜜ろうを塗布し、試料の露出部分を25mmの長さにした。⁵ 筒の上端には鉄板(蜜ろう塗布したもの)を置き試料の通る孔(直径約10mm)には試料をセット後、綿花で軽くおさえた。この筒の中にアンモニア水溶液(4.4%)を側管口より入れ、これから生ずる水分、アンモニアガス、および共存する空気(主として酸素)によつて腐蝕雰囲気を作らせた。



第2図 応力—歪曲線および電気抵抗—歪曲線 (焼鈍材)



第3-a図 実験装置



第3-b図 腐蝕装置

従つてこの実験では、静引張応力(これは腐蝕進行と共に部分的に増加する)、ガス雰囲気中の応力腐蝕となる。

この腐蝕雰囲気は、一たん溶液注入後は攪乱しない。従つて、時間の経過と共に幾分その揮発するガス中のアンモニアの濃度が減少して来ることは避けられないが、本法は比較的簡単な装置で行い得る方法であり、少し注意すると、比較研究のためには差支えないことがわかつた。

5 予備試験によつてこの長さの部分と比較的一様に腐蝕されて行くのがわかつた。

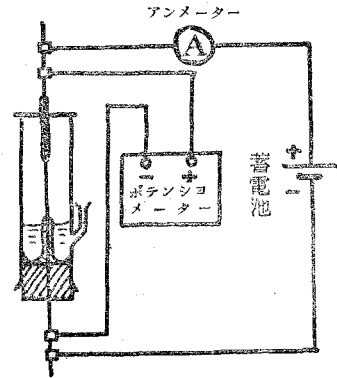
用いる試料は約30cmの長さとし、これをエメリー紙03番で磨き、加工材は2m/m、焼鈍材では1.9m/mの直径に夫々仕上げた。

測定に当つては、先づ荷重をかけ、それから溶液を注入し、以後破断までの時間を記録する。その間、破断近くなる時、電気抵抗の測定を行つた(第4図にその方法を略示した)。これは、1 amp. の電流を流し、その間の電気抵抗を電位差計の電圧の読みで測定した。電気抵抗の値は荷重をかけた時の抵抗より、これを露出部分の長さに換算し、これを規準として抵抗増加をパーセントで表した。

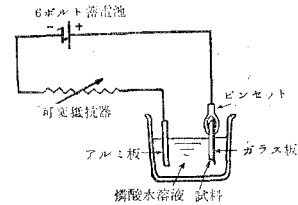
本実験は冬季と夏季の2期に分けて行つたが、冬季の場合は大抵20°Cで最大-4°C~+2°Cの開きがあり、又夏季では大抵22°Cで最大-2°C~+4°Cの開きがあつた。両季の場合共に湿度の測定は行わなかつたが、夏季の方がはるかに大である様に考えられる。

試料内部の亀裂組織を観察するには、各実験終了後試料の露出部分を取り、これをバルサムでガラス板上に接着しその表面をエメリー紙で直径の寸法まで研磨後、研磨液：

27cc H_3PO_4 conc. 73cc 水の割合の混合溶液中でアルミニウム板を陰極とし、電流密度2amp/cm²、30秒電解研磨し、ついで電流密度0.1 amp/cm²で30秒電解腐蝕を行つた。その装置および回路は第5図に略示した。



第4図 電気抵抗測定装置



第5図 試料電解研磨装置略図

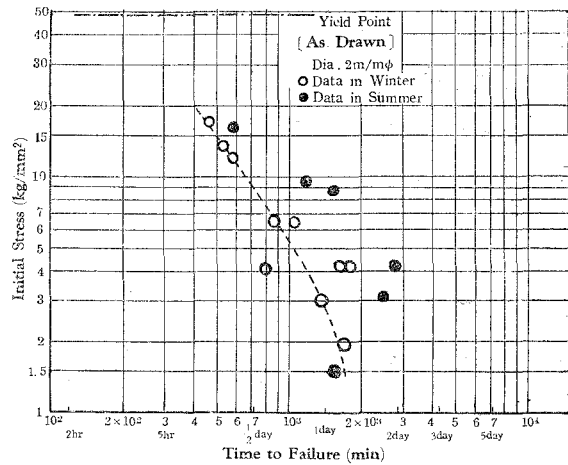
III 実験結果

(A) 加工材について

a) 加工材について初期応力-破断時間の関係を両軸対数表現で示したのが第6図である。ここで、20kg/mm²以上、1.5kg/mm²以下の初期応力については実測していないが、本測定範囲の応力では、高応力で大体直線的に変化し、応力が少い程破断までの時間が長くなる。低応力になると、応力の変化に拘らず、破断がある一定時間に極限される様に見える。又低応力程他の色々な条件が強く効いて来て実測データの再現性が乏しくなる。特に夏季の場合には、室内条件が異つているためか、冬季のデータよりも大部破断時間が延長される傾向が見られる。しかしながら、本条件において破断時間は冬季間のデータを目安と考えることが出来よう。

これらの結果より見て、試料の降伏点の僅々3%位の応力でも腐蝕雰囲気中では割合早く破断するのがわかる。

b) 上記と関連して破断までに到る電気抵抗の変化を時間に対してプロットした(両軸対数)ものが第7図である。こゝには、そのおもなるものについてあげたが、これを見ると、本図の表現において、電気抵抗の変化が時間的になめらかな曲線を示さず、ある時間で曲線の変曲点があるのが見られる。これにより、腐蝕の進行につれて一様な腐蝕が行われてないことが推察される。

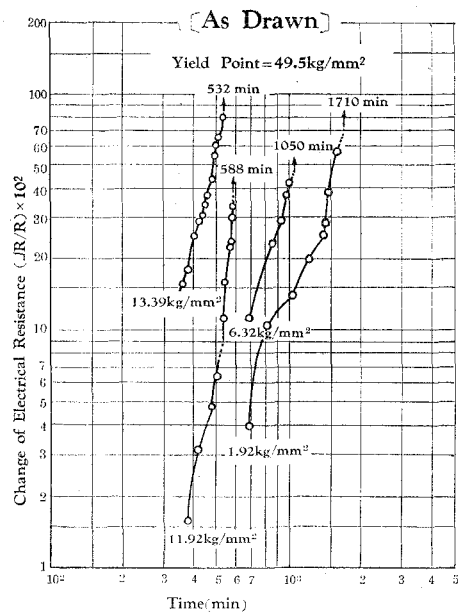


第6図 加工材の初期応力-破断時間曲線

(B) 焼鈍材について

a) 焼鈍材についても初期応力-破断時間の同様の関係を第8図に示す。塑性変形を起す様な高応力の場合も併せて測定したが、これは、低応力で腐蝕を行つても破断に到るまでに必ずこの状態を経過するため、参考のためプロットした。

降伏点以下の応力では、初期応力が減少するにしたがつて、直線的に破断時間が延長されるが、 2.5kg/mm^2 の初期応力では10,000分近く経過しても破断しなかつた(これは9,780分で荷重除去したものである)。後述の顕微鏡写真から見ると、試料の表面附近では明らかに粒子境界腐蝕が進行しているので、この応力でもやはり腐蝕はするが、それより高い応力の場合にくらべて、はるかに長時間を要することが明かで、この応力を応力腐蝕破断の最小応力とした。



第7図 電気抵抗の時間的变化

さらに又、夏季に行つたデータ(直径2m/m, エメリー紙03番仕上げ, および0番仕上げ両者の場合を含む)を併記したが、これによると概して冬期の測定値にくらべて破断時間が長いこゝで試料の直径の相異は初期応力の算出の際考慮に入れてあるが、しかし同じ応力であつて

も、断面積に差があれば、表面に腐蝕口の出来る頻度は異つて来る。広い面積程多くの亀裂が生じ易い筈であるが、一方その亀裂が中心まで進行するに要する距離が大となるため破断時間にも影響を与えることになろう。しかし唯今の場合には、加工材の場合も併せ考えると、これはおもに外界の湿度、温度の差異にもとづくものと考えられる。

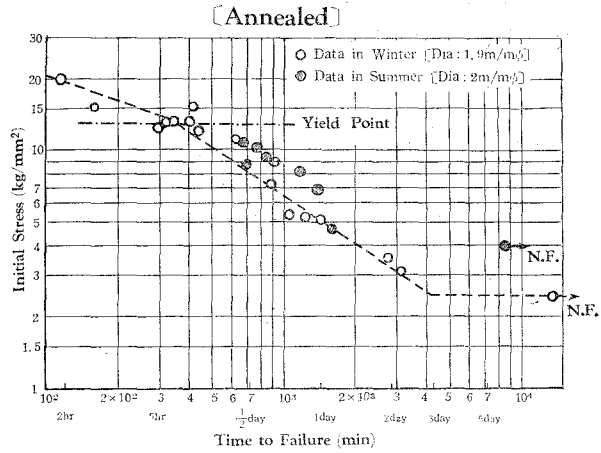
b) 加工材の場合と同様に電気抵抗の時間的変化をプロットすると

第9図の様になる。この場合には先に加工材についてのべた曲線中の変曲点が明かに見える。この中最も大きな変曲点の時間を初期応力に対してプロットすると、第10図の(b)となり、又之等の時間から破断までの時間を同様にプロットすると、第10図の(a)となり、いずれも破断曲線と同様の傾向を示している。

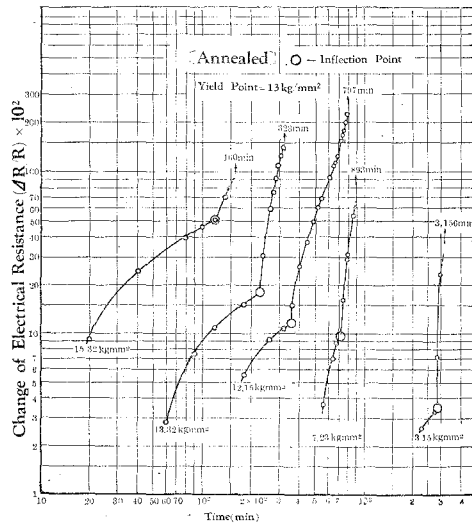
VI 腐蝕進行中の試料表面の変化

応力腐蝕を始めてから約30分後に試料表面が変色して褐色となり、やがて黒色となりこまかな液滴が一面に出来る。これが時間と共に段々大きくなり、時には流下して試料の下部(蜜蝋で被覆した部分)に溜るがそれ程多くはならない。これを透過光線で見ると深青色を呈している。ついで粒々の析出物が出来る(濃紫色)。破断までに亀裂が肉眼的に見える場合もあるが、大部分はその析出物のために見えない。亀裂が肉眼的に見える場合には、破断後の断面を見ると、亀裂が試料周囲から均一に進行していない。

破断した試料を水洗すると、溶け難い青白色の析出物が出来ていて、時には非常に固着している場合もある。一例として写真19.(d)にこれを示した。この写真の白く出ている部分が析出物で、これを剝離すると、大抵は中に亀裂が存在している。更に又、この部分の直径と腐



第8図 焼鈍材の初期応力-破断時間 曲線

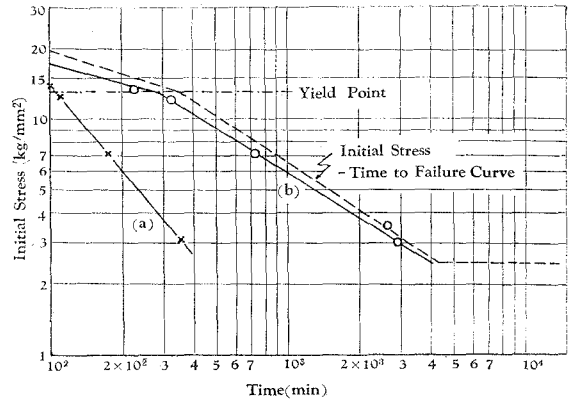


第9図 電気抵抗の時間的变化

蝕しない部分の直径とを比較すると最大 2% (普通は 1%) の減少しか示していない。

破断した位置は、試料の垂直露出部分の上部、中央部、下部に大別していつれの場所でも起り、特に上部とか下部とかには限られていない。この破断面を示したのが写真 7. (b) および写真 19. (c) である。この面で腐蝕をうけていない部分は地金の

色を示して、はつきり他の部分と区別することが出来、しかもこの部分が常に流動していることが知られる。この様に破断面上で、全然腐蝕をうけていない部分の面積は、外部応力が減少するに従って非常に少なくなつて来る。



第10図 応力腐蝕中の変化 (焼鈍材)

V 龜裂組織の顕微鏡的觀察

加工材および焼鈍材について、各初期応力による破断試料の縦断面の顕微鏡組織(主として X 300 である)を写真 4. より写真 40. に示した。こゝで破断を生ずるに到つた亀裂(以後これを主亀裂という)については、写真試料を作ることが困難なために、主として他の亀裂を示したものである。通観して、その様相たるや千差万別で、1 個の亀裂から沢山の枝が生じている場合や、沢山の亀裂が 1 個に集合する場合など非常に複雑しているが、加工材と焼鈍材とを比較して見る時、色々の点でそれぞれの特色が見られるので、これを大別して次にのべる。

(A) 加工材について

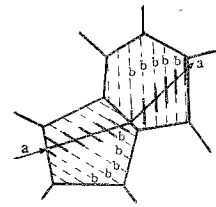
写真 4. ~ 写真 19. を通観して、一般的に次の事がいわれる。

a) 最初試料表面から僅かの距離の間は粒子境界亀裂が行われ、ついで粒子貫通に代る。しかも初期応力が減少する程、この粒子境界亀裂が続く距離が長い(写真 6. 16(c), および 18.)。

b) 粒子貫通亀裂においても、腐蝕の初期の間、および低応力の場合には双晶面⁶とある角度をなして通過する(写真 6. (a), 6. (b) の中央部分および写真 4. の中央部分)。しかし内部に進行するに従つて、あるいは高応力を加えた試料の場合には、この亀裂の方向がそれに無関係に進行する傾向を有する(写真 4. の下部および写真 6 (b) の上端)。

6 こゝでいう双晶面は、実験試料の項でものべた通り、加工材中に既に存在している双晶面のことをいう。次にのべる焼鈍材の双晶面は、加工材の場合と異つて、加工材の焼鈍によつて再結晶の結果出来たものである。しかして、こゝで“面”というのは、試料写真面上では“線”となつて現れている。

c) 試料表面層の近くで、又は低応力の場合には、あるいは主亀裂から出た小さな枝亀裂の場合には、亀裂が双晶面につき当たるとこの面でも僅かながら腐蝕が進行している。(写真14, 15, 18(a) および(b))。即ち、第11図に略示した様に、aaが主なる亀裂の進行方向であるとする、その粒子内に存在する双晶面bの方向にも腐蝕が進行している。しかも低応力の場合程この双晶面亀裂が多く現れており又その距離もより長い。



第11図
加工材粒内亀裂の一様式

d) 最初から粒子貫通亀裂が混在することもあるが、低応力の場合程この割合が少くなる。

(B) 焼鈍材について

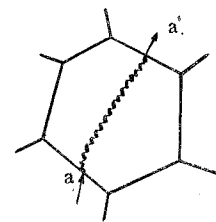
焼鈍材についての亀裂組織は写真20.~写真40. に示してある。これらを通観すると次の諸点があげられる。

a) 加工材についてあげた a) の特色はこの場合にも見られる。即ち降伏点以上の初期応力の場合でも、最初短時間の中は (これは試料表面近くのごく薄い層に当る)、粒子境界亀裂によつて腐蝕が進行しているのがわかる (写真20.~写真27.)。初期応力が減少するとこの種の腐蝕の距離が長くなる。それから粒子貫通亀裂に代る (写真27. および写真35. (a), (b))。

b) 亀裂が粒子を貫通する際、低応力ではその進行方向が粒子毎に異なることもあるが、内部に進むにつれてこの方向が全然各粒子に左右されずに中心軸の方向に進んでいる。即ち結晶粒子に殆ど無関係である (写真34. の上端)。しかしながら、その細部を見ると、第12図の様に段々つゞきの模様をなしている。

c) 加工材の場合の b, に説明した亀裂は殆ど見られない。

d) 粒子境界亀裂に粒子貫通亀裂が混在する場合も、表面層からすぐ混在することはほとんどなく (写真34. は混在する場合を示す)、低応力程その混在が試料の中心軸に近い部分にうつるのが見られる。



第12図
焼鈍材粒内亀裂の一様式

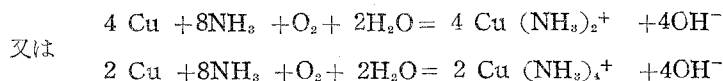
以上の亀裂組織から総合して考えると、加工材では特に既存の双晶面の影響が強ク現れており、応力が減少する程、この面での亀裂が大きくしかも密となるが、一方焼鈍材ではこの新双晶面はほとんどいってよい位その効果がないのがわかる。

VI 応力腐蝕機構について

(A) 電気化学的考察

応力腐蝕を始めると、前述観察の項で記したとおり、やがて試料表面に液滴が出来る。しかもこの液滴が深青色のより大きな液滴となる事実から、当然この試料表面において金属と水溶液の電気化学的反応が行われていると考えられる。この液滴は蒸発して来た水分は勿論、アン

モ=アも入り、更に空気中の酸素も存在しているから、試料表面においては、その酸化溶解が相ついで行われることになる。これらの反応に関しては、Read, Reed, および Rosenthal⁷ が論じ、特に溶解酸素の影響については、J. Halpern⁸ が論じ、その結果次の様な反応が最も起りやすいとしている。すなわち：



を与えている。

上式の中、いずれの反応が行われるにしても、とにかく僅少な液滴によつて銅がイオンとして溶解し、しかも錯塩を形成するため、腐蝕に必要な陽極電位が相当維持されることになろう。更に又、同時に、共存する亜鉛についても亜鉛酸根 (ZnO_2^{2-}) となつてアルカリ溶液中で溶解する外に、銅の場合と同様に、



なる反応を生じて溶解することも可能であろう。以上の諸反応によつて真鍮がアンモニア性水溶液中で早く腐蝕することがわかる。

(1) 理想的に内部応力のない場合 (焼鈍材)

試料中に応力が全然ない場合、あるいは残留応力が比較的僅少な場合に腐蝕がいかに行進するか？普通我々の取扱う材料は多結晶であるが、かかる場合には、腐蝕の進行様式には全面腐蝕と局部腐蝕とが考えられるが、試料全体の組成が各部分で均一であり、しかも何等偏在する不純物が含まれていなければ、当然全面腐蝕が行われる筈である。しかしながら実際の合金においては、かならず不純物がより多く粒子境界に集る。この境界に集つた不純物が粒子内部にくらべてある雰囲気（とくに水溶液）中で電気化学的に卑であれば、当然粒子境界の部分が粒子本体よりも早く溶解を始めることになる。さらにまた、特別に不純物がこゝに集らなくとも粒子境界の内部エネルギーが粒子内部のそれよりも高いことが知られているから、このためにも粒子境界腐蝕が優先的に行われることになる。

もちろん、腐蝕に関しては、その合金成分である金属と、そこに形成される腐蝕雰囲気とによつて定まることは当然であつて、その雰囲気中における粒内、粒界の相対的な電位差の程度により、腐蝕雰囲気がことなれば、時には別の現象即ち全面腐蝕（又は粒内腐蝕ともいう）が起る場合も報告されている。⁹ しかしながら、普通の腐蝕の場合には、一般的に粒子境界腐蝕

7 T. H. Read, J. B. Reed および H. Rosenthal; "The Mechanism of the Season Cracking of Brass," "Symposium."

8 J. Halpern; "Kinetics of the Dissolution of Copper in Aqueous Ammonia, J. Electrochem. Soc. Vol. 100, No. 10, (1953).

9 C. Edeleanu, 前掲論文。これによれば一例として不銹鋼は $\text{CuSO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4$ 水溶液中では粒界腐蝕を起し、 MgCl_2 などの塩化物溶液中では粒子貫通亀裂を起すことを報告している。

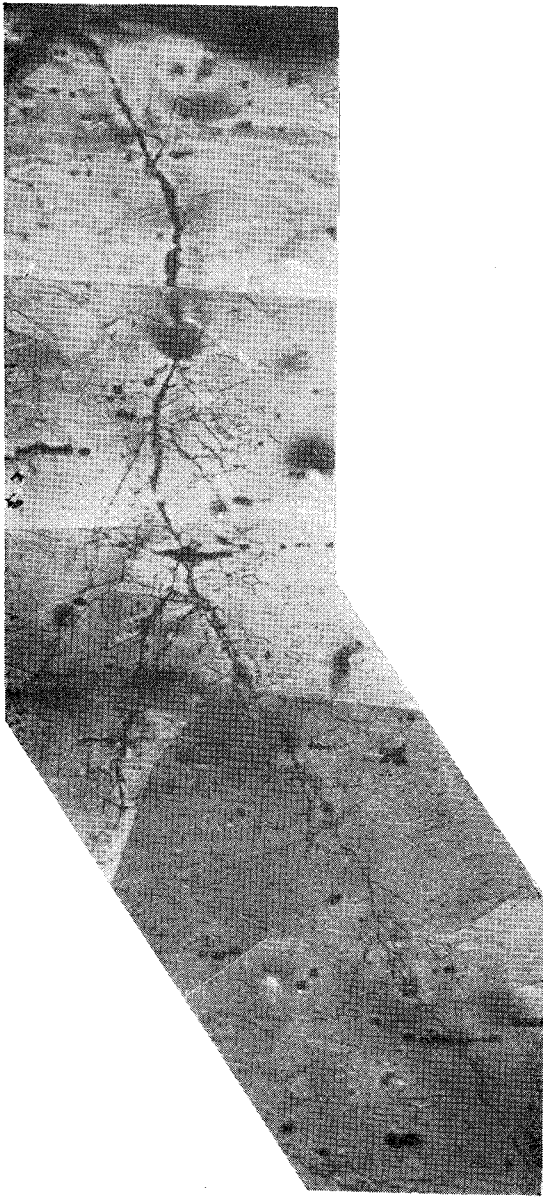
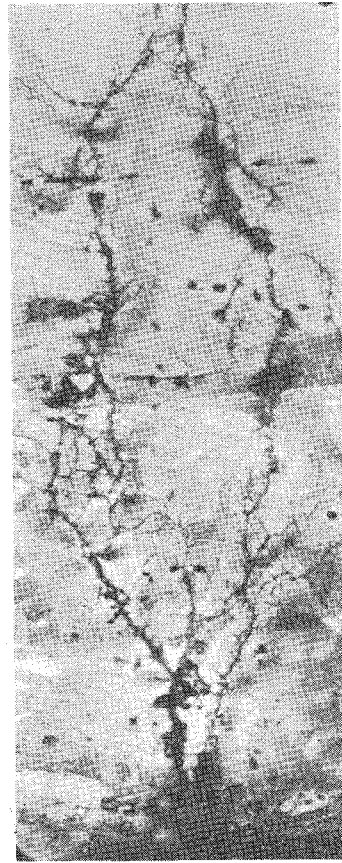
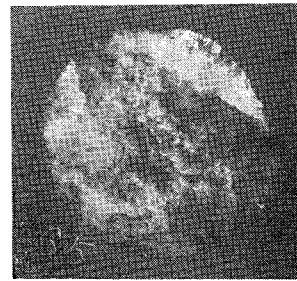


写真 4 加工材の亀裂組織 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
初期応力 = 17.07kg/mm²
破断時間 = 468min.



(a) $\times 300 \times \frac{4}{5}$

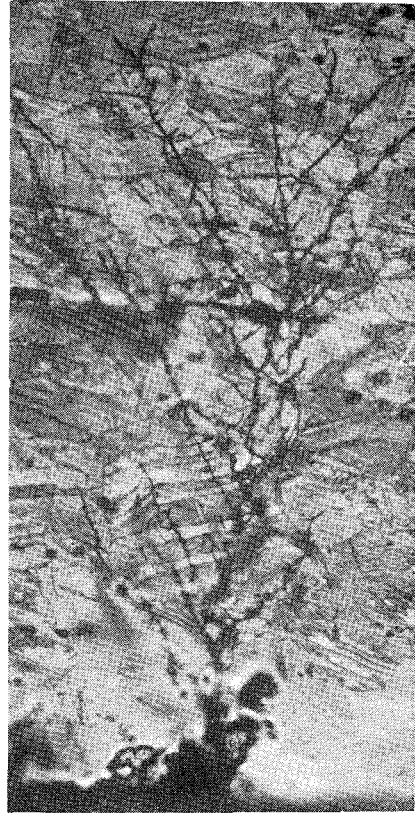


(b) $\times 20 \times \frac{4}{5}$

写真 5 加工材の亀裂組織
初期応力 = 16.38kg/mm²
破断時間 = 591min.
(b) 破断面



(a) × 300



(b) × 300

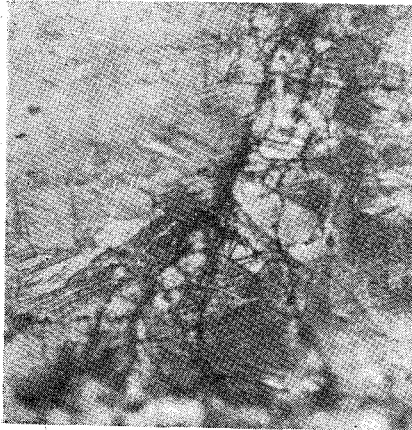
写真 6 加工材の亀裂組織

初期応力 = 13.39kg/mm²

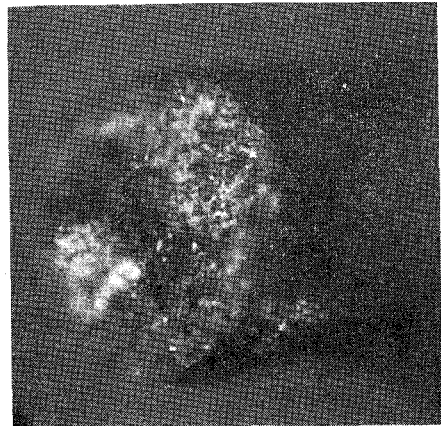
破断時間 = 532min.

(a) 中心部分の亀裂

(b) 表面附近の亀裂



(a) × 300



(b) × 20

写真 7 加工材の亀裂組織

初期応力 = 11.92kg/mm², 破断時間 = 538min.

(a) 内部亀裂

(b) 破断面 (中央左下部の白色部分は未腐蝕部を示す)

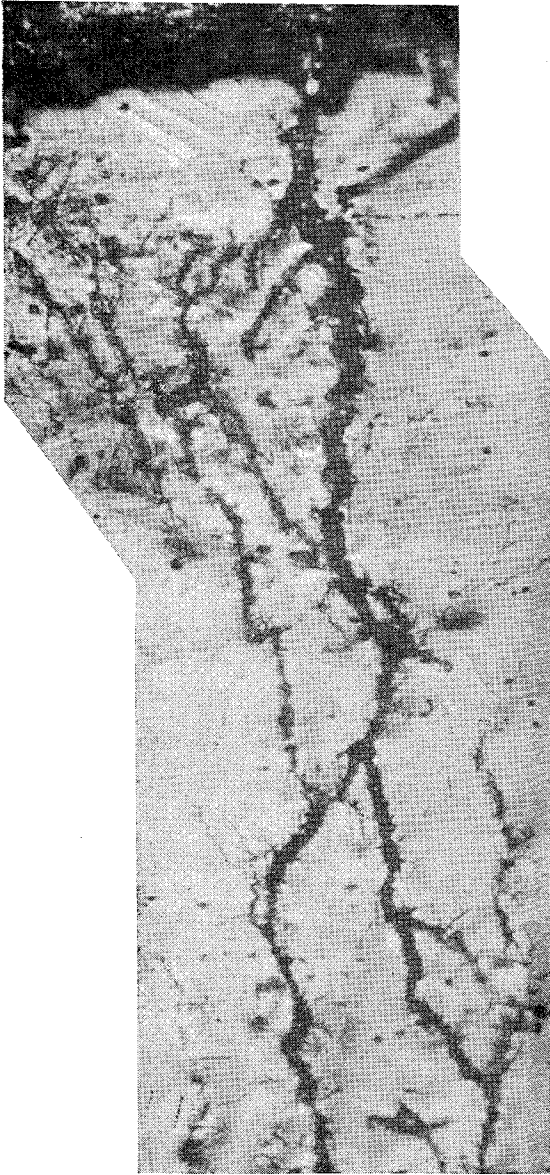


写真 8 加工材の亀裂組織 × 300
初期応力 = 9.73kg/mm²
破断時間 = 1,215min.

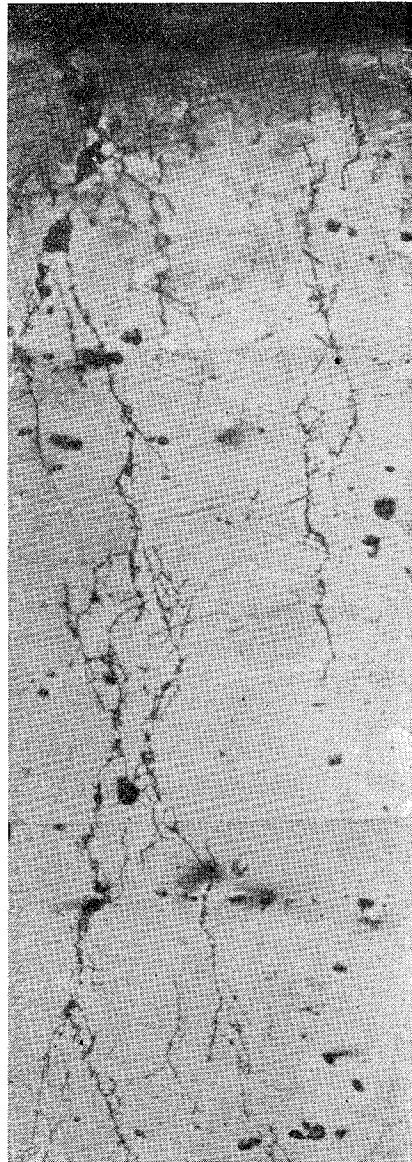


写真 9 加工材の亀裂組織 × 300
初期応力 = 8.81kg/mm²
破断時間 = 1,549min.

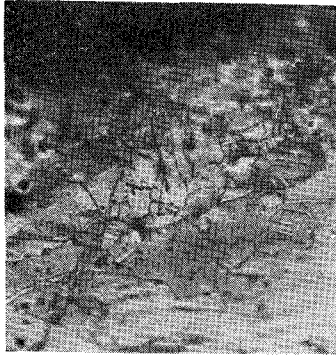
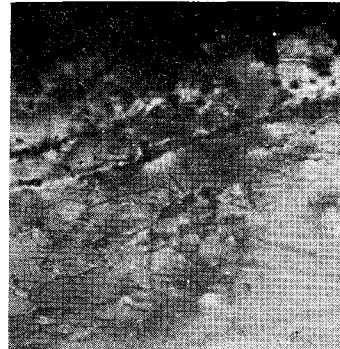


写真 10 加工材の亀裂組織



初期応力 = 8.34kg/mm^2 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 破断時間 = 970min.

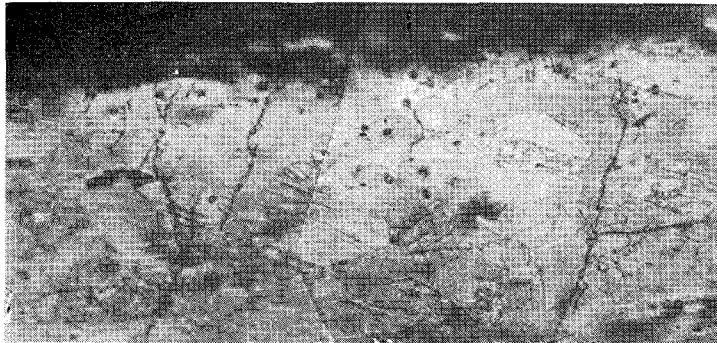


写真 11 加工材の亀裂組織

初期応力 = 6.40kg/mm^2 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 破断時間 = 860min.

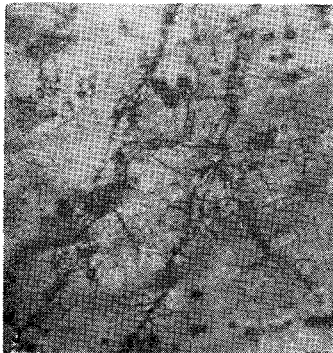
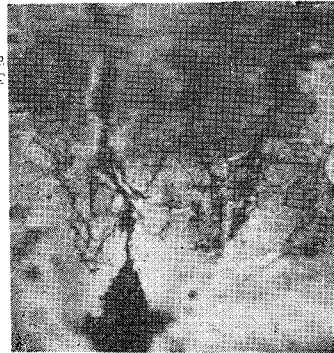


写真 12 加工材の亀裂組織



初期応力 = 6.32kg/mm^2 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 破断時間 = 1,050min.



(a) × 300



(b) × 300

写真 13 加工材の亀裂組織

初期応力 = 4.26kg/mm²

破断時間 = 2,883min.

(a) 表面附近

(b) 内部中心軸附近

写真 14

加工材の亀裂組織 × 300 × $\frac{5}{9}$

初期応力 = 4.15kg/mm²

破断時間 = 1,800min.



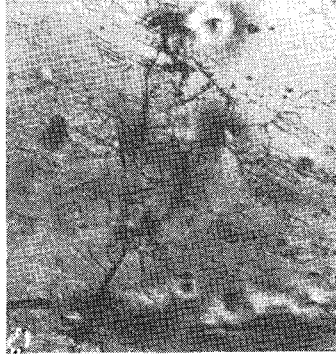
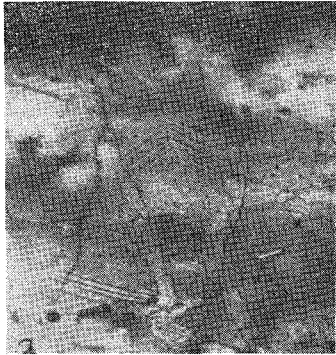


写真 15 加工材の亀裂組織
 初期応力 = $4.12\text{kg/mm}^2 \times 300 \times \frac{4}{5}$
 破断時間 = 795min.



(a) $\times 300 \times \frac{4}{5}$



(b) $\times 300 \times \frac{4}{5}$

写真 16 加工材の亀裂組織
 初期応力 = 4.17kg/mm^2
 破断時間 = 1,665min.

(a) 表面附近, (b) 内部亀裂 (c) 別の亀裂



(c) $\times 300 \times \frac{3}{5}$

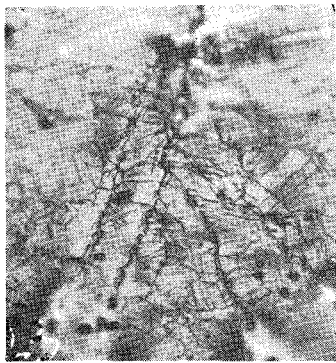
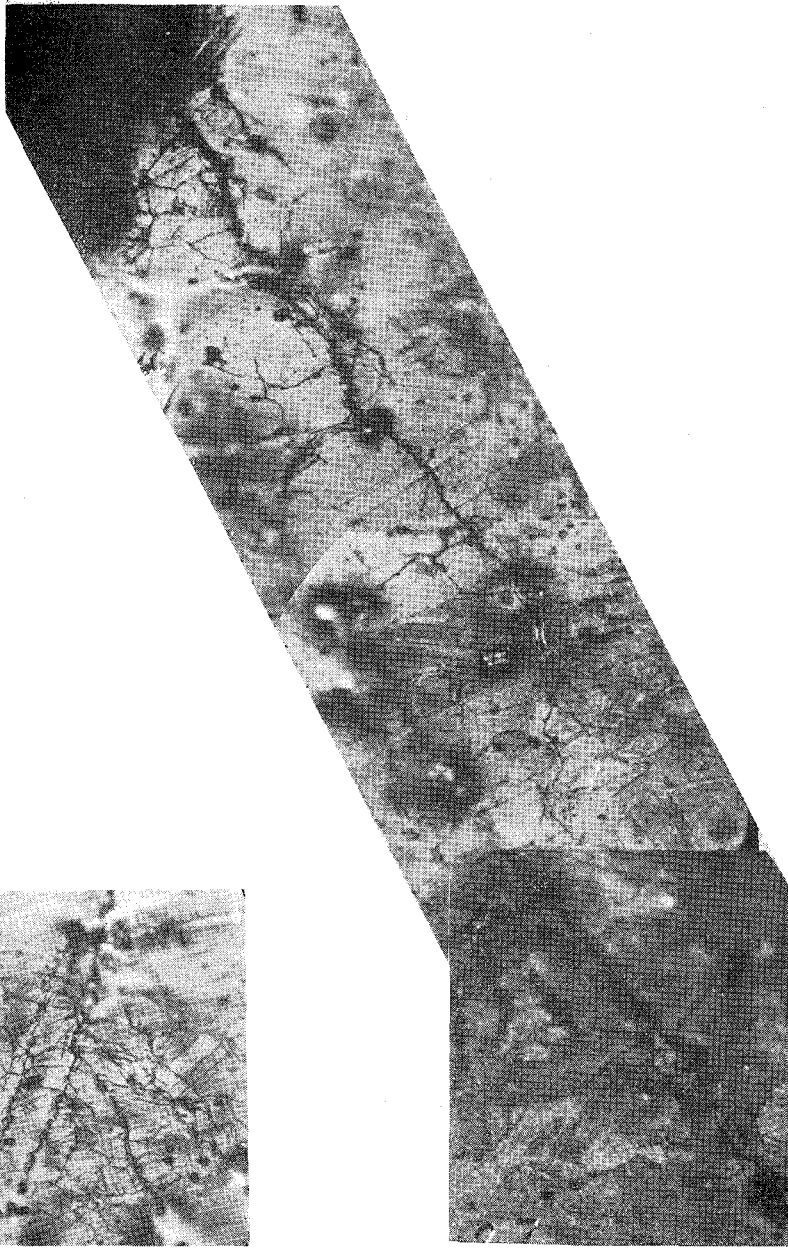


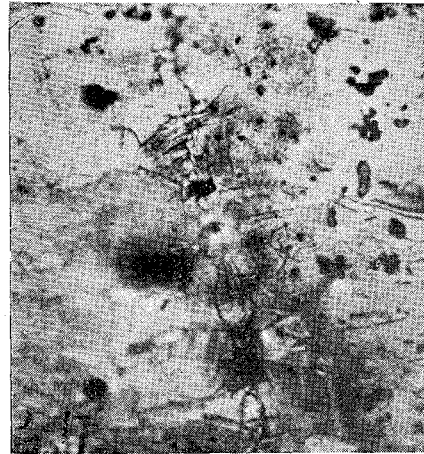
写真 17 加工材の亀裂組織
× 300
初期応力 = 3.01kg/mm²
破断時間 = 1,383min.



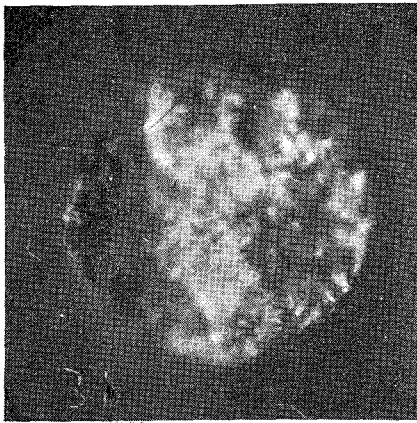
写真 18 加工材の亀裂組織 × 300 × $\frac{4}{5}$
初期応力 = 1.92kg/mm²
破断時間 = 1,710min.
主亀裂から派生した枝亀裂を示す



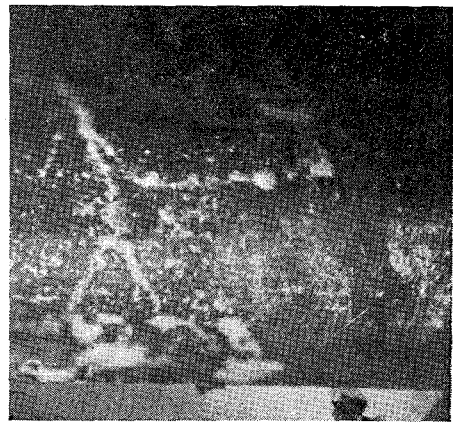
(a) × 300



(b) × 300



(c) × 20



(d) × 20

写真 19 加工材の亀裂組織

初期応力 = 1.48kg/mm², 破断時間 = 1,550min.

- (a) 主亀裂から派生した微小亀裂
- (b) 別の亀裂
- (c) 破断面
- (d) 試料表面の腐蝕生成物 (白色は析出物を示す)

が多い。

したがって、残留応力のない、しかも外部から何等の力をも加えられていない様な条件のもとで、更に粒子境界の方が粒子本体よりも卑な電位を有する様な腐蝕雰囲気においては、粒子境界腐蝕のみが進行し、その方向は当然試料内部へと向つているであらう。本実験の写真40.においては、この程度の外部応力がこの条件に大した影響を与えずに、完全に粒子境界腐蝕のみが行われているのを見ることが出来る。

つぎにこの様にして腐蝕口が段々試料内部に進行する時、起り得る現象をあげれば次の様である。

① この腐蝕溶解によつて腐蝕口に生ずる生成物が難溶性であるならば、そこに析出してこれまでの反応がおくれる結果となる。極端な場合には、この腐蝕生成物がそこに強固な被覆を作つてしまうと、それ以後の腐蝕がやんでしまう。

② もしこの生成物が可溶性であつたとしても、本実験のごとく、ガス雰囲気から試料面に凝着する液滴が下部に流下しない限り、その部分が洗い流されることが少い。従つてこの生成物の濃度が増大し、飽和に近い溶液となるのであろう。この様な状態が続けば、先の①の場合と同様に析出物被覆を生じて腐蝕速度がおくれる。

③ さきに考えた電気化学反応式に従つて、最初の短時間、腐蝕はすみやかに進行するが、腐蝕口が試料内部に深く入り込む場合には、その先端に来て居る溶液は表面にあるものと非常に異つたものになることが考えられる。即ち酸素やアンモニアが間隙の内部まで拡散することが困難になつて来る。更に又その間隙の先端における局部電池中の極部分の分極が大となつてこれからも腐蝕進行がおくれることが予想される。

(2) 焼鈍材に外部から応力が加わる場合

焼鈍材に外部から応力が加えられる場合には、平均して粒子個々にもそれ相応の応力が加わるが、その大きさは粒子によつて異つている。したがつてかゝる場合には、勿論原則としては粒子境界腐蝕が行われるべきであるが、その途中で特に応力の大きく加わつた粒子がその腐蝕通路に突当つた時には、その粒子内で最も内部応力の集中する箇所、即ち電気化学的に最も卑である箇所から腐蝕が進むことになり、もしその箇所が粒子のある結晶面に集中しておればその面内で腐蝕が始ることになる。しかして唯今の α 真鍮の場合、面心立方構造であるから、この場合は(111)面がそれに相当すると考えられる。

もちろんこの時外部から加えられた応力の方向がその進行方向に対して影響を与える。この応力の方向がその粒子の最高応力面と垂直の関係にあれば、当然その面のみで腐蝕が進行するであらう(第13図(a)の様式)。しかし又この面とある角度をなしている場合には、その高応



写真 20 焼鈍材の亀裂組織 × 300

初期応力 = 18.40kg/mm²

破断時間 = 62min.



(a)



写真 21 焼鈍材の亀裂組織 × 300

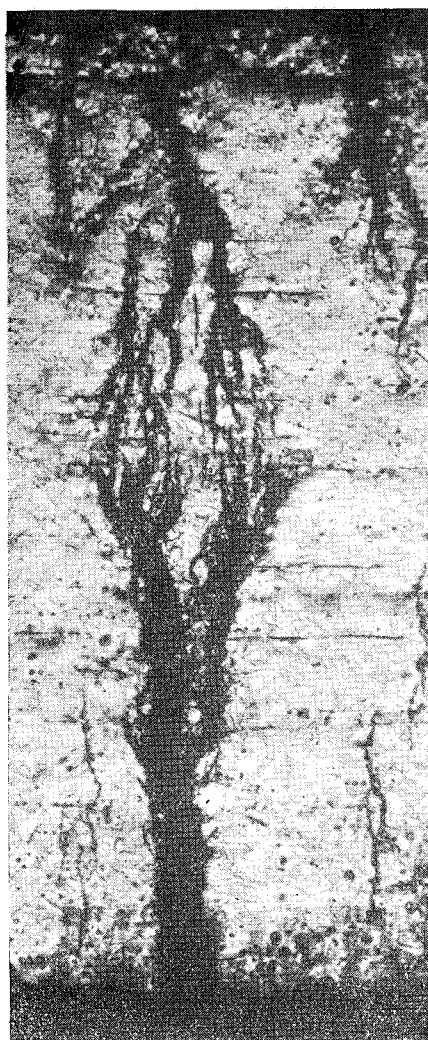
初期応力 = 15.23kg/mm²

破断時間 = 160min.

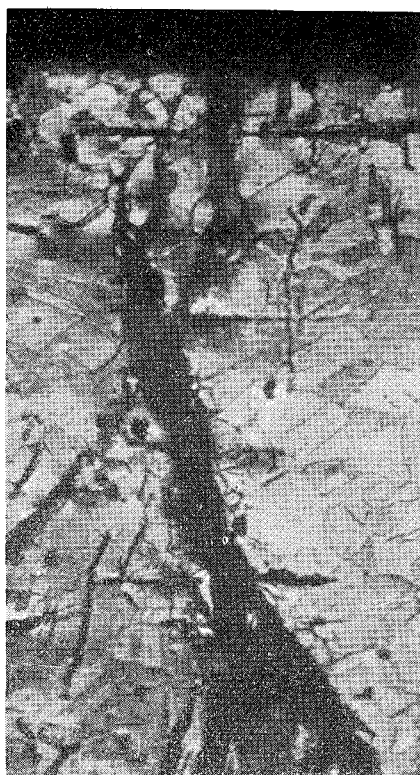


(b) × 300

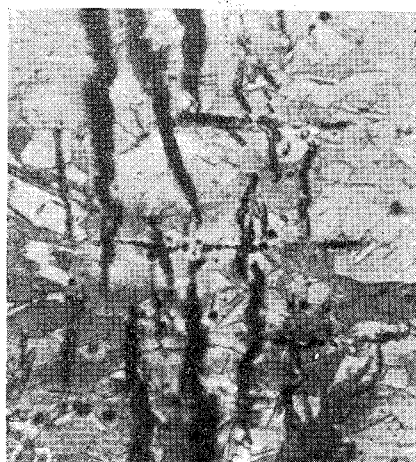
写真 22 焼鈍材の亀裂組織
初期応力 = 18.40kg/mm²
破断時間 = 116min.



(a) × 90



(b) × 300



(c) × 300

写真 23 焼鈍材の亀裂組織

初期応力 = 1.532kg/mm²

破断時間 = 414min.

(a) 全断面を示す。特に亀裂巾が拡大している。

(a) ; (c) は (a) の部分的拡大を示す。



写真 24 焼鈍材の亀裂組織 $\times 90 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 13.32kg/mm²
 破断時間 = 406min.

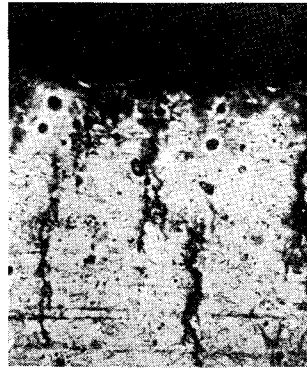


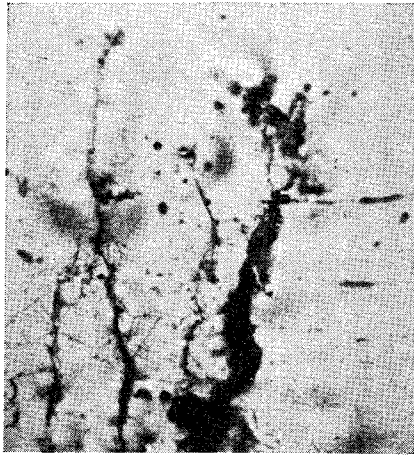
写真 26 焼鈍材の亀裂組織 $\times 90 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 12.23kg/mm²
 破断時間 = 294min.



写真 25 焼鈍材の亀裂組織 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 13.32kg/mm²
 破断時間 = 345min.



写真 27 焼鈍材の亀裂組織 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 12.15kg/mm²
 破断時間 = 797min.



(a) × 300

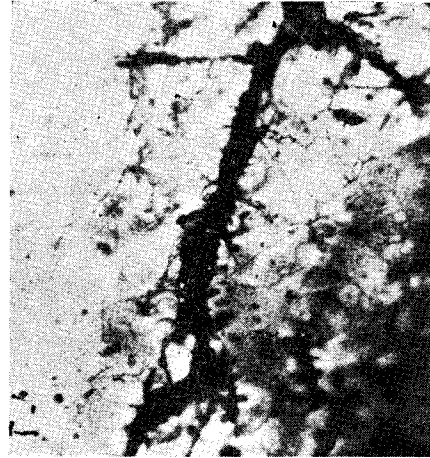


写真 29 焼鈍材の亀裂組織 × 300
初期応力 = 9.24kg/mm²
破断時間 = 903min.



(a) × 300

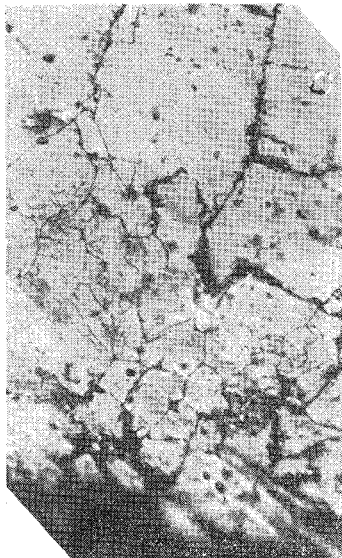
写真 28 焼鈍材の亀裂組織
初期応力 = 11.15kg/mm²
破断時間 = 677min.
(a) 亀裂の先端, (b) 表面附近



× 300

写真 30 焼鈍材の亀裂組織
初期応力 = 9.37kg/mm²
破断時間 = 8²9min.

写真 31 焼鈍材の亀裂組織
 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 8.82kg/mm²
 破断時間 = 713min.
 主亀裂より派生した微小亀裂



(a) $\times 300 \times \frac{4}{5}$

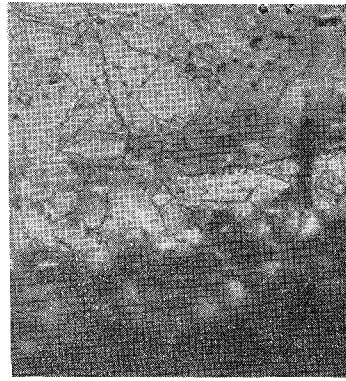
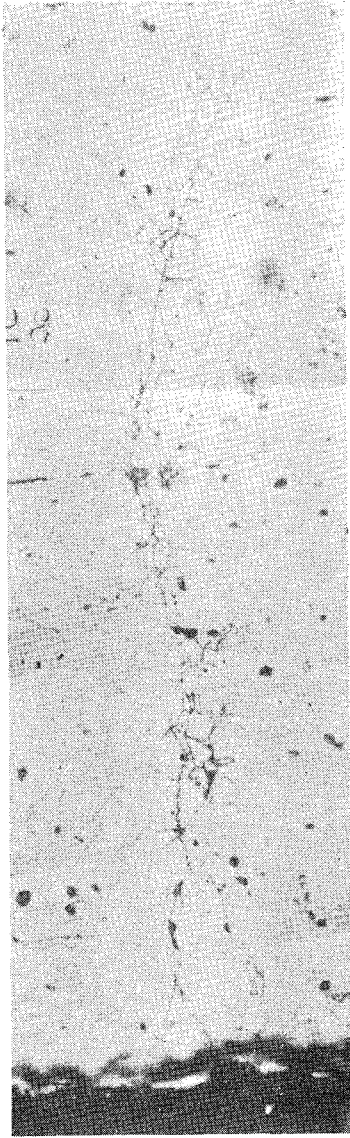


(b) $\times 300 \times \frac{4}{5}$

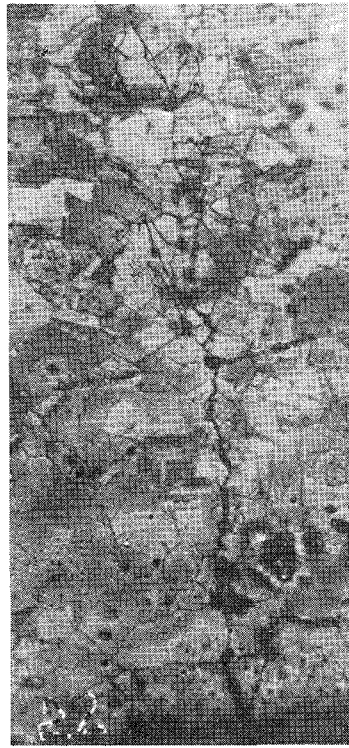
写真 32 焼鈍材の亀裂組織
 初期応力 = 7.23kg/mm²
 破断時間 = 893min.



写真 33 焼鈍材の亀裂組織
 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 5.40kg/mm²
 破断時間 = 1,070min.



(a)



(b)

$\times 300 \times \frac{4}{5}$

写真 34 焼鈍材の亀裂組織

初期応力 = 6.92kg/mm²

破断時間 = 1,228min.

$\times 300 \times \frac{4}{5}$

写真 35 焼鈍材の亀裂組織

初期応力 = 3.60kg/mm²

破断時間 = 2,838min.



写真 36 脆鈍材の亀裂組織
 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 5.21kg/mm²
 破断時間 = 1,464min.

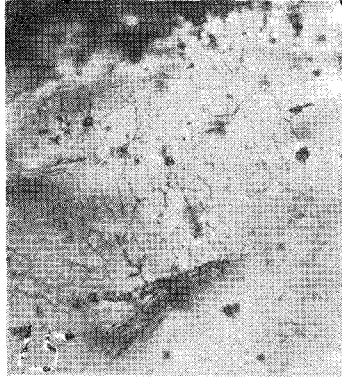


写真 37 脆鈍材の亀裂組織
 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 4.69kg/mm²
 破断時間 = 1,598min.

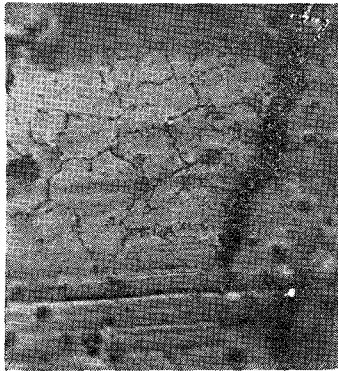


写真 38 脆鈍材の亀裂組織
 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 3.60kg/mm²
 破断時間 = 2,838min.

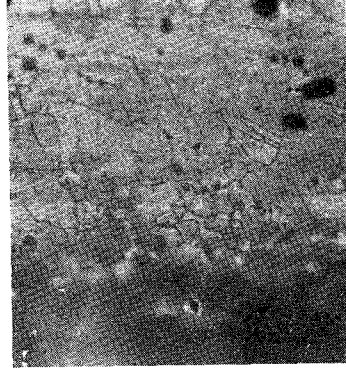
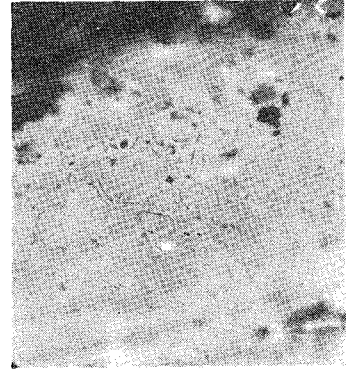
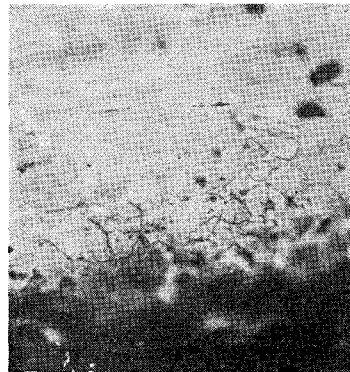


写真 39 脆鈍材の亀裂組織
 $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 初期応力 = 3.16kg/mm²
 破断時間 = 3,156min.

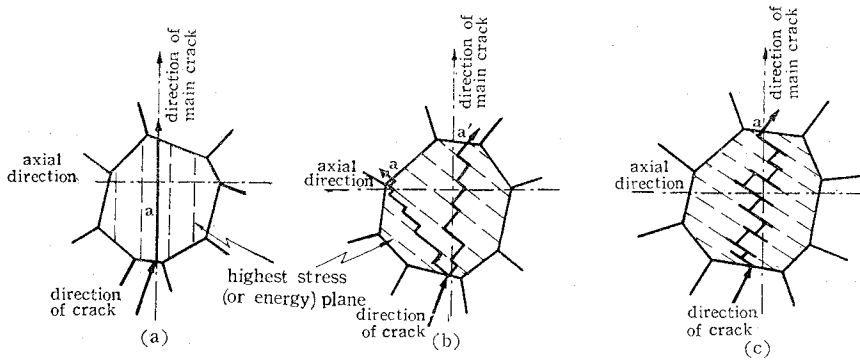


(a) $\times 300 \times \frac{4}{5}$



(b) $\times 300 \times \frac{4}{5}$
 写真 40 脆鈍材の亀裂組織
 初期応力 = 2.47kg/mm²
 破断時間 = 9,780min. 後でも破断せず.

力面上で腐蝕が進行すると同時に、なるべく試料軸の方向に進むであろう。10 従つてこの高



第13図 粒内亀裂の各種様式

応力面の電気化学的性質によつて第13図 (b) の a 又は a' の経過をたどることもあれば、時には第13図 (c) の様な経過となる場合も生ずる。以上の事から、腐蝕現象は、その個々の粒子の外部から加えられた応力の方向に対する方位、腐蝕通路の粒子に突当る位置、さらに又この通路と粒子の結晶方向とのなす角度などが相互に影響し、それらの通路における電気化学的性質と相まつて、色々な腐蝕様式を示すことになる。

外部からの応力が増大すれば、上述の関係の中第13図 (b) の様式が著しくなり、又試料表面層においても特に大きな応力をうける様な粒子があれば、最初からこの粒内腐蝕（普通これを亀裂という）が行われる場合もあり得る。この時には最初から両重の腐蝕が混在することになる。

さらに腐蝕が試料内部まで進行するにつれて、試料の実効断面積が減少し、従つてこの場所での応力の集中が生じ、この時も上述と同様の過程をたどるものと考えられる。

さらにまた、大きな亀裂から派生した小さな枝亀裂は、大きな亀裂が生成すると同時に生ずる場合にはそれと同様の様式を示すが、外部からの応力による効果の減退と、大きな亀裂による応力除去によつて、主として粒子境界腐蝕となり易いことが予想される。

こゝで化学反応による腐蝕進行速度に対する影響についてのべると、前記 (1) の②に記した様に、各種の原因によつて漸次その速度が遅緩されるが、外部からの応力の増加と共に亀裂間隙が拡大される様な場合には、新しい溶液がその内部に入り込むことになる外、腐蝕生成物の被覆した面に新しい露出部分が出ること等によつて、再び腐蝕速度が増加して来るであろう。しかして、上記の如く一時的に腐蝕速度が遅緩する際には、こゝから枝状亀裂が出来る可能性が増大する。一方大きな亀裂場所で間隙の拡大が起れば、その附近の小さな亀裂では却つてその間隙が抑えられるか、又はその附近の応力除去によつて、それ以上の腐蝕の進行が阻止され

10 これは後述の Notch Effectとも関連しているので、特にこゝでは論じない。

る場合も起り得る。これらの関係が総合されて電気抵抗の時間的変化に変曲点が生ずるものと考えられる。

(3) 内部歪および残留応力がある場合 (加工材)

加工変形したまゝの材料では、平均の永久歪が考えられても、個々の粒子についていえばその歪の程度(従つて又残留応力¹¹の程度)が当然異つている。かかる粒子の集合した材料が腐蝕を受ける場合、焼鈍材に応力を外部から加えた場合と同様に、個々の粒子の試料軸に対する配位、その粒子に突当る亀裂の先端の位置等によつて各種の様式の腐蝕を行う。しかしながら加工材では粒子の内部応力(歪エネルギー)が比較的大であるため、粒子境界の示す電気化学的電位と大差のない(ある場合にはそれを越える)電位を粒内で有することになる。又粒子の形状も、加工方向に長くなつているため、たとえ同じ腐蝕速度で粒界、粒内が腐蝕される場合でも粒界だけでは長時間を要する。更に又内部応力の集中する面が線引加工の場合にはこの線引方向と垂直な面上にある傾向を有するから粒子貫通亀裂を生ずる傾向が強くなつて来る。

実際の亀裂組織を見ると、特に加工材の特色ある現象として既存双晶面での亀裂が焼鈍材と異つていることは既に観察した通りである。これは焼鈍材の加工によつて更に大きい歪エネルギーを有することになり、従つてこの面でも腐蝕が行われることは当然と考えられる。これがため加工材の亀裂が焼鈍材と異なつた様相を呈している様に見える。

(4) 加工材に外部から応力が加わつた場合

加工材に更に外部から応力が加わつた場合にはその応力が個々の粒子の既存の残留応力にいかの影響をおよぼすかによつて定つて来る。これを大別すると、この応力が加工材の降伏点以上の場合と、それ以下の場合とに分けられる。

① 加工材の降伏点以上の応力を加えた場合

これは先の焼鈍材における場合と全く同様の経過をたどるであろう。本実験においてはその実測値はないが、恐らく降伏点以下の応力の場合にくらべて外部応力に対する敏感性が増大する筈で第6図の初期応力破断時間曲線の延長が降伏点に相当する位置から緩傾斜となることは想像に難くない。

② 降伏点以下の応力を加えた場合

この時は外部からの応力が低下するにつれて、個々の粒子に対する影響が少くなる。加工度が非常に大であれば、ある値の外部応力以下では全然その効果がなくなり、それ自身の歪(残留応力)によつて電気化学的に卑な箇所から腐蝕が進行し(この場合には粒子貫通亀裂のみであろう)、したがつてある一定の時間で破断するに到るであろう。

11 残留応力は、平均して大略その降伏点に相当する値を有しているが各粒子の歪の程度が異つている場合には、この値も夫々ことなつている。

既存加工の程度が少くなるに従つて矢張り最小応力腐蝕破断限が現れるであろう。

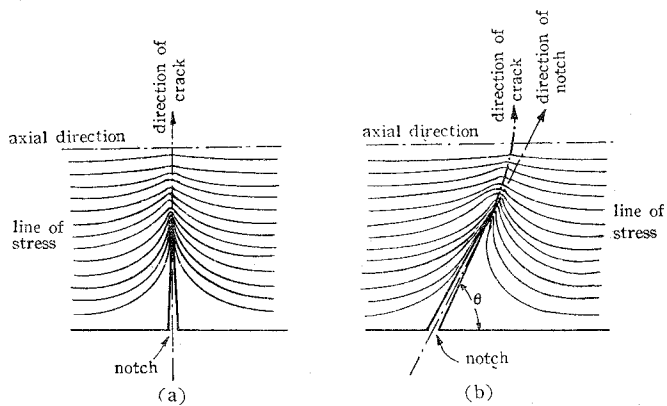
(B) 所謂 Notch Effect について

衝撃試験に用いる試料には切欠きをつける場合とつけない場合があるが、この切欠きをつける場合には当然その部分では断面が小であるから応力の集中が生ずる。そこでこの切欠きの形が重要となつて、この寸法も定められていることは周知の事である。唯今の場合にも、非常に狭い腐蝕口の先端付近では著しい応力の集中が生じ、極端な場合には、この部分では応力単独でもこの亀裂が進行することも考えられる。

(第14図参照)

又金属材料の疲労破断の場合には、最後に材料各部に微小亀裂を生ずることにより破断に到るが、疲労限以下の応力では微小亀裂を生じない。¹²

しからば唯今の様な応力腐蝕において Notch Effect が

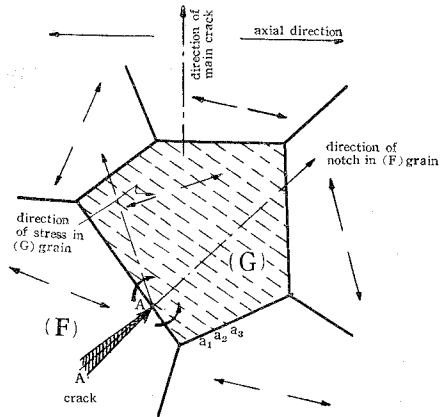


第14図 応力分布に対するNotchの効果

いかなる因子として働いているであろうか。これまでの説明では、亀裂の進行を電気化学的反應のみで解釈した。実際腐蝕雰囲気なしでは、降伏点の20~40%位の応力を以つては、いかに長時間外部から応力を加えても破断しないであろう。しかし腐蝕亀裂の様な微視的間隙の先端では異常に高い応力の集中が起り、これがために亀裂の伝播が早くなることも考えられる。

今改めて、個々の粒子について力学的な Notch Effect を加味した場合を考えることに

する。第15図に試料内の粒子 (G) を示したが、これに AA という亀裂が突当つたと考える。



第15図 粒内の各種応力の関係

12 茅 誠 司; "金属の物理" (共立出版社) (1948), pp. 96~98
 深井 誠 吉; "黄銅の疲労破壊に関する顕微鏡的研究, 日本金属学会誌, 第5巻 第6号 (1941); 第6巻 第6号 (1942).
 深井 誠 吉, 五十嵐 勇; "疲れ強度と弾性限の関係について (第1報)," 日本機械学会論文集, 第5巻 第20号 (第1部)

その周囲の各粒子内の矢印（反対向き的一对）は夫々の応力方向を示す。外部からの応力は水平の方向とする。しかる時は、(G) 粒子のA点で (F) 粒子の亀裂の効果が働いて、弯曲矢印の様な効果が (G) 粒子におよぼされるであろう。又 (G) 粒子が単独である場合には、 a_1 , a_2 , a_3 , ……の様な高エネルギー面があつて腐蝕されやすいとする。一方材料全体として、亀裂は中心軸の方向に進むべきである。しかる時は

(a) ある粒子に入る亀裂の応力集中の方向（そこに生じた応力の大きさを含む）

(b) 粒子内部の応力軸と垂直な面（2次元的表现では線となる）の方向（その面での応力の大きさも含む）

(c) 粒子内部の最大歪エネルギー面の方向（これも線の方向に還元される。もちろんその面での応力の大きさも含む）
の3種の因子¹³に大別される。これら因子の相対的關係によつて亀裂の様相が定つて来る。例えば、定性的ではあるが、

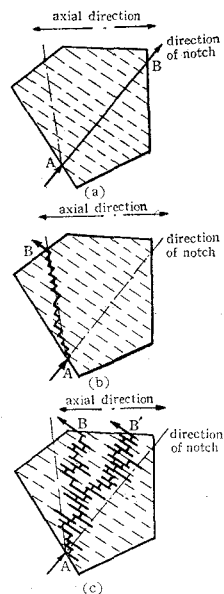
i) (a) の効果 \gg (b) の効果および (c) の効果
の場合には第16図 (a) の様になり、

ii) (b) の効果 \gg (c) の効果および (a) の効果
の場合には第16図 (b) の様になり、

iii) (c) の効果 \gg (a) の効果および (b) の効果
の場合には第16図 (c) の様な腐蝕様式を示すことになる。さらにこれら3種の効果が複雑な關係にあれば腐蝕様式がはつきり識別出来難くなる。

もちろん個々の粒子について正確な条件を知ることは目下の処不可能に近いので、これ以上の解析は無理であるが、結果としての破断後の亀裂組織を見て、逆にその亀裂の進行状態を推察することは不可能ではないであろう。

実際の亀裂組織を見ると、大体ではあるが、最初 (c) の様式から漸次 (b), (a) へと移つて行くのが見られる。この点から考えると、初期応力の大きな場合、又は試料の中心軸近くでは、Notch Effect が大なる影響を持つている様にも思われるが、先の破断面の観察から考えて、あくまでこの方向での各点における電気化学的電位の卑化による腐蝕のためであつて、純力学的な亀裂や劈開でないと思える方がむしろ妥当と思われるが、この点の確認にはさらに多くの実測データを必要とするであろう。



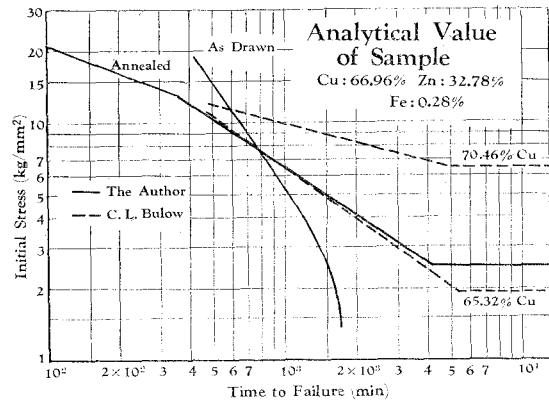
第16図
粒内亀裂と各種応力との關係

13 これらの因子の中の応力の大きさはすべて電気化学的な腐蝕電位の大きさに還元される。

Ⅶ 実験装置について

本実験装置については、Ⅱの項で記した通り、一度試験を開始すると、ある応力については最後までその雰囲気（水溶液）を自然のままにしておくために、当然雰囲気源の水溶液中のアンモニアの濃度が減少し、従つて雰囲気中のアンモニアガスも減少して来ることになる。これに関しては

精密にその変化を測定していないが最初 4.4%アンモニア水溶液が pH = 11.3であつたものが8日目（本試験の最大日数に相当する）では 9.3まで減少した。従つて試料面に凝縮する液滴中のアンモニア濃度も当然変化するであろう。それゆゑ、これを検定するために、他の人々によつて行われた実測結果¹⁴を併記するとその条件は種々異なるが第17図の鎖線



第17図 他研究者の結果と本研究結果との比較

の様になつてゐる。これから見ると、焼鈍材における傾向が大体一致していることがわかり、この点から考えると本腐蝕装置を用いる場合には、腐蝕の途中1日1回位溶液を換えることが望ましい。

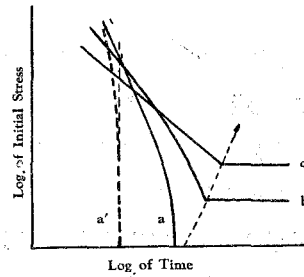
こゝで問題となるのは、雰囲気中の状態が外界の影響を受けやすいことであつて、特に温度および湿度の変化によつて実測データのバラツキが生じたものと考えられる。従つて、精密に個々のデータを求めるためには、これら外界の影響を除去する手段を必要とするであろう。

Ⅷ 総合考察

初期応力破断時間の実測データの中、最も短い時間で破断したデータを主として用い、加工材、焼鈍材について両者の曲線を併記したものが第17図の実線の如くに示される。両者は交点を有し、これは7.5kg/mm²の応力に相当する。即ちこの応力よりも高い初期応力では、加工材が焼鈍材にくらべて破断時間が長くなつており、この応力以下では逆の現象を呈している。この事実は注目に値することである。しかしてこの加工材の現象がこれまで述べた通り既存の歪および残留応力によるものであるため、外部から加えられる応力が減少しても、何等破断時間の延長にはならず、この曲線は垂直的に降下するであろう（第18図 a）。一方焼鈍材においては、外部からの応力によつて第18図 b 又は c の様に明らかに応力腐蝕限が現れるであろう。本実験では加工材を焼鈍して得た α真鍮であるので、これらの現象の変化は、本図の a から c

14 C. L. Bulow, "Stress Corrosion Testing of Cu-base Alloys", "Symposium"

(焼鈍材の実測値)まで、その焼鈍効果の大なる程、点線の矢印の方向に移るであろう。加工度が極端に大きい場合にはa'の様な曲線も得られることが予想される。したがって本試料を実際使用するに当つて、その強度を必要とするために加工材を使用する時には、微少なかゝる雰囲気においても異常に早く破断するに到ることに留意することが望ましい。



第18図 焼鈍による応力腐蝕曲線の変化

次に腐蝕亀裂の組織について一言すると、C. L. Bulow¹⁵によれば、Cu-Zn合金において、35%~40% Znの範囲内では、アムモニアガス中の応力腐蝕亀裂には粒内亀裂と粒界亀裂とが混合し、50% Zn以下では粒界亀裂のみであり、30% Znから35% Znと変化するにつれて、粒界亀裂から粒子貫通亀裂へと漸次変化すると報告しているが本実験の試料の組成は第1表にある通り、両種亀裂の混在する範囲にあり、実際にもその様な組織を得たことは既にのべた通りである。

しかして、加工材と焼鈍材とでは、その亀裂生成状態が一見して異なる様にも思われるが、先にのべた機構から見て、本質的に異なるものではなく、たゞ程度の差でしかない様に考えられる。

市販真鍮線には化学分析結果の示す通り、鉄が入っている。本実験ではただ一種類の試料しかないために比較研究することが出来ないけれども、その不純物としての効果から考えると、真鍮の降伏点を幾分変化させることも考えられるが、一方電気化学的に考えて、アムモニア水溶液中では銅よりも貴となり、これが粒子境界にあつまれば、全面腐蝕あるいは、粒子貫通亀裂傾向を生ずることが予想される。

IX 要 約

以上の考察から次のことが要約される。

1) 市販真鍮線をアムモニアガス雰囲気中で応力腐蝕を行った結果、市販のままの状態では、低応力を加えても、これを焼鈍した材料にくらべて比較的短時間で破断を生じたが、焼鈍材では応力腐蝕限のあることが見出された。

2) 腐蝕の進行様式は、最初の間は粒子境界腐蝕を行うが、やがて粒子貫通にかわる。これは高応力の場合程早く移行するが、特に加工材の場合には最初から混在する場合もある。

3) 内部粒子についていえば、加工材では既存双晶面での亀裂が著しいが、焼鈍材ではその傾向が非常に少い。しかしながらそれらの亀裂様式の差異は本質的なものでなく、ただ程度の差であるにすぎない。

15 前掲脚註 14.を見よ。

4) 上述の如き各種腐蝕様式に関して、その機構を種々定性的に論じた結果次の様に推論される。すなわち、粒子境界での電気化学的電位と、粒子内部でのそれとの大小により、その腐蝕様式が異なる。また粒内においては主として i) 亀裂効果, ii) 主応力効果, iii) 結晶面効果の3種の因子の相対的大いさにより、その亀裂の様式が異なるが、すべてこれらの効果は電気化学的意味で、より卑なる値を有する部分が腐蝕亀裂を生ずるものであると考えられる。

終りにあたつて、本研究に関していろいろと御指導および御教示を賜つた北大教授幸田博士に深甚なる謝意を表すると共に、実測にあつて種々の援助を惜しまなかつた工学士竹内邦光君に厚く感謝する次第である。

(昭和30年5月30日受理)

I-ピコリンの分光光電法による分析に ついて

小 松 藤 男

On the Spectrophotometric Determination of I-picoline

Fujio Komatsu

Abstract

During the course of studies on the utilization of tar bases, the analysis of these trace quantities has been necessary, and so we applied it for I-picoline as well as a new method for pyridine, which benzidine hydrochloride and cyanogen bromide are added and the reaction is carried out in a layer of butanol. Factors affecting the reaction, such as PH, concentration of reagent, temperature, and time were examined. Furthermore the interfering effect of accompanied other pyridine bases on the analysis of I-picoline was researched.

I 緒 論

最近タール塩基類の利用研究が非常に盛んになつてきたので、その利用研究のためには Pyridine 塩基類の微量成分の分析が当然必要となつた。著者はその微量成分について最近考案された方法¹すなわちPyridineに対してCyanogen BromideおよびBenzidine Hydrochlorideとの反応によつて赤色を生ずる比色反応を、I-picolineに対して Ito-Beckman B-type-Spectrophotometerによつて適用し、I-picolineに対しPH, 醋酸ソーダ, Benzidine, BrCNの濃度の影響, 光の影響, ならびに Pyridine 塩基類添加の妨害作用をあらたに研究した結果新しい事実を見出したので、これを概述する。

II 実験の部

1) 実験方法

1p. p. m. の I-picoline 100c.c.と Blank 溶液 100c.c.とのおおの 15%醋酸ソーダ4c.c.と Benzidine試薬 2c.c.とを加へて PH 7.1 に調整する。さらに之等に n-butanol 25c.c.と BrCN 5c.c.とを加え、充分振盪して 37°Cで 4時間暗黒中で加熱する。着色した butanol層の約5c. c.を分液漏斗で分離し、先に Blank testを行ひ、次に光電比色分析を行う。

1 Alkseev, R. I. ; Zavodskaya Lab., 8, 897-9 (1939)

Bandier, F., and Hald, J. ; Biochem. J., 33, 264 (1939)

Euler, H. von Schlenk, F., Heiwinkel, H., and Hogberg, B. ; Z. physiol. Chem., 256, 208 (1938)

2) 標準溶液及び試薬溶液の調整

(1) 1p. p. m *I*-picoline

I-picoline 1grを1lの蒸留水に薄め、1000p.p.m.となし、これより0.1c.c.とり、100c.c.に稀釈する。これに用いる*I*-picolineは関西タール会社より購入した純製品をさらに数回widmerで蒸溜し、129°C溜分をとり、さらに過塩素酸溶液(飽和溶液)を加えて痕跡のpyridineを除去しアルカリで分解、蒸溜したものをを用う。

(2) Benzidine hydrochloride 溶液

攪拌しながら蒸留水100c.c.中に C. P benzidine hydrochloride 2.0gを溶解させ、それに conc. HCl溶液2~3滴を加える。

(3) Cyanogen bromide 溶液

蒸留水100c.c.中に KCN 1.0grを溶解させ、Brが過剰になり淡紅褐色が明白となるまでBrを加える。Brが過剰となつたら、10% KCN 溶液を加えて加剰な Br を消す。この消えた時の溶液を0.1%のIndigo carmine溶液中に1~2滴加えて、Brが過剰であるか否かを判断する。即ちBrが過剰であれば、その着色はさらに青みがかつた黄色に脱色されるし、又適量であれば最初の青色を変えない。

(4) 酢酸ソーダ溶液

酢酸ソーダを適量秤量し蒸留水を加えて15%溶液にして用いる。

(5) n-butyl alcohol

市販のn-butyl alcoholは不純物があるので、之を水に溶解させ不純物を除去し、残液を蒸溜によつて化学的に純粋なものとして使用する。

3) 装 置

装置はIto-Beckman B-type-Spectrophotometer²を使用した。この装置はBeckmanD.U typeを小さくしたもので、光電管のかわりに光電池を使用する。光電池の感度と光流計の作動範囲を考慮してlight pathを短くしたものであるが、本器の波長感度は次の如くである。

| 波長範囲 | 感度 |
|----------------|-------------|
| 420—500m μ | 1 3 m μ |
| 500—550 " | 2 0 " |
| 550—600 " | 2 5 " |
| 600—700 " | 3 0 " |

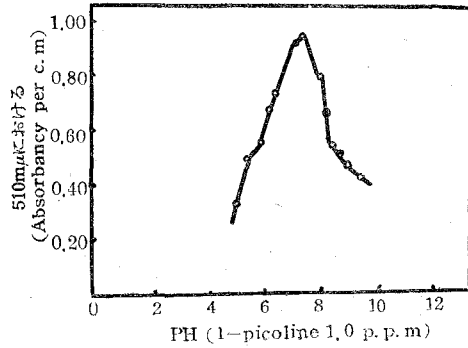
2 伊藤超短波研究所；医化学と電気 5, 1 (1953)

III 実験結果ならびにその考察

反応に影響をおよぼす因子として、PH、酢酸ソーダ、Benzidine、BrCN 溶液の濃度の影響、時間と温度との影響、光の影響、他の pyridine 塩基類の添加影響がある。

(1) PHの影響

反応に最適のPH範囲を定めるために、PH範囲を5.0-9.0迄調整した Sample を用意し個々について、その吸光度を測定した結果は図表1に示す通りである。これによると、PH 7.1の場合が吸光度が最高度である。



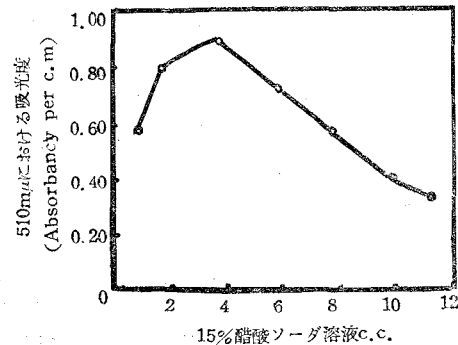
第1図 吸光度とPHとの関係

(2) 酢酸ソーダの影響

PH 7.1として、酢酸ソーダの影響を測定した結果は最高吸光度は Sample 100 c. c. 中の酢酸ソーダ 4 c. c. の場合である。図表2である。

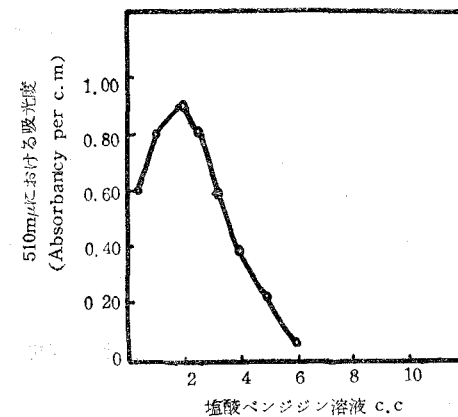
(3) Benzidine濃度とBrCN濃度との影響

図表3に示した如く、Spectrophotometer の読みは最高吸光度が Benzidine 溶液 2 c. c. を加えることにより表されることがわかる。



第2図 吸光度と酢酸ソーダ溶液量との関係

BrCNは図表4により、5 c. c. の時が最高吸光度を示す。従つて十分な吸光度を与えるためには、Benzidine 溶液 2 c. c. と BrCN 溶液 5 c. c. を加えるべきである。



第3図 吸光度と塩酸ベンジジン溶液量との関係

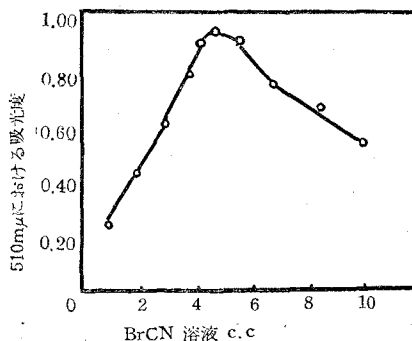
(4) 時間と温度との影響

この影響については、(a), (b), (c) の3つの Sample を用意した。すなわち (a) は 20°C (b) は 37°C, (c) は 25°C でその測定された結果は図表5で示される。之によると、37°C では4時間で吸光度が最高であり、25°C では8時間、20°C では12時間で最高になる。したがつて最も短時間である4時間が最適条件であ

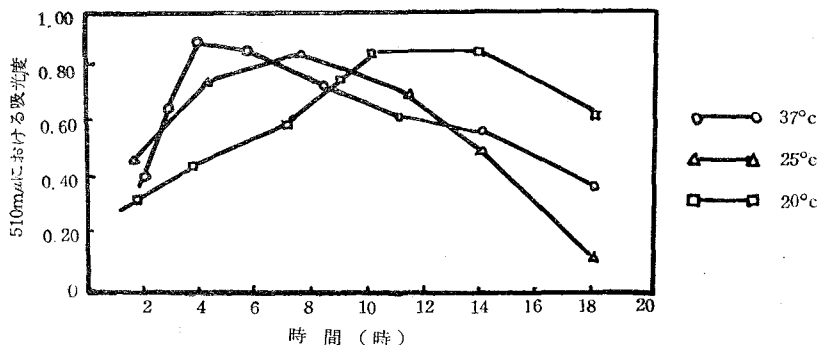
り、此以外の低温で相当時間を要し、又高温で一度急激に最高吸光度になるも安定しないことと、此実験では圧力がかかり、無理であった。

(5) 光 の 影 響

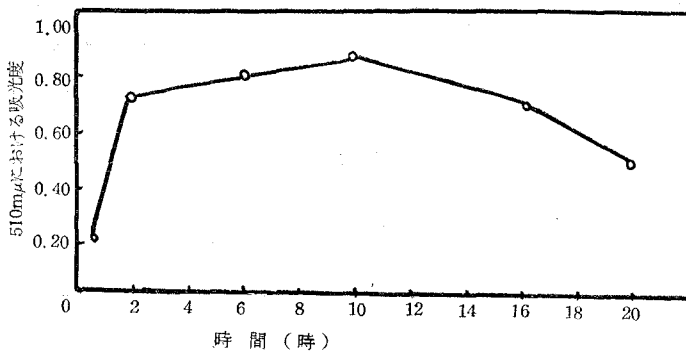
日光直射の場合、特に冬期間であるが、光の影響を示すと図表6の如くなる。これによると低温(約15°C)で2時間の場合、吸光度は著しく大となり、10時間で最高それ以上では、時間の経過と共に吸光度が逆比例的に低下する傾向を示した。図表6においてその結果が示される。



第4図 吸光度とBrCN溶液量との関係



第5図 時間および温度と吸光度との関係



第6図 光と時間および吸光度との関係

(6) Lambert-Beerの法則の適用

I-picoline の各種濃度 (1p.p.m. 10p.p.m. 25p.p.m. 55p.p.m.) に対する透過度を測定した結果、Lambert-Beerの法則にしたがう。

(7) 他のPyridine塩基類の添加影響

nicotinic acid, collidine, 2,5 lutidine, quinoline, iso-quinoline, β -picoline, γ -picoline を I-picoline に添加してその影響を見た。条件は前述の実験結果より、4時間の反応時間(暗黒中)で、PH7.1, 温度 37°Cで加える試薬は酢酸ソーダ 4c.c. Benzidine 溶液 2c.c. 1 N-NaOH (PH. 7.1 に試薬溶液を加えて後調整のため) を数滴加え, n-Butyl alcohol 25c.c, BrCN 5c.c. の割合で調整される。I-picoline と加える試料との濃度の比は, 1:1; 1:10; 1:100, の3種類である。添加試薬の調整は 0.5gr を 500 c.c. の蒸留水に加えて 1000p.p.m. としこれを適当な p.p.m. 溶液に稀釈する。

(a) nicotinic acidの添加影響

図表7の如くである。nicotinic acid 1 p.p.m. の時は殆ど変化は見られなかったが, 10p.p.m. から多少の変化を来たし 100p.p.m. では大きな影響を与える。

(b) Collidineの添加影響

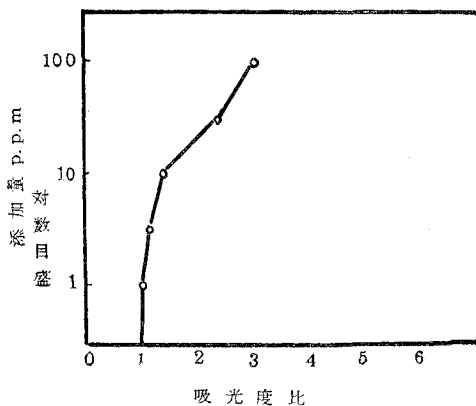
図表8の如くである。即 1 p.p.m, 10 p.p.m. 附近では余り変化はないが, 100 p.p.m. では非常に大きな変化を来す。

(c) 2,5 lutidine添加の影響

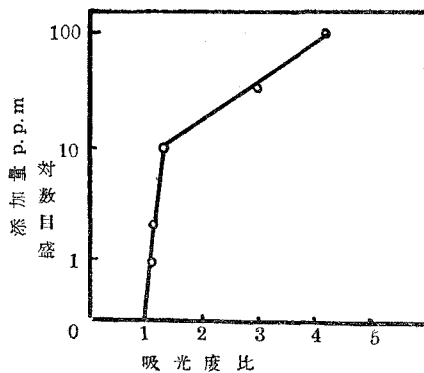
図表9の如く, 1p.p.m, 10p.p.m. では多少の影響が見られるが, 100p.p.m. では大部分影響がある事を示している。

(d) quinoline添加の影響

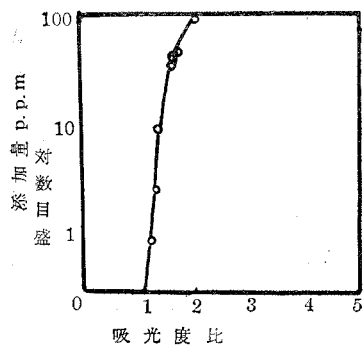
1 p.p.m, 10p.p.m. とともに多少の影響があるが, 考慮すべき影響ではない。図表10の如くである。



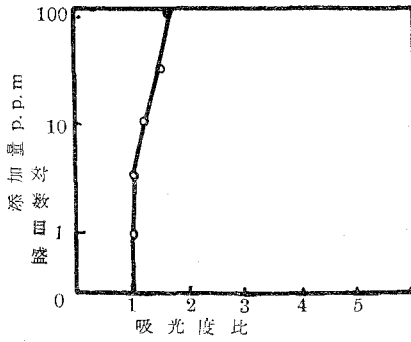
第7図 nicotinic acid 添加の影響



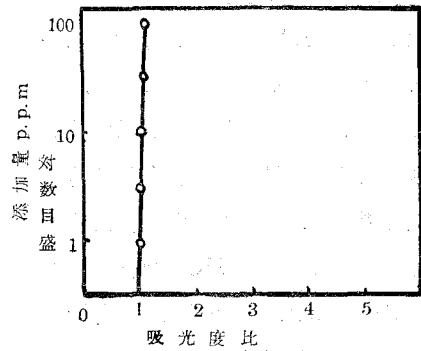
第8図 Collidineの影响



第9図 2,5-lutidineの添加の影響



第10図 Quinoline加の影響



第11図 Isoquinoline添加の影響

(e) isoquinoline添加の影響 図表11である。

quinolineと同様に影響はほとんどない

(f) β -picoline添加の影響

図表12の様に, 1p. p. m, 10p. p. m, 100p.p.m.ともほとんどその影響が見られぬ。併し, β -picolineの場合 wave length $5203\text{ m}\mu$ が maximum absorptionを示すので, $510\text{ m}\mu$ の波長でこの程度の濃度ではあまり影響がないことと思はれる。

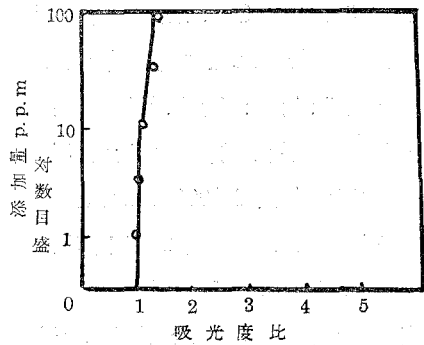
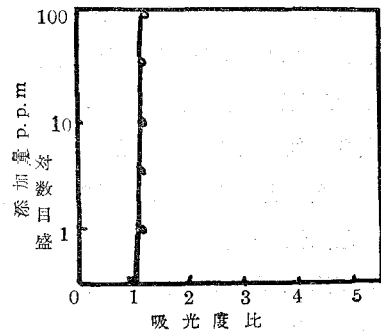
(g) γ -picoline添加の影響

図表13の如く, 1p. p. m, 10p. p. m, 100p.p.m.ともほとんど影響が見られぬ。これは wave length $555\text{ m}\mu$ で, maximum absorptionを示し, したがって $510\text{ m}\mu$ の波長で見れば, この程度の濃度では影響を与へぬ事が推察される。

(8) 光の波長と吸光度

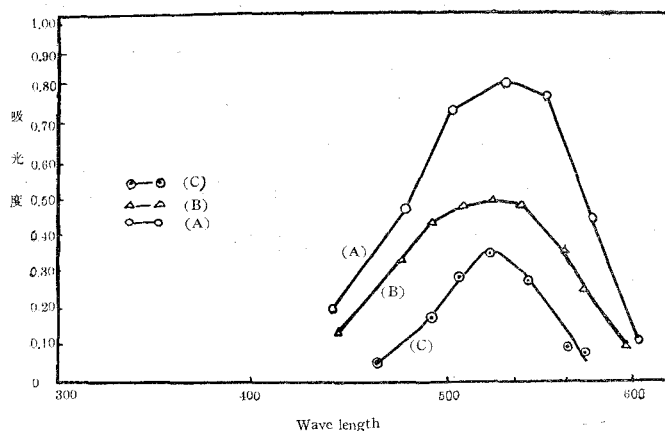
(A) PH7.8, 反応温度 37°C , 反応時間 4時間
その試薬は標準のものを使用す。

(B) PH 8.2, 反応温度 37°C , 反応時間 4時間

第12図 β -picoline添加の影響第13図 γ -picoline添加の影響

3 R. C. Kroner, M. B. Ettinger, and W. Allan Moore; Anal. chem, 28, 1877 (1952)

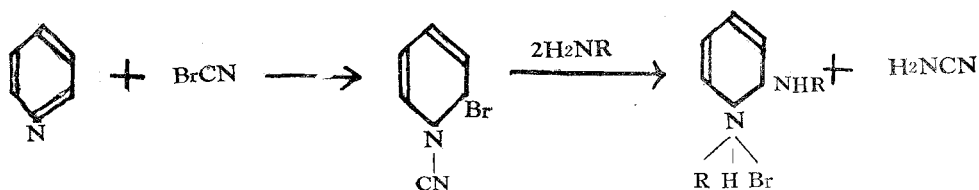
4 R. C. Kroner, M. B. Ettinger, and W. Allan. Moor; Anal. Chem, 28, 1877 (1952)



第 14 図 光波長と吸光度との関係

(C) PH 5.0, 反応温度 37°C , 反応時間 4 時間の 3 の場合について, 吸光度と光の波長との関係を示すと, 上の図表14の如くなる。この様に PH 7.1の時に何れも $510\text{m}\mu$ の wave length で maximum absorptionを示していることがわかった。

この実験結果より Migrdichian⁵, Karrer⁶, Waisman⁷, Elvehjem などによる Pyridine のみについて BrCN に対する比色反応すなわち



この反応が *I*-picoline にも同様適用されることが推察された。ただし異なる点は $-\text{CH}_3$ がある点で, その点が比色反応速度に多少の影響をもたらす結果になったことと考えられる。

IV 結 語

1) 本実験に必要な *I*-picoline に対する PH の影響, 酢酸ソーダ溶液濃度の影響, Benzidine 濃度と BrCN 溶液濃度との影響, 時間と温度との影響, 光の影響等, 比色反応にかくべからざる因子を研究し, その結果として, 比色反応は一定温度 (37°C) で一定時間 (4 時間), 暗黒中で放置した場合に, 最もよく比色分析に良結果を与えることが明らかになった。したが

5 Migrdichian, V., "Chemistry of Organic Cyanogen Compounds", Amer. Chem. Soc. Monograph series, No. 105 P. 110, New York. Reinhold, Publishing Corp, 1947

6 Karrer, P., "Organic Chem." 3rd. ed., P786, New York. Elsevier, Publishing Co., 1947

7 Waisman, H. A., and Elvehjem; C. A. Ind. Eng. Chem, Anal. Ed. 13, 221 (1941)

つてその最適の条件のもとで、Pyridine塩基の *I*-picoline に対する妨害作用を比色によつて調べたが、妨害作用をなす塩基類はある程度蒸溜により、*I*-picoline に対する他塩基類の相対的濃度を小にすれば、その影響が少くなることがわかつた。

2) Collidine, nicotinic acid, lutidine含有の場合はかなり影響あることが分つたのでとくに注意する必要がある。他塩基類については相当の濃度でない限り、あまり影響はない。

(昭和30年5月31日受理)

振りも一めんとを受ける拱橋の 新解法について*

中村作太郎

On the New Solution of Arched Bridge loaded with a Torsional Moment

Sakutaro Nakamura

Abstract

This is a thesis, in which the author proposed new solution in order to solve the distribution of torsional stress when unit torsional moment was loaded on any point of arches and he calculated torsional stress of two arches with I-section.

I 緒 言

拱橋の振り応力問題に次の三つがある。即ち、その1は拱の軸面内に作用する外力により振り挫屈を生ずる場合、その2は、拱に軸面外の力が作用し、曲げと振りを共に生ずる場合、その3は、拱が外力として振りも一めんとだけを受け、各種の振り応力度を生ずる場合である。その1の問題は、拱の挫屈に於て取扱はれているので、茲では触れない事とする。その2の問題は、曲り梁として数多くの学者によつて研究されている。即ち、曲り梁の研究は、18世紀の末 Grasshof¹ 氏のバネの研究に始まり、Unold² 氏等の弾性曲線の方程式を解く方法、Müller Breslau³ 氏等による最少働の原理による方法等がある。又、Marcus⁴ 氏は拱理論に於ける弾性荷重に相当する量を三次元的に弯曲せる棒について導く事に成功しているが、式の誘導に止つている。岡本舜三⁵ 氏は、軸線を含む面に垂直なる荷重をうけ、曲げと振りを共にうける円形曲梁について撓角撓度式を導いている。又、近藤繁人⁶ 氏は最近、立体曲り梁の

★ 土木学会北海道支部研究発表会に於て一部研究発表「拱の振り理論について」1953.

1 Grasshof : Theorie der Elastizität und Festigkeit. 1878.

2 Unold : Der Kreisträger Forschungsarbeiten Heft 255. 1922.

3 Müller Breslau : Die neuere Methoden der Festigkeitslehre. 1913.

4 Marcus : Die elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestaltung Z.f. Bauwesen. 1919.

5 岡本舜三 : 軸線を含む面に垂直なる荷重をうける円形曲り梁の研究. 土木学会誌 29—3 March, 1943.

6 近藤繁人 : 立体曲り梁の解法. 土木学会第10回年次学術講演会概要, May, 1954.

解法について考究しているし、Hauranek⁷, Engesser⁸, Mörsch⁹, 大野博¹⁰, Jokobsen¹¹ 氏等は、19世紀の初期より円梁を実際の橋梁の設計に応用せんと試みている。その3の問題は上述の曲り梁の問題とはその趣きが異つて居り、未だ研究されていない。著者は、この3の問題、即ち、拱が外力として振りもーめんとだけを受ける場合について興味を持ち、5、6年以前より、その解法を研究しつつあるが、先づ、振り応力に関する基礎理論として直材について数多の学者の研究せる成果を繕いて見る。即ち、矩形断面の振りについては、St. Venant¹² 氏が精密なる解を求め、A. Föppl¹³, Engelmann¹⁴ 氏等は、各種の断面の振りについて実験的研究と理論値との比較を行つている。又、K. Huber¹⁵ 氏も振り応力度に関する実験的研究を行つている。然して、単純な振り応力の基礎をなす法則は、実際には、円形又は円壙形断面以外には成立せず、鋼拱橋に用いられるI形断面などの場合は、単純な振り応力だけでなく、縦応力度をも同時に生ずるとして取扱つた解法でなくてはならない。I形断面直梁に関してはS. Timoschenko¹⁶ 氏が三次の微分方程式を解いて各種の応力度を求めているのは注目に価する。而して、振りもーめんとを受ける拱橋に於ては、直梁の場合と同様、両端の支持構造が振りに対しては固定なることが一つの条件であつて、この点が普通の平面拱と異なるところである。著者はこの振りに対して、固定なる条件を持つ二つの代表的な拱橋即ち、二次不静定の二鉸固定拱及四次不静定の無鉸固定拱に対し、振り応力度を求める新しい解法を提案した。即ち、S. Timoschenko氏の基本的直梁の理論を基として、二鉸固定拱に対しては、不静定未知量に一個の振り反力、無鉸固定拱に対しては、三個の振り反力を仮定し、不静定力の決定には、Castigliano¹⁷ 氏の理論を用い、振りもーめんととの合成分解に関しては、一般偶力と同様、円形ベクトル法¹⁸を用い、更に、各種の振り応力度の公式を定めるに当つては、上述の基本梁の理論を合成誘導した。尙、最後に、鋼I形断面の二鉸固定拱、無鉸固定拱について数値積分法により、詳細なる数値計算を試みた。

7 Hauranek : Berechnung von Bogenbrücken bei räumlichen Kraftangriff B.u.E. 1918.

8 Engsetzer : Der elastische stabförmige Träger von beliebiger Gestaltung. Z.f.Bauwesen, 1918.

9 Mörsch : Berechnung der Brückengewölbe für Windruck exzentrische Belastung und einseitige Erwärmung. B.u.E. 1923.

10 大野博 : 鉄筋コンクリート無鉸拱の経済的並に耐震的設計 (2) 土木試験所報告第34号. 1936.

11 Jokobsen : Windruck auf Bogenbrücken. B.u.E. 1940.

12 Saint-Venantの編輯. Navier : Résumé des leçons sur l'application de la mécanique, Paris. 1864.

13 A.Föppl & L.Föppl : Drang und Zwang, BdII, München und Berlin 1920.

14 Engelmann : Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Durchfestigkeit der Stäbe. Z.a.M.u.M. 1928.

15 K.Huber : Der Einfluss einer Einspannung beim I-Träger auf den Widerstand gegen Verdrehen. Bauing. 1925.

16 S.Timoschenko : Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z.f.M.u.Ph.1910.

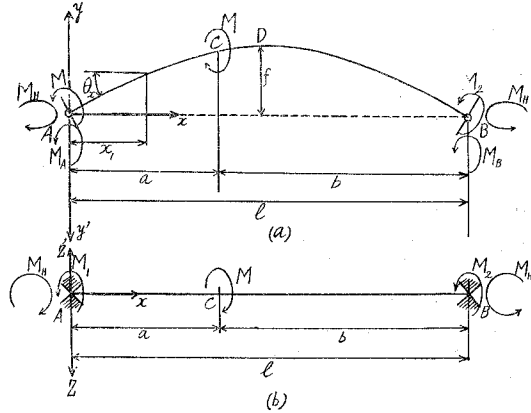
17 Southwell : Castigliano's Principle of minimum energy Proc. Roy. Soc. London vol 154. 1936, S.Timoschenko : Theory of Elasticity. 1934.

18 坂井卓三 : 一般力学, 1947, 山内恭彦 : 一般力学, 1943.

II 振りもーめんとを受ける拱の解法

1. 二鉸固定拱の解法

第1図は、両端が振りに対し固定され、拱の軸面内に作用する外力に対しては二鉸の働きをなす拱とする。即ち、二次不静定の拱であつて、著者は、この種の拱を二鉸固定拱と名付ける事とする。今、拱の軸面内のみ外力の作用する平面的二鉸拱に於て、水平反力 H を不静定量に仮定する¹⁹ のと同様、両端に水平振りもーめんと M_H を不静定量として仮定する。又、振りもーめんとの合成分解には、一般偶力と同様、円形ベクトル法を用い、不静定量 M_H の



第1図 任意の点に振りもーめんとをうける二鉸固定拱の図

誘導には、Castigliano 氏の理論を用いる。そこで、弾性構造物に外力が作用する場合、その内部仕事を W 、任意の外力を X 、 X の作用方向の変位を δ とすれば、Castigliano 氏の定理を用いる事に依り、次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \delta \quad (1)$$

又、 X の作用方向に変位の起らぬ場合には、

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0 \quad (2)$$

任意の点に、外力として、振りもーめんと M が作用する場合、内部仕事 W は次の如くなる。

$$W = \int \frac{M_x^2}{2EJ} ds + \int \frac{M_N^2}{2EI} ds + \int \frac{M_Q^2}{2GJ'} ds \quad (3)$$

茲に、 E : 弾性係数、 G : 剪断弾性係数、 J : 拱の軸線に垂直なる断面の振りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと、 I : 拱の軸曲面に沿う軸方向振りもーめんとに対する、抵抗慣性もーめんと、 J' : 拱の x 軸に垂直なる断面の振り剪断もーめんとに対する抵抗慣性もーめんと、 M_x : 拱の任意点に於ける軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力もーめんと、 M_N : 拱の軸曲面に沿う軸方向振りもーめんと、 M_Q : 拱の x 軸に垂直なる断面の振り剪断もーめんと、 ds : 線素とする。(1) 式より次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M_N}{\partial X} \frac{ds}{EI} + \int M_Q \frac{\partial M_Q}{\partial X} \frac{ds}{GJ'} = \delta \quad (4)$$

19 大野博：桁橋及拱橋 1940，

成瀬勝武：弾性橋梁 1953.

今、拱軸線が対称なるものとする。(4)式に於て、任意の点 x, y に於ける軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力もーめんと M_x は、基本拱の軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力もーめんと $M_0' = M_0 \cos \theta_x$ (茲に、 M_0 : 基本直梁の x, y 点に於ける断面の振り応力度の合力もーめんと) 及び水平振り反力 M_H が知られれば、次式より求める事ができる。

$$M_x = M_0' + M_H \sin \theta_x \quad (5)$$

又、 M_N は、基本拱の軸曲面に沿う軸方向振りもーめんと M_{N_0} と水平振り反力 M_H が知られれば

$$M_N = M_{N_0} + M_H \cos \theta_x \quad (6)$$

より求める事ができる。又、基本拱の鉛直方向の振りもーめんと M_{V_0} のみ作用するとき

$$M_N = -M_{V_0} \sin \theta_x + M_H \cos \theta_x \quad (7)$$

(4)式に於て、振り剪断もーめんと M_Q の影響は、断面の振り応力度の合力もーめんと M_x 及び、軸方向振りもーめんと M_N の影響に比し、極めて小さいから繁雑を避けるため、無視しても差支えないと考え、 $\int M_Q \frac{\partial M_Q}{\partial X} - \frac{ds}{GJ'}$ の項を省略する。今、(4)式に於て、不静定振り反力 $X = M_H$ とし、(5)式及び(7)式の M_x, M_N を M_H にて偏微分すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_H} = -\sin \theta_x \quad (8)$$

$$\frac{\partial M_N}{\partial M_H} = -\cos \theta_x \quad (9)$$

次に、(4)式に(5)、(6)式を入れて、(8)、(9)式を用い、 $\delta = 0$ と置けば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\int (M_0' + M_H \sin \theta_x) \sin \theta_x \frac{ds}{EJ} - \int (M_{N_0} + M_H \cos \theta_x) \cos \theta_x \frac{ds}{EI} = 0 \\ & -\int M_0' \sin \theta_x \frac{ds}{J} - \int M_H \sin^2 \theta_x \frac{ds}{J} - \int M_{N_0} \cos \theta_x \frac{ds}{I} - \int M_H \cos^2 \theta_x \frac{ds}{I} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{故に} \quad -M_H \left\{ \int \sin^2 \theta_x \frac{ds}{J} + \int \cos^2 \theta_x \frac{ds}{I} \right\} = \int M_0' \sin \theta_x \frac{ds}{J} + \int M_{N_0} \cos \theta_x \frac{ds}{I}$$

$$\text{故に} \quad M_H = \frac{\int M_0' \sin \theta_x \frac{ds}{J} + \int M_{N_0} \cos \theta_x \frac{ds}{I}}{\int \sin^2 \theta_x \frac{ds}{J} + \int \cos^2 \theta_x \frac{ds}{I}} \quad (10)$$

茲に、

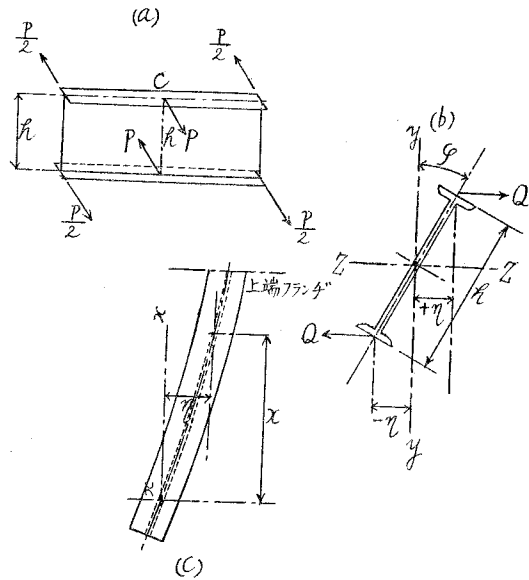
- M_H : 不静定水平振り反力
- M_0' : 両端が振りに対してのみ固定され、その他のもーめんとに対しては自由支承とせる定断面の拱に於て、軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力もーめんと、即ち $M_0 \cos \theta_x$
- M_{N_0} : 全上基本拱の軸曲面に沿う軸方向振りもーめんと
- J : 拱の軸線に垂直なる断面の振りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと

- I : 拱の軸曲面に沿う軸方向振りもーめんとに対する抵抗慣性もーめんと
- θ_x : 拱の任意の点 x, y に於ける x 軸と拱軸線との切線とのなす角
- ds : 拱軸線に於ける線素
- M_0 : 両端を振りに対してのみ固定し、他のもーめんとに対しては自由支承とせる断面の直梁に於ける断面の振り応力度の合力もーめんと。

以上の理論は、拱の断面 A が一定の場合にのみ成立する事は、直梁の場合²⁰と同様である。又、断面の形が異つている場合、例えば、円形断面の場合と I 形断面の場合では、その基本理論が全然異つて来る。即ち、円形断面の場合は縦応力度を考えなくても済むが、I 形断面の場合は、縦応力度を同時に生ずるものとして取扱わなければならない事直梁の場合²¹と同様である。そこで鋼拱橋に於て広く用いられている I 形断面について、理論の誘導を行う。今、振りもーめんとと作用点 C の付近だけ取出して考えて見れば、第 2 図に於て、中心 C 点に振りもーめんと $M=P\bar{h}$ が作用し、切つた両端の断面に於ては振りもーめんとに対し固定されていると考える事が出来る。この場合、中心の断面は、対称という条件から平面の儘残る筈

であるが、他の断面は、距離が増すにつれて、益々多く変形するであろう。此の不等変形の結果、材の縦繊維は歪む事になる。第 2 図 (c) の平面図に於て、直線のまゝ残つて居る材軸を x 軸にとり、 η を以て、上端フランジの軸の横方向への移動を表す。腹板を通る上下方向の断面軸が変形により傾れた角を φ とすれば、これは x と共に変化する。変形が小さいものと仮定すれば、 η と φ との間には比例法則が成立ち、 $\eta = \frac{h}{2} \varphi$

となる。次に、 M を以て、断面 x に於ける外力振りもーめんと、とすれば、一般に、これは、縦軸の函数である。又、 M'_0 を以て、拱の上端或は下端のフランジの曲げもーめんと、 D'_0 を以て、拱に於ける此の断面の上又は下端フランジの剪断力とする。



第 2 図 振りもーめんとに対し両端固定され、縦応力を同時に生ずると考えた場合の基本的 I 形梁の図

20. 21 F.R. Bleich : Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. 1924.
 池部宗薫外 5 氏共訳 : プライヒ鉄骨構造. 1941.

更に、 M_0 を縦軸 x 点の断面の捩り応力度の合力も一めんととし、 h を両フランジの重心距離とする。 J は、拱断面の捩り抵抗も一めんと、 I_f は、フランジの曲げを考える時の一つのフランジの断面二次も一めんととする。全ての断面に於て成立つ釣合条件は

$$M_0 + \mathfrak{D}_b' h + M = 0 \quad (11)$$

捩りも一めんと M の作用点附近のある小区間について考えると、その曲率が緩やかなればなる程 M_0 、 \mathfrak{D}_b' は、直梁の場合の M_0 、 \mathfrak{D}_b に近づく事となり、極限に於ては、

$$M_0 + \mathfrak{D}_b h + M = 0 \quad (12)$$

が成立する。茲に M_0 : 両端を捩りに対してのみ固定し、他のも一めんとに対しては自由支承とせる定断面の直梁に於ける断面の捩り応力度の合力も一めんと、 \mathfrak{D}_b : 全上基本直梁の断面の上又は下端フランジの剪断力とする。今、 M_0 及び \mathfrak{D}_b を角 φ の函数として表せば次式が成立する。

$$M_0 = GJ\theta \quad (13)$$

茲に、 G : 剪断弾性係数、 J : 梁断面の捩り抵抗も一めんと、 θ : 捩れ角比、即ち、 dx の間の φ の変化、 $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ を (13) 式に代入し、

$$M_0 = GJ \frac{d\varphi}{dx} \quad (14)$$

又、 \mathfrak{D}_b は、 φ により、次の如く書く事ができる。

$$\mathfrak{D}_b = \frac{d\mathfrak{M}_b}{dx} = -EI_f \frac{d^3\eta}{dx^3} = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3} \quad (15)$$

上の釣合条件式より、次の微分方程式を得る。

$$GJ \frac{d\varphi}{dx} - EI_f \frac{h^2}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3} + M = 0 \quad (16)$$

$\frac{2}{h^2} \frac{G}{E} \frac{J}{I_f} = \alpha^2$ 及び、 $\frac{2}{EI_f h^2} = \beta$ として、(16) 式は次の如くなる。

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} - \alpha^2 \frac{d\varphi}{dx} = \beta M \quad (17)$$

この (17) 式の積分により、角 φ の大きを知る。

$$\eta = \varphi \frac{h}{2}, \quad M_0 = GJ \frac{d\varphi}{dx}, \quad \mathfrak{M}_b = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \mathfrak{D}_b = -EJ \frac{h}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3} \dots\dots\dots(18)$$

(17) の三次の微分方程式は、Timoschenko²²氏によつて解かれている。即ち、その一般解は、三つの任意の係数を含み、 $M = ux + v$ 即ち、 M が x の一次の函数である場合は、次の如くなる。

$$\varphi = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 - \frac{Bu}{2\alpha^2} x^2 - \frac{Bv}{\alpha^2} x \quad (19)$$

22 S. Timoschenko : Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Z.f.M.u. Ph. 1910.

以上の基本理論より、I形定断面の拱が、任意の点Cに、外力振りもーめんとを受ける場合、拱の \mathfrak{M}_b' と直梁の \mathfrak{M}_b との関係式及び、拱の \mathfrak{D}_b' と直梁の \mathfrak{D}_b との関係式は、次の如く表し得る。

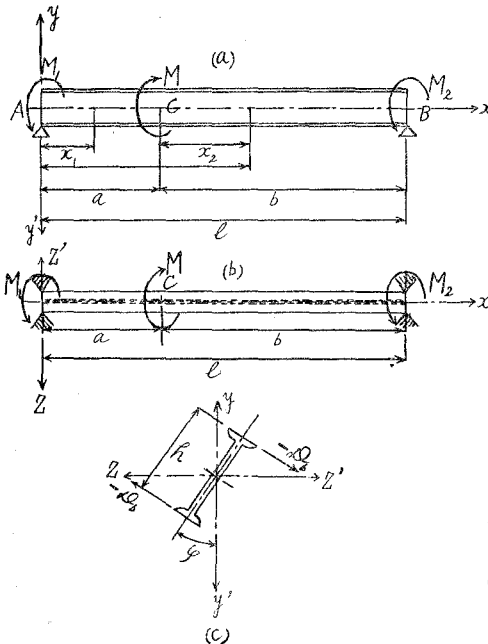
$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_b' &= \mathfrak{M}_b + \mathfrak{M}_b = \mathfrak{M}_b - \left(\frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \right) \frac{d(M_H \cdot \sin\theta_x)}{dx} \\ &= \mathfrak{M}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(M_H \frac{d\sin\theta_x}{dx} + \sin\theta \frac{dM_H}{dx} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

又、

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_b' &= \mathfrak{D}_b + \frac{d\mathfrak{M}_b}{dx} = \mathfrak{D}_b - \frac{EI_f}{EJ} \frac{h}{2} \frac{d^2 M_H \cdot \sin\theta_x}{dx^2} \\ &= \mathfrak{D}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 M_H}{dx^2} \sin\theta + 2 \frac{dM_H}{ds} \frac{d\sin\theta_x}{dx} + M_H \frac{d^2 \sin\theta_x}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

次に、両端を振りに対し固定し、他のもーめんとに対しては、自由支承とせるI形定断面の直梁に於て、左の支点より a なる距離に振りもーめんと M を有する場合の M_0 , \mathfrak{M}_b , \mathfrak{D}_b 等を求めれば、次の如くである。先づ第3図に於て、(19)式に相当する式を作れば

$$\left. \begin{aligned} A \sim C : M &= M_1, \quad \varphi_1 = C_1 \sinh \alpha x_1 + C_2 \cosh \alpha x_2 + C_3 - \frac{\beta M_1}{\alpha^2} x_1 \\ C \sim B : M &= -M_2, \quad \varphi_2 = D_1 \sinh \alpha x_2 + D_2 \cosh \alpha x_2 + D_3 + \frac{\beta M_2}{\alpha^2} x_2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



定数 C 及び D を定め、 $\frac{2}{h^2} \frac{G}{E} \frac{J}{I_f} = \alpha^2$

及び $\frac{2}{EI_f h^2} = \beta$ の式を参照し、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Ml}{(\alpha l)GJ} \left\{ \frac{\sinh \alpha b}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha x - (\alpha b) \frac{x}{l} \right\} \\ \varphi_2 &= \frac{Ml}{(\alpha l)GJ} \left\{ \frac{\sinh \alpha a}{\sinh \alpha l} \sinh \alpha (l-x) - (\alpha a) \frac{l-x}{l} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\text{茲に、} \alpha l = \frac{l}{h} \sqrt{2 \frac{G}{E} \frac{J}{I_f}} = 0.88 \frac{l}{h} \sqrt{\frac{J}{I_f}} \quad (24)$$

範囲 $A \sim C$ に対し、 $x \leq a$

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= M \left\{ \frac{\sinh \alpha b}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha x - \frac{b}{l} \right\} \\ \mathfrak{M}_b &= M \frac{l}{h} \frac{\sinh \alpha b}{(\alpha l) \sinh \alpha l} \sinh \alpha x \\ \mathfrak{D}_b &= \frac{M}{h} \frac{\sinh \alpha b}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

範囲 $C \sim B$ に対し、 $x \geq a$

第3図 両端を振りもーめんとに対し固定し、他のもーめんとに対しては自由支承とせるI形断面の直梁の図

$$M_0 = -M \left\{ \frac{\sinh \alpha a}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha (l-x) - \frac{a}{l} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_b &= M \frac{l}{h} - \frac{\sinh \alpha a}{(\alpha l) \sinh \alpha l} \sinh \alpha (l-x) \\ \mathfrak{D}_b &= -\frac{M}{h} \frac{\sinh \alpha a}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha (l-x) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

故に、2 鉸固定拱が I 形定断面の場合には、次の公式が得られる。

(5) 式より、 $M_x = M_o' + M_H \sin \theta_x = M_o \cos \theta_x + M_H \sin \theta_x$

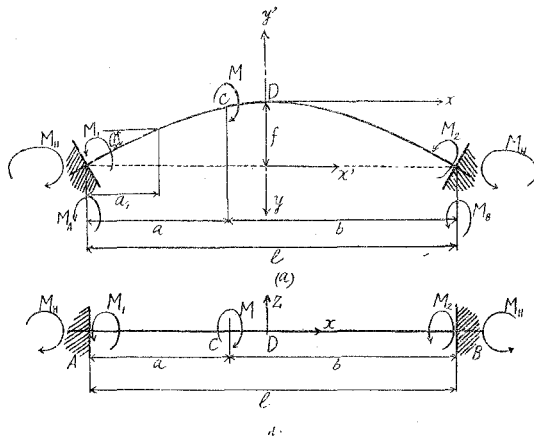
$$\left. \begin{aligned} \therefore x \leq a \dots \dots M_x &= -M \left\{ \frac{\sinh \alpha b}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha x - \frac{b}{l} \right\} \cos \theta_x + M_H \sin \theta_x \\ x \geq a \dots \dots M_x &= -M \left\{ \frac{\sinh \alpha a}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha (l-x) - \frac{a}{l} \right\} \cos \theta_x + M_H \sin \theta_x \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

又 (20) 式より $\mathfrak{M}_b' = \mathfrak{M}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(M_H \frac{d \sin \theta_x}{dx} + \sin \theta \frac{dM_H}{dx} \right)$

$$\left. \begin{aligned} \therefore x \leq a \dots \dots \mathfrak{M}_b' &= M \frac{l}{h} \frac{\sinh \alpha b}{(\alpha l) \sinh \alpha l} \sinh \alpha x - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(M_H \frac{d \sin \theta_x}{dx} + \sin \theta \frac{dM_H}{dx} \right) \\ x \geq a \dots \dots \mathfrak{M}_b' &= M \frac{l}{h} \frac{\sinh \alpha a}{(\alpha l) \sinh \alpha l} \sinh \alpha (l-x) - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(M_H \frac{d \sin \theta_x}{dx} + \sin \theta \frac{dM_H}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

(21) 式より、 $\mathfrak{D}_b' = \mathfrak{D}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 M_H}{dx^2} \sin \theta + 2 \frac{dM_H}{ds} \frac{d \sin \theta_x}{dx} - M_H \frac{d^2 \sin \theta_x}{dx^2} \right)$

$$\left. \begin{aligned} \therefore x \leq a \dots \mathfrak{D}_b' &= \frac{M}{h} \frac{\sinh \alpha b}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha x - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 M_H}{dx^2} \sin \theta + 2 \frac{dM_H}{dx} \frac{d \sin \theta_x}{dx} - M_H \frac{d^2 \sin \theta_x}{dx^2} \right) \\ \therefore x \geq a \dots \mathfrak{D}_b' &= -\frac{M}{h} \frac{\sinh \alpha a}{\sinh \alpha l} \cosh \alpha (l-x) - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 M_H}{dx^2} \sin \theta + 2 \frac{dM_H}{dx} \frac{d \sin \theta_x}{dx} - M_H \frac{d^2 \sin \theta_x}{dx^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$



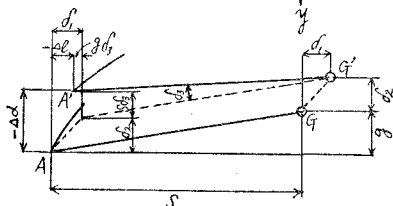
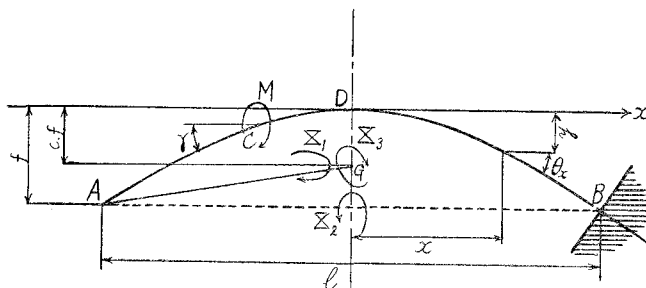
第 4 図 任意の点に振りもーめんとをうける無鉸固定拱の図

2. 無鉸固定拱の解法

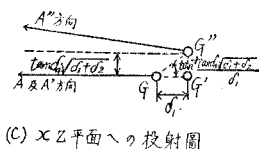
第 4 図は、軸面 x, y 内に作用する外力に対し、両端 A, B が固定せられているのみならず、換れに対しても、両端が固定せられている四次不静定拱である。著者は、この拱を、平面的無鉸拱²³に対し、無鉸固定拱と名付ける事とする。今、二鉸固定拱同様、任意の点に外力として振りもーめんと M が作用した場合の解法を提案する。先づ、第 5 図の如く、 B

23 大野博：桁橋及拱橋 1940.

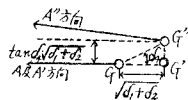
(a) x, y 平面に於ける拱の全体圖



(b) x, y 平面への投射圖



(c) x, z 平面への投射圖



(d) x, y 平面に垂直な $G'GG''$ 断面圖

第 5 図 一端固定、他端自由、自由端と彈性重心を剛桿を以て剛結された拱（但し、固定、剛結とは振りもーめんとに対しても固定なる事を含む）の図

端は、振れに対して、他の何れのもーめんとに対しても固定、A 端自由なる基本拱について考える。今 A 端に剛体の桿 AG を剛結したものとし、外力として振りもーめんと M が働く事により、A 端の B 端に対する水平、鉛直の相対移動及び回転と剛桿 AG の G 端に於ける変位との間には、次の関係がある。但し、夫々の変位は僅少なるものと仮定する。G は G'' に変位したと考え、G'' より x, y 平面への投射点を G' とする。

今、 Δl : A の B に対する左方への水平移動即ち、支間 l の伸び、 $\Delta \alpha$: A の B に対する下方への鉛直移動即ち、沈下、 $\Delta \theta$: A の B に対する回転（時計の方向を正とする）
 δ_1 : G の右方への水平移動、 δ_2 : G の上方への鉛直移動、 δ_3 : G の時計の方向への廻転
 以上は x, y 平面への投射である。 δ_4 : G の変位 G'' 方向への回転即ち、角 $G'GG''$ とすれば、
 $-\Delta l = \delta_1 - g\delta_3$, $-\Delta \alpha = \delta_2 + s$, $\Delta \theta = \delta_3$, $\Delta \varphi = \delta_4$ 故に、 $\delta_1 = -\Delta l + g\Delta \theta$, $\delta_2 = -\Delta \alpha - s\Delta \theta$, $\delta_3 = \Delta \theta$, $\delta_4 = \Delta \varphi$ 即ち、両端が完全に固定されると云う事は、 $\Delta l = 0$, $\Delta \alpha = 0$, $\Delta \theta = 0$, $\Delta \varphi = 0$ 即ち、 $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$ なる事で、A 端自由なる突桁 ADB の A 端に剛

桿 AG を剛結し、 G 点を固定した場合と力学的に同等である。第5図に於て、 G 点に作用する不静定振り反力を X_1, X_2, X_3 と仮定すれば、 A, B 固定せられた場合に対し、Castiglino氏の理論を用い、次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial X_n} = \delta_n = 0 \quad (n=1, 2, 3) \quad (30)$$

今、 X_1 : 水平振りも一めんと、 X_2 : 鉛直振りも一めんと、 X_3 : 軸線の垂直面に於ける振りも一めんと、とし、対称無鉸固定拱について、理論の誘導を行う。拱軸線の原点を拱頂 D にとり、 θ_x は、 x, y 点に於ける拱軸線の接線が x の正の方向と為す角とする。(左半分に於ては正、右半分に於ては負)、任意の点に外力として、振りも一めんと M が作用する場合、内部仕事 W は、(3) の場合同様、

$$W = \int \frac{M_x^2}{2EJ} ds + \int \frac{M_N^2}{2EI} ds + \int \frac{M_Q^2}{2GJ'} ds \quad (31)$$

茲に、 E : 弾性係数、 G ; 剪断弾性係数、 J : 拱の軸線に垂直なる断面の振りも一めんとに対する抵抗慣性も一めんと、 I : 拱の軸曲面に沿う軸方向振りも一めんとに対する抵抗慣性も一めんと、 J' : 拱の x 軸に垂直なる断面の振り剪断も一めんとに対する抵抗慣性も一めんと、 M_x : 拱の任意点に於ける軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力も一めんと、 M_N : 拱の軸曲面に沿う軸方向振りも一めんと、 M_Q : 拱の x 軸に垂直なる断面の振り剪断も一めんと、 ds : 線素

$$\left. \begin{aligned} \text{そこで } \frac{\partial W}{\partial X_1} &= \int M_x \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M_N}{\partial X_1} \frac{ds}{EI} + \int M_Q \frac{\partial M_Q}{\partial X_1} \frac{ds}{GJ'} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} &= \int M_x \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{ds}{EI} + \int M_Q \frac{\partial M}{\partial X_2} \frac{ds}{GJ'} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_3} &= \int M_x \frac{\partial M}{\partial X_3} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M}{\partial X_3} \frac{ds}{EI} + \int M_Q \frac{\partial M}{\partial X_3} \frac{ds}{GJ'} = 0 \end{aligned} \right\} (32)$$

これらの不静定量を求めるには、振り剪断も一めんとの影響は、断面の振り応力度の合力も一めんとの影響、軸方向振りも一めんとの影響に比し、極めて小さく、繁雑を避けるため、無視しても差支えないものとする。

$$\left. \begin{aligned} \text{故に、} \frac{\partial W}{\partial X_1} &= \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X_1} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M_N}{\partial X_1} \frac{ds}{EI} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_2} &= \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X_2} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M_N}{\partial X_2} \frac{ds}{EI} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X_3} &= \int M_x \frac{\partial M_x}{\partial X_3} \frac{ds}{EJ} + \int M_N \frac{\partial M_N}{\partial X_3} \frac{ds}{EI} = 0 \end{aligned} \right\} (33)$$

今、不静定振り反力 X_1, X_2, X_3 が求まった場合、任意の点 x, y の軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力も一めんと M_x は、次式により与えられる。

$$M_x = M_0' + X_1 \sin \theta_x + X_2 \cos \theta_x + X_3 \cos(\theta_x \sim \gamma) \quad (34)$$

茲に、 γ : 振りも一めんととの作用点に於ける拱軸線の接線が x の正の方向となす角とする。

(34) 式に於て、 θ_x と γ は、何れも正、負の場合あり、拱の左半分には正であり、右半分には負になる。 M_0' は、一端が振りに対してのみならず、他の一めんとに対しても固定され、他端が自由なる定断面の基本拱に於て、軸線に垂直なる断面の振り応力度の合力も一めんとであり、

$$M_0' = M_0 \cos \theta_x \quad (35)$$

茲に、 M_0 : 全上基本拱の任意の点に於ける x 軸に垂直なる面内にある振り応力度の合力も一めんと、である。又、任意の点の軸方向振りも一めんと M_N は

$$M_N = M_{N_0} - X_1 \cos \theta_x - X_2 \sin \theta_x \quad (36)$$

茲に、 M_{N_0} : 全上基本拱の任意の点に於ける軸方向振りも一めんとであり、鉛直方向の振りも一めんと M_{V_0} のみ作用するときは、

$$M_{N_0} = -M_{V_0} \sin \theta \quad (37)$$

$$(33) \text{ 式に於て、} \quad \frac{\partial M_x}{\partial X_1} = \sin \theta_x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X_2} = \cos \theta_x, \quad \frac{\partial M_x}{\partial X_3} = \cos(\gamma \sim \theta_x)$$

$$\frac{\partial M_N}{\partial X_1} = -\cos \theta_x, \quad \frac{\partial M_N}{\partial X_2} = -\sin \theta_x, \quad \frac{\partial M_N}{\partial X_3} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{故に、} \quad \frac{\partial W}{\partial X_1} &= \int_A^B \{M_0' + X_1 \sin \theta_x + X_2 \cos \theta_x + X_3 \cos(\gamma \sim \theta_x)\} \sin \theta_x \frac{ds}{EJ} \\ &\quad + \int_A^B (-M_{N_0} + X_1 \cos \theta_x + X_2 \sin \theta_x) \cos \theta_x \frac{ds}{EJ} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X_2} &= \int_A^B \{M_0' + X_1 \sin \theta_x + X_2 \cos \theta_x + X_3 \cos(\gamma \sim \theta_x)\} \cos \theta_x \frac{ds}{EJ} \\ &\quad + \int_A^B (-M_{N_0} + X_1 \cos \theta_x + X_2 \sin \theta_x) \sin \theta_x \frac{ds}{EJ} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X_3} &= \int_A^B \{M_0' + X_1 \sin \theta_x + X_2 \cos \theta_x + X_3 \cos(\gamma \sim \theta_x)\} \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{EJ} \\ &\quad + \int_A^B (M_{N_0} - X_1 \cos \theta_x - X_2 \sin \theta_x)(0) \frac{ds}{EI} \\ &= \int_A^B \{M_0' + X_1 \sin \theta_x + X_2 \cos \theta_x + X_3 \cos(\gamma \sim \theta_x)\} \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{EJ} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

(38) 式より、

$$\begin{aligned} &\int M_0' \sin \theta_x \frac{ds}{J} + X_1 \int \sin^2 \theta_x \frac{ds}{J} + X_2 \int \sin \theta_x \cos \theta_x \frac{ds}{J} + X_3 \int \sin \theta_x \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} \\ &\quad - \int M_{N_0} \cos \theta_x \frac{ds}{I} + X_1 \int \cos^2 \theta_x \frac{ds}{I} + X_2 \int \sin \theta_x \cos \theta_x \frac{ds}{I} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

(39) 式より、

$$\int M_0' \cos \theta_x \frac{ds}{J} + X_1 \int \sin \theta_x \cos \theta_x \frac{ds}{J} + X_2 \int \cos^2 \theta_x \frac{ds}{J} + X_3 \int \cos \theta_x \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} \\ - \int M_{N_0} \sin \theta_x \frac{ds}{J} + X_1 \int \sin \theta_x \cos \theta_x \frac{ds}{I} + X_2 \int \sin^2 \theta_x \frac{ds}{I} = 0 \quad (42)$$

(40) 式より,

$$\int M_0' \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} + X_1 \int \sin \theta_x \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} + X_2 \int \cos \theta_x \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} \\ + X_3 \int \cos^2(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} = 0 \quad (43)$$

然るに, 対称拱なる場合は, $\int \sin \theta_x \cos \theta_x \frac{ds}{J} = 0, \quad \int \sin \theta_x \cos \theta_x \frac{ds}{I} = 0,$
 $\int \sin \theta_x \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} = 0, \quad \int \cos \theta_x \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J} = 0$

故に (41) 式より,

$$X_1 = - \frac{\int M_0' \sin \theta_x \frac{ds}{J} - \int M_{N_0} \cos \theta_x \frac{ds}{I}}{\int \sin^2 \theta_x \frac{ds}{J} + \int \cos^2 \theta_x \frac{ds}{I}} \quad (44)$$

(42) 式より

$$X_2 = - \frac{\int M_0' \cos \theta_x \frac{ds}{J} - \int M_{N_0} \sin \theta_x \frac{ds}{I}}{\int \sin^2 \theta_x \frac{ds}{I} + \int \cos^2 \theta_x \frac{ds}{J}} \quad (45)$$

(43) 式より,

$$X_3 = - \frac{\int M_0' \cos(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J}}{\int \cos^2(\gamma \sim \theta_x) \frac{ds}{J}} \quad (46)$$

但し, 弾性重心の位置

$$c.f = \frac{\int y \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}} \quad (47)$$

(44), (45), (46), (47) 式等に於ける記号は, 既に説明した通りであるが, 弾性重心の位置については, 特に, 第5図参照の事。以上の理論は, 拱の断面が一定の場合にのみ成立する事は, 直梁の場合と同様であるが, 断面の形によつても, これから述べんとする理論に著しき違いが出て来る。例えば, 円形定断面とI形定断面の場合を比べて見れば次の如くである。即ち円形断面の場合は, 縦応力度を考えなくても済むが, I形断面の場合は, 縦応力度を同時に生ずるものとして取扱はなければならない事, 直梁の場合と同様である。そこで, 鋼拱橋に広く

用いられる I 形断面の場合について、公式の誘導を行う。既に述べた二鉸固定拱の場合同様、 \mathfrak{M}_b : 基本梁の任意の点 x, y に於ける断面ランヂの上端又は下端の曲げもーめんと、 \mathfrak{D}_b : 基本梁の任意の点 x, y に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力、 \mathfrak{M}_d : 基本梁の任意の点 x, y に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による振りもーめんと、 \mathfrak{M}_b' : 第 5 図の如き拱の任意の点 x, y に於ける断面フランヂの上端又は下端の曲げもーめんと、 \mathfrak{D}_b' : 第 5 図の如き拱の任意の点 x, y に於ける断面の上又は下端フランヂの剪断力、 \mathfrak{M}_d' : 第 5 図の如き拱の任意の点 x, y に於ける断面の上又は下端フランヂの曲げにともなう剪断力による振りもーめんと、とすれば、

$$\mathfrak{M}_b' = \mathfrak{M}_b + \mathfrak{M}_{X_1} + \mathfrak{M}_{X_2} \quad (48)$$

而して

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{X_1} &= -\frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d(X_1 \sin \theta_x)}{dx} \\ \mathfrak{M}_{X_2} &= -\frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d(X_2 \cos \theta_x)}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

故に (48) 式より、

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_b' &= \mathfrak{M}_b - \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d(X_1 \sin \theta_x)}{dx} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d(X_2 \cos \theta_x)}{dx} \right\} \\ &= \mathfrak{M}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(X_1 \frac{d \sin \theta_x}{dx} + \sin \theta_x \frac{dX_1}{dx} + X_2 \frac{d \cos \theta_x}{dx} + \cos \theta_x \frac{dX_2}{dx} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\text{又、} \quad \mathfrak{D}_b' = \mathfrak{D}_b + \frac{d(\mathfrak{M}_{X_1} + \mathfrak{M}_{X_2})}{dx} \quad (51)$$

(51) 式に (49) 式を代入し、

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_b' &= \mathfrak{D}_b - \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_1 \sin \theta_x)}{dx^2} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_2 \cos \theta_x)}{dx^2} \right\} \\ &= \mathfrak{D}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 X_1}{dx^2} \sin \theta_x + 2 \frac{dX_1}{dx} \frac{d \sin \theta_x}{dx} + X_1 \frac{d^2 \sin \theta_x}{dx^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 X_2}{dx^2} \cos \theta_x + 2 \frac{dX_2}{dx} \frac{d \cos \theta_x}{dx} + X_2 \frac{d^2 \cos \theta_x}{dx^2} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \text{又、} \quad \mathfrak{M}_d' &= -h \mathfrak{D}_b' = -h \left[\mathfrak{D}_b - \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_1 \sin \theta_x)}{dx^2} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_2 \cos \theta_x)}{dx^2} \right\} \right] \\ &= -h \left\{ \mathfrak{D}_b - \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \left(\frac{d^2 X_1}{dx^2} \sin \theta_x + 2 \frac{dX_1}{dx} \frac{d \sin \theta_x}{dx} + X_1 \frac{d^2 \sin \theta_x}{dx^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d^2 X_2}{dx^2} \cos \theta_x + 2 \frac{dX_2}{dx} \frac{d \cos \theta_x}{dx} + X_2 \frac{d^2 \cos \theta_x}{dx^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\mathfrak{M}_d = -h \mathfrak{D}_b \quad (54)$$

次に、第 6 図の如く、一端が振れに対してのみならず、その他のもーめんとに対しても固定され、他端が全く自由なる I 形断面の片持直梁が、固定端より、 a なる距離に、外力振りもー

めんと M を受ける場合、²⁴ 任意の点の断面振り応力度の合力も一めんと、 M_0 、任意の点の断面フランジの上端或は下端の曲げも一めんと \mathfrak{M}_b 、任意の点に於ける断面上又は下端フランジの剪断力 \mathfrak{D}_b 、任意の点に於ける断面上又は下端フランジの曲げにともなう剪断力による振りも一めんと \mathfrak{M}_a 等を求め、

(34) 及び、(50), (51), (52), (53), (54) 式などに代入すれば、 M_x , \mathfrak{M}_b' , \mathfrak{D}_b' , \mathfrak{M}_a' などを算出する事ができる。

第6図に於て、断面の振れ角を φ とすると、

単位長さ当りの振れ角は、 $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$ となる。

外から加はる振りも一めんと、 M とし、この振れの為に生ずる剪断応力と釣合う振り応力度の合力も一めんと、 $M_0 = C\theta$ (55)

茲に、 C : 振り剛性係数にして、

$$C = GJ \quad (56)$$

G : 剪断弾性係数、 J : 梁断面の振りも一めんとに対する抵抗慣性も一めんと、 \mathfrak{M}_a : 上又は下端フランジの曲げにともなう剪断力による振りも一めんと、とすると、 $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{D}_b h$ (57) 茲に、 \mathfrak{D}_b : 此の断面上又は下端フランジの剪断力、 h : 両フランジの各図心間の距離、

η : 上端フランジの軸の横方向への移動とすると $\eta = \frac{h\varphi}{2}$ (58)

之を微分すると、 $\frac{d^3\eta}{dx^3} = \frac{h}{2} \frac{d^3\varphi}{dx^3} = \frac{h}{2} \frac{d^3\theta}{dx^3}$ (59)

第6図に於て、面 xz の一フランジの曲げ剛性係数を D とすれば、 η は上方を正とすれば

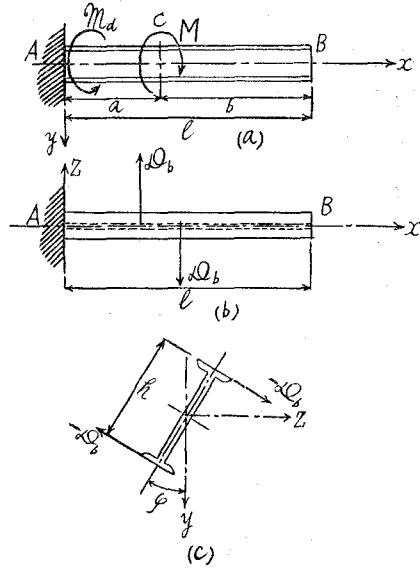
$$\mathfrak{D}_b = \frac{d\mathfrak{M}_b}{dx} = D \frac{d^3\eta}{dx^3} = \frac{Dh}{2} \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad (60)$$

\mathfrak{M}_a : 上端又は下端のフランジの曲げも一めんと

$$\mathfrak{M}_a = -\mathfrak{D}_b h = -\frac{Dh^2}{2} \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad (61)$$

故に、全振りも一めんとは、

$$M = M_0 + \mathfrak{M}_a = C\theta - \frac{Dh^2}{2} \frac{d^3\theta}{dx^3} \quad (62)$$



第6図 振りその他の一めんとに対し一端固定、他端自由なるI形断面の直梁の図

24 S. Timoshenko : Strength of Materials. 1930.
片山健次郎氏他1名共訳 : テイモシエンコ 材料力学. 1942.

(62) 式の一般解は,

$$\theta = \frac{M}{C} \left(1 - \frac{\cosh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} \right) \quad (63)$$

(但し $a > x$ とす)

茲に, $n^2 = \frac{Dh^2}{2C}$ 故に, $n = h\sqrt{\frac{D}{2C}}$ (64)

固定端断面では, $\mathfrak{D}_b = \frac{M}{h}$ (65)

$x = a$ では $\theta = \frac{M}{C} \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{a}{n}} \right)$ (66)

(60) 式を積分し,

$$\left. \begin{aligned} a > x \dots \mathfrak{M}_b &= \frac{Dh}{2} \frac{M}{nC} \frac{\sinh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} = \frac{n}{h} M \frac{\sinh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} \\ x = a \dots \mathfrak{M}_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

又, $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ なる故 (61) を積分し, 積分常数を $x=0$ に於て, $\varphi=0$ なるやうに定め

$$\varphi = \frac{M}{C} \left(x + \frac{n \sinh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} - n \tanh \frac{a}{n} \right) \quad (68)$$

(60) 式と (67) 式より, フランジの曲げによる剪断力 \mathfrak{D}_b は, 次の如くなる。

$$\mathfrak{D}_b = \frac{d\mathfrak{M}_b}{dx} = \frac{n}{h} M \frac{\cosh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} \left(-\frac{1}{n} \right)$$

故に, $a > x \dots \mathfrak{D}_b = -\frac{M}{h} \frac{\cosh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}}$

$$\left. \begin{aligned} x = a \dots \mathfrak{D}_b &= -\frac{M}{h} \frac{1}{\cosh \frac{a}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

(61) 式より,

$$\mathfrak{M}_a = -\mathfrak{D}_b h = M \frac{\cosh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}}$$

$$\left. \begin{aligned} a > x \dots \dots \mathfrak{M}_a &= M \frac{\cosh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} \\ x = a \dots \dots \mathfrak{M}_a &= M \frac{1}{\cosh \frac{a}{n}} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

又、(63) 式又は、(66) 式を (55) 式に代入し、

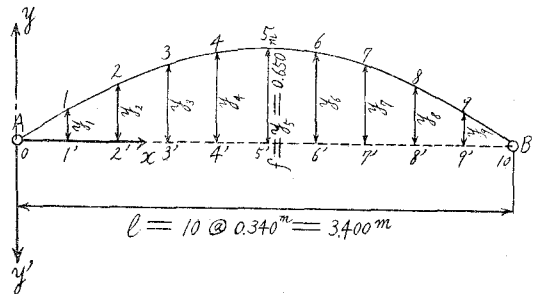
$$\left. \begin{aligned} a > x \dots \dots M_0 &= M \left(1 - \frac{\cosh \frac{a-x}{n}}{\cosh \frac{a}{n}} \right) \\ x = a \dots \dots M_0 &= M \left(1 - \frac{1}{\cosh \frac{a}{n}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

以上の式は、第 6 図を参照すれば分る通り、第 5 図とは、原点の取り方が異つているから、(67)、(69)、(70)、(71) 式などを、(34)、(50)、(51)、(52)、(53) 式に代入する際、記号に注意を必要とする。計算で求める場合は、別々に計算し、加算或は減算すれば容易に結果が得られる。以上の如く、第 5 図に示したような、一端が、振れのみならず、他のもーめんとに対しても全く固定せられ、他端は、弾性重心 G に剛桿を以て剛結せられた拱が、任意の点に、外力振りもーめんと、 M を受ける場合に、 M_x 、 \mathfrak{M}_b' 、 \mathfrak{D}_b' 、 \mathfrak{M}_a' 等を求める解法を示したがこれによつて計算し更に、反対の一端を振れ及びその他のもーめんとに対して、全く固定し、他端を弾性重心 G に剛桿を以て剛結し、外力振りもーめんと M が働く場合の、 M_x 、 \mathfrak{M}_b' 、 \mathfrak{D}_b' 、 \mathfrak{M}_a' 等を、対称の理により計算し、二つの場合の数値を、代数的に、加え合せれば、両端が、振れに対してのみならず、その他のもーめんとにも固定された無鉸固定拱が、外力振りもーめんとを受けた場合の、任意の点に於ける、各種振り応力を完全に求める事ができる。

Ⅲ 振りもーめんとを受ける拱の計算例

1. 二 鉸 固 定 拱

(1) 拱の諸数値、第 7 図は、両端が振れに対しては固定され、軸面内に於ける外力に対しては、鉸端であるとする。即ち、二次不静定の二鉸固定拱である。拱の形は、抛物線にして、材質は鋼よりなり、断面は、第 8 図の如く、I 形の定値とする。その諸数値を示せば、次の如



第 7 図 二鉸固定拱の寸法図

くである。I形鋼 600mm×

190mm×132.94kg/m,

$b=190\text{mm}$, $\delta_1=13\text{mm}$,

$\delta_2=25\text{mm}$, $h=57.5\text{cm}$,

$h'=55.0\text{cm}$, $h''=60.0\text{cm}$,

$f=0.650\text{m}$, $l=3.400\text{m}$

J = 全断面の捩りに対する抵抗慣性も-めんと

$$= \frac{1}{3} (h'\delta_1^3 + 2b\delta_2^3)$$

$$= 238.1\text{cm}^4$$

$$= 0.00002381\text{m}^4$$

I_y = y 軸に関する断面の慣性

も-めんと = 2538cm^4

$$= 0.0002538\text{m}^4$$

I_z = z 軸に関する断面の慣性も-めんと = $98172\text{cm}^4 = 0.00098172\text{m}^4$

A = 断面積 = $169.4\text{cm}^2 = 0.01694\text{m}^2$, 1 米当りの重量 $w = 132.94\text{kg/m}$

I_f = フランジの曲げを考える時の一つのフランジの断面二次も-めんと

$$= \frac{\delta_2 b^3}{12} = 1430\text{cm}^4 = 0.000143\text{m}^4, \quad \frac{J}{I_f} = 0.1636, \quad \sqrt{\frac{J}{I_f}} = 0.4083$$

$$\frac{l}{h} = 5.91, \quad \alpha l = 0.88 \frac{l}{h} \sqrt{\frac{J}{I_f}} \div 2, 0$$

第 1 表

| 点 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x(m)$ | 0 | 0.340 | 0.680 | 1.020 | 1.360 | 1.700 | 2.040 | 2.380 | 2.720 | 3.060 | 3.400 |
| $y(m)$ | 0 | 0.234 | 0.416 | 0.546 | 0.624 | 0.650 | 0.624 | 0.546 | 0.416 | 0.234 | 0 |

第 2 表

| 格点 | x | y | $\frac{8fx}{l^2}$ | $\tan\theta$ | θ | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ | $\cot\theta$ | $\sec\theta$ |
|----|-------|-------|-------------------|--------------|----------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0.7650 | $37^\circ 25'$ | 0.6076 | 0.7942 | 1.3072 | 1.2591 |
| 1 | 0.340 | 0.234 | 0.153 | 0.6120 | $31^\circ 28'$ | 0.5220 | 0.8529 | 1.6340 | 1.1724 |
| 2 | 0.680 | 0.416 | 0.306 | 0.4590 | $24^\circ 39'$ | 0.4171 | 0.9089 | 2.1792 | 1.1003 |
| 3 | 1.020 | 0.546 | 0.459 | 0.3060 | $17^\circ 01'$ | 0.2926 | 0.9562 | 3.2675 | 1.0458 |
| 4 | 1.360 | 0.624 | 0.612 | 0.1530 | $8^\circ 42'$ | 0.1513 | 0.9885 | 6.5350 | 1.0116 |
| 5 | 1.700 | 0.650 | 0.765 | 0 | 0° | 0 | 1.0000 | ∞ | 1.0000 |

拋物線の一般式,

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{4f}{l^2} x(l-x) = 0.765x - 0.2248x^2 \\ \tan\theta &= \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} - \frac{8fx}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

(2) 不静定水平振り反も一めんと M_H

(10) 式より

$$M_H = \frac{\int M_o' \sin\theta_x \frac{ds}{J} + \int M_{No} \cos\theta_x \frac{ds}{I}}{\int \sin^2\theta_x \frac{ds}{J} + \int \cos^2\theta_x \frac{ds}{I}}$$

$ds \cos\theta = dx$ なる故

$$M_H = - \frac{\int M_o' \frac{\sin\theta_x}{J \cos\theta_x} dx + \int M_{No} \frac{dx}{I}}{\int \frac{\sin^2\theta_x}{J \cos\theta_x} dx + \int \frac{\cos\theta}{I} dx} = - \frac{\int M_o' \frac{\tan\theta_x}{J} dx + \int M_{No} \frac{dx}{I}}{\int \frac{\tan\theta_x \sin\theta_x}{J} dx + \int \frac{\cos\theta_x}{I} dx} \quad \dots\dots\dots(73)$$

軸方向振りも一めんとの影響を微小として無視すれば,

$$M_H = - \frac{\int_0^l M_o' \frac{\tan\theta_x}{J} dx}{\int_0^l \frac{\tan\theta_x \sin\theta_x}{J} dx + \int_0^l \frac{\cos\theta_x}{I_y} dx} \quad (74)$$

第5表

| M_H 数値表 (係数 M) | | | |
|---------------------|--|--|--------------|
| 点 | 分子 = $\int_0^l M_o' \frac{\tan\theta_x}{J} dx$ (kg/m ²) | 分母 = $\int_0^l \frac{\tan\theta_x \sin\theta_x}{J} dx + \int_0^l \frac{\cos\theta_x}{I_y} dx$ (1/m ³) | ☆☆ (kg-m) |
| 0 | - 10,553.00 | + 367,854.00 | + 0.028700 |
| 1 | - 8,185.00 | + 367,854.00 | + 0.022250 |
| 2 | - 2,504.00 | + 367,854.00 | + 0.006810 |
| 3 | + 3,421.00 | + 367,854.00 | - 0.009302 |
| 4 | + 7,763.10 | + 367,854.00 | - 0.021100 |
| 5 | + 9,320.20 | + 367,854.00 | - 0.025340 |

$$\text{☆☆} \dots\dots M_H = - \frac{\int_0^l M_o' \frac{\tan\theta_x}{J} dx}{\int_0^l \frac{\tan\theta_x \sin\theta_x}{J} dx + \int_0^l \frac{\cos\theta_x}{I_y} dx}$$

図に示せば, 第9図の如くである。

(3) 任意の点の断面振り応力度の合力も一めんと M_x , 任意の点の断面フランジの上端或は下端の曲げも一めんと M_o' , 任意の点に於ける断面の上又は下端フランジの剪断力 \mathcal{D}_o' ,

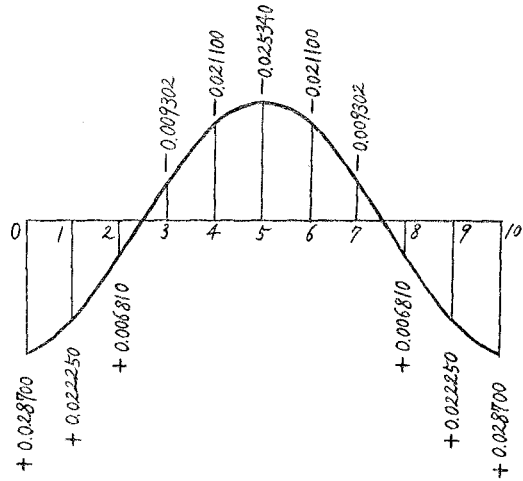
計算により, M_x , M_b' , D_b' を求めると

第4表, 第5表, 第6表が得られる。

以上の結果を, 図に示せば, 第10図, 第11

図, 第12図の如くなる。

M_H 影響線
係数 M



第9図 二鉸固定拱の不静定振り反もーめんと M_H の影響線図

第 4 表

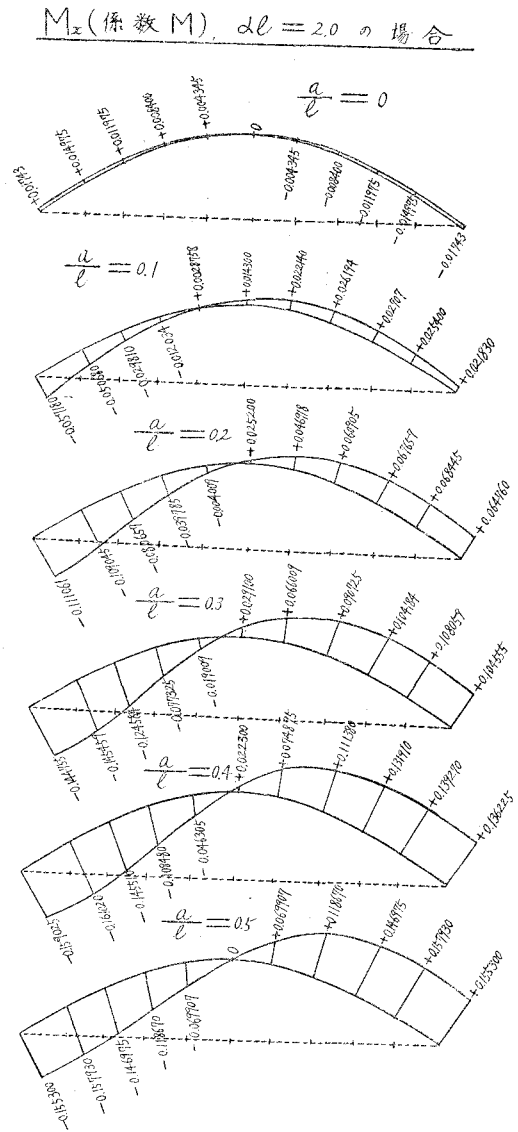
| $M_x = M_0' + M_H \sin \theta_x, \quad al = 2.0$ | | | | | | | | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|------------|
| 係 数 M | | | | | | | | |
| $\frac{x}{l}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | |
| $\frac{a}{l}$ | 0 | +0.017430 | +0.014975 | +0.011975 | +0.008400 | +0.004345 | 0 | -0.004345 |
| | 0.1 | -0.057180 | -0.050680 | -0.029810 | -0.012034 | +0.0028758 | +0.014300 | +0.022140 |
| | 0.2 | -0.111061 | -0.109045 | -0.080657 | -0.039785 | -0.004009 | +0.025200 | +0.046918 |
| | 0.3 | -0.144755 | -0.145459 | -0.124584 | -0.077325 | -0.019009 | +0.029100 | +0.066009 |
| | 0.4 | -0.159025 | -0.161020 | -0.145510 | -0.108480 | -0.046305 | +0.022300 | +0.074895 |
| | 0.5 | -0.155300 | -0.157930 | -0.146975 | -0.118670 | -0.069907 | 0 | +0.069907 |
| | 0.6 | -0.136225 | -0.139270 | -0.131910 | -0.111380 | -0.074895 | -0.022300 | +0.046305 |
| | 0.7 | -0.104555 | -0.108059 | -0.104184 | -0.090725 | -0.066009 | -0.029100 | +0.019009 |
| | 0.8 | -0.064761 | -0.068445 | -0.067657 | -0.060905 | -0.046918 | -0.025200 | +0.004009 |
| | 0.9 | -0.021830 | -0.025400 | -0.027070 | -0.026194 | -0.022140 | -0.014300 | -0.0028758 |
| 1.0 | +0.017430 | +0.014975 | +0.011975 | +0.008400 | +0.004345 | 0 | -0.004345 | |

第 5 表

| $M_0' = M_0 - \left(\frac{EJ}{GJa} \frac{h}{2} \right) \frac{d(M_H \sin \theta_x)}{dx}$ | | | | | | | | |
|--|-----------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 係数 $M \frac{l}{h}, \quad al = 2.0, \quad \frac{l}{h} = 5.91$ | | | | | | | | |
| $\frac{x}{l}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | |
| $\frac{a}{l}$ | 0 | -0.005470 | -0.006080 | -0.007330 | -0.008500 | -0.009360 | -0.009682 | -0.009360 |
| | 0.1 | -0.004235 | +0.064986 | +0.054313 | +0.044000 | +0.034150 | +0.025088 | +0.017350 |
| | 0.2 | -0.0013020 | +0.054857 | +0.1206625 | +0.101183 | +0.082278 | +0.064301 | +0.047508 |
| | 0.3 | +0.001775 | +0.0471125 | +0.100476 | +0.162507 | +0.133937 | +0.106342 | +0.080037 |
| | 0.4 | +0.004025 | +0.040215 | +0.083110 | +0.132960 | +0.189640 | +0.151024 | +0.114490 |
| | 0.5 | +0.004835 | +0.033186 | +0.067022 | +0.106210 | +0.150520 | +0.198950 | +0.150520 |
| | 0.6 | +0.004025 | +0.025715 | +0.051120 | +0.080760 | +0.114490 | +0.151025 | +0.189640 |
| | 0.7 | +0.001775 | +0.0170625 | +0.035186 | +0.056207 | +0.080037 | +0.106342 | +0.133937 |
| | 0.8 | -0.0013020 | +0.008282 | +0.0194425 | +0.032503 | +0.047508 | +0.064301 | +0.082278 |
| | 0.9 | -0.004235 | +0.000610 | +0.004673 | +0.010320 | +0.017350 | +0.025088 | +0.034150 |
| 1.0 | -0.005470 | -0.006080 | -0.007330 | -0.008500 | -0.009360 | -0.009682 | -0.009360 | |

| | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | -0.008400 | -0.011975 | -0.014975 | -0.017430 |
| | +0.026194 | +0.027070 | +0.025400 | +0.021830 |
| | +0.060905 | +0.067657 | +0.068445 | +0.064761 |
| | +0.090725 | +0.104184 | +0.108059 | +0.104555 |
| | +0.111380 | +0.131910 | +0.139270 | +0.136225 |
| | +0.118670 | +0.146975 | +0.157930 | +0.155300 |
| | +0.108480 | +0.145510 | +0.161020 | +0.159025 |
| | +0.077325 | +0.124584 | +0.145459 | +0.144755 |
| | +0.039785 | +0.080657 | +0.109045 | +0.111061 |
| | +0.012034 | +0.029310 | +0.050680 | +0.057180 |
| | -0.008400 | -0.011975 | -0.014975 | -0.017430 |

| | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|--|-----------|------------|------------|------------|
| | -0.008500 | -0.007330 | -0.005030 | -0.005470 |
| | +0.010320 | +0.004673 | +0.000610 | -0.004235 |
| | +0.032503 | +0.019425 | +0.008282 | -0.0013020 |
| | +0.056207 | +0.035186 | +0.0170625 | +0.001775 |
| | +0.080760 | +0.051120 | +0.025715 | +0.004025 |
| | +0.106210 | +0.057022 | +0.033186 | +0.004835 |
| | +0.132930 | +0.033110 | +0.040215 | +0.034025 |
| | +0.162507 | +0.100476 | +0.0471125 | +0.001775 |
| | +0.101183 | +0.1203625 | +0.054857 | -0.0013020 |
| | +0.044000 | +0.054313 | +0.054986 | -0.034235 |
| | +0.008500 | -0.007330 | -0.005030 | -0.005470 |



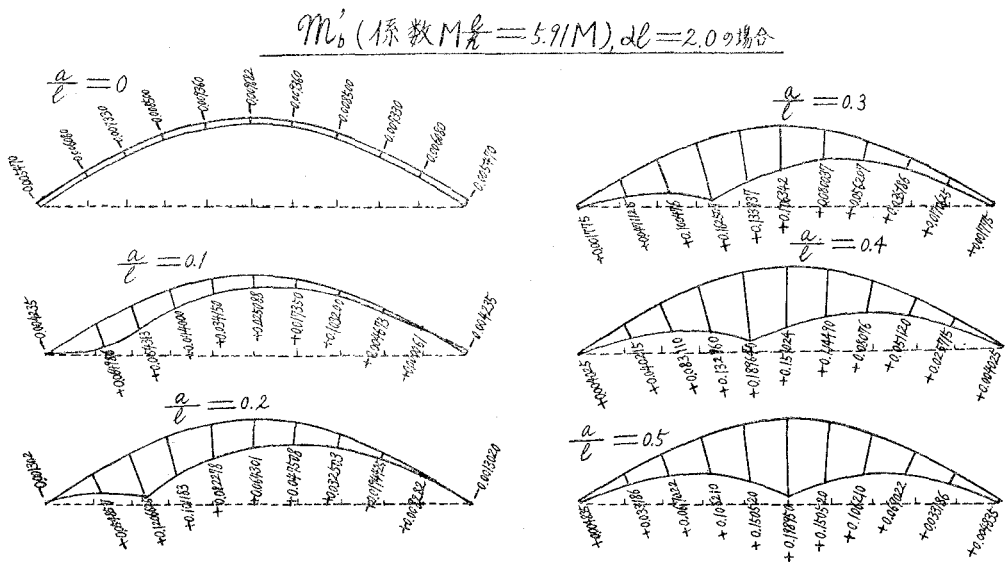
第10図 二鉸固定拱に於ける断面振り応力度の合力もーめんと M_x の分布図

第 6 表

$$\mathcal{D}_b' = \mathcal{D}_b - \left(\frac{EJ}{GJ_d} - \frac{h}{2} \right) \frac{d^2(M_H \cdot \sin \theta_x)}{dx^2}$$

係数 $M \frac{l}{h}$, $l=3.40m$, $\alpha l=2.0$

| $\frac{x}{l}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | |
|---------------|-----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\frac{a}{l}$ | 0 | +1.000000 +0.006100 | +0.009300 | +0.012100 | +0.010150 | +0.005910 | 0 | -0.005910 |
| | 0.1 | +0.797715 | +0.819235 -0.180340 | -0.146295 | -0.122375 | -0.105333 | -0.094020 | -0.036360 |
| | 0.2 | +0.638085 | +0. 6547875 | +0.697895 -0.302205 | -0. 2526075 | -0.213760 | -0.183965 | -0.161552 |
| | 0.3 | +0.505375 | +0.517355 | +0. 5504875 | +0.617557 -0.381949 | -0.330125 | -0.280725 | -0.242375 |
| | 0.4 | +0.404300 | +0.411134 | +0.435225 | +0.480470 | +0.547331 -0.452485 | -0.382368 | -0.327900 |
| $\frac{a}{l}$ | 0.5 | +0.318390 | +0.322215 | +0.339330 | +0.374710 | +0.428000 -0.500000 | +0.500000 -0.500000 | -0.428000 |
| | 0.6 | +0.246300 | +0.249016 | +0.261210 | +0.287548 | +0.327900 | +0.382368 | +0.452485 -0.547331 |
| | 0.7 | +0.184075 | +0.186395 | +0. 1961775 | +0.214520 | +0.242375 | +0.280725 | +0.330125 |
| | 0.8 | +0.123691 | +0. 1269425 | +0.134012 | +0. 1451925 | +0.161552 | +0.183965 | +0.213760 |
| | 0.9 | +0.057310 | +0.071030 | +0.076460 | +0.080335 | +0.086360 | +0.094020 | +0.105333 |
| | 1.0 | +0.006100 | +0.009300 | +0.012100 | +0.010150 | +0.005910 | 0 | -0.005910 |



第11図 二鉸固定拱に於ける断面フランジの上端或は下端の曲げモーメントと m'_b の分布図

| 橋 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|------------|-----------|-----------|-----------|
| | -0.010150 | -0.012100 | -0.009300 | -0.006100 |
| | -0.030335 | -0.076460 | -0.071030 | -0.057310 |
| | -0.1451925 | -0.134012 | 0 | -0.123691 |
| | -0.214520 | 0 | 1269425 | -0.184075 |
| | -0.237548 | -0.261210 | -0.186395 | -0.246300 |
| | -0.374710 | -0.339330 | -0.249016 | -0.318390 |
| | -0.480470 | -0.435225 | -0.322215 | -0.404300 |
| | +0.381949 | 0 | -0.411134 | -0.503375 |
| | -0.617557 | 5504875 | -0.517355 | -0.638035 |
| | +0 | +0.302205 | 0 | -0.638035 |
| | +0.2526075 | -0.697895 | 6547875 | -0.797715 |
| | +0.122375 | +0.146295 | +0.180340 | -0.006100 |
| | -0.010150 | -0.012100 | -0.009300 | -0.006100 |
| | | | | -1.000000 |

2 無鉸固定拱

(1) 拱の諸数値

第13図は、両端が振れに対して固定されている他、軸面内に於ける外力に対して固定された四次不静定の無鉸固定拱である。拱の形は拋物線にして、材質は鋼よりなり断面は、二鉸固定拱の場合同様第8図の如く、1形の定値とする。

拋物線一般式

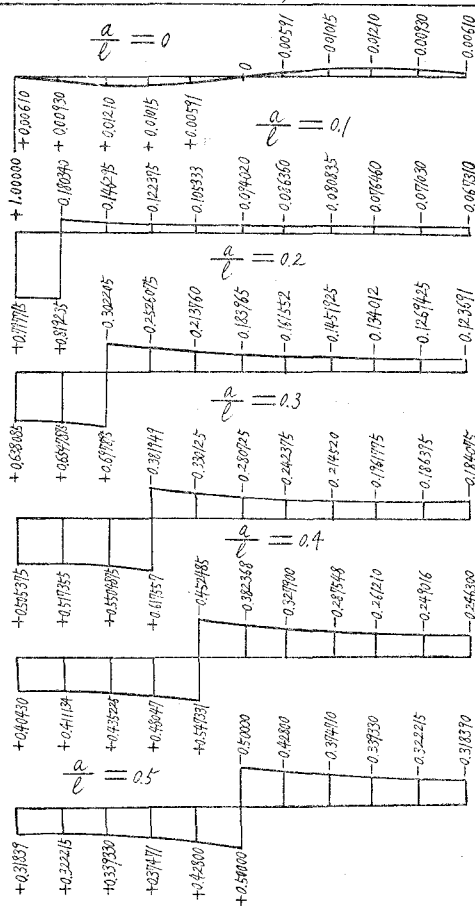
$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) = 0.765x - 0.2248x^2$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l} - \frac{8fx}{l^2}$$

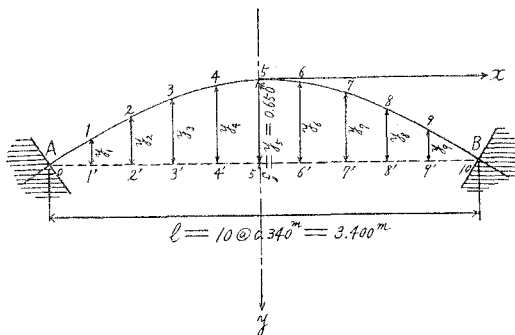
二鉸固定拱の場合に、諸数値は全く同一とし、 $f=0.650m$, $l=3.400m$,

$$\alpha l = \frac{l}{n} = 2.0 \text{ とする。}$$

D_b' (係数 $M \frac{1}{l} = 5.91M$), $\alpha l = 2.0$ の場合



第12図 二鉸固定拱に於ける断面の上又は下端フランジの剪断力 D_b' の分布図



第13図 無鉸固定拱の寸法図

原点を頂点Dにとれば

第 7 表

| 格 点 | x(m) | y(m) | θ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | γ | $\sin^2 \theta$ | $\cos^2 \theta$ | $\tan \theta$ |
|-----|--------|-------|----------|---------------|---------------|----------|-----------------|-----------------|---------------|
| 0 | -1.700 | 0.650 | 37°25' | 0.6076 | 0.7942 | 37°25' | 0.36900 | 0.6307 | 0.76502 |
| 1 | -1.360 | 0.624 | 31°28' | 0.5220 | 0.8529 | 31°28' | 0.27250 | 0.7276 | 0.61200 |
| 2 | -1.020 | 0.546 | 24°39' | 0.4171 | 0.9089 | 24°39' | 0.17400 | 0.8260 | 0.45889 |
| 3 | -0.680 | 0.416 | 17°01' | 0.2926 | 0.9562 | 17°01' | 0.08570 | 0.9145 | 0.30605 |
| 4 | -0.340 | 0.234 | 8°42' | 0.1513 | 0.9885 | 8°42' | 0.02296 | 0.9770 | 0.15302 |
| 5 | 0 | 0 | 0° | 0 | 1.0000 | 0° | 0 | 1.0000 | 0 |
| 6 | +0.340 | 0.234 | -8°42' | -0.1513 | 0.9885 | -8°42' | 0.02292 | 0.9770 | -0.15302 |
| 7 | +0.680 | 0.416 | -17°01' | -0.2926 | 0.9562 | -17°01' | 0.08570 | 0.9145 | -0.30605 |
| 8 | +1.020 | 0.546 | -24°39' | -0.4171 | 0.9089 | -24°39' | 0.17400 | 0.8260 | -0.45889 |
| 9 | +1.360 | 0.624 | -31°28' | -0.5220 | 0.8529 | -31°28' | 0.27250 | 0.7276 | -0.61200 |
| 10 | +1.700 | 0.650 | -37°25' | -0.6076 | 0.7942 | -37°25' | 0.36900 | 0.6307 | -0.76502 |

$b=19.0\text{cm}, \delta_s=2.5\text{cm}, \delta_1=1.3\text{cm}, h=57.5\text{cm}, h'=55.0\text{cm}, h''=60.0\text{cm}$

$J=0.00002381\text{m}^4, I_y=0.00002538\text{m}^4, I_z=0.00098172\text{m}^4, A=0.01664\text{m}^2,$

$w=132.94\text{kg/m}, I_f=0.0000143\text{m}^4, \frac{J}{I_f}=0.1666, \sqrt{\frac{J}{I_f}}=0.4083, \frac{l}{h}=5.91$

$\therefore \alpha l = 0.88 \frac{l}{h} \sqrt{\frac{J}{I_f}} \doteq 2.0$

(2) 不静定量, 即ち, 水平振り反もーめんと X_1 , 鉛直振り反もーめんと X_2 , 軸線に垂直な面に於ける振り反もーめんと X_3 (第5図参照) B端固定, A端自由なる拱に於て, A端に剛体の桿AGを剛結する場合の X_1, X_2, X_3 は (44), (45), (46)式に於て, 軸方向振り反もーめんとの影響は小なる故無視し, $d\cos\theta = dx$ を用いれば次式が得られる。

$$X_1 = - \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_o' \frac{\sin\theta_x}{J\cos\theta_x} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\sin^2\theta_x}{J\cos^2\theta_x} dx - \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\cos\theta_x}{I_y} dx} = - \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_o' \frac{\tan\theta_x}{J} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\tan\theta_x \sin\theta_x}{J} dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\cos\theta_x}{I_y} dx} \dots\dots\dots(75)$$

$$X_2 = - \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_0' \frac{1}{J} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\tan \theta_x \sin \theta_x}{I_y} dx + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\cos \theta_x}{J} dx} \quad (76)$$

$$X_3 = - \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} M_0' \frac{\cos(\theta_x \sim r)}{J \cos \theta_x} dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\cos^2(\theta_x \sim \gamma)}{J \cos \theta_x} dx} \quad (77)$$

X_1, X_2, X_3 を計算すれば、第8表が得られ、影響線図を書けば、第14図の如くなる。

(3) 任意の点の断面振り応力度の合力もーめんと M_x 、任意の点の断面フランジの上端或は下端の曲げもーめんと \mathcal{M}_b 、任意の点に於ける断面の上又は下端フランジの剪断力 \mathcal{D}_b 、任意の点に於ける断面の上又は下端フランジの曲げにもなる剪断力による振りもーめんと \mathcal{M}_a

((34), (50), (52), (53)式, 参照) B 端固定 A 端自由にして、 AG が剛結されてる場合について計算すれば、第9表、第10表、第11表、第12表、の如くなる。

更に、 A 端固定、 B 端自由、 BG を剛結せる場合の $M_x, \mathcal{M}_b', \mathcal{D}_b', \mathcal{M}_a'$ は B 端固定、 A 端自由 AG が剛結されてる場合の反対対称となり、又符号も逆となることが容易に分るから、この両者を加え合せて、両端固定なる場合の値を求める事ができる。両端固定なる場合の $M_x, \mathcal{M}_b', \mathcal{D}_b', \mathcal{M}_a'$ の分布図を求めれば、第15図、第16図、第17図、第18図の如くなる。

第 8 表

| X ₁ | | | |
|----------------|----------------------------|------------------------|------------------------------------|
| 点 | 分子 (kg/m ²) | 分母 (1/m ³) | X ₁ = 分子 / 分母 (kg-m) |
| 0 | 40,130.00 | 367,854.00 | -0.1091 |
| 1 | 99,130.00 | 367,854.00 | -0.2694 |
| 2 | 137,760.00 | 367,854.00 | -0.3745 |
| 3 | 157,500.00 | 367,854.00 | -0.4280 |
| 4 | 160,173.00 | 367,854.00 | -0.4353 |
| 5 | 148,780.00 | 367,854.00 | -0.4045 |
| 6 | 126,805.00 | 367,854.00 | -0.3447 |
| 7 | 98,262.00 | 367,854.00 | -0.2670 |
| 8 | 66,483.00 | 367,854.00 | -0.1807 |
| 9 | 33,733.00 | 367,854.00 | -0.0917 |
| 10 | 0 | 367,854.00 | 0 |

第 9 表

$$M_x = M_0' + X_1 \sin \theta_x + X_2 \cos \theta_x + X_3 \cos (\theta_x - \gamma)$$

B 端 固 定 A 端 自 由 AGが剛結されている場合

| 点 | $\frac{a}{l}$ | $\frac{x}{l} = -0.50$ | -0.40 | -0.30 | -0.20 | -0.10 | 0 | +0.10 |
|----|---------------|-----------------------|----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 0 | -0.50 | +0.41430 | +0.46033 | +0.49681 | +0.51845 | +0.51895 | +0.49365 | +0.44099 |
| 1 | -0.40 | -0.42560 | +0.16855 | +0.22350 | +0.26968 | +0.29945 | +0.30985 | +0.29505 |
| 2 | -0.30 | -0.59970 | -0.58205 | +0.00185 | +0.05435 | +0.11479 | +0.14830 | +0.15971 |
| 3 | -0.20 | -0.70330 | -0.68880 | -0.66310 | -0.110950 | -0.046910 | +0.00220 | +0.03131 |
| 4 | -0.10 | -0.73470 | -0.72640 | -0.70740 | -0.67390 | -0.18092 | -0.12110 | -0.03018 |
| 5 | 0 | -0.70350 | -0.70490 | -0.69495 | -0.67180 | -0.63376 | -0.22680 | -0.17624 |
| 6 | +0.10 | -0.63000 | -0.63730 | -0.63685 | -0.62590 | -0.60130 | -0.56200 | -0.26030 |
| 7 | +0.20 | -0.50365 | -0.52105 | -0.52825 | -0.52745 | -0.51615 | -0.49220 | -0.45735 |
| 8 | +0.30 | -0.36730 | -0.33190 | -0.39320 | -0.39937 | -0.39326 | -0.38780 | -0.36864 |
| 9 | +0.40 | -0.19467 | -0.20503 | -0.21449 | -0.22114 | -0.22415 | -0.22230 | -0.21512 |
| 10 | +0.50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

第 10 表

$$\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d(X_1 \sin \theta_x)}{dx} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d(X_2 \cos \theta_x)}{dx} \right\}$$

係数 $-\frac{n}{h} M = 5.91M, \quad 2l = \frac{l}{n} = 2.0$

B 端 固 定 A 端 自 由 AGが剛結されている場合

| 点 | $\frac{a}{l}$ | $\frac{x}{l} = -0.50$ | -0.40 | -0.30 | -0.20 | -0.10 | 0 | +0.10 |
|----|---------------|-----------------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | -0.50 | +0.015678 | +0.040998 | +0.072993 | +0.10972 | +0.150315 | +0.192890 | +0.235625 |
| 1 | -0.40 | +0.03655 | +0.04289 | +0.05050 | +0.1420135 | +0.183909 | +0.233750 | +0.279941 |
| 2 | -0.30 | +0.04847 | +0.05712 | +0.07577 | +0.132975 | +0.192328 | +0.249800 | +0.300922 |
| 3 | -0.20 | +0.05170 | +0.05162 | +0.03332 | +0.105640 | +0.174675 | +0.239775 | +0.296730 |
| 4 | -0.10 | +0.04815 | +0.05826 | +0.03056 | +0.105510 | +0.129030 | +0.202350 | +0.266820 |
| 5 | 0 | +0.03965 | +0.04910 | +0.07054 | +0.094280 | +0.117650 | +0.136500 | +0.210350 |
| 6 | +0.10 | +0.02809 | +0.03671 | +0.05526 | +0.076700 | +0.098475 | +0.116250 | +0.126325 |
| 7 | +0.20 | +0.01772 | +0.02422 | +0.03915 | +0.056480 | +0.074730 | +0.090100 | +0.099470 |
| 8 | +0.30 | +0.00711 | +0.01183 | +0.02252 | +0.035120 | +0.048320 | +0.050980 | +0.058930 |
| 9 | +0.40 | +0.00185 | +0.00398 | +0.009545 | +0.016520 | +0.023851 | +0.030940 | +0.035889 |
| 10 | +0.50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

第 8 表 続 き

| 係 数 M | | | |
|--------------------------------|----------|----------|----------|
| $\alpha l = \frac{l}{r} = 2.0$ | | | |
| +0.20 | +0.30 | +0.40 | +0.50 |
| +0.36236 | +0.26270 | +0.14611 | +0.01652 |
| +0.25577 | +0.19400 | +0.11223 | +0.01263 |
| +0.14745 | +0.11155 | +0.0541 | +0.02313 |
| +0.03705 | +0.01960 | +0.02030 | -0.03340 |
| -0.05250 | -0.05930 | -0.09935 | -0.15130 |
| -0.14910 | -0.14675 | -0.16920 | -0.21390 |
| -0.22210 | -0.21025 | -0.22433 | -0.26250 |
| -0.26395 | -0.23950 | -0.24360 | -0.27315 |
| -0.34228 | -0.24362 | -0.23155 | -0.24875 |
| -0.20366 | -0.18944 | -0.15754 | -0.15832 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| X ₂ | | | |
|----------------|----------------------------|------------------------|--|
| 点 | 分子 (kg/m ³) | 分母 ($\frac{1}{m^3}$) | X ₂ = $\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ (kg-m) |
| 0 | 52,420.00 | 1,343,134.00 | -0.03903 |
| 1 | 149,050.00 | 1,343,134.00 | -0.11095 |
| 2 | 234,390.00 | 1,343,134.00 | -0.17440 |
| 3 | 305,080.00 | 1,343,134.00 | -0.22710 |
| 4 | 356,730.00 | 1,343,134.00 | -0.26550 |
| 5 | 384,750.00 | 1,343,134.00 | -0.28640 |
| 6 | 384,150.00 | 1,343,134.00 | -0.28550 |
| 7 | 340,000.00 | 1,343,134.00 | -0.25310 |
| 8 | 278,035.00 | 1,343,134.00 | -0.20680 |
| 9 | 162,805.00 | 1,343,134.00 | -0.12120 |
| 10 | 0 | 1,343,134.00 | 0 |

| X ₃ | | | |
|----------------|----------------------------|------------------------|--|
| 点 | 分子 (kg/m ³) | 分母 ($\frac{1}{m^3}$) | X ₃ = $\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$ (kg-m) |
| 0 | 66,010.00 | 919,168.00 | -0.07180 |
| 1 | 178,770.00 | 1,022,650.00 | -0.17475 |
| 2 | 270,280.00 | 1,127,875.00 | -0.23940 |
| 3 | 337,560.00 | 1,203,410.00 | -0.28050 |
| 4 | 376,450.00 | 1,272,800.00 | -0.29550 |
| 5 | 384,420.00 | 1,314,220.00 | -0.29240 |
| 6 | 360,070.00 | 1,289,850.00 | -0.27920 |
| 7 | 305,650.00 | 1,222,570.00 | -0.25000 |
| 8 | 224,805.00 | 1,128,070.00 | -0.19920 |
| 9 | 121,141.00 | 1,022,570.00 | -0.11835 |
| 10 | 0 | 918,980.00 | 0 |

| +0.20 | +0.30 | +0.40 | +0.50 |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| +0.277655 | +0.319347 | +0.351647 | +0.408922 |
| +0.3127865 | +0.360220 | +0.397760 | +0.441950 |
| +0.344175 | +0.381870 | +0.416980 | +0.464280 |
| +0.344210 | +0.383930 | +0.418980 | +0.463050 |
| +0.321040 | +0.364840 | +0.403340 | +0.448650 |
| +0.272520 | +0.323510 | +0.367850 | +0.417150 |
| +0.199400 | +0.260530 | +0.312970 | +0.367270 |
| +0.101720 | +0.174390 | +0.236780 | +0.297330 |
| +0.071880 | +0.070080 | +0.144105 | +0.213130 |
| +0.037800 | +0.037395 | +0.034940 | +0.111360 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

第 11 表

$$\mathfrak{D}_b' = \mathfrak{D}_b - \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_1 \sin \theta_x)}{dx^2} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_2 \cos \theta_x)}{dx^2} \right\}$$

B 端 固 定 A 端 自 由 AG が 剛 結 さ れ て い る 場 合

係 数 $M = \frac{1}{h}$, $\alpha l = \frac{l}{n} = 2.0$

| 点 | $\frac{a}{l}$ | $\frac{x}{l} = -0.50$ | -0.40 | -0.30 | -0.20 | -0.10 | 0 | +0.10 |
|----|---------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0 | -0.50 | -0.29065 | -0.309675 | -0.340760 | -0.366360 | -0.395225 | -0.429350 | -0.476125 |
| 1 | -0.40 | -0.05340 | -0.427740 -0.097650 | -0.472055 | -0.489402 | -0.494215 | -0.494170 | -0.503285 |
| 2 | -0.30 | -0.03650 | -0.136500 | -0.592225 -0.192525 | -0.597310 | -0.585385 | -0.558890 | -0.535125 |
| 3 | -0.20 | -0.09920 | -0.158100 | -0.225100 | -0.705430 -0.225750 | -0.678300 | -0.627340 | -0.581760 |
| 4 | -0.10 | -0.10110 | -0.162550 | -0.236250 | -0.242100 | -0.766272 -0.206200 | -0.699720 | -0.633260 |
| 5 | 0 | -0.09450 | -0.154450 | -0.225900 | -0.235550 | -0.211100 | -0.789500 -0.141500 | -0.705100 |
| 6 | +0.10 | -0.03650 | -0.135850 | -0.199800 | -0.216075 | -0.197750 | -0.139250 | -0.795563 -0.056250 |
| 7 | +0.20 | -0.05500 | -0.107150 | -0.161300 | -0.177900 | -0.168100 | -0.123700 | -0.058100 |
| 8 | +0.30 | -0.04720 | -0.077050 | -0.116450 | -0.131500 | -0.129300 | -0.100300 | -0.054500 |
| 9 | +0.40 | -0.02130 | -0.038475 | -0.062700 | -0.071530 | -0.072100 | -0.050190 | -0.034300 |
| 10 | +0.50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

第 12 表

$$\mathfrak{M}_a' = \mathfrak{D}_b' = -\mathfrak{D}_b + \left\{ \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_1 \sin \theta_x)}{dx^2} + \frac{EI_f}{GJ} \frac{h}{2} \frac{d^2(X_2 \cos \theta_x)}{dx^2} \right\}$$

B 端 固 定 A 端 自 由 AG が 剛 結 さ れ て い る 場 合

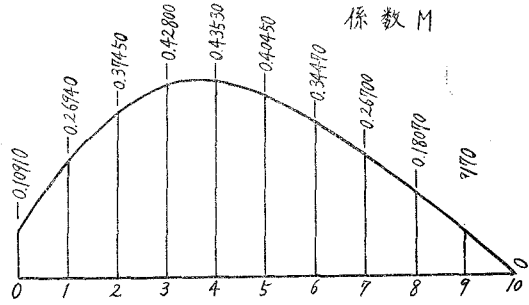
係 数 M , $\alpha l = \frac{l}{n} = 2.0$

| 点 | $\frac{a}{l}$ | $\frac{x}{l} = -0.50$ | -0.40 | -0.30 | -0.20 | -0.10 | 0 | +0.10 |
|----|---------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0 | -0.50 | +0.290650 | +0.309675 | +0.340760 | +0.366260 | +0.395225 | +0.429350 | +0.476125 |
| 1 | -0.40 | +0.053400 | +0.427740 +0.097650 | +0.472055 | +0.489402 | +0.494215 | +0.494170 | +0.503285 |
| 2 | -0.30 | +0.036500 | +0.136500 | +0.592225 +0.192525 | +0.597310 | +0.585385 | +0.558890 | +0.535125 |
| 3 | -0.20 | +0.099200 | +0.158100 | +0.225100 | +0.705430 +0.225750 | +0.678300 | +0.627340 | +0.581760 |
| 4 | -0.10 | +0.101100 | +0.162550 | +0.236250 | +0.242100 | +0.766272 +0.206200 | +0.699720 | +0.633260 |
| 5 | 0 | +0.094500 | +0.154450 | +0.225900 | +0.235550 | +0.211100 | +0.789500 +0.141500 | +0.705100 |
| 6 | +0.10 | +0.036500 | +0.135850 | +0.199800 | +0.216075 | +0.197750 | +0.139250 | +0.795563 +0.056250 |
| 7 | +0.20 | +0.055000 | +0.107150 | +0.161300 | +0.177900 | +0.168100 | +0.123700 | +0.058100 |
| 8 | +0.30 | +0.047200 | +0.077050 | +0.116450 | +0.131500 | +0.129300 | +0.100300 | +0.054500 |
| 9 | +0.40 | +0.021300 | +0.038475 | +0.062700 | +0.071530 | +0.072100 | +0.050190 | +0.034300 |
| 10 | +0.50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

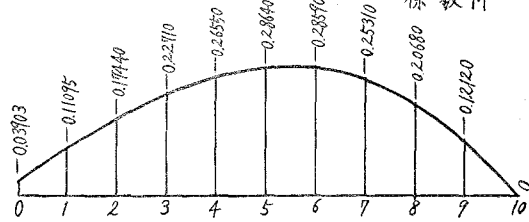
| | +0.20 | +0.30 | +0.40 | +0.50 |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | -0.546160 | -0.646960 | -0.793975 | -0.977750 |
| | -0.540520 | -0.618800 | -0.771780 | -0.945400 |
| | -0.542830 | -0.601415 | -0.751540 | -0.922500 |
| | -0.567980 | -0.605900 | -0.747440 | -0.914200 |
| | -0.600147 | -0.620150 | -0.743640 | -0.912100 |
| | -0.651550 | -0.654400 | -0.761450 | -0.923500 |
| | -0.727425 | -0.710590 | -0.788210 | -0.934582 |
| | -0.815725 | -0.780075 | -0.827910 | -0.930250 |
| | +0.010900 | -0.876740 | -0.886510 | -0.951540 |
| | -0.005500 | +0.035750 | -0.951990 | -0.973552 |
| | -0.007530 | +0.014300 | +0.021925 | -1.000000 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | +0.20 | +0.30 | +0.40 | +0.50 |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | +0.546160 | +0.946960 | +0.793975 | +0.977750 |
| | +0.540520 | +0.618800 | +0.771780 | +0.945400 |
| | +0.542830 | +0.601415 | +0.751540 | +0.922500 |
| | +0.567980 | +0.605900 | +0.747440 | +0.914200 |
| | +0.600147 | +0.620150 | +0.743640 | +0.912100 |
| | +0.651550 | +0.654400 | +0.761450 | +0.923500 |
| | +0.727425 | +0.710590 | +0.788210 | +0.934582 |
| | +0.815725 | +0.780075 | +0.827910 | +0.930250 |
| | -0.010900 | +0.876740 | +0.886510 | +0.951540 |
| | +0.005500 | -0.035750 | +0.951990 | +0.973552 |
| | +0.007530 | -0.014300 | -0.021925 | +0.973552 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |

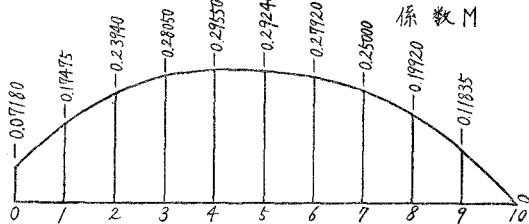
(a) Σ_1 影響線



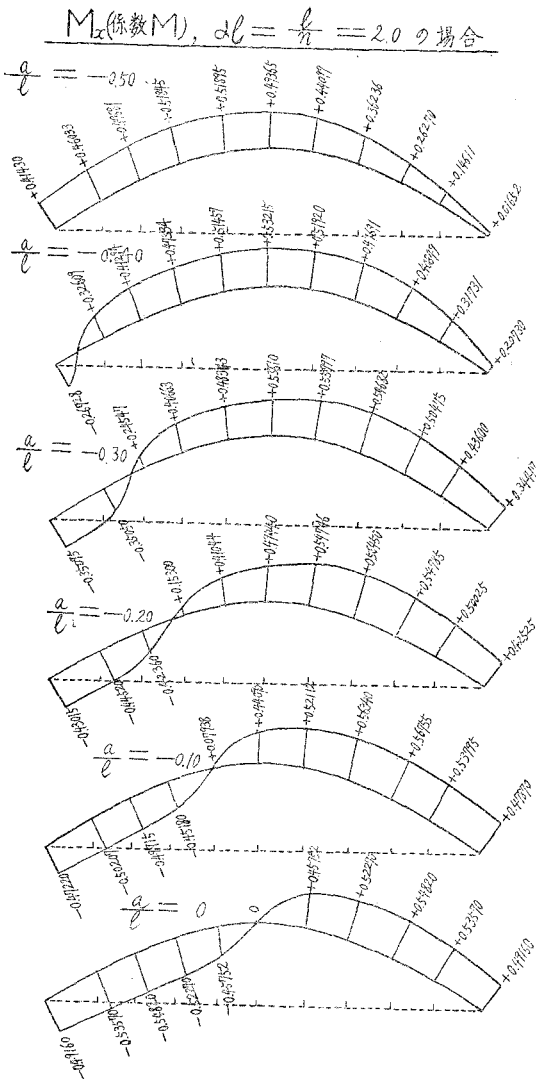
(b) Σ_2 影響線



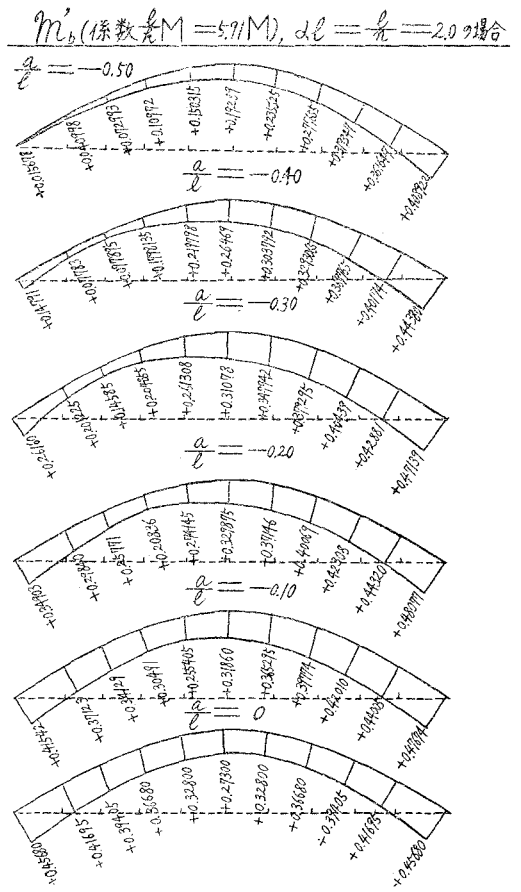
(c) Σ_3 影響線



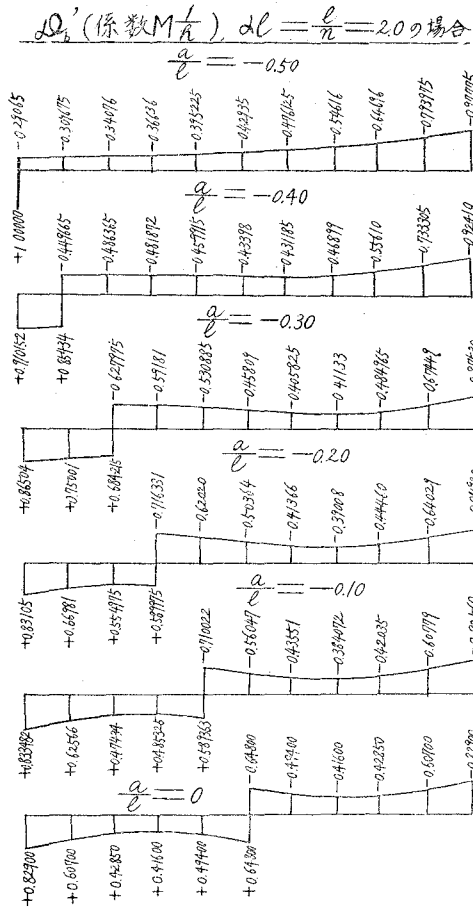
第14図 一端固定，他端自由にして自由端を弾性重心に剛桿にて剛結せる拱（但し，固定，剛結とは振りもーめんとに対して固定なる事を含む）の不静定振り反もーめんと X_1, X_2, X_3 の影響線図



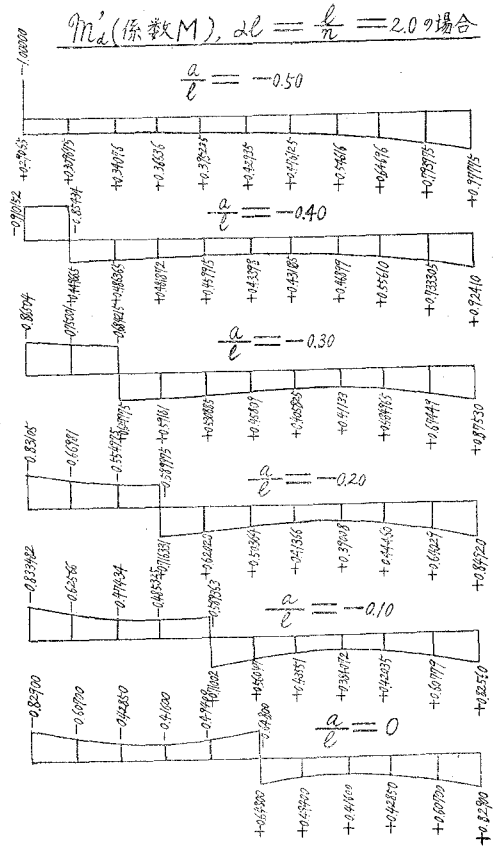
第15図 無鉸固定拱に於ける断面振り応力変の合力もーめんと M_x の分布図



第16図 無鉸固定拱に於ける断面フランジの上端或は下端の曲げもーめんと m'_b の分布図



第17図 無鉸固定拱に於ける断面の上又は下端フランジの剪断力 \mathcal{D}'_s の分布図



第18図 無鉸固定拱に於ける断面の上又は下端フランジの曲げにもなる剪断力による振りもーめん \mathcal{M}'_a の分布図

IV 結 言

二鉸固定拱の水平振り反もーめん M_H の影響線は、左右対称になるのに比べ、一端固定他端自由にして、自由端と弾性重心とを剛桿にて剛結せる場合の不静定振り反もーめん X_1 , X_2 , X_3 は左右対称とはならず、両端固定の場合を求めるには、更に、反対の一端を固定にし、他端を自由とし、自由端と弾性重心とを剛桿にて剛結せる場合の X_1 , X_2 , X_3 を求め、両者を加算しなければならない。振り応力度合力もーめん M_s 、断面フランジの上端或は下端の曲げもーめん \mathcal{M}'_s 、断面の上又は下端フランジの剪断力 \mathcal{D}'_s 、断面の上又は下端フランジの曲げにもなる剪断力による振りもーめん \mathcal{M}'_a 、等を求める場合も同様である。計算

結果より見ると、不静定捩り反もーめんとが、 M_x , M_b' , \mathcal{D}_b' , M_d' 等に及ぼす影響は、無視出来ないものがある。二鉸固定拱の場合は、左程でもないが、無鉸固定拱の場合は、極めてその影響が大きかった。この無鉸固定拱の不静定量、 X_1 , X_2 , X_3 などの影響線は、近藤繁人氏の立体曲り梁の計算²⁵で得た不静定値の影響線とその曲線の形が似かよっている事は間接的ではあるが参考になると思う。又、二鉸固定拱や無鉸固定拱の M_x , M_b' , \mathcal{D}_b' , M_d' に関する曲線はその曲線の形が、Unold氏の行つた I 形断面環状梁の研究結果²⁶と、少々似かよつた点もあるので、これ又、間接的には参考になると思う。更に、これらの不静定捩り反もーめんとの本質を知るため、拋物線拱及び、その他の曲線拱についても、 $\frac{f}{l}$ を種々に変えて、二鉸固定拱、無鉸固定拱、各々の場合の M_H 及び X_1 , X_2 , X_3 の影響線を求め、その変化の模様を研究する事は捩りもーめんとを受ける拱橋の今後の研究に極めて役立つものと思う。

(昭和30年5月27日受付)

25 近藤繁人：立体曲り梁の解法。土木学会第10回年次学術講演会，発表資料 1954.

26 池部宗薫他5氏共訳：ブライヒ鉄骨構造，1941.

不連続な基礎上に在る梁および 矩形板の曲げ

能 町 純 雄

On the Bending of Beams and Rectangular Plates on Elastic Foundation with Discontinous Property

Sumio Nomachi

Abstract

The bending moment at any point of the beam is expressed by integrating the product of the load intensity and the abscissa at the same point in the influence line. From the same manner, using the deflection influence line or surface, namely, the Green's function for the beam or the plate, the actual deflection may be written in a form of the 2nd kind Fredholm's equation.

In this paper, after developing the above mentioned integral equation, the writer proposes a brief approximate formula for the bending of the rectangular plate on a discontinous elastic foundation.

要 旨

梁の任意の点の曲げモーメントは、荷重強度と、曲げモーメント影響線の縦距との積の積分で表わされる。これと同様の考え方から、梁又は矩形板の撓み影響線（又は面）、即ち任意の点に作用する単位点荷重による撓みの式を用いて、性質が一樣でない弾性基礎上の梁又は矩形板の撓みを、第2種 Fredholm 積分方程式を解くことに依つて決定することができる。

I 普 通 の 梁

i) 基本微分方程式

梁の撓みの基本微分方程式は、次の如く与えられる。

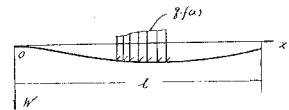
$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{g}{N} f(x) \quad (1)$$

上式中

W = 沈下, g = 定数, $f(x)$ = 梁の任意点の荷重強度,

$N = EI$ (E = 梁の弾性係数, I = 梁の断面二次モーメント)

計算の便上, $W = (ql^4/N)y$, ただし l = 径間長とすれば, y は dimension のない数で,



第 1 図

(1) 式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{f(x)}{l^4} \quad (2)$$

となる。

ii) 有限なフーリエ変換による一般解

y'''' ($= \frac{d^4 y}{dx^4}$) の Green 積分は

$$\int_0^l (y'''' u - u'''' y) dx = [y''' u - y'' u' + y' u'' - y u''']_0^l$$

となる。上式中, $u = \sin \frac{m\pi}{l} x$ ($m=1, 2, 3, \dots$) とおき, かつ $S_m[y] = \int_0^l y \sin \frac{m\pi}{l} x dx$

なる記号を用いれば

$$S_m[y'''''] - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 S_m[y] = -\left(\frac{m\pi}{l}\right) \{(-1)^m y''_{x=l} - y''_{x=0}\} + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^3 \{(-1)^m y_{x=l} - y_{x=0}\}$$

を得る。上式左辺の y'''' の代りに, (2) 式の右辺すなわち $f(x)/l^4$ を代入して, $S_m[y]$ の逆変換を作れば, y は, 次の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt \\ &+ 2l \left\{ y''_{x=l} \sum_m \frac{(-1)^m}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi}{l} x - y''_{x=0} \sum_m \frac{1}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \\ &+ 2 \left\{ y_{x=l} \sum_m \frac{(-1)^m}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{l} x - y_{x=0} \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{l} x \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

今単位荷重が $x=t$ を中心点として幅 $2t_0$ 内に一様に分布するものとすれば,

$$f(t') = \frac{1}{2t_0} \quad (t-t_0 < t' < t+t_0),$$

$$f(t') = 0 \quad (0 < t' < t-t_0, \quad t+t_0 < t' < l).$$

したがって

$$\begin{aligned} &\int_0^l f(t') \frac{\sin m\pi t'/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt' \\ &= \int_{t-t_0}^{t+t_0} \frac{\sin m\pi t'/l \cdot \sin m\pi x/l dt'}{2t_0(m\pi)^4} \\ &= \frac{l}{t_0} \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^5} = I \end{aligned}$$

故に

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} I = l \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4}.$$

よつて (3) 式中

$$2l^2 y''_{x=l} = C_1, \quad 2l^2 y''_{x=0} = C_2$$

$$y_{x=l} = C_1, \quad y_{x=0} = C_2$$

とおけば、点荷重に対する y は、次のように表わされる。

$$y = \frac{2}{l} \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} + C_1 \sum_m \frac{(-1)^m \sin \frac{m\pi x}{l}}{(m\pi)^3} - C_2 \sum_m \frac{1}{(m\pi)^3} \sin \frac{m\pi x}{l} + C_1' \frac{x}{l} + C_2' \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (4)$$

未知数 C_1, C_2, C_1', C_2' は、境界条件によつて与えられ、一般的には、この値によつて変化するものである。各境界条件を満足するように C_1, \dots, C_2' を調整すれば、(4) 式は $x=t$ に単位点荷重が作用する場合の撓みを表わし、所謂 Green の函数となる。これを一般に $G(xt)$

で表わせば、分布状態が $F(t)$ なる荷重に対しては

$$y = \int_0^l F(t)G(xt)dt \quad (5)$$

と書くことができる。

iii) $G(xt)$ の値

a. 単純梁

この場合の境界条件は

$$y_{x=0}=0, \quad y_{x=l}=0, \quad y''_{x=0}=0, \quad y''_{x=l}=0$$

したがつて $C_1=C_2=C_1'=C_2'=0$

故に

$$G(xt) = \frac{2}{l} \sum_m \frac{\sin m\pi l/l \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} = \frac{t(l-x)\{x(2l-x)-t^2\}}{6l^3}, \quad x \geq t$$

$$= \frac{x(l-t)\{t(2l-t)-x^2\}}{6l^3}, \quad x \leq t \quad (6)$$

b. 固定梁

この場合には

$$y_{x=0}=0, \quad y_{x=l}=0, \quad y'_{x=0}=0, \quad y'_{x=l}=0$$

したがつて計算の結果

$$G(xt) = -\frac{1}{6} \frac{t^2(l-x)^2(2lx+tl-3xl)}{l^7}, \quad x \geq t$$

$$G(xt) = -\frac{1}{6} \frac{x^2(l-t)^2(2tx+xl-3tl)}{l^7}, \quad x \leq t \quad (7)$$

c. 片持梁

$x=0$ に於て固定され、 $x=l$ に於て自由な片持梁に対しては

$$y_{x=0}=0, \quad y''_{x=l}=0, \quad y'_{x=0}=0, \quad y'''_{x=0}=0 .$$

故に、前と類似の計算によつて

$$\left. \begin{aligned} G(x_i) &= -\frac{x_i(t-3x_i)}{6l^4}, & x_i \leq t, \\ G(x_i) &= -\frac{tx_i(x_i-3t)}{6l^4}, & t \geq x_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を得る。

II 基礎係数が位置によつて変化する弾性基礎上の梁

i) 基本微分方程式

変域 $(0, l)$ において、 x によつて変化する基礎係数を $K\varphi_x$ で表わせば、この基礎上に在る梁の平衡の微分方程式は、次の様に書くことができる。

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = -\frac{8}{N} f(x) - \frac{K}{N} \varphi_x W,$$

ただし φ_x は、この変域で、 $1/2$ 以下の極を有するものとする。

前と同様に、 $W = \frac{ql^4}{N} y$ とおけば、上式は次のようになる。

$$\frac{dy^4}{dx^4} = \frac{f(x)}{l^4} = \frac{K}{N} \varphi_x y \quad (9)$$

ii) 積分方程式の誘導

微分方程式 (9) の右辺を $F(i)/l^4$ で表わせば、公式 (5) から

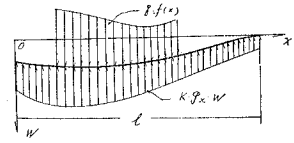
$$y = \int_0^l f(i)G(x_i)di - \frac{Kl^4}{N} \int_0^l \varphi_i y_i G(x_i)di \quad (10)$$

この式は、第二種 Fredholm の積分方程式で、 $G(x_i)$ は、境界条件に応じて (6), (7), (8) の如き函数で与えられ、基本領域に於て連続であるから φ_i が前記のような函数であれば、(10) 式は必ず解を有する。¹

積分方程式 (10) において

$$f(i)=0, \quad \frac{K}{N} = \lambda, \quad y = \bar{y} \sqrt{\varphi(x)}, \quad l^4 G(x_i) = K(x_i)$$

とおけば、(10) 式は容易に次の如く変形される。



第 2 図

1 池田芳郎：積分方程式論 P.147

$$\bar{y} - \lambda \sqrt{\varphi(x)} \int_0^l \sqrt{\varphi(x)} K(xt) \bar{y}_t dt = 0$$

これに対応する微分方程式は、(9)式から

$$\frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + \lambda \varphi_x \bar{y} = 0$$

となり、弾性安定要覧 68 頁 1, 4, 8 の所論と一致する。

iii) 単純梁に関する二, 三の問題

a. 基礎係数が $0 < x < l$ 間に於て一定な場合

この場合は、 $\varphi_x = 1$ であるから、微分方程式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{K}{N} y = \frac{f(x)}{l^4} \quad (a)$$

となり、積分方程式は、(10)と(6)式から、次のようになる。

$$y = L_x - \frac{2Kl^3}{N} \int_0^l y_t \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt \quad (b)$$

ただし

$$L_x = 2l^3 \int_0^l f(t) \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} dt$$

この積分方程式 (a) を解くにあたって次の公式を掲げておく『与えられた核をいくつかの直交核に分つことができる場合は、夫々の核に対する解の核を見出し、それを集めたものが全部の解の核である。』²

方程式 (a) 中の核

$$\sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} \quad \left(= \sum_m k_m(xt) \right)$$

において、各要素の間に

$$\int_0^l \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x_1/l}{(m\pi)^4} \frac{\sin i\pi x_1/l' \cdot \sin i\pi x/l}{(i\pi)^4} dx_1 = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ \frac{l}{2(m\pi)^8}, & i = m \end{cases}$$

の関係があるから、夫々の要素は、互に直交する。

したがって、任意の第 m 番目について解の核を求め、その \sum_m を作れば、積分方程式の解の核 $D(xt;\lambda)/D(\lambda)$ は求められ、 y は

$$y = L_x - \int_0^l L_x \frac{D(xt;\lambda)}{D(\lambda)} dt, \quad \left(\lambda = \frac{2K}{lN} \right) \quad (11)$$

で表わされる。

² 池田芳那：積分方程式論 P.105

³ 日高孝二：応用積分方程式論 P.62

また $\lambda k_m(xt)$ に関する Fredholm の与えた解の核⁴ は

$$\frac{D(xt;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\lambda k_m(xt) + \lambda^2 d_1(xt) + \lambda^3 d_2(xt) + \dots + \lambda^{n+1} d_n(xt) + \dots}{1 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \dots + \lambda^n d_n + \dots} \quad (12)$$

上式中, $d_1(xt), d_2(xt), \dots, d_n(xt), \dots$ 及び $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ は, 次に示す漸化式によつて定義される。すなわち

$$\left. \begin{aligned} d_0(xt) &= k_m(xt) \quad , \\ d_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} \int_0^t d_n(xt) dt \quad , \\ d_n &= k_m(xt) d_n + \int_0^t k_m(xt_1) d_{n-1}(t_1 t) dt_1 \quad . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

故に $k_m(xt) = \frac{\sin m\pi/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4}$

をこれらの式に適用すれば

$$\left. \begin{aligned} d_0(xt) &= \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4} \quad , \\ d_1 &= -\frac{l}{2} \frac{1}{(m\pi)^4} \quad , \\ d_1(xt) &= 0 \quad , \\ d_2 &= 0 \quad , \\ d_2(xt) &= 0 \quad , \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

すなわち $d_0(xt)$ と d_1 だけを残し, その他はすべて零となるから, この場合の解の核は, 次の様に与えられる。

$$\frac{D(xt;\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\lambda k_m(xt)}{1 + \lambda d_1} = \frac{2l^3 K}{N} \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4 + Kl^4/N} \quad , \quad (d)$$

故に, これを $m (=1, 2, 3, \dots)$ について加え合せて, 公式 (11) に代入すれば

$$y = L_x - \int_0^t L_t \frac{2lK}{N} \sum_m \frac{\sin m\pi t/l \cdot \sin m\pi x/l}{(m\pi)^4 + Kl^4/N} dt \quad , \quad (e)$$

しかるに

$$L_x = \frac{2}{l} \sum_m \frac{\sin m\pi x}{l} \left\{ \frac{S_m[f(x)]}{(m\pi)^4} - \frac{Kl^4}{N} \frac{S_m[f(x)]}{(m^4\pi^4 + Kl^4/N)(m\pi)^4} \right\} .$$

したがつて

$$y = \frac{2}{l} \sum_m \frac{S_m[f(x)]}{(m\pi)^4 + Kl^4/N} \sin \frac{m\pi}{l} x \quad . \quad (f)$$

4 日高孝二：応用積分方程式論 P.62

この結果は

$$y = \sum_m A_m \sin \frac{m\pi}{l} x$$

とおき、係数 A_m を、この式が微分方程式

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{K}{N} y = \frac{f(x)}{l^4}$$

を満足する様に定めることによつて得られる解と全く同一である。

b. 弾性支点が中央に在る場合

この場合は、不連続な基礎の特殊な場合であるが、点支点を微小巾なる弾性支点によつて支えられるものと仮定する。しかる時は $t=l/2$ に対して $\varphi_x=1$ 、其の他の点に対しては $\varphi_x=0$ となり、かつ $G(x,t)$ は公式 (6) により

$$G(x,t) = \frac{t(l-x)\{x(2l-x)-t^2\}}{6l^5}, \quad x \geq t$$

$$G(x,t) = \frac{x(l-t)\{t(2l-t)-x^2\}}{6l^5}, \quad x \leq t$$

で与えられる。したがつて積分方程式 (10) は次のようになる。

$$y = L_x - \frac{K\varepsilon}{N} y_{x=l/2} G\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (a)$$

上式中

$$G(x - l/2) = \frac{l}{48} (3l^2 x - 4x^3), \quad x \leq \frac{l}{2}$$

$$G(x - l/2) = \frac{l}{48} (3l^2(l-x) - 4(l-x)^3), \quad x \geq \frac{l}{2}$$

$y_{x=l/2}$ の値を求めるために、(a) 式において $x=l/2$ とおけば

$$y_{x=l/2} = - \frac{L_{x=l/2}}{1 + \frac{K\varepsilon}{N} G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)}$$

故に

$$y = L_x - \frac{K\varepsilon}{N} \frac{L_{x=l/2} G\left(x - \frac{l}{2}\right)}{1 + \frac{K\varepsilon}{N} G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)}, \quad (b)$$

上式中 $K\varepsilon \rightarrow \infty$ とおけば、中央が剛支点の場合の式となる。すなわち

$$y = L_x - L_{x=l/2} G\left(x - \frac{l}{2}\right) / G\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\right)$$

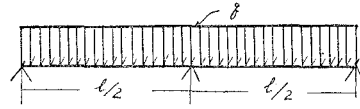
満載等分布に対しては

$$L_x = \frac{1}{24} \left\{ \frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right\} \quad (c)$$

となるから、このような荷重を受け、両端および中央部の三剛支点によつて単純に支えられた二連々続梁の $y\left(=-\frac{N}{ql^4}W\right)$ は

$$y = \frac{1}{384} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{16x^3}{l^3}\right) \quad \left(x \leq \frac{l}{2}\right)$$

で表わされる。この結果は、普通の方法によつて求めたものと全く同じであることは言を要しない。



第 3 図

II 矩形型不連続領域を有する弾性基礎にある矩形板

i) 性質一樣な弾性基礎にある矩形板の単位点荷重による撓み

基礎係数が K_1 (定数) なる基礎にある第 4 図の如き矩形板に荷重 $qf(xy)$ が作用した場合の $\xi\left(=-\frac{N}{qb^4}W\right)$ は、次のように興えられる。

$$\xi = \sum_m \sum_n \frac{\sin m\pi x/a \cdot \sin n\pi y/b}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + \lambda^4} \left[\frac{4}{ab} \frac{1}{b^4} S_m S_n [f(xy)] \right. \\ \left. + \frac{4m\pi}{a^2 b} \left\{ (-1)^m S_n [(M_x)_{x=a}] - S_n [(M_x)_{x=0}] \right\} \right. \\ \left. - \frac{4\pi^3}{ab} \left(\frac{m^3}{a^3} + (2-\nu) \frac{mn^2}{ab^2} \right) \left\{ (-1)^m S_n [\zeta_{ay}] - S_n [\zeta_{oy}] \right\} \right. \\ \left. + \frac{4n\pi}{ab^2} \left\{ (-1)^n S_m [(M_y)_{y=b}] - S_m [(M_y)_{y=0}] \right\} \right. \\ \left. - \frac{4\pi^3}{ab} \left(\frac{n^3}{b^3} + (2-\nu) \frac{m^2 n}{a^2 b} \right) \left\{ (-1)^n S_m [\zeta_{xb}] - S_m [\zeta_{xo}] \right\} \right. \\ \left. - \frac{8mn\pi^2(1-\nu)}{ab} \left\{ (-1)^{m+n} \zeta_{ab} - (-1)^m \zeta_{a0} - (-1)^n \zeta_{0b} + \zeta_{00} \right\} \right], \quad (11)$$

ただし $\lambda^4 = \frac{K_1}{N}$, $N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E = 板の弾性係数,

ν = 板のポアソン比, h = 板の厚さ。

荷重が第 4 図に示すような面積 $4x_1 y_1$ 内に一樣に分布される場合は

$$f(xy) = \frac{1}{4x_1 y_1} \quad \begin{cases} s-x_1 < x < s+x_1 \\ t-y_1 < y < t+y_1 \end{cases},$$

$$f(xy) = 0 \quad \text{その他の部分,}$$

したがつて

$$S_m S_n [f(xy)] = \int_{s-x_1}^{s+x_1} \int_{t-y_1}^{t+y_1} \frac{1}{4x_1 y_1} \sin \frac{m\pi}{a} s \cdot \sin \frac{n\pi}{b} t \, ds \, dt$$

故に (s;) 点に於る単位点荷重に対しては

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ y_1 \rightarrow 0}} S_m S_n [f(xy)] = \sin \frac{m\pi}{a} s \cdot \sin \frac{n\pi}{b} i$$

又々中の未知数 $S_n[(M_x)_{x=a}]$, $S_n[(M_x)_{x=0}]$, $S_m[(M_y)_{y=b}]$, $S_m[(M_y)_{y=0}]$, $S_n[\zeta_{ay}]$, $S_m[\zeta_{oy}]$, $S_m[\zeta_{xb}]$, $S_m[\zeta_{xo}]$, ζ_{ab} , ζ_{ao} , $\zeta_{o'}$, ζ_{oo} は、境界条件を適用することによつて (s;) の函数で与えられ、単位点荷重に対する撓み ζ は次の様に書くことができる。

$$\zeta = G(s; ixy).$$

この式が、弾性基礎に矩形板に対する Green 函数である。よつて荷重 $F(xy)$ に対する撓みは、一般に

$$\zeta = \int_0^a \int_0^b F(s; i) G(s; ixy) ds di \quad (15)$$

で表わされる。

ii) 矩形型不連続基礎の上に在る矩形板

第5図に示す如く、矩形領域

$$x_0 - x_1 < x < x_0 + x_1, \quad y_0 - y_1 < y < y_0 + y_1$$

の部分の基礎係数を $K_1 + K_2$, その他の基礎係数を K_1 とすれば、この場合の基本微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{K_1}{N} W \\ & = \frac{q}{N} f(xy) - \frac{K_2}{N} W, \end{aligned}$$

あるいは

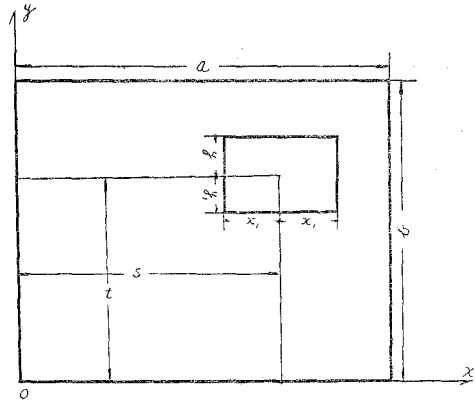
$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} + \frac{K_1}{N} \zeta \\ & = \frac{1}{b^4} f(xy) - \frac{K_2}{N} \zeta, \end{aligned} \quad (16)$$

ただし

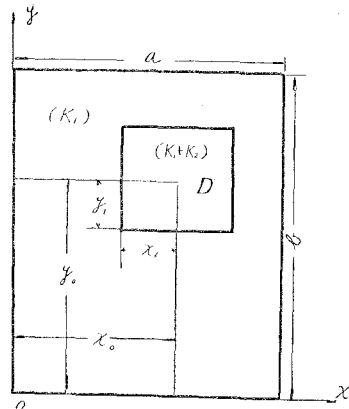
$$W = \frac{qb^4}{N} \zeta, \quad K_2 \text{ は第5図の } D \text{ 内のみに存在する不連続な値.}$$

上式は、 K_1 (定数) なる弾性基礎の上に在る矩形板が荷重 $qf(xy) - \frac{K_2 b^4}{N} \zeta$ を受ける場合の

$$(141)$$



第 4 図



第 5 図

基本微分方程式と見做すことができる。したがって (15) 式の $F(st)$ はこの場合

$$qf(xy) - \frac{K_2 b^4}{N}$$

$$\zeta = \int_0^a \int_0^b \left\{ f(st) - \frac{K_2 b^4}{N} \zeta \right\} G(stxy) ds dt, \quad (17)$$

便宜上

$$\int_0^a \int_0^b f(st) G(stxy) ds dt = L_{xy}$$

とおけば、上式は次のように書き換えられる。

$$\zeta = -\frac{K_2 b^4}{N\pi^4} \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} \int_{y_0-y_1}^{y_0+y_1} \zeta_{st} G(stxy) ds dt + L_{xy}. \quad (18)$$

これは二次元函数に拡張された Fredholm の第二種積分方程式で、四辺が単純に支持される場合は

$$G(stxy) = \sum_m \sum_n \frac{4}{ab} \frac{a^4}{b^4} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} s \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} t \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y}{\pi^4 \{ (m^2 + \alpha_n^2)^2 + c^4 \}}, \quad (19)$$

ただし

$$\alpha_n = \frac{a}{b} n, \quad c^4 = \frac{a^4}{\pi^4} \frac{K}{N}$$

となるが、それ以外の境界条件に対しては、簡単な形で与えられない。

iii) 特殊な場合に対する近似公式

積分方程式 (18) は、一般に厳密に解くことは極めて困難である。しかし第 5 図に示す不連続基礎の部分 D の面積が小さく、かつ荷重はこの部分を含んで分布され、この部分の ζ が一様であると考えられる場合は、これを近似的に解くことができる。すなわち矩形領域 $x_0-x_1 < x < x_0+x_1$, $y_0-y_1 < y < y_0+y_1$ 内に於る ζ , L_{xy} , H_{xy}

ただし

$$H_{xy} = \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} \int_{y_0-y_1}^{y_0+y_1} G(stxy) ds dt$$

の値は、夫々点 (x_0, y_0) に於る ζ , L_{xy} , H_{xy} の値すなわち \bar{L} , \bar{H} に等しいものと仮定すれば (18) 式より近似的に、次の関係が成立する。

$$\bar{\zeta} = -\lambda^4 \bar{\zeta} \bar{H} + \bar{L}, \quad \text{ただし } \lambda^4 = \frac{a^4 K_2}{N\pi^4}$$

したがって

$$\bar{\zeta} = \frac{\bar{L}}{1 + \lambda^4 \bar{H}}. \quad (20)$$

この値を (18) 式に代入して、 ζ の近似値

$$(142)$$

$$\zeta = -\frac{\lambda^4 \bar{L}}{1 + \lambda^4 N} H_{xy} + L_{xy} \quad (21)$$

を得る。

この式は、前記のような仮定を本とし誘導した一近似式ではあるが、これによつて基礎の不連続の状態の板の曲におよぼす影響の大体を知ることができる。

iv) 数値計算例

a. 中央部の正方形部分の基礎係数が他の部分と異なる場合

第6図のごとく、中央部における正方形部分 $a/4 \cdot a/4$ 、および其の他の部分の基礎係数を夫々 $K_1 + K_2$ および K_1 とし、かつ

$$a = 400 \text{ cm}, \quad K_1 = 10 \text{ kg/cm}^2$$

とする。荷重は、基礎係数 $K_1 + K_2$ なる部分面積 $a^2/16$ 内に一様に分布されるものと仮定すれば、この場合 $H_{xy} = L_{xy}$ で、境界の四辺及び四隅が完全に自由な場合に対する H_{xy} の値は、次表に示す通りである。

これらの結果を用いれば

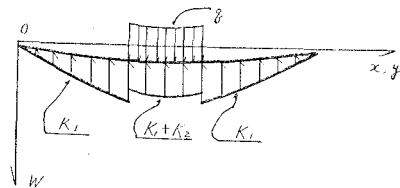
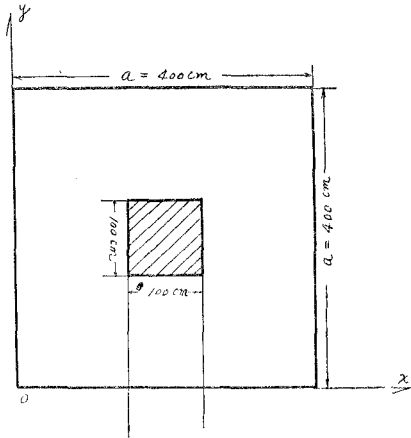
$$C_1^4 \bar{L} = 0.0378 K_2, \quad C_1^4 \bar{H} = 0.0378 K_2$$

したがつて公式 (21) から、次の関係を得る。

$$\zeta = H_{xy} - \frac{0.0378 K_2}{1 + 0.0378 K_2} H_{xy} .$$

K_2 については、常に $K_2 \geq -K_1$ なることを要する。何となれば $K_2 = -K_1$ は、基礎が中央部分に欠除していることを表わし、 $K_2 < -K_1$ は実際的の意味を有しないからである。

又 $K_2 \rightarrow \infty$ は、その部分の基礎が全く剛であることを意味している。



第 6 図

H_{xy} の 値 (cm)

| $x/a \backslash y/a$ | 0/8 | 1/8 | 2/8 | 3/8 | 4/8 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0/8 | -0.00231 | -0.00212 | -0.00174 | -0.00166 | -0.00166 |
| 1/8 | -0.00212 | 0.00096 | 0.00123 | 0.00307 | 0.00394 |
| 2/8 | -0.00174 | 0.00123 | 0.00557 | 0.01099 | 0.01374 |
| 3/8 | -0.00166 | 0.00307 | 0.01099 | 0.02253 | 0.02893 |
| 4/8 | -0.00166 | 0.00394 | 0.01374 | 0.02893 | 0.03784 |

上式から、基礎が正方形の全領域に一樣、すなわち $K_2=0$ に対する撓み、及び曲げモーメントを夫々 W_0, M_{x_0} とすれば、任意の K_2 に対する、中央点の撓みおよび x 方向の曲げモーメント W, M_x は近似的に次のごとく興えられる。

$$W = W_0 \frac{0.0378K_2W_0}{1+0.0378K_2} = \frac{W_0}{1+0.0378K_2}$$

$$M_x = M_{x_0} \frac{0.0378K_2M_{x_0}}{1+0.0378K_2} = \frac{M_{x_0}}{1+0.0378K_2}$$

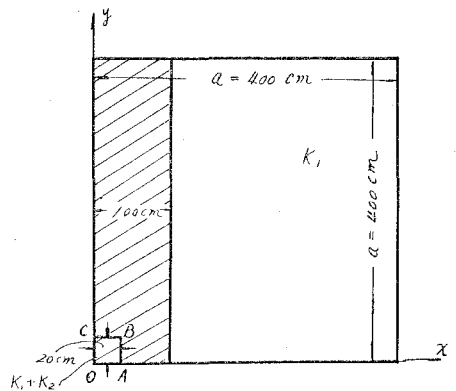
この場合の、 W_0, M_{x_0} の最大は、中央面分に基礎が欠除している場合、すなわち $K_2=-K_1$ のときに起り、各値は

$$W = 1.6W_0, \quad M_x = 1.6M_{x_0}$$

したがって基礎が一樣な場合にくらべ約 60% 大きくなる。又 $K_2 \rightarrow \infty$ に対しては、 $W=0, M=0$ 、すなわち荷重直下の基礎が剛ならば、板の曲げは生じない。

b. 一隅の小部分の基礎係数が他の部分と異なる場合

第 7 図に示す $OABC$ の部分の基礎係数を K_1+K_2 、それ以外では K_1 とし荷重は斜線のごとく帯状に分布されるものと仮定する。公式 (21) 中の L_{xy} は、基礎係数 K_1 、荷重 $qf(xy)$ および境界条件によって左右されるものであるが、この場合は K_1 と $qf(xy)$ とは定数で、且つ四隅共完全に自由であるから、 L_{xy} は y 方向には変化しないものと仮定することができる。したがって L_{xy} (単に L と書く) は近似的に次の方程式を満足する。



第 7 図

$$\frac{d^4L}{dx^4} + \frac{K_1}{N}L = \frac{f(x)}{a^4}$$

辺長 : $a=400\text{cm}$, 板の厚さ : $h=30\text{cm}$, $E=210,000\text{kg/cm}^2$, $K_1=12\text{kg/cm}^2$

面積 $OABC=20 \times 20\text{cm}^2$ なる正方形板に対し、上式を根拠として計算した曲げモーメントは次の通りである。ただし $q=1$ とする。

| | | | | | | | |
|-------|------|------|-------|-------|------|------|------|
| x/a | 1/8 | 2/8 | 3/8 | 4/8 | 5/8 | 6/8 | 7/8 |
| M_x | -905 | 1801 | -1683 | -1925 | -590 | -976 | -435 |

また計算の結果

$$\lambda^4(L_{xy})_{\substack{x=10\text{cm} \\ y=10\text{cm}}} = \lambda^4L = 0.125K_2$$

次に H_{xy} については、 $H_{xy} \frac{a^4}{N}$ の値が次表の通り求められる。

| $x/a \backslash y/a$ | 0 | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 3/4 | 7/8 | 1 |
|----------------------|---------|---------|---------|----------|---------|----------|----------|
| 0 | 0.00531 | 0.00351 | 0.00201 | 0.00042 | 0.00003 | -0.00016 | -0.00021 |
| 1/2 | 0.00003 | 0.00001 | 0.00000 | -0.00001 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |

したがって上表から、 $x=y=10\text{cm}$ の H_x の値を求め

$$\lambda^4 \bar{H} = K_2 \times 0.00514$$

これと (21) 式より

$$\zeta = L_{xy} - \frac{0.125K_2}{1+0.00514K_2} H_{xy}$$

K_2 の任意の値に対する撓みと曲げモーメントが上式から計算される。上式中 K_2 の値は、 K_1 が 12kg/cm^3 であるから、前と同じ理由で $K_2 < -12\text{kg/cm}^3$ でなくてはならない。

次に K_1 は常に 12kg/cm^3 とし

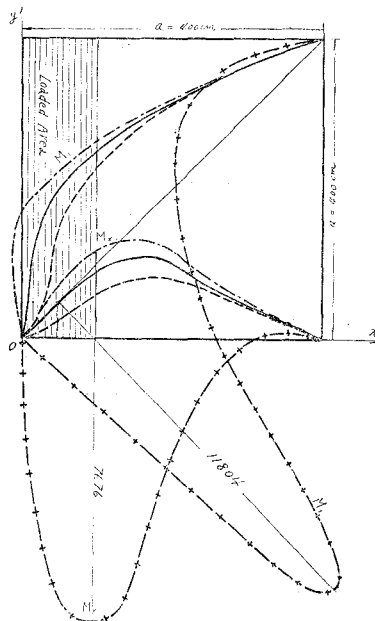
$$K_2 = -12, 0, +12, \infty \text{ (kg/cm}^3\text{)}$$

なる三つの場合について、断面 $y=0$ 、および $y=200\text{cm}$ における x 方向の曲げモーメント M_x ならびに対角線断面における、主曲げモーメント M_1 を計算すれば、下表および第8図に示す通りである。ただし $q=1$ とする。

| 位 置 | | M_1 の 値 (kg·cm/cm) | | | |
|---------------|---------------|---------------------------|-----------|--------------------------|-----------------|
| x/a | y/a | $K_2 = -12\text{kg/cm}^3$ | $K_2 = 0$ | $K_2 = 12\text{kg/cm}^3$ | $K_2 = +\infty$ |
| $\frac{1}{8}$ | 0 | -1740 | -905 | -171 | 11804 |
| $\frac{1}{4}$ | 0 | -2360 | -1801 | -1307 | 7704 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | -2054 | -1925 | -1803 | 189 |
| $\frac{3}{4}$ | 0 | -978 | -976 | -975 | 999 |
| $\frac{7}{8}$ | 0 | -416 | -435 | -450 | 702 |
| 位 置 | | M_x の 値 (kg·cm/cm) | | | |
| x/a | y/a | $K_2 = -12\text{kg/cm}^3$ | $K_2 = 0$ | $K_2 = 12\text{kg/cm}^3$ | $K_2 = +\infty$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | -1390 | -905 | -476 | 6482 |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | -2424 | -1801 | -1252 | 7676 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -2263 | -1925 | -1626 | 3226 |
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | -1041 | -976 | -919 | 20 |
| $\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{8}$ | -423 | -435 | +445 | -237 |

| | | |
|---------------|--|---|
| ----- | $K_1 = 12\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3}$ | $K_2 = -12\text{kg}\cdot\text{cm}^{-3}$ |
| ----- | " | $K_2 = 0$ |
| ----- | " | $K_2 = +12$ |
| - + - + - + - | " | $K_2 = +\infty$ |

第8図 1隅が不連続な弾性基礎上に在る矩形板に、その同じ側に覆帯荷重を受けた場合の M_x および M_y 線図



上記の結果により、 $K_2 = \infty$ すなわち一隅の基礎が剛なる程その近傍の曲げモーメントは、大きくなり危険な状態になることがわかる。この計算は、一近似方法に過ぎないが、これによつて融雪季に起り勝ちな不連続基礎の上の舗装板の応力状態の大体を知ることが出来るであろう。

(昭和30年5月31日受理)

リンモリブデン酸アンモニウムの 硝酸に対する溶解度

上 野 幸 三

The Solubility of Ammonium Phosphomolybdate to Diluted Nitric Acid

Kozo Ueno

We prepared ammonium phosphomolybdate at the temperatures of 25~65° C. at the intervals of 10° C., respectively, using the same procedure as described before, and measured the solubilities to diluted nitric acid (2 : 10,000) at the room temperature standing over-night. The amount of ammonium phosphomolybdate decreased as the temperature of forming it increased, and the solubility was vice versa.

From the above experimental results, we assumed that ammonium phosphomolybdate obtained at different temperatures, differed in particle size, so the products obtained at lower temperature contained smaller particles than at higher temperature. Thus, the products obtained at lower temperature were more soluble to diluted nitric acid at the room temperature than those obtained at higher temperature.

I 緒 言

正リン酸塩分析法の一つとして、リンモリブデン酸アンモニウムの形のまゝ直接秤量する重量法が、操作も割合に簡単でしかも結果も正確である¹ことを知った。然しこの重量法の操作中、生成したリンモリブデン酸アンモニウムの沈デンを洗淨する場合、洗淨液の種類によつてリンモリブデン酸アンモニウムの生成量が異なり、特に硝酸(2:10,000)を洗淨液として用いた場合、生成量が他の2つの洗淨液の場合と比較して非常に小さく、著者の方法では硝酸をリンモリブデン酸アンモニウムの沈デン洗淨液として用いるのは不適當であるという結論に達した。

然るに柴田、築山両氏²はリンモリブデン酸アンモニウムの沈デン洗淨液としては、硝酸(2:10,000)が最適であると報告している。両氏の報告にはリンモリブデン酸アンモニウムの沈デン生成条件が明らかにされていないので、あるいは沈デン生成時の温度でリンモリブデン

1 上野：室工大研報，1，787 (1954)

2 柴田，築山：分析化学，1，197 (1952)

酸 アンモニウムの硝酸に対する溶解度が異なるのではないかとの予想の下に、25°、35°、45°、55° および 65°Cの各温度でリンモリブデン酸 アンモニウムの沈デンを生成させ、それらの硝酸 (2: 10,000) に対する溶解度を調べた。

II 試料, 試薬および実験操作

A 試料および試薬：試料としては第二リン酸ソーダ($\text{Na}_2\text{HPO}_4 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$) (特級) を再蒸留水から2回再結晶し 105°~110°Cで恒量になるまで加熱脱水したものをを用い、試料溶液25ml. 中に正確に 0.1gを含むようにする。

実験に用いた試薬は次の通りである。

- (1) 硝酸：6 規定 (試料溶液を酸性にする) および 2: 10,000 (リンモリブデン酸アンモニウムの溶解度測定に用いる)。何れも特級品をそれぞれの濃度にする。
- (2) モリブデン酸アンモニウム：市販のモリブデン酸アンモニウム (特級) 90gを100ml. の 6 規定アンモニア水にとかし、硝酸アンモニウム (特級) 240gを加え、水でうすめて 1 l. とする。これを使用の際倍にうすめる。以下これをモリブデン試薬と称する。
- (3) 硝酸カリウム：1%水溶液、沈デン洗浄用。
- (4) エチルアルコール：95%、一級品、沈デン脱水用。
- (5) エチルエーテル：一級品、沈デン脱水用。
- (6) アンモニア水：6規定、モリブデン試薬調製およびグラスフィルター上の沈デン溶解に用いる。

B 実験操作 (1)：リンモリブデン酸アンモニウムの生成は、生成時の条件を多少変えて著者の方法¹と同じ操作で行った。即ち試料溶液 25ml. を約100ml. にうすめ沈デン生成温度(25°、35°、45°、55° および 65°C.) で30分間予熱、これに6 規定硝酸 4.1ml. を加えて酸性にし (pH=1.75)、次にこれを予熱温度と同温度に保ちよくかきまぜながらモリブデン試薬 40ml. を徐々に滴下し、15分間で加え終るようにする。更にこれをその温度に 2 時間保ち次いで室温に 1 晩放置した後、生じた沈デンを重量既知のグラスフィルター-No. 4で吸引口過、硝酸カリウム溶液 10ml. ずつで 5 回洗浄、エチルアルコール、エチルエーテルの順で各 2 回ずつ沈デンを洗い、真空デシケータ内で30分間減圧乾燥し、グラスフィルターを天秤内に 5 分間放置後秤量する。グラスフィルター上の沈デンは秤量後アンモニア水でとかし、硝酸カリウム、エチルアルコール、エチルエーテルの順で洗い、真空デシケータ内で減圧乾燥し連続使用に供する。

この場合リンモリブデン酸アンモニウム中のリン含量は次式によつて与えられる。

$$P (\%) = \frac{\text{沈デンの重量} \times 0.01456}{\text{試料の重量}} \times 100$$

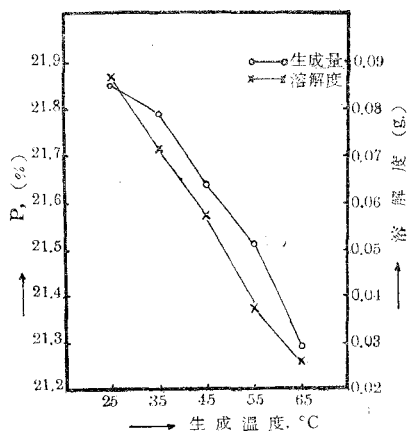
但し 0.01456 という係数は経験的なものであり、本実験に使用した試料中のリンの理論含量は 21.820% である。

実験操作 (2) : 上述の各温度で生成したリンモリブデン酸アンモニウム約 1g を正確に秤量し、これを 50ml. の硝酸 (2 : 10,000) の入った共栓つき三角フラスコ (容量 200c. c.) に入れ 5 分間よく振つてから室温 ($18^{\circ} \pm 2^{\circ} \text{C}.$) に 24 時間放置し、重量既知のガラスフィルター No. 4 を用い、実験操作 (1) と同様の操作で口過、洗淨、秤量する。本実験操作前後におけるリンモリブデン酸アンモニウムの重量の差が、硝酸 (2 : 10,000) に対するリンモリブデン酸アンモニウムの溶解度を表わす。

III 実験結果および考察

(1) リンモリブデン酸アンモニウム生成に及ぼす

温度の影響 : 25° , 35° , 45° , 55° および $65^{\circ} \text{C}.$ の各温度において、実験操作 (1) に従つてリンモリブデン酸アンモニウムの沈デンを作り、口過、洗淨、乾燥後秤量した。その結果を第 1 表に示し、それを図示したのが第 1 図である。これらの結果から明らかなように、低温の場合の方が高温の場合よりも生成量が多く、一般に温度が $10^{\circ} \text{C}.$ 高くなる毎に約 10mg ずつ沈デン生成量が減少して来る。また沈デンの口過洗淨に要する時間は、低温で生成した沈デンの場合の方が、高温の場合よりも長時間を要する。即ち $25^{\circ} \text{C}.$ で生成した沈デンの口過洗淨には平均 約 1 時間を要したのに対し、 $65^{\circ} \text{C}.$ の場合には約 40 分間で口過洗淨が完了した。



第 1 図 生成温度変化の生成量および溶解度に及ぼす影響

第 1 表 温度の影響

| 温度, °C. | 沈デン生成量, g | P, (%) | ΔP , (%) |
|---------|-----------|--------|------------------|
| 25 | 1.5008 | 21.852 | +0.032 |
| 35 | 1.4970 | 21.796 | -0.024 |
| 45 | 1.4865 | 21.643 | -0.177 |
| 55 | 1.4777 | 21.515 | -0.305 |
| 65 | 1.4624 | 21.293 | -0.527 |

但し $\Delta P, (\%) = (P_{\text{theor.}} - P_{\text{obsd.}}), (\%)$

(2) リンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度：実験(1)における各温度でえられたリンモリブデン酸アンモニウム約1gを正確に秤量し、実験操作(2)に従って硝酸(2:10,000) 50ml. に対する1gのリンモリブデン酸アンモニウムの溶解度を測定した。その結果の一部を第2表に示す。

然しこの実験においては第2表にみられるように、同一温度で生成したリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度は区々で、再現性のある結果はえられなかつた。リンモリブデン酸アンモニウムの粒子の大きさの不均一が、その原因であると考えられる。

第2表 硝酸^aに対する溶解度^b

| 温度, °C. | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 溶解度, g | 0.0599 | 0.0446 | 0.0118 | 0.0462 | 0.0481 |
| | 0.0486 | 0.0410 | 0.0523 | 0.0421 | 0.0361 |
| | 0.0266 | 0.0518 | 0.0407 | 0.0405 | 0.0252 |

a 硝酸の濃度は 2 : 10,000

b 1gのリンモリブデン酸アンモニウムの50ml. の硝酸に対するもの

(3) 細粉後のリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度：上の実験(2)にみられるように、同一温度においても溶解度が区々であつたので、各温度で生成したリンモリブデン酸アンモニウムをメノー乳鉢でよくすりつぶし細粉にした後、上述の実験(2)と同じ操作でリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度を調べた。

本実験では同一温度で生成したリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度は、約5mg 以内の差で一致し、異なつた温度で生成したリンモリブデン酸アンモニウムの溶解度の間には明らかな差がみられた。その結果の一部を第3表に示す。この結果を図示したのが第1図である。

第3表 細粉後の溶解度^a

| 温度, °C. | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 溶解度, g | 0.0899 | 0.0711 | 0.0587 | 0.0340 | 0.0260 |
| | 0.0843 | 0.0741 | 0.0592 | 0.0386 | 0.0238 |
| | 0.0865 | 0.0699 | 0.0549 | 0.0404 | 0.0289 |
| 平均 | 0.0869 | 0.0717 | 0.0576 | 0.0377 | 0.0262 |

a 1gのリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸(2:10,000) 50ml. に対する溶解度

第3表および第1図から明らかなように、低温で生成したリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸(2:10,000)に対する溶解度は、高温で生成したものに比較すると大きい。また沈デンの口過洗浄に要する時間は、低温で生成したものと高温で生成したものとでは、後者の方が短時間である。即ち25°C.で生成したリンモリブデン酸アンモニウムの沈デンの口過洗浄に平均約3.2時間を要したのに対し、65°C.で生成した沈デンの場合には平均約2.7時間を要した。

沈デンの生成をコロイド化学的立場から論じた von Weimarnの説によれば、沈デン粒子の大きさをGとすると

$$G = f\left(\frac{Q-L}{L}, V, t\right)$$

のように種々の変数の函数である。但し $Q-L$ は過飽和度、 L は溶解度、 V は溶液の容積、 t は沈デンの生長時間である。所で本実験の場合のように V および t が一定の場合には

$$G \cdot k_1 \cdot \left(\frac{Q-L}{L}\right)^n = K$$

但し k_1 および n はそれぞれの物質および分散媒ならびにこれら二者間に起る化学的、物理的関係に特有な恒数である。こゝに $n=1$ なる最も簡単な場合を考えると

$$G \cdot \left(\frac{Q-L}{L}\right) = k_2 \dots \dots \dots (1)$$

となる。但し k_2 は恒数。

(1)式において温度が高ければ $Q-L$ 即ち過飽和度は小、 L 即ち溶解度は大となり、従つて粒子の大きさは大となり、低温であればこれとは反対に粒子の大きさは小となる。

上の Weimarnの結論を用いて定性的ではあるが、本実験の結果を次のように推論した。即ち低温で生成された沈デン粒子は一般に小さいものが多く、高温で生成した沈デン粒子は大きいものが多い。従つてこれらを吸引口過すると、低温で生成したものは粒子が細かいので吸引口過に時間がかゝり、高温で生成したものは粒子が大きいので口過時間が短い。溶解度はガラスフィルター上に残つた沈デンについて室温で測定したので、低温で生成した粒子の細かいリンモリブデン酸アンモニウムの溶解度は、高温で生成した粒子の大きいリンモリブデン酸アンモニウムの溶解度に比して小さくなる。

生成量の温度変化による差も恐らく粒子の大きさによる違いで説明できるであろう。

もちろん生成する温度によつてリンモリブデン酸アンモニウムの構造あるいは組成に変化があるとすれば、上述の推論の結果も異なつたものとなつて来る。然し現在の所まで、25°~65°C.位の温度で生ずるリンモリブデン酸アンモニウムの組成に変化があるという報告はみあたらず、またその構造に関してはX線による研究もあることはあるが、生成温度を変化させてその構造を調べたという報告は、著者の知る範囲内ではみあたらない。これらの点に関しては今後

の研究をまたねばならない。

然し何れにしても著者の方法による正リン酸塩の重量法では、硝酸(2:10,000)を沈デン洗淨液として用いることは望ましくない。

IV 総 括

以上の結果をまとめると次の通りである。

(1) リンモリブデン酸アンモニウムの生成量は、25°~65°C.の間では温度が高くなる程小になる。

(2) 25°~65°C.の間で生成されたリンモリブデン酸アンモニウムの、硝酸(2:10,000)に対する溶解度(室温における)は、生成温度が高いもの程小である。

(3) 異なつた温度で生成されたリンモリブデン酸アンモニウムの硝酸(2:10,000)に対する溶解度の差は、生成温度の違いにより生ずる粒子の大きさが異なるためと推定され、又生成量の温度変化の差も、同様に粒子の大きさの違いによるものであろう。

終りに当り本実験に対し御助言を賜りました北海道大学教授太秦康光氏ならびに本実験の一部を担当された工学士梅村義信君に対し深甚の謝意を表わす次第である。

(昭和30年5月31日受付)

電位差滴定における電極 (双金属) の選択について—中和滴定

上野 幸三 太刀川 哲平

On the Selection of Bimetallic Electrodes for the Potentiometric

Titration (in Neutralization)

Kozo Ueno & Tetsuhei Tachikawa

Abstract

The couples, Pt-W, Pt-Ni, Pt-Ag and Pt-Sb were tried out for the potentiometric titration of strong acid (HCl) with strong base (NaOH) and vice versa, for solutions 1 N, 0.1 N and 0.01 N, respectively.

The purpose of the present investigation is to determine which couples of metal electrodes are best for the purpose.

I 緒 論

従来の電位差滴定法では甘汞電極とか金属—金属塩電極とかいうような標準基準電極を使用していたのであるが、最近では双金属電極系および単金属分極電極を使用することにより大いに改善された。この双金属電極については Willard および Fenwick¹の研究があり、その後 Van Name および Fenwick²の詳細な研究が行われた。また、双金属電極の組合せについては酸化還元滴定の場合、白金—タングステン電極系ならびにガラス電極—金属系³などがもつともよいといわれており、酸—塩基滴定に関しても Kahlenberg^{4,5}の研究により、タングステンと天然石ぼく、銅、ニッケル、珪素、コバルト、銀、などの組合せを用いるとよい結果がえられることが報告されている。しかして本実験においては白金—タングステン、白金—ニッケル、白金—銀、白金—アンチモンの四組を使用して酸—塩基（塩酸—か性ソーダ）滴定をおこない検討を加えた。

1) Willard, H.H and Fenwick, F., J. Am. Chem. Soc. : 44 2504 (1922)

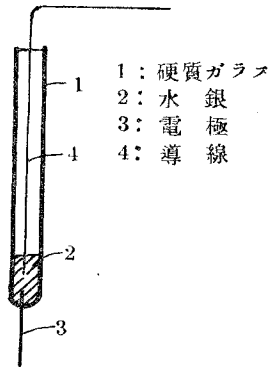
2) Van Name, R.G. and Fenwick, F., : *ibid.*, 47 9 (1925)

3) Lykken, L and Tuemmler, F. D., Ind. Eng. Chem., Anal. Ed. : 14 67 (1942)

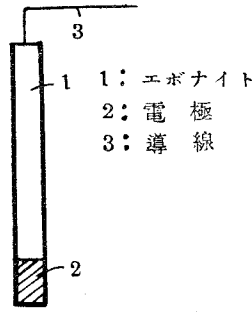
4) Kahlenberg, L. and Krueger, A.C., Trans. Am. Electrochem. Soc. : 56 201 (1929)

5) Holt, M.L. and Kahlenberg, L., Trans. Am. Electrochem. Soc. : 57 361 (1930)

II 実験装置および方法



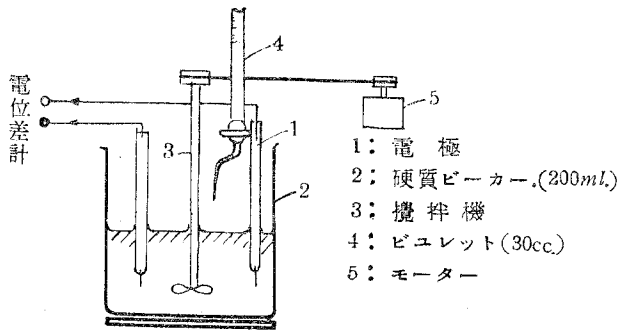
第1図 電極



第2図 電極

× 15mm. (長さ), ニツケル: 0.75mm. (直径) × 18mm. (長さ), タングステン: 0.52mm. (直径) × 20mm. (長さ)。電極は滴定ごとにエメリーペーパー^{0/2}で研磨し、ベンゼンにて洗滌後濾紙にてふきとつた。

使用した塩酸およびか性ソーダは一級品を用いそれぞれ1規定, 0.1規定, 0.01規定となした。また, 使用した電極のうち白金, タングステン, ニツケルの各電極は第1図のごとくで, アンチモン電極は第2図のごとくである。なお各電極の寸法は次のごとし。白金: 0.91mm. (直径) × 15mm. (長さ), 銀: 1.43mm. (直径) × 17mm. (長さ), アンチモン: 8.1mm. (直径)



第3図 滴定装置

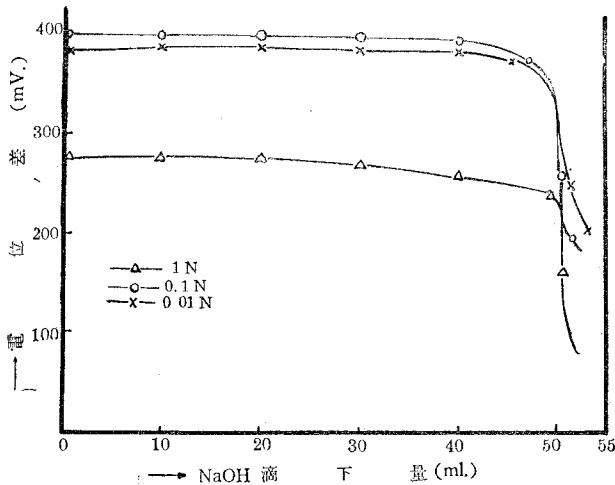
その方法は次の要領にて行つた。すなわち, まづ滴定せられる溶液 50ml を 200ml のビーカーにとり 滴定中は攪拌器により攪拌し電位が安定するのを待つて島津 K-2 型精密級電位差計を用いて測定し終点(中和点)はフェノールフタレン, メチルオレンジの両指示薬を使用して電位差計による終点と比較した。また電位測定は初め 10ml. ごとに行い, 終点附近においては 0.1~0.05ml. ごとに行つた。一回の滴定所要時間は 20~30分で室温 (20°C ± 2) において行つた。

III 実験結果および所見

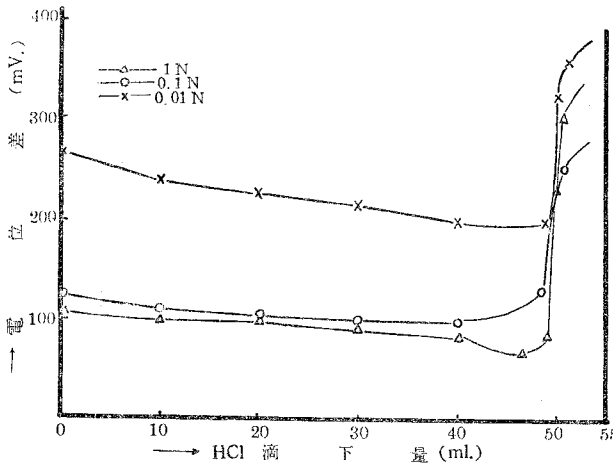
実験によりえられた滴定曲線において縦軸は電位差 (mV. : millivolt) 横軸は塩酸あるいはか性ソーダの使用量 (ml. : milliliter) を表わしており, また電極の右肩上に付してある + の記号はその組の極性を示している。したがつてその時の電流は溶液を通し + の極の方向に流れることになる。また終点附近においては滴定曲線では電位変化の最大点は判定し難いため示差曲線 ($\Delta E: 0.1\text{ml.}$ 当りの電位差変化) を示した。こゝで白金-ニツケル, 白金-銀, 白金-タングステン, 白金-アンチモン, の順序にてその結果を考察する。

1) 白金-ニツケル (Pt⁺ - Ni)

第4, 8図は酸およびアルカリ定量の滴定曲線, また第5, 6, 7図は酸定量時における



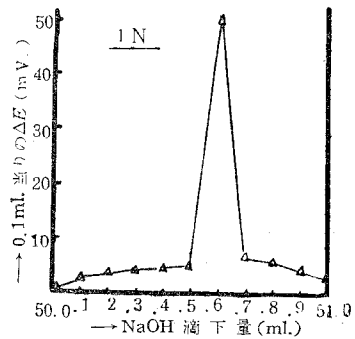
第4図 Pt⁺-Ni 滴定曲線



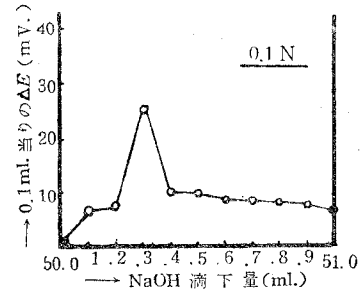
第8図 Pt⁺-Ni 滴定曲線

1N*, 0.1N, 0.01Nが性ソーダ溶液の示差曲線を示し、同様に第9, 10, 11図はアルカリ定量時における1N, 0.1N, 0.01N塩酸溶液の示差曲線を示すものである。まず酸定量の場合は第4図の示すごとく滴定開始後漸次電位降下を見せ、終点付近においては第5, 6, 7図のごとく20~50mV. 程度の急激な変化を見せたが、その降下度は1Nが一番大きくつぎに0.1N, 0.01Nの順であった。また、滴定中、電位の不規則は余り見受られなかつた。

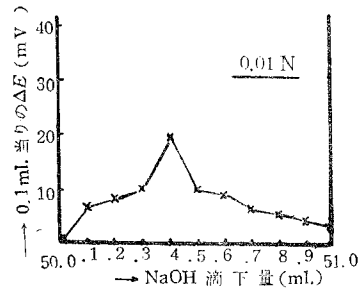
* : N 規定



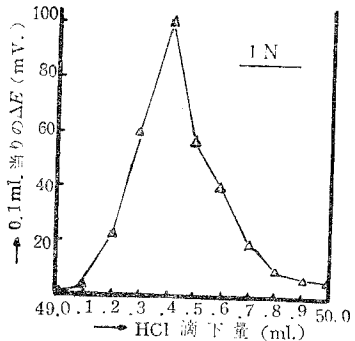
第5図 示差曲線 (Pt⁺-Ni)



第6図 示差曲線 (Pt⁺-Ni)

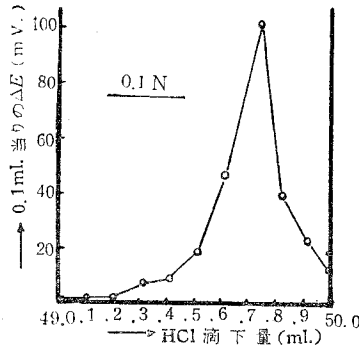


第7図 示差曲線 (Pt⁺-Ni)

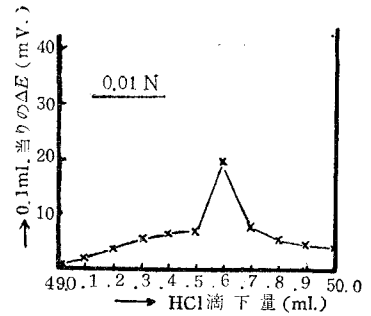


第9図 示差曲線 (Pt⁺-Ni)

アルカリ定量の場合
は第8図の示すごとく
各濃度とも塩酸の滴下
とともに電位は徐々に
低下し、45ml. 附近より
降下度を増し47~48
ml. 附近を最低として
それより急に上昇し、
終点において最高電位
変化を示した。その上



第10図 示差曲線 (Pt⁺-Ni)

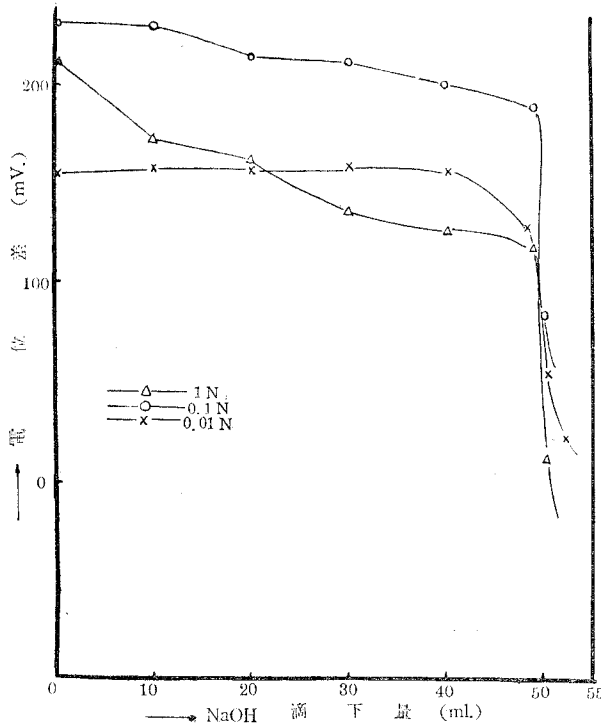


第11図 示差曲線 (Pt⁺-Ni)

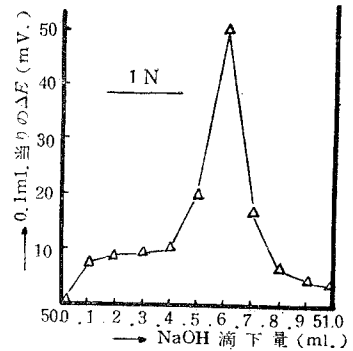
昇度も酸定量と同じく 1N, 0.1N, 0.01Nの順であつた。すなわち 1N, 0.1Nの各溶液では第9,10図のごとく100mV. 程度の上昇を見せ、0.01N溶液では20~50mV. 程度であつた。酸定量とアルカリ定量の電位変化を比較すると後者の方が大なる変化を見せた。

2) 白金 - 銀 (Pt⁺-Ag)

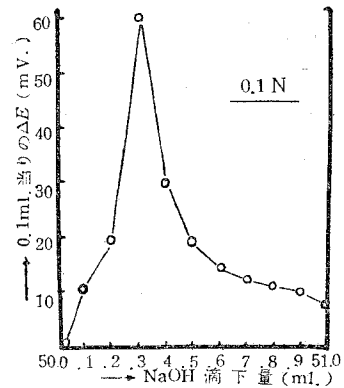
この組合せはほかの組合せとは違つた傾向を示す4のであるが、すなわち酸定量の場合か性ソーダ滴下量増加とと



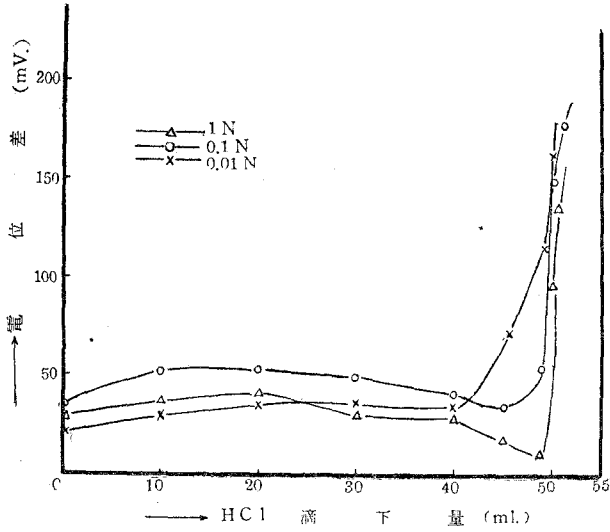
第12図 Pt⁺-Ag 滴定曲線



第13図 示差曲線 (Pt⁺-Ag)



第14図 示差曲線 (Pt⁺-Ag)



第16図 Pt⁺-Ag 滴定曲線

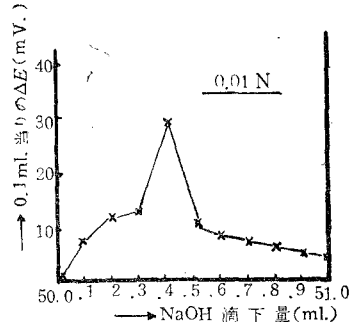
もに電位は上昇し終点附近1~2ml.を最高としそれより急に降下し、終点において最高降下を示すのである。しかし本実験においては第12図のごとく1N, 0.1N溶液においてはこの傾向はあまり認められなかつたが0.01N溶液においてはその傾向がうかがわれた。すなわち、か性ソーダの滴下量増加とともに電位は徐々に増加し、40ml.附近を最高としそれより徐々に降下し、終点において最高降下を示した。第13, 14, 15図のごとく20~60mV.の変化であつた。アルカリ定量の場合もほかの組合せに見られない曲線を示した。すなわち、1N, 0.1N, 0.01N溶液はいずれも塩酸滴下量増加とともに電位も増加し、10~30ml.を最高電位としそれ以後は徐々に降下し、1N溶液では49ml.附近、0.1N溶液では45ml.附近、0.01N溶液では40ml.附近を最低とし、それより急に電位上昇を示し、その ΔE (0.1ml.あたりの電位変化)は酸定量の時と同様に20~50mV.であつた。

3) 白金—タンダステン (Pt⁺-W)

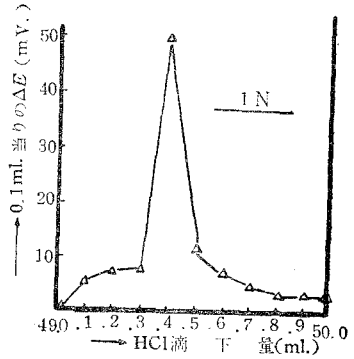
酸定量においては第20図のごとくか性ソーダ滴下量増加とともに電位は徐々に増加し終点においては第21, 22, 23図の示すごとく電位変化(ΔE)は20~200mV.の範囲であつた1N溶液を最高としつぎに0.1N, 0.01N溶液の順序であつた。

一方、アルカリ定量の場合第24図のごとく塩酸滴下量とともに電位は前述の酸定量とは逆に降下し終点においては第25, 26, 27, 図のごとく20~50mV.の電位変化(ΔE)を示したが前の酸定量の場合に比較して少なかつた。

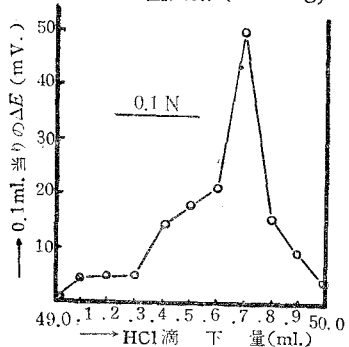
(157)



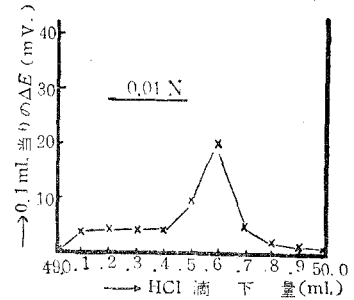
第15図 示差曲線 (Pt⁺-Ag)



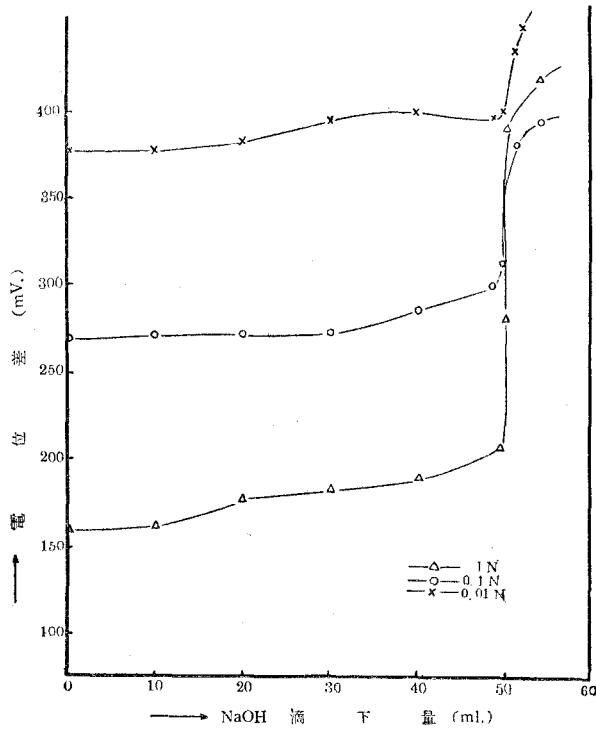
第17図 示差曲線 (Pt⁺-Ag)



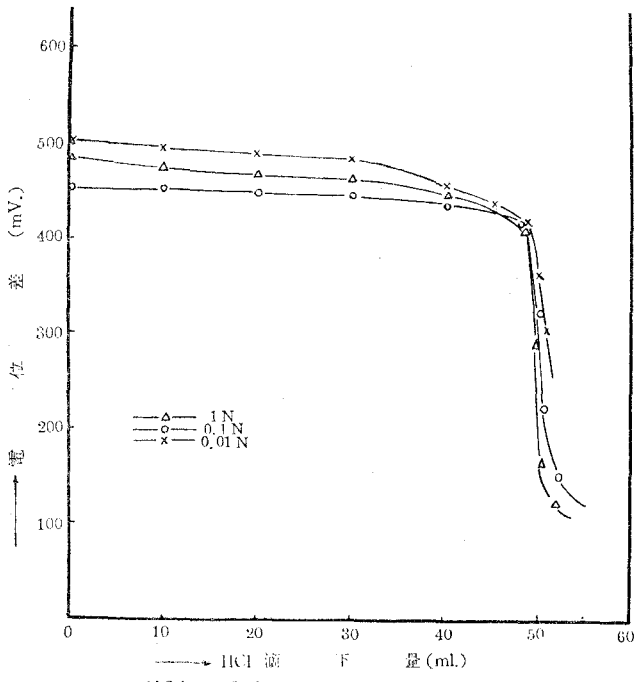
第18図 示差曲線 (Pt⁺-Ag)



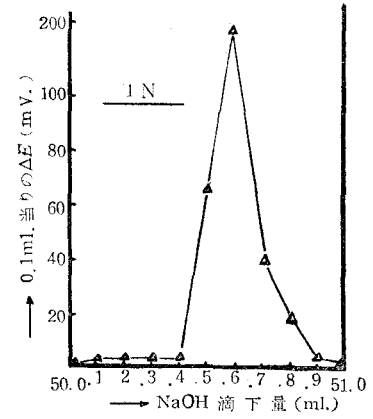
第19図 示差曲線 (Pt⁺-Ag)



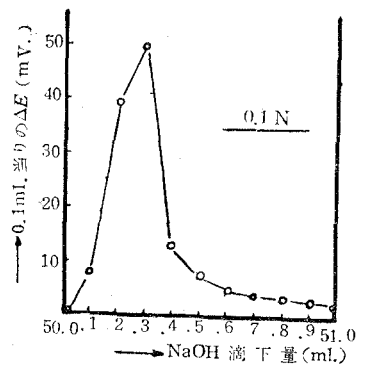
第20図 Pt⁺-W 滴定曲線



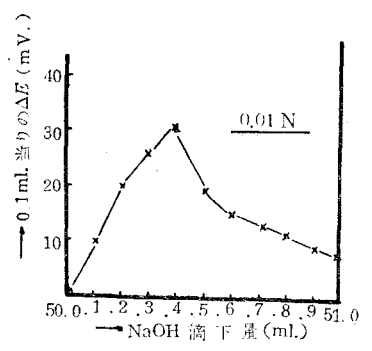
第24図 Pt⁺-W 滴定曲線



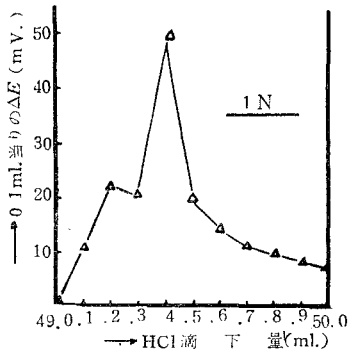
第21図 示差曲線 (Pt⁺-W)



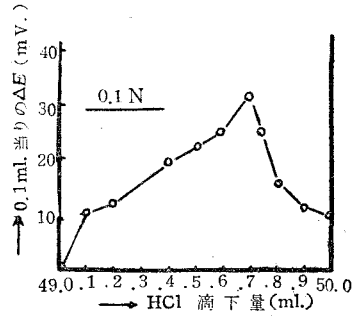
第22図 示差曲線 (Pt⁺-W)



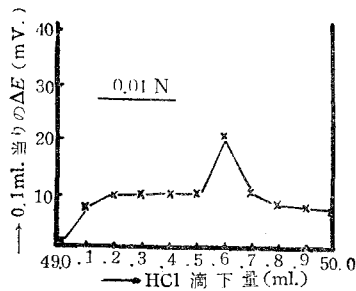
第23図 示差曲線 (Pt⁺-W)



第25図 示差曲線 (Pt⁺-W)



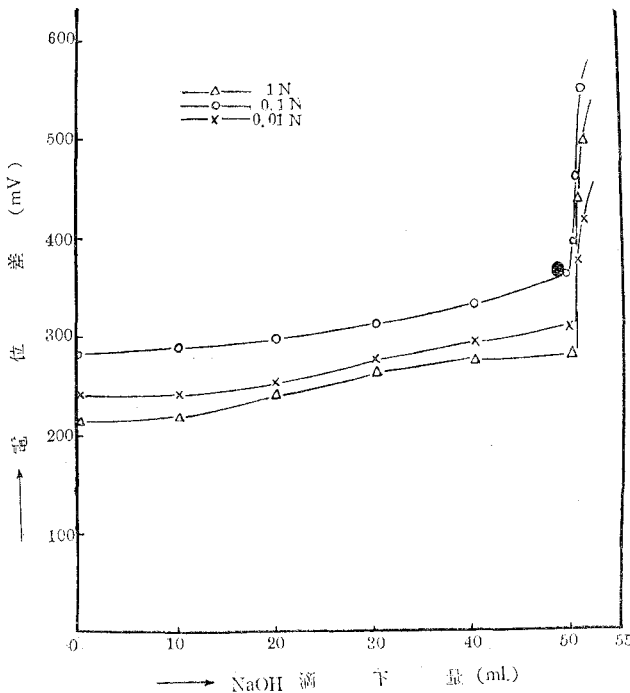
第26図 示差曲線 (Pt⁺-W)



第27図 示差曲線 (Pt⁺-W)

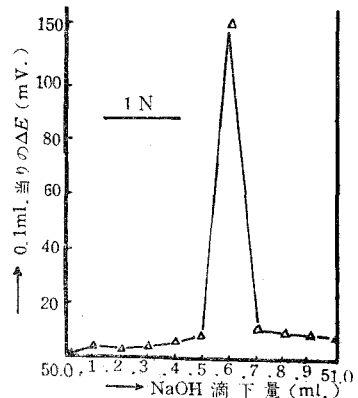
4) 白金-アンチモン (Pt⁺-Sb)

酸定量においては第28図のびとく 3)に述べたPt-Wと同様にか性ソーダ滴下量増加とともに電位は増加し終点においては第29, 30, 31図の示すごとく, 1N溶液の150mV. を最高としつぎに0.1N, 0.01N溶液の順で20~150mVの範囲の電位変化を示した。また, アルカリ定量の場合は第32図のごとく塩酸滴下量とともに電位は降下し終点においては第33, 34, 35図のごとく電位変化(ΔE)も15~60mVの範

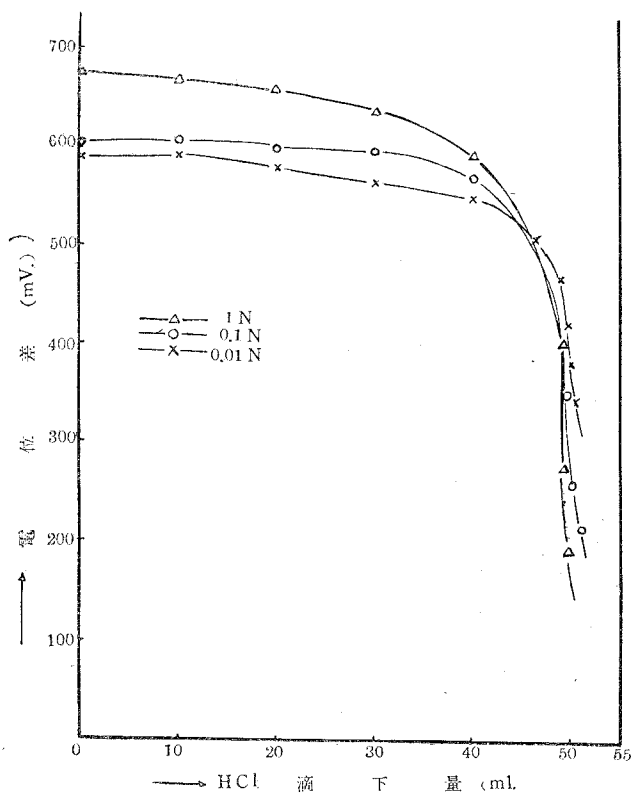


第28図 Pt⁺-Sb 滴定曲線

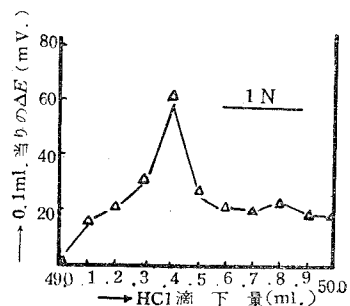
囲で前と同様に1N, 0.1N, 0.01Nの順であった。また, 酸定量のそれに比して少なかった。滴定後のアンチモン電極の表面状態は他の電極よりも酸化被膜の存在(黒色)が明瞭であった。



第29図 示差曲線 (Pt⁺-Sb)



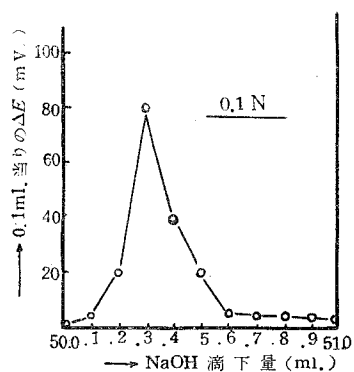
第32図 Pt⁺-Sb 滴定曲線



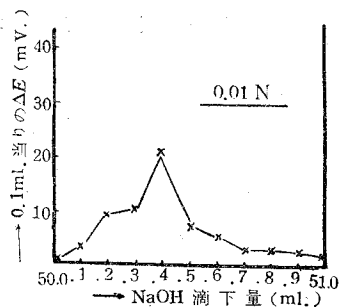
第33図 示差曲線 (Pt⁺-Sb)

以上四組の電極について考察したのであるが、この四組のうち Pt-W, Pt-Sb と Pt-Ni, Pt-Ag との二群に分けられる。すなわち、前の二組は酸定量的場合、電位は滴下量とともに上昇し、後の二組は降下する。(アルカリ定量的場合は前二組は降下、後二組は上昇)。

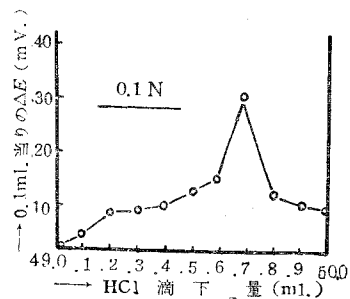
また、前二組においては終点における電位変化 (ΔE) はアルカリ定量的場合より酸定量的の方が大きく明瞭に終点を示した。



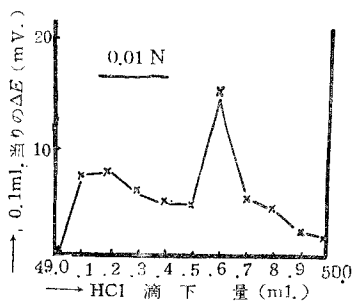
第30図 示差曲線 (Pt⁺-Sb)



第31図 示差曲線 (Pt⁺-Sb)



第34図 示差曲線 (Pt⁺-Sb)



第35図 示差曲線 (Pt⁺-Sb)

後二組のうちPt—Agは酸、アルカリ定量ともに同じような電位変化(ΔE)を示したが、Pt—Niでは酸定量よりアルカリ定量の方が大なる ΔE を示した。以上のような特徴を示すのは恐らくW, Sb, Ag, Ni各極が塩酸あるいはか性ソーダ溶液中においてそれぞれ特色のある挙動をするものと考えられる。また ΔE と濃度との関係を考えて見るに大体1N溶液がその変化が最も大きくつぎに0.1N, 0.01N溶液の順で、0.01N溶液では各組とも大体同程度の変化量で優劣が分りにくかつた。また滴定後の極の表面状態はSb極では明瞭に肉眼で酸化被膜(黒色)の存在が分つた。Ni, Ag, W各極においてもその度合は少なかつたが、その存在が分つた。つぎに攪拌の影響であるが、本実験においても器壁に飛沫がとばぬ程度にしておこなつたが、勿論速度は変らぬ方がよいが多少の遅速は滴定結果にはあまり影響しないが極端の速度の遅速は電位を不安定にする故避けた方がよい。

また、極の研磨は既述のごとくおこなつたのであるが、塩酸あるいはか性ソーダ溶液においても滴定をおこなうごとに滴定開始前の電位は違つた値を示した。しかしたとえ違つた値を示しても滴定全体には何にも影響はなかつた。ではあるがなるべく滴定前後の極の処理すなわち研磨あるいは洗滌に十二分の注意を払う必要がある。

IV 結 言

以上の結果を総合すると四組合せのうちPt—Ni, Pt—AgとPt—Sb, Pt—Wとの二群に分けられ、終点における電位変化(ΔE)は前二組においてはアルカリ定量の場合より酸定量の方が大きくまた後二組においては酸定量よりアルカリ定量の方が大きかつた。また、全般的に濃度の減少とともに終点における電位変化(ΔE)も減少し、1N, 0.1N各溶液においては一応満足すべき結果が得られた。攪拌による影響はあまり見受けられぬが、極端の速度の遅速は避けるべきであり、また滴定前後の電極の処理も注意を払う必要がある。

最後に本研究に種々御援助を賜つた北海道大学理学部西村、島崎両先生ならびに研究の一部を担当した稲川六郎君に感謝の意を表する次第である。

(昭和30年5月31日受付)



心霊現象に対する態度の研究

川 村 信 一

A Study of Attitudes toward Psychic Phenomena

Shinichi Kawamura

Abstract

The attitudes of the young men and women toward psychic phenomena were studied. Subjects: 89 college students and 34 hospital nurses. Three kinds of attitudes, belief, uncertain and disbelief were observed. It is clear from the experiments that the demonstrations had the effect of producing a significant increase in the direction of acknowledged belief on the reality of psychical phenomena.

I 緒 言

本研究は「大学生の神秘説に対する態度の研究」¹と題する米国のある大学生に行うた心理学的実験を参考として、日本の大学生ならびに看護婦講習生に対して、心霊現象についての心理学的実験を行うたのである。降神術や伝心術のような不思議な現象に対して大衆が、大なる関心をもっていることはよく知られた事実である。かゝる関心は戦争とか、経済的恐慌のような社会的緊張のもとに、恐怖や不安を感じずる時に著しく増加するらしいということも、またよく知られている。この傾向は、それを単に無知というだけでは説明されない。何故なら教育あるものも、無教育のものも、神秘に対する信仰をもっている。信仰者のうちには、有名な物理学者も、医学者もあるし、また大学教授も普通の市民も、非凡な市民も含まれているからである。

かゝる信仰が、現代の文化の世界においても、根強いものであり、時には、極端な熱狂まで拡大されるという事実を説明せんとすることは、本研究の範囲を越えたことである。こゝでは不思議（すなわち神秘や不可知）を可とする証明が、しばしば、「科学的」であるかのように示されることを考察して見たい。

参加者の理解を迷わし、直接の説明を拒むように見える出来事が真に不思議であり、「科学的説明の限界を越えていること」を参加者に信じさせようとすることも興味あることである。

1 L.W. Crafts, T.C. Schneirla & E.E. Robinson; A Study of Attitudes toward Mysticism Among College Students. Recent Experiments in Psychology, Chap. 1 1950

米国でも、Houdini,² Thurstone,³ McComas,⁴ Dunninger⁵ のような人々は「最も困惑する神秘的実演」を実施したのであり、しかも少しも超自然的力ということも言っていない。却つて、その分野において欺瞞や詭弁があることを好んで示し、かゝる問題を討論している。多くの心理学者も同様である。⁶ 不思議の技巧の最も忠実な熟練者は超自然的な力や「不可解」な神秘をつくることに対して、過大な要求をする公衆を迷わし、驚かすために、いかに詐欺的な詭計をつくるかを、その著書に明らかに示している。事件のかゝる客観的取扱から、読者は霊媒や他の不思議の多くの実演をさらに適当に理解する機会を与えられる。

けれども事實は神秘的現象は多くの人々に非常に魅力をもたれているということである。この魅力が色々な動機に基いており、しばしば各個人のある要求を満足させる欲求を含んでいる。(すなわち、もう一度死んだ息子や夫と交通したいとか、その幸福をたしかめたいなど) 神秘についての一般民衆の騙され易いことは、われわれの文化においても、色々な団体や個人によつてやしなわれ、増加される、McComasが指摘しているように、心靈研究協会は、そのよくある傾向からして、神秘の信仰を受け入れるに貢献している。—— 一般に非常に真面目で—— 神秘的現象に対して「積極的な」証明として認められる研究だけを公開し、従つて神秘の信仰を奨励する傾向がある。けれども、さらに、一層重要なことは、神秘的なものや幽冥なものに大衆の関心を利用することが、経済的に有利であることを見出す人々である。Lee Steiner 女史が、その有名な著書 *Where Do People Take Their Troubles?* において、これらの抜目のない不埒な詐欺師の色々な種類を記し、暴露して、無数の無知なあるいは情緒的に不安な人々を顧客や患者になるように、騙し込むことのできることを示している。

これらの読心術者や霊媒者やその他同様のものは、しばしば、彼等のところへ来る多くの人々に広く印象を与える公開実演をやつて、彼等の要求において、公衆の興味や欺瞞を刺戟する実演をやる。かゝる場合の証人や参加者に示される実演の種類を説明するために、かゝる現象の不思議な解釈に対する大学生らの態度にある洞察を得るために、工業大学学生ならびに看護婦に実演した心靈現象の実験を次に報告する。

なお日本でも、大本教やひとの道のような新興宗教が、信者を獲得するために、色々な不思議な現象を取入れたことが知られている。

又問題は別であるが奇術や魔法はやはり一種の不思議な現象であるが、その背後に仕掛や種

2 Houdini H; *A Magician Among the Spirits* New York, Harper, 1924

3 Thurstone. H; *400 Tricks You can Do*. Garden City, Blue Ribbon Book, Inc, 1940

4 Mc Comas. H, C; *Ghosts I Have Talked With* Baltimore, Williams & Wilkins, 1935

5 Dunninger. J; *Inside the Medium's Cabinet* New York, Kemps Co, 1935

6 Jastrow. J; *Fact and Fable in Psychology*. Boston, Houghton Mifflin, 1900
The Betrayal of Intelligence. New York, Greenberg, 1938

があることが予想されている場合は、却つて合理的な興味が主となつてゐることが当然である。

II 教 示

被検者 (a) 室蘭工業大学 1 年目学生 87 名

日 時 昭和 27 年 11 月 14 日 午前

(b) 北海道室蘭保健所主催

看護婦再教育講習会出席者 34 名

日 時 昭和 27 年 12 月 1 日 午後

全学生の面前で実演をする前に、正規の普通の講義に準じて「心霊現象の問題について」と題して、次のような講義をした。然しその内容は、特に価値あるわけではなく、実演に対する集団的な雰囲気や暗示をつくるに役立つためであり、いつもより、ゆつくりノートを取りやすく講義をした。しかもこの教示が次の実演を効果あらしめるために、かなりの影響をもつてゐるのである。

「心理学者」に対して、多くの人々が心霊現象について質問することが多い。ところが心霊現象については、昔から多くの人々によつて研究されており、日本でも井上円了博士は妖怪学なる著書を出している。かゝる学者は心霊問題を科学的基礎のもとに研究しようとしており、近代の心理学者が、かゝる問題に理解のないことを非難し、いかなる近代科学をもつてしても心霊現象の存在に対して反対できないことを主張している。それぞれ今日はその特別な实例として、伝心術 (mental telepathy) を取り上げて見たい。

心理学におけるこの問題についての、今日生じてゐる多大の混乱は感応放射力を「受取る」能力に個人差のあることを示すことの失敗と、感応伝心能力は真の心理学的基礎をもつてゐるという証明を一般的に無視していることに基いてゐるという立場をとつてゐる人がある。

後者の点は脳波 (electroencephalography) ⁷ からの確かな証明についての論議によつて理解される。そして感応的受入れに対して、脳髄皮膜 (cerebral cortex) の色々な層の厚さの個人差の重要さがいくらか詳細に考慮されるという段階まで発展して来ている。(こゝでノートをはなれて、テレパシーや脳波についての説明を加える。声の調子等も考慮してやる)。

感応の発生と電氣的回路の間には相似た関係がある。感応的通信の「送信者」(senders)は強い「脳波」を出すのであり、そして感応力のないものに比較して、かゝる通信の送信者も、受信者 (receivers) も共に厚い皮膜層をもち、従つて、これらの脳波の通過に対し、抵抗を減少するのである。すなわち電気抵抗は長さに正比例し、断面積に反比例する。(こゝで $R \propto l/S$ などを板書して、脳皮膜の厚い方が、感応度が大きであると説明する。)感応有能者 (telep-

7 H. W. Hepner, Psychology Applied to Life and Work vol. 1. The brains electrical waves, Prentice Hall, Inc. 1944

athis(s)は量の大きい皮膜をもつていると推定され、知能もすぐれていると考えられる。

結局懐疑主義者は普通非宗教的であり、しばしば無神論者あるいは不可知論者であることが指摘される」

勿論以上の教示は全く科学的でない点があり、欺瞞的でさえあるが、これで被検者は社会的に非難される仲間に入りたくないというような気分になるものもあり、又実験されるのに心理的に容易な状態になるわけである。

Ⅲ 実 演 第 1 回

実演の場所はもと寮の食堂であつた高い壇のある教室で、このような実演には割合適當していた。今日はこれから3種類の実験をしたいと告げる。なお実演中は絶対沈黙し、質問しないことを注意する。

(a) 数字あて、先ず伝心術の送信者として、私になり、その受信者として、多年私の研究室に勤めている中川忠喜氏を紹介した。同氏は私と多年テレパシーのできる間柄であることを説明し、別室に一時退場して、迎えに行くまで、待つてもろうことにした。任意の学生4人を壇上に出てもらつて、1から25までの任意の数字を板書してもらつて、4人の数字を加えて4で割つた数字が13になつた。この数字を全学生に確認してもらつてから、これをすつかり消し去つた後に、別室で待機している中川氏を迎えにやり、私と約2m位離れて、相對立し、私は24×20×8cmのラツク塗りの木箱を心靈箱として両手にもつて支えて、凝視することしばしにして、中川氏は「13」と大きい声で当てた時には、学生の間には、あゝ!というような感嘆の声が發せられた。一人の学生は壇上に飛び出して来て「先生!別の人とやつて見ないか」と反問された時に、私は「これは送る方と受ける方が、感応力がお互になければならないから、別の人では駄目だ」と答えた。

(b) 封筒の内容あて、厚い封筒6枚と用紙6枚を用意して来て、任意の学生にくばつて、誰にも見せないで、「将来についての簡単な質問」を書いて封筒に入れたものを、中川氏に集めてもらつて、それを私が受取つて、教壇の上におかせた。私は一番上の封筒を手にもつて、うやうやしく、ひたにおしあて、この中の紙片には「朝鮮の動乱はいつ終るか?」と書いてあると透視してから、封筒から紙片を出して、たしかに、そう書いてあることを確認してから、再び封筒に入れて「この質問はむずかしいからなかなか答えられない。終る時に終るでしょう」などと冗談を言つた。このようにして、「アイゼンハワーは朝鮮で殺されるか?」「僕は何かで結婚したらよいか?」「美人がもらえるだろうか?」「貰を止め得るか?」「卒業の時にすぐ就職できるか?」と順々にあて、適當な回答を与えて、最後に全部を学生にわたして、内容を検査してもらつた。

(c) 遠隔伝心術 次に遠方の人に伝える実験をすと言つて、トランプ52枚を用意しておいて、任意の学生にわたして、これをよく切つて、任意の一枚を抜いて、これを私が受取つた。それはダイヤのキングであつた。それで私は電話1658番の小林信子さんに聞いて見てくれと言つた時には4.5人の学生が走り出て来て、他室の電話をかけに行つた。私はしばし壇上で、精神集中をしながら、待つていた。やがてダイヤのクインであると返事をもつて来た。残念ながらダイヤはあたつたがKとQが違つたものゝ、学生たちは相当不思議に思つたのであつた。

IV 実演 第2回

第2回の実演の場所は壇のないところで、講習生との距離は割合近かつた。保健所の新しい明るい会議室で、感じのよい環境であつた。

(a) 数字あて、この場合は室工大1年目学生、工藤素平君を受信者として紹介した。そして箱の代りに濃緑色に塗つたゴムまりを心霊球として使用した。数字は6であつた。やり方は前回の通り。

(b) 封筒の内容あて、第1回よりも、大分身振りを強くあらわして実演した。内容は「私はどんな人と結婚するでしょう」「私は生命にかゝわる病気をするのでしょうか」「2年後の私はどうなつていのでしょうか」「私は産婆になれるのでしょうか」「家をたてることができるのでしょうか」「この職業は成功するのでしょうか」というようなもので、前回と同じように順々に透視した。

(c) トランプの札あて、選び方は前回のようにして、ハートの6が出た。工藤君と約2m位離れて相対立して、心霊球を両手で支えた。工藤君は最初ハートの7と言つたが、更に考えなおして、ハートの6と当てた。

(d) 遠隔伝心術、ハートの6を示して、電話1685番の浦秋子さんに当ててもらふように電話してもらつた。なかなか電話で聞きに出るものがなつたが、漸く3人ばかり、約100mもはなれた保健所へ電話をかけに行つて、やがて帰つて来ての報告は、まさしくハートの6であつた。

女子に対しての実演の場合も、静粛と沈黙を要求したが、案外守れないで、むしろ騒々しい気分であつた。数字を板書するにも、男子のように直ぐ出なかつた。つまり概して態度は消極的であつた。

V 心霊現象に対する態度の調査

実演が終つてから、あらかじめ用意した別紙のような用紙をくばつて、今日の講義と実験前と、その後との心霊現象に対する信、不詳、不信の各自の態度を記入してもらつた。男子の時には記入前に信の態度の者に挙手をしてもらつたが、手をあげたものが割合多いようであつたが、動揺の気配が感ぜられた。女子の場合には失念して、手をあげさせないでしまつた。

Ⅵ 調査後の教示

調査表を集めてから、この統計の結果はこの次に発表したいと思う。なお心霊現象は困難な問題であり、実は今日の実験はすべてトリックで、種があるのであると、教示した場合、被検者の間には名状し難い動揺が見えた。たゞし米国の大学生の場合のように哄笑は生じなかつた。もつとも米国の場合には、私のような実験の外に任意の学生に9人の姓名を書かせ、その中にかくされた特定の1名の姓名を当てること、また実際に教室をうす暗くして、降霊現象を実演したのであるが、この二つは準備の都合で、実施しなかつたわけである。男子も女子も、そのトリックの種に興味をもつて、種明しを要求したけれども、各自に考えてもらうことにして教示しないことにした。

| | | | |
|--|---|---------|-----------|
| 昭和27年 | 月 | 日記 | 氏名 |
| | | | 昭和 年 月 日生 |
| | | | 血液型 |
| | | | 住所 |
| 講義と実験 | | 前 | 後 |
| 心霊現象を | | 信 ず る | 信 ず る |
| | | はつきりしない | はつきりしない |
| | | 信 じ ない | 信 じ ない |
| 該当の態度に○をつけ、他は横線で消して下さい あなたが今最も 気にかかることはなんですか | | | |

Ⅶ 調査結果

第1回、第2回の実演の結果は次の第1表、第2表のようであつた。参考のため米大学生の実験結果を第3表に示す。

| 第1表 大学生の態度 | | | 第2表 女子群の態度 | | | 第3表 米大学生の態度 | | |
|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-------------|------------|------------|
| 態度 | 前 人数% | 後 人数% | 態度 | 前 人数% | 後 人数% | 態度 | 前 人数% | 後 人数% |
| 信 | 11 (12.4) | 14 (15.6) | 信 | 4 (12.0) | 17 (50.0) | 信 | 27 (15.8) | 73 (42.7) |
| 不解 | 30 (33.7) | 59 (68.6) | 不解 | 18 (53.0) | 17 (50.0) | 不解 | 96 (56.1) | 64 (37.4) |
| 不信 | 48 (53.9) | 14 (15.6) | 不信 | 12 (35.0) | 0 (0.0) | 不信 | 48 (28.1) | 34 (19.9) |
| 無記入 | | 2 (0.2) | | | | | | |
| 計 | 89(100.0) | 89(100.0) | 計 | 34(100.0) | 34(100.0) | 計 | 171(100.0) | 171(100.0) |

次に教示と実演前の信、不解、不信の三つの態度の組の変化の内訳を第4表、第5表に示す。第6表は米大学生の態度変更内訳である。

Ⅷ 調査結果に対する考察

本実験では被検者の少いことが考察上不充分な事項とも考えられるけれども、全体の傾向とくに米大学生の171名の実験結果を参考とすればその不充分を補うことができると考えられる。

第4表 大学生の態度変更の内訳

| | 実験前 の態度 | 信 人数 % | 不解 人数 % | 不信 人数 % | 変更者 人数 % | 無記入 人数 % |
|----|------------|-----------|------------|------------|-------------|-------------|
| 信 | (N=11) | 9 (81.8) | 1 (9.1) | 0 (0) | 1 (18.2) | 1 (9.1) |
| 不解 | (N=30) | 4 (13.3) | 23 (76.6) | 2 (6.6) | 6 (19.9) | 1 (3.5) |
| 不信 | (N=48) | 1 (2.1) | 35 (72.9) | 12 (25.0) | 36 (75.0) | |
| 計 | | 14 | 59 | 14 | 43 | 2 |

第5表 女子群の態度変更の内訳

| 実験前 の態度 | 信 人数 % | 不解 人数 % | 不信 人数 % | 変更者 人数 % |
|------------|-----------|------------|------------|-------------|
| 信 (N=4) | 4 (100) | 0 (0) | 0 (0) | 0 (0) |
| 不解 (N=18) | 12 (66.6) | 6 (33.4) | 0 (0) | 12 (66.6) |
| 不信 (N=12) | 1 (8.4) | 11 (91.6) | 0 (0) | 12 (100.0) |
| 計 | 17 | 17 | 0 | 24 |

第6表 米大学生の態度変更内訳

| 実験前 の態度 | 信 人数 % | 不解 人数 % | 不信 人数 % | 変更者 人数 % |
|------------|-----------|------------|------------|-------------|
| 信 (N=27) | 21 (77.8) | 4 (14.8) | 2 (7.4) | 6 (22.2) |
| 不解 (N=96) | 44 (45.8) | 39 (40.7) | 13 (13.5) | 57 (59.3) |
| 不信 (N=48) | 8 (16.7) | 21 (43.8) | 19 (39.5) | 29 (60.5) |
| 計 | 73 | 64 | 34 | 92 |

はじめ信ずる者の割合が約12%でどちらも違いがなく、米学生の15.8%より低いのは、米国は心理学専攻の学生であるが、本実験では、工業大学生と看護婦であることの差とも考えられる。

不信者の割合が、米学生より高いことも、同様の理由と考えられる。

次に実験後の態度の変化について考察すると、信ずるものは実験そのものが信ずることを肯定する立場であるから変化しないのが当然であると予期されるし、実際の結果は、工大学生11名中1名が不解となり、もう1名は無記入となり、女子は4名とも不変であつた。本実験では不信が実験の結果不解に、不解が信に変化したことは、注目に価することである。特に第2回の女子群の実験では不信が1名もなくなつたことは、実際には実験中既にトリックに気がついた者もあつたように思われたほどであつたが、調査の結果は、実験が集団的に信ずるような雰囲気であつたことが実証された。特に米学生の実験のように降霊の実験をしたならば、その影響が、さらに大であつたろうと推察される。大学生は一般人より批判的であると考えられるが、私はその年の4月より心理学の講義を担当して来て、正規の授業の一部として、実施した教示も一つの集団的暗示となつたと考えられる。女子群の方は5日間10時間の講義の最終日に実施したことが有効に作用したと考えられる。彼女らもやはり一般人よりは、近代のすぐれた医術の行われる社会環境に勤務しているから批判的な筈であるけれども、教示および実演にかなり影響されたのである。

本実験では心霊現象を信ずる態度は、不解や不信の態度よりも一層安定であり、固執的で、根強いものであることが推定される。なお集団的に非科学的説明を科学的らしい説明と受取る傾向のあることも推定される。

Ⅱ 実演の種明し

実演後トリックについては、かなりの興味をもつたらしく、寮生は数日間話題にしたということである。なかには電話番号をわざわざ調べて、該当する宛名がないから、学内で処理したろうと考えた学生もあつたという。もちろん本実演のトリックは普通の奇術等にもよく用いられているもので、決して珍しい方法ではない。看護婦たちも12月4日に1か月間の講習終了後の懇談会の席上で、種明しを要求され、電話以外の分は説明してやつた。

(a) 数字をあてる方法は、あらかじめ2人で打合せて、箱あるいは球の被検者に見えない反対側の手の人差し指を数だけ動かして合図したのである。第1回は高い壇の上であつたので、好都合であつたが、第2回はゴムマリも小さく距離も近く指の動きをさつつた者があつたようであつた。やはり指以外の耳とか声帯を動かすとか、ピアノの伴奏による方が有効であることはたしかである。

(b) 封筒の内容あては、あらかじめ被検者の1名と打合せ、その書く内容を約束しておいて、実演の時、集める助手がそれを一番下にして、実演者にわたし、実演者が一番上の封筒内容を一番下の内容として発表し、その時、その内容を実際に見て知り、順ぐりに繰返すのである。従つてやり方は、かなり動作を大げさにして、疑われないように実演することが大切である。

(c) トランプのあて方は、第2回目の心霊球を使つたやり方は全く(a)と同じ方法であつた。たゞ札の種類4種類の示し方を打合せたが、この場合はハートの6で、球をもつ前に右手を心臓にやつたことを既に見破つた者もあつたらしく失敗のような気がした。最初ハート7と答えたのは、6と知りながら、ゆとりを見せて、試みたということであつた。

(d) 電話で聞く方は、あらかじめ特定の電話の持主と打合せ、52種の姓名を打合せておき両方で名簿を用意しておいた。ところが、KとQを違つたのは両者のKとQの打合せ違いと思われた。それで第2回の際は打合せをしておいて、姓を13種類にし、クラブは信子、ダイヤは愛子ハートは秋子、スペードは礼子ということにしたので、浦秋子がハートの6と答えることが出来た。この方が52名の氏名をさがすよりは、はるかに楽であつた。

実演は以上の3あるいは4種では不足のようである。やはり米学生の実演のように、氏名あてや降霊の実演が必要であるだろう。参考のため、この方法を附記すると、先ず全学生が実演者に集中することが要求され、それから部屋を暗くし、約30秒位して、もう何か見える人があるだろうと聞いて見る。数人が「何か幽霊らしいもの」が見えると答える。見えない人はある「力」をかりる必要があるからと、全学生にある軍歌をうたわせる。歌っている間に「あやしい顔」が見えると、他の学生がさげび出した。それからやがて、電灯を点け実演が終つたというのである。この実演では、学生が教室に集合前に室の真正面の幕にアントラセン溶液で、縦の

卵形を書いておいたのであつた。この卵形は普通の日光では全く見えないが、濾光をした強い紫外閃光（普通の日光では見えない）をあてると、燐光を発生させる。ロールシヤツハ像の類型⁸による性格検査についてよく知られているように、かゝる条件下では多くの参加者は「幽しい」顔や、あるいは自分の知つてる顔のように、光の斑点や、かすかな輪郭を解釈するのである。一般に降霊術に会合する人などよりも信じ易くない参加者の中でも、非常に僅かな外的な知覚に基いて、「精霊」を見たとか、聞いたと報告するような人のあることも期待されると述べている。

X 結 言

以上の実験をしてから、心霊問題の討論会や座談会やその他の感想文や意見等を記録編集したのであるが、それらは本報告には省略することにした。

心霊現象に対する態度としては既にⅦの調査結果に対する考察で一応まとめられているが、心霊現象とは何であるかの問題になると実に多種多様である。ことに観点を広くとると、宇宙全体、地球のあらゆる現象、生物の機能等は科学的に深く攻究する程、その靈妙神秘が覚知される。2m離れた相手の数字は直接解らなくとも、ラジオやテレビジョンによれば、地球の反対側のことを聞いたり見たりできる。原水爆の実現に至つては、聖書にある色々な奇蹟以上の奇蹟とも考えられる。昆虫の変態でさえ、無限の神秘である。この意味では、神秘主義や神秘説は是認されるものであり、このような論議は合理的な科学研究と矛盾することなく、成立することであり、本実験とは別の分野である。「幽霊の正体見たり枯れおばな」という諺は、極めて通俗であるだけ、もつともよく人間心理をあらわしており、心霊現象の一つの説明である。本研究報告が現代青年男女の傾向の一つの資料となることができれば幸甚である。

おわりに本研究実験に協力された、工藤康平、中川忠喜、浅野せつ、日商株式会社室蘭出張所岩淵寿照、寺崎政子等の諸氏、看護婦に実験の機会を与えて下さつた室蘭保健所長熊谷太市氏、其他関係諸氏に衷心より謝意を表す次第である。

なお、本実験方法の指針とした『心理学における最近の実験』の著者等に対し深く感謝を献げる。

（附記） 以上の実験については、昭和29年11月23日北海道心理学会第一回大会にて発表した
（昭和30年5月23日受付）

8 戸川行男、本明寛 早稲田大学改訂 ロール シヤツハ検査 臨床的精神診断法手引および図版
金子書房



新中国における 三反、五反運動と運動下の財經工作

三 木 毅

The San Fan Movement, Wu Fan Movement and other Financial, Economic Works under these Movements in New China

Takeshi Miki

Abstract

Between the end of 1951 and June 1952, the San Fan Movement among government workers was directed against corruption, waste and bureaucratism (what are called three evils), and the Wu Fan Movement among private enterprises against bribery, tax evasions, theft of state property, cheating on government contracts and stealing economic information from government sources for private speculation (what are called five vices).

The San Fan and Wu Fan movements were social reform movements, changing Chinese customs and traditions; and they were movements remoulding industry and commerce at the same time. During these movements, some problems in adjusting public-private and labour-capital relations rose on a new basis; (1) to guarantee reasonable profit on processing work and order of commodity, (2) to work out specifications in processing work and purchase orders, (3) to activate the interflow of goods both between city and country-side, and between domestic and foreign market, (4) to reduce bank rate, (5) to adjust taxation, (6) to adjust labour-capital relation, (7) to sweep out three evils and five vices.

Chinese society, namely, New-democratic society, was based on the state-owned economy and the private economy. Therefore, it made Chinese socialist revolution to have two more characters: that of the socialist revolution and that which developed the basis role of Bourgeois-democratic revolution. That democratic reform was basically completed through San Fan and Wu Fan movements. Consequently, San Fan and Wu Fan movements were probably not only one part of Chinese socialist revolution, but its turning point.

I 題 開

一九五三年は新中国において極めて意義ある年である。一九五三年は実に第一次五ヶ年計画の起年であつた。

中国革命の歴史的過程は、周知のとおり、二つの段階に分れなければならないとされている。¹ その第一段階は民主主義的革命であり、その第二段階は社会主義的革命である。革命の第一段階で殖民地的、半殖民地的、半封建的社会を改変して新民主主義的社会とし、第二段階で社会主義的社會を建設するとされている。新民主主義的社會は、社会主義的社會を建設するためのいわば過渡としての社会である。一九四九年中華人民共和国の成立は新民主主義的革命が原則的に終了し、新国家が新民主主義的社會として発足したことを意味し、同時に革命の段階が社会主義的革命にふみいつたことを表示している。

新民主主義的社會はその成因として社会主義的性格の公經濟と資本主義的性格の私經濟をもつ。新民主主義的社會における財經の根本原則は『經濟の工業化』であるとされる。したがって新民主主義的社會において財經の現実的任務は公經濟を發展させ、私經濟を改造し、經濟の工業化を実現することである。しかし經濟の工業化のためには、まず破壊した經濟を恢復させなければならない。一九五三年國民經濟の社会主義的工業化、大規模經濟建設を目的とする第一次五ヶ年計劃が開始されたことは、一九五〇年から五二年にいたる期間に、國民經濟が恢復しその工業化のための準備工作が完了したことを示すものである。もし新民主主義的社會を、したがって社会主義的革命をいくつかの小段階に区分するとすれば、一九五〇年から五二年にいたる三ヶ年を第一段階、それ以後を第二段階の如くなしうるであらう。この段階はさらにいくつかの環節に、たとえば、第二段階を第一次五ヶ年計劃、第二次五ヶ年計劃、第三次五ヶ年計劃の如く分類することが可能であらう。

一九五〇年から五二年にいたる三ヶ年、すなわち國民經濟の恢復期は、その期間に実施された財經工作によつて、さらに三ヶの環節に区分される。一九五〇年三月の統一国家財政經濟工作、同年六月の工商業の調整および五一年十一月の三反、五反運動と当運動下の増産節約運動、城郷物資交流運動は、各々のもつ性格から、劃期的な革命の財經工作への転形とみなすことができる。

統一国家財政經濟工作と工商業の調整についてはすでに紹介の機会が与えられた。² 小論においては主として三反、五反運動と当運動下の財經工作について述べたいと思う。

Ⅱ 三反、五反運動の動機

新民主主義的社會における、經濟構成要因は国营經濟、合作社經濟、農民と手工業者の个体經濟、個人資本主義經濟および国家資本主義經濟の五である。³ 新民主主義的社會における財

1 毛沢東 新民主主義論。

2 三木毅 新中国における統一国家財政經濟について、室蘭工業大学、研究報告、第一卷、第三号。
三木毅 新中国における工商業の調整について、京都大学、經濟論叢、第七二卷、第六号。

3 中国人民協商會議共同綱領、第二十六条。

經工作の究極の目的は共同綱領第三条に指示される『經濟の工業化』である。したがつてこの社会における財經工作の根本方針は、国民經濟の工業化のため、いかにして各社会經濟要因を分工合作させるかにある。經濟の工業化は社会主義的社會建設の物的条件であり、社会主義的革命的財經的顯現であるから、各社会經濟要因の分工合作は単なる分業協同ではなく、社会主義的性格をもつ国营經濟の指導権を確立し、農民手工業者の个体經濟を半社会主義的性格の合作社經濟に組織化し、個人資本主義經濟を国家資本主義化する革命的諸過程を意味している。

一九四九年中央人民政府の樹立は政治的統一の実現を表しているが、經濟的統一の実現を表すものではなかつた。成立期の社会の經濟的基盤は国民經濟ではなく、辺区經濟である。この政治の統一性と經濟の分割性の矛盾は国家財政收支の不均衡と金融物価の大波動となつて表れ、城郷交流を阻害し、經濟生産性を著しく制約した。したがつて閉国当初において經濟を恢復させるため、經濟的統一を実現し、かつは社会主義的革命的転形としての計劃的綜合的財經工作を実施することが強く要望されたのである。財政收支の統一管理、物資の統一調配および現金の統一管理の三基本内容をもつ統一国家財經工作は、まさしくこの要請に立つ財經工作であつた。

統一国家財經工作によつて經濟的統一は實現し、財政收支は平衡に近づき、通貨膨張は停止し、物価は安定に向つたのであつたが、同時に私営工商業に休業倒産等の恐慌現象が発生した。これは統一国家財經工作が統一的綜合的であるため、公私の分工合作について具体的個別的な施策にかけた結果であるともみられるが、私営工商業の困難が新事態に則応しえない無計劃な生産と放漫な經營に基因する必然的結果であつて、⁴ もはや私営企業の生産性向上が従來のいわゆる利用、制限の限界内においては不可能であり、革命がすでに改造を必要とする段階に發展したことを明かにするものであつた。当時中国は『大国家小生産』⁵ の状態であつて、この小生産にしめる私営企業の比重は工業において五六・二%、商業において五五・六%であり、⁶ 広大な人民の需要に対して、いまだ私営企業の果す役割はきわめて大きく、統一国家財政經濟工作によつてつくりだされた新しい基礎における私営企業の方途を指向する公私分工合作の具体的方法が必要となつた。ときに公私企業の調整と稅收の調整を工作重点とする、いわゆる工商業の調整は加工、製作注文、收買等による公私合作の具体的方法を指示したのである。

工商業の調整は国家機関と公營企業からの加工と製作発注による私營企業の国家資本主義的改造工作であるが、なお私營企業の合理利潤、加工および製作の規格に関して適確な指示にか

4 陳雲(中央人民政府政務院副總理兼財政經濟委员会主任), 關於經濟形勢, 調整工商業和調整稅收問題, 一九五〇年六月十五日, 中国國際貿易促進委員會編, 三年來新中国經濟的成就, P. 42.

5 章乃器, 調整工商業問題, 中国經濟的改造, P. 123.

6 陳雲, 關於經濟工作和財政工作的報告, 一九五一年十月二十五日, 中国國際貿易促進委員會編, 三年來新中国經濟的成就, P. 80.

け、そのため工作実施中に暴利と手ぬき目べらし等の現象を発生させた。これらの公私調整上の諸問題は朝鮮事変の勃発による抗美援朝運動によつて極めて特異な形で現れている。抗美援朝運動は土地改革、反革命鎮圧運動とともにすでに一九五〇年六月以来一年にわたつて展開された運動であるが、公私調整上の諸問題はこの運動の過程に発生し表面化したものであつた。

抗美援朝運動の本質は国防を充実することであつた。国防を充実するには本来経済、文化等の事業に使用される財力を国防に転用しなければならない。しかし国家财经工作の基本課題である経済の恢復発展の上からは経済、文化等の国家建設経費を削減することは不可能であつた。国防の充実と経済の恢復発展という相反する二つの条件を同時に満足させるためには、一方において経済の生産性を増強し、他方において财政收入を迅速に増加するとともに政府機関の経費を大量に節減しなければならない。一九五一年十一月節約増産運動が抗美援朝の完全勝利を支持する全国規模の大衆運動として実施される所以であつた。⁷

増産節約運動は、労働者、農民を中核とし膨湃として全国に拡大し、増産、節約の顕著な実績をあげ、経済の急速な恢復と発展の有利な条件を創造しつつあつたとされていたのであるが、政府機関人員に官僚主義的な指導や受賄、貧汚があり、私営企業に暴利、目べらし等の事故が発生し、それらが運動の正常な展開を著しく拘束する原因となつた。新国家の膨脹が急激であつたため、政府機関に国民党政府機関人員の留用を必要とし、また人民の需要を充足するため私営企業の存在が必要であつた。しかし政府機関人員と私営企業の前時代性に胚胎する事故が国家财经工作の前途を制約することとなれば、当然そこに厳格な改造が要請される。

かくて一九五一年末から五二年上半期において政府機関人員に対する三反運動、私営工商業者に対する五反運動が激しく展開されたのである。

Ⅲ 増産節約運動と三反、五反運動の展開

三反、五反運動は、前節で明かにしたやうに、社会主義的革命における一連の工作の一環であつて、これだけを切離して考えるわけにはゆかない性質のものである。これを説明するためにはまづ統一国家财经工作と工商業の調整を詳かにしなければならぬ。しかし前記工作はすでに紹介の機会があつたのでこゝではふれない。

三反、五反運動の直接的な動機となつたものは増産節約運動であつた。増産節約運動は「全国的な生産増加と節約励行の広範な大衆運動を展開し、現生産設備の潜在能力を十分に發揮し、経営管理を改善し、国家財力を増加し、以て抗美援朝の完全勝利を支持する」⁸ 方針に基くも

7 李富春(中央人民政府政務院财经經濟委員会副主任), 中国工業の目前情況和我們的努力方向, 一九五一年十月三十一日, 上揚書, P. 83.

8 李富春, 中国工業の目前情況和我們的努力方向, 中国国際貿易促進委員会編, 三年来新中国經濟的成就, P. 87.

ので、そこに明かなとおり、当運動の目的は抗美援朝を完遂することにあつた。

増産節約運動の重点は以下の諸工作におかれている。⁹

(一) 生産増加 現存設備の生産力發揮を増産の主要源泉とし、国营企業の設備利用率を引上げる。当時、たとえば重工業において、発電設備の利用率は平均三五%、機械工業設備の運用率は五五%前後にすぎない。原料不足により、特に原料を節約して増産を行う産業部門を除き、利用率の引上は一般に技術管理と生産組織の改善、機械の検査修復、保養と保安活動、現設備の調整と補充、その平均的な使用と配合の強加による。生産増加のため、品質を高め不良品を減少させることが必要である。企業の低い技術水準、管理制度の不健全、設備機械の不十分、大量の新労働者の増加等が、品質不良と廢品の原因であるから、まづ作業規定を作り、系統的な製品検査制度を立てる。

(二) 生産費の低減 定額管理の強加と原材料消耗の減少は生産費低減の關鍵である。大材小用、優材劣用の現象を克復し、局、工場、職場間の労働組織と管理機構を改善し、管理費用を低減する。

(三) 資金管理の強加と資金の節約 資産整理と資金査定の工作を進め、退蔵材料の整理と在庫商品の計画的な販売をはかり、特に流動資金の査定を更新する。

(四) 基本建設工作の推進と基本建設の重大な浪費現象の減消 基本建設における国家財力の増加と節約の方法は基本建設の順序に厳格に基づく精確な調査、設計と施工の進行である。工事施工の経営管理にあつては独立採算制を採用し、工事現場の検査を組織強加し、技術管理を強加し、工事と材料の品質を保証し、建設工事の生産費を低減する。

この四点の工作を完遂するためすべての企業は、企業中の民主管理を十分に行い、労働者、技術人員と職員の積極性、創造性と団結力を教育動員し、労働と技術を密接に結合し、合理化提案を支持し、先進的な生産方法を推披し、愛国主義的労働競争を展開することが要請されている。

増産節約運動における愛国労働(生産)競争は、いわば中国におけるスタハノフ運動で、一九五一年中に二百三十八万人の労働者がこの競争に参加し、五二年上半期は全職員の八〇%以上の参加を見ている。¹⁰

増産節約運動の實踐的目的は「抗美援朝の完全勝利を支持する」ことであるが、さらにこの運動は「やがて到来する大規模工業建設の不可欠な準備工作」と規定される。抗美援朝運動は、土地改革と反革命鎮圧運動とともに、「国家工業建設のための基本的準備工作を行つ

9 李富春、上掲報告、上掲書、P.P. 86—88.

10 李富春、三年来我国工業的恢復与發展、一九五二年九月二十九日、上掲書、P.P. 120—121.

たものである」とされ、¹¹ 増産節約運動を国家工業建設の基本的準備工作ないしは大規模経済建設の不可欠な準備工作とすることによつて、そこにおける消費と生産の二政策要素間における矛盾を止揚しようとしたものであつた。「国防を鞏固にすることはわれわれの首要な任務であるから、工業建設においては、まづ国防と密接に関連する重工業を強加しなければならない」¹² という、そのことによつて大規模工業建設の一面の性格を知りうるのであるが、要するに、増産節約運動に指向される抗美援朝の完遂と大規模工業建設の不可欠な準備工作という二つの政策目的は国防と支援および経済発展の相反的性格をもつものであつて、それらの同時的実現はきわめて困難であつた。

工業建設の任務を実現するため、積極的に完成すべき準備工作は次の五項目に集約されている。¹³

(一) 計劃工作の強化 各級人民政府の計劃機構を強加し、全国工農業の情況、發展速度と建設重点の研究に着手し、各種経済の關係を研究調整し、国家建設計劃の下で各々その所をうるやうにする。

(二) 資源調査工作の強加 現在地質工作指導委員會の指導で、重点的に一部の工作が進められているが、今後全国地質人才を集中し、地質工作の機構を充実し、資源調査に起りがちな盲目性と分散性を防止し、工作の実効を早める。

地質調査工作によつて東北の炭田は十倍、華北の炭田は六倍に拡大される。又華北の鉄鋳埋藏量が当初の十倍に達することが実証されている。¹⁴

(三) 新人才の大量養成 政務院財政經濟委員會は、政務院文化教育委員會と中央教育部の幹部養成計劃の外に、現在の技術幹部と知識分子の自己教育を助け、政治上技術上の向上を計る。二、三年の中に各種の業務学校と訓練班等で失業知識分子を吸収し、思想教育と技術教育を進める。広大な労働大衆から大量の技術労働者を養成するため、国营、公私合営、私営企業と手工業で、技工学校、芸徒学校、技術夜学校、師徒契約等の形式を計劃的に行う。

一九五二年八月中に職工の業余学校入学数は三百二万人に達し、工農幹部、産業労働者、農民中の文盲一千余万人が一九五二年末に識字工作うをけている。¹⁵

(四) 各主要産業と各重要専門管理局の設計能力と設計機構の強加、設計人才の計劃的養成と全国的な設計組織の迅速な設立 基本建設の指導と施工機構を強加し、全国公営、私営の工

11 李富春、中国工業の目前情況和我們的努力方向、上掲書、P. 90。

12 李富春、上掲論文、上掲書、P. 90。

13 李富春、上掲論文、上掲書、P. P. 90—92。

14 李四光(中国科学院副院長)、三年来中国的科学工作、一九五二年九月二十八日、人民出版社編、中華人民共和國三年来的偉大成就、P. 137

15 馬叙倫(中央人民政府教育部部長)、三年来中国人民教育事業的成就、一九五二年九月二十三日、上掲書、P. 129

事建設の管理と監督を強加する。専門の工事作業隊を組織養成し、基本建設の力量を発揮し、基本建設中の浪費現象を克復する。

(五) 工業設計に関係ある科学研究工作の強加と必要な科学機械と研究設備の充実 科学院と技術管理局に協力して、全国主要生産物の標準規格と工業度量衡を統一し、工業生産物の品質を引上げ、技術管理工作の計劃性を強加する。

増産節約運動は生産を増加し、国家経費の節約を励行し、それを大規模工業建設の準備工作とする運動であるが、この目的の実現は政府機関人員の適切な指導と公私工商業の円滑な調整にかかっている。ところが政府機関人員と私営工商業者の前時代性によつて、指導の適切と調整の円滑を欠き、ために財經工作を空転させ、経済の恢復発展を制約する事故が発生した。政府機関人員の貪汚、浪費と官僚主義、いわゆる三害に反対する三反運動、ついで私営工商業者の行賄、偷税漏税、国家資材の盜竊、偷工減料と国家経済情報の盜竊、いわゆる五毒に反対する五反運動が展開され、両運動あいともなつて政府機関人員と私営工業者の前時代性の徹底的な肅清が企図されたのである。¹⁶

中国においては周代に士大夫の制、秦代に九品の制があり、いわゆる官僚支配機構がふるくから確立されている。この時代の官僚機構の成員は武士、地主の封建貴族であるが、唐代における科挙の制は官僚機構の成員として新興階級たる商業資本家を加え、官僚機構を著しく変容させた。科挙の制は官僚登用を公開したものとしてではなく、商業資本家階級を支配機構に参加させ、封建制に対する、その進取的相反性を緩和させたいという意味において、中国官僚機構の成長にとって大きな意義をもつものである。辛亥革命は上代におけるどの易世革命よりも官僚機構に与えた影響大きいものであつたが、官僚、地主と資本家階級の異体同心的關係を完全に解体することではなく、かえつてこれを強加しさえした。たとえば公債を媒介とする政府と金融資本家との關係、あるいは蔣、宋、孔、陳のいわゆる四大家族による政経の壟断は、何よりもこの事実を雄弁に証明している。新中国における三反、五反運動の展開は新民主主義的革命もなおかつ中国伝来の官僚機構を徹底的に解体させえなかつたことを表示するものである。三反、五反運動が移風易俗の社会改革であるとする所以であつた。しかしこの三反、五反運動も完全に官僚機構を解体させることはなく、さらに一九五三年初頭から官僚主義、命令主義と違法亂紀反対の新三反運動が展開されている。¹⁷ まことに中国官僚機構は「根深蒂固」であるといわなければならない。

16 陳雲、在中華全国商業連合会議籌備代表會議上的講話、中国国際貿易促進委員会編、三年來新中国經濟的成就、P. 95.

王芸生、打垮資產階級在上海的深溝高壘、上海大公報、一九五二年三月二十二日号。

17 毛沢東、在中華人民協商會議第一回第七次會議的講話、上海大公報、一九五三年二月七日号。

Ⅳ 三反、五反運動下の財經工作

三反、五反運動は旧社会の遺物である国家建設に危害を与え社会の前進を阻碍する三害、五毒を除去し、国民経済建設と正当な私営工商業の発展に対し有利な条件を創造するものである。¹⁸

私営工商業の改造はすでに一九五〇年六月以来工商業の調整として一個独立した財經工作として重点的に実施されているが、三反、五反運動の新しい基礎において、新しく提起された私公工商業の問題は次の如く解決されている。

(一) 合理利潤問題 私営企業の存続発展が許されているのであから、そのための利潤獲得と資本の蓄積は承認されなければならない。しかし私営企業の国家資本主義的改造過程に、生産費の虚報と暴利現象が発生したので、私営企業の加工と製作注文について、正常合理経営の下で年利潤率を資本の一〇%、二〇%、三〇%と決定した。

(二) 加工と製作注文の規格問題 私営工場に対する国家の加工と製作注文に際して、^{てんき}偷工減料の現象と公務人員中に多くの受賄貪汚分子が^{しゅうわいおしよく}発見された。これは契約書の規格規定に甚だしく具体性がなく、加工、製作の準標が明確に規定されていなかったためである。中央貿易部は大都市において工商局、加工企業、工商聯、工会等を参加させて関係各業の規格会議を召集し、各地各業の実情に応じて、具体的な加工、製作注文の規格と驗收標準を作成した。

(三) 城郷物資交流問題 三反、五反の最も緊迫した時期に工商業の停滞現象があつたが、大大的な加工、製作注文で市場情況が好転した。ところがその後都市に工業品の滞貨があり、小都市と農村に工業品の欠乏と土産品の滞貨が生じ、城郷物資交流を推广する必要ができた。天津、上海における物資交流大会の好経験にもとづき、城郷物資交流を全国的規模の運動に拡大した。一九五二年全国各地の物資交渉大会の共同契約数は一万四千余件、一万余億元に達したと伝えられる。²⁰

(四) 銀行利息問題 長年にわたつて銀行の貸付利子は非常に高く、工商業の発展に不利な影響を与えていた。過去の銀行預金と貸付の利子が高かつたのは物価の不安定なためであつた。この二年間に金融、物価の安定があり、銀行利子引下げの時期がすでに成熟した。一九五二年六月二十六日、人民銀行は全国の銀行に対し、一九%から五〇%の利子引下げの実施を命じている。この利子引下げ措置は次の三点の特色をもつといわれる。¹¹ 一、貸付利率は一定の差別

18 陳 雲、在中華全国工商業聯合会籌備代表會議上的講話、一九五二年六月二十四日、中国国際貿易促進委員会編、三年来新中国經濟的成就、P. 95.

19 陳 雲、上掲講和、上掲書、P. P. 95—99.

20 姚依林、三年来全国商業的調整与發展、上掲書、P. 153.

21 上海大公報、一九五二年六月二十六日号。

を設け、生産を指導し、工商業の経営改善を援助する。二. 全市の銀行錢荘の利率と人民銀行の利率を統一する。三. 貯蓄預金と一般預金の利率を高め、人民の貯蓄を奨励する。改正新貸付月利子率(原率)は工業、交通、文教衛生事業への担保貸付一ヶ月一分〇五から一分三五、二ヶ月一分三五から一分五、三ヶ月とそれ以上一分五から一分六五、(三ヶ月未満二分一、三ヶ月以上二分二)、商業担保貸付一ヶ月一分三五から一分六五、二ヶ月一分六五から一分八、三ヶ月とそれ以上一分八から一分九五(一ヶ月未満二分二、一ヶ月とそれ以上二分三)、担保為替一分三五(一分九五)、輸入貸付一分五(一分九五)、輸出貸付一分三五(一分九五)、大型水利貸付〇分七五、都市手工業貸付と私営農林漁牧貸付は工業貸付と同じ、漁業運送販売一分三五(一分五)、同業手形割引一分五(二分四)である。改正当日の市中銀錢の利子率(上海利率委員会掛息)は担保貸付二分四、信用貸付二分五五であつた。開国当初は闇金融がばつこし、一九四九年十二月二十三、四日の兩日は日利千元につき九〇元に達した。²² 一九五〇年十月十六日人民銀行(天津)の改正貸付利子率は、たとえば、公営担保貸付二分〇一、同信用貸付一分八、私営商業一ヶ月三分九、同工業一ヶ月から三ヶ月三分六の高率であつた。²³

(五) 稅收問題 若干都市において個々の工場、商店に対して本年の所得稅徵收計算は不当に高く、稅務員の態度も不良であつた。これらは各地の財政經濟委員會で検査中であり、稅務覆議委員會で再審査中である。当時施行の稅法は一九五〇年六月の稅務會議で草定したものであるが、施行の結果、實際に則したものであるとされている。稅收の調整は既に一九五〇年六月から工商業の調整と共に独立的な工作として實施されたものであつた。

(六) 勞資關係問題 私營企業中大企業の勞資關係は正常であるが、一部小工場、商店で問題がある。たとえば、資本家は職工が彼等の五毒を暴露した報復として休業、給料の不払を行い職工は過去の待遇不良を以て過渡の要求をした。企業經營管理と人事の職権は資本家に属すべきであるが、資本家は政府の法令を守り、職工の待遇を改善する義務がある。勞資は双方協議を採用し団体協約の締結を繼續する。

(七) 三害、五毒の防止問題 三反、五反運動は政府機關を腐敗させ、國家建設を危うくし、社會の前進を阻む三害、五毒を除去して、國家建設のため有利な條件を創造するのが目的である。この運動中、國家機關人員の四・五%、北京、上海、天津、漢口、広州、瀋陽等九大都市の調査工商業四五万戸中の七六%に、摘発と自白によつて、三害、五毒のあることが証明された。²⁴

22 王達夫、一年來の利率、經濟導報、二〇二号。

23 王達夫、上掲論文、上掲書。

24 薄一波、中華人民共和國三年來の成就、一九五二年九月二十六日、中國國際貿易促進委員會編、三年來新中国經濟的成就、P. 102.

V 結 語

三反五反運動は三害、五毒を除去し、労働者階級の国家における指導的地位を鞏固にし、²⁵ 国家企業の指導権を確立し、社会主義的社会建設の基盤である大規模工業化を準備する工作であつた。三反、五反運動後、労働者階級は名実共に企業の主人となり、²⁶ 国家企業は一九五二年(五〇年)商業において六二・九%(四四・四%)、工業において六七・三%(四三・八%)²⁷ をしめ、すでに経済の主導権を掌握した。私営企業の国家資本主義的改造は、たとえば加工と製作注文は、一九五二年六月上海私営工場営業総額の八〇%、天津同じく六〇%、広州私営工場の五〇%以上、²⁸ また農民と手工業者の个体経済の組織化は、一九五二年六月合作社数三万六千余个、社員一億六百余万人²⁹ に示されるやうに顕著な事実として現れている。戦前を一〇〇とする、一九五二年の電力一一五、石炭九〇、石油一三六、鉄鉄一〇四、銅錠一五五、鋼材一六七、セメント一四八、棉糸一四四、棉布一六一、紙二三四、捲煙葉一四五、マツチ一一、小麦粉一〇六、²⁹ 糧食一一六・九、棉花一五二・三、葉煙草二五三・三³⁰ の生産指数は、一九五二年中国経済が完全に恢復し、新たな発展の段階に入ったことを示している。生産財と消費財の生産比率は、一九五二年(四九年)四三・八対五六・四(三二・五対六七・五)³¹、産業構造における工業の比重はなお三〇%にとどまるが、生産構造における生産財の比重がいちじるしく大となり、工業化の実相を鮮明に表わしている。国家財政収支において、一九五二年は前年実績に比べて、収入四〇・六六%、支出五五・五二%、³² の増加を示し、収支の完全な均衡を実現している。

三反、五反運動と当運動下における財經工作は、上掲の数字が示すとおり、その実施目的を十分達成したものと申すのであろう。もちろん上掲の数字は三反、五反運動の実施のみに帰せられるものではなく、統一国家財經工作、工商業の調整等の実施による総合的成果である。

毛沢東は、一九五〇年六月中国経済を根本的に好転させる三ヶ条件として土地改革の完成、現存工商業の調整および国家機構所要経費の大量節減をあげ、この三ヶ条をたたかいたため必要な期間を三年とした。土地改革は一九五二年末完了し、工商業の調整と国家機構所要経費

25 薄一波(中国共産党中央委員)、中華人民共和國三年来的成就、一九五〇年九月二十六日、中国国際貿易促進委員会編、三年来新中国経済的成就、P. 102.

26 頼若愚(中華全国总工会秘書長)、大規模経済建設前夜の中国工人階級、一九五二年九月十六日、上掲書、P. 177.

27 薄一波、上掲報告、上掲書、P. 65.

28 姚依林(中央人民政府商業部副部長)、三年来全国商業的調整与發展、一九五二年九月三十日、上掲書、P. P. 156—157.

29 程子草(中華全国合作社聯合總社副主任)、三年来新中国合作社的成就、一九五二年九月十五日、上掲書、P. 165.

30 李富春、三年来我国工業的恢復發展、一九五二年九月二十九日、上掲書、P. 122.

31 三聯書店編、新中国的農業生産、P. 2.

32 李富春、上掲論文、上掲書、P. 123.

の節減は増産節約運動と三反、五反運動を経て五二年末所期の成果をあげている。一九五二年は、じつに毛沢東のいう中国経済を根本的に好転させるに必要とした三年目である。しかも一九五三年は第一次五ヶ年計画の開始された年であつた。中国経済の根本的好転をたたかいたる期間は中国経済の社会主義的工業化、大規模経済建設の準備期間であつたのである。

新民主主義的社会は社会構成要因として社会主義的要因と資本主義的要因をもつ二重体制の社会である。したがつてこの社会のもつ過渡期としての二重性格は革命をして財經上の民主主義的改革を行い、いわゆる資産家階級的民主主義革命の基本任務を遂行し、同時に社会主義的要因を培養発展させ、社会主義的社会を建設するいわゆる無産者階級的社会主义革命を遂行する使命をおわせる。

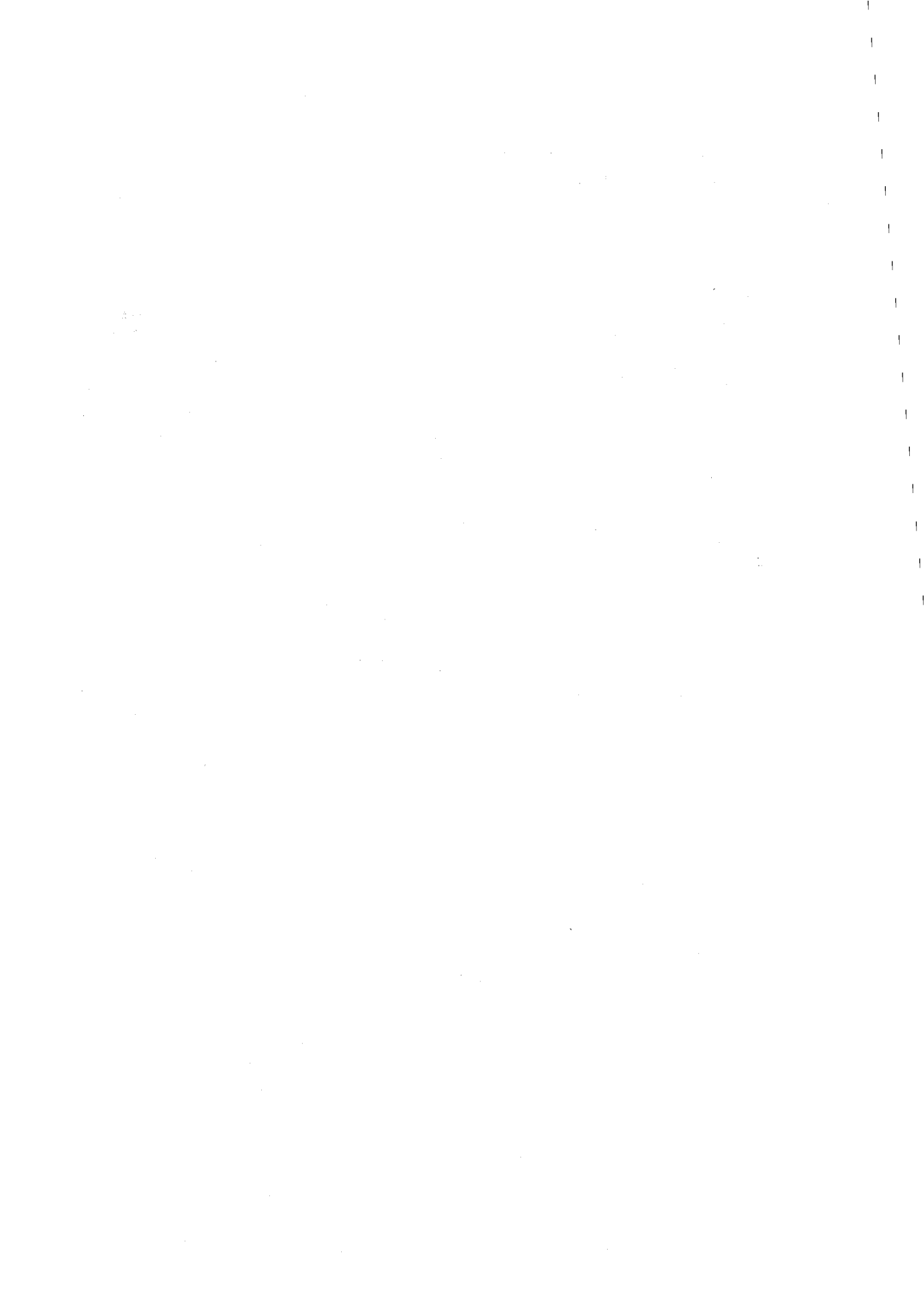
李富春は「三反、五反運動をへて、われわれはすでに基本上民主改革を完成した」³³ といひ毛沢東は三年（一九五〇年～五二年）中に大規模経済建設の準備工作进行を完成するという。³⁴ 一九五二年は、この意味で財經上における資産家階級的民主主義的革命の基本任務を完成し、かつ社会主義的革命における小段階の経過を表す劃期点であると考えなければならない。いわゆる「過渡期」の問題がこの年以後漸く活潑に論議されるにいたつた事情は、このやうな革命の経過に則応するものでなければならない。

一九五〇年から五二年の三ヶ年、すなわち統一国家財政經濟工作から工商業の調整および三反、五反運動にいたる期間は、要するに社会主義的革命における劃然とした初期小段階を形成するものであり、三反、五反運動と当運動下における財政工作はこの革命の小段階における一環節としての意義をもつものである。

（昭和30年5月31日受理）

33 薄一波、上掲報告、上掲書、P. 123.

34 李富春、上掲論文、上掲書、P. 125.



中国経済における 封建性および殖民地性の解剖

三 木 毅

The Analysis of the Feudal and Colonial Characteristic Feature of Chinese Economy

Takeshi Miki

Abstract

We have discussed about the disunited and stagnated constructure, or the abnormal and deformed character in Chinese economy. These characters were, we thought, produced by two factors; namely, domination of Chinese feudal powers and the penetration of foreign powers.

The so-called industrial capital working in China was just foreign capital, not Chinese racial capital. The out-standing form of Chinese racial capital was as yet commercial capital under the control of foreign powers.

The words "semi-feudal" and "semi-colonial" may be more suitable abjectives than those mentioned above, in order for us to express the characteristic feature of Chinese economy.

1 開 題

しばしば中国経済の分裂的、停滞的構造が問題にされ、またその変則的、畸形的発展形態が問題にされる。中国経済における停滞性、ないし変則性は、次の二つの条件に基因するものと考えられる。その一は中国に資本主義を培養し、これを発展させるに十分な平和期間が存在せず、資本家階級が経済的保身を維持しようとして封建支配勢力と結託したことであり、その二は開口以来民族資本家階級が、外国支配勢力に隷属したことである。

周朝から清朝にいたる中国歴史は内乱と分裂と外寇の間断ない継続である。内乱と分裂と外寇が中国経済の機構を徹底的に解体させることはなかつたにしても、混乱と無秩序と侵略のあたえる経済への影響はきわめて大きいものであつたと考えねばならない。もちろんこの間に断続的な平和があり、はなばなしい商業の発達と文化の興隆がある。だがそれらの期間は短く、経済の生産性を十分に培養する懐胎期間とはなりえなかつた。

内乱と分裂と外寇が、むしろ中国の経済機構を徹底的に解体させることによつて、中国経済の新生と発展を導く原動力となつたかもしれない。それらが中国の生活機構を徹底的に解体し

えなかつたもつとも重要な障壁は、中国における卓越した官僚機構である。中国の封建支配機構は、周代士大夫の制があり、秦代九品の制があつて、いわゆる官僚機構として確立された。官僚制度は唐代科挙の制によつて一層発展し、完全な型態に成長した。中国の貨幣経済は周代にはじまり、南北時代をへて随、唐にいたつて初期商業資本主義に発展する。科挙の制は、貨幣経済の発展に伴う武士と地主の分離、商業資本家階級の胎頭等に表れる階級分裂に対応する制度であるが、官僚支配勢力と商業資本家階級との交流をつうじ支配勢力による経済力の政治的援用と商業資本家階級による支配力の貨殖的利用を可能ならしめ、かくて官僚制度がその組織を確立し、地主階級から資本家階級にいたつて勢力を扶植し発展させることができた。民国革命後も官僚、地主、資本家による封建的官僚制度は本質的な変化をみてはをらない。要するに中国経済を停滞させた重要素因の一は資本家階級が封建的支配機構に参加することによつて、封建制度に対してもつ相反性を奪われたことにある。¹

民国革命後、中国経済は紡績業を中心とする軽工業の発達と、とくに銀錢業の稀有の繁栄を出現させた。しかし軽工業の資金的背景はいわゆる問屋制商業資本であり、又銀錢業の繁栄は兵乱と経済的混乱による農村の衰退と土地収益性の低下にもとづく資本の都市集中および北京政府の公債濫発政策に誘発された現象であつて、金融資本は封建資本の近代的姿容にすぎない。² 外国勢力の経済支配が確立されるや、民族資本家階級は活動の出路を再び土地収買と高利貸的農村剝削に求め、みずから封建制に纏ることによつてその保身を企図した。³ いわゆる官僚資本は民族資本と封建勢力との結托形態であつて、それは中国民族資本の畸形である。

封建勢力が革命後においてなお依然として割拠しえたのは、民族資本家階級の守旧性によることはいうまでもないが、外国勢力の殖民主義的支配によるところがきわめて大であつた。外国勢力は中央政府あるいは地方政府と多額の政治約款を行い、約款の担保として関税、塩税、釐金(貨物の内地関税)、はなはだしきは地方財政収入を押収し、また鉄道約款の見返りとして鉄道布設権を獲得し、さらに租借地の附帯条件として鉱山採掘権を掌握し、さらにこれらの權益を擁護するため、地域割拠の軍閥を軍事的政治的に支授した。かくて外国勢力は民族資本家の発展を抑圧して消極的に、軍経にわたる援助によつて積極的に封建勢力の温存を計つたのである。⁴

外国勢力と中国との交接はすでに十六世紀ポルトガルの来港によつて始まる。しかし一八四二年開口以後の外国勢力との関係ほど衝動的な影響を中国経済に与えたものはない。中国の経済機構はこれから徹底的な解体過程に入り、激烈な過渡時代を経験する。外国勢力の進出は、

1 王承志、中国金融資本論、P. 14.

2 崔敬伯、危機交迫之中国財政与金融、方顯延編集、中国経済、下、P. 859.
章乃器、民国二十二年国内金融之回顧、社会経済日報、第一卷、第一期。

3 傅築夫、中国経済衰落之歴史的原因、東方雜誌、第三卷、第一三三号。

4 蘇 革、中国資本主義経済的発展、中国経済、第一卷、第六期。

いわゆる産業革命に起因する新たな膨脹によるもので、市場と原料に対する欲求から、軍事的侵略と領土的分割をつうじて中国に自由な貿易を強要した。

外国勢力に開放された当時の中国経済は農業を主とし手工業を従とするいわゆる前資本主義的自給経済であつた。経済的自由の原則は同時に優勝劣敗の原則に通ずる。自由原則にしたがう近代社会の密接な相互作用においては、後進的なものは先進的なものに道を譲らねばならない。外国商品の進入によつて中国手工業製品は完全に市場を失い、その結果である農工分離に基因する過剰人口の顕現化、農産物商品化率の低下、農産物価格の下落は典型的な小規模経営である中国農業の衰退を一層深化し発展させた。一八九五年以来外国企業の開設によつて、外国資本の産業支配が確立し、中国民族資本の前途はまつたく閉塞した。

中国経済の前資本主義的停滞は外国勢力にとつて不等価交換の隔差を維持拡大する絶対条件であつた。したがつて外国勢力は競争的地位にある中国民族資本家階級の新興と相容れない性格をもっている。しかし外国勢力は中国における貨幣の不統一、度量の繁雑、商慣習の相違、信用状態の不明、言語文字風俗習慣の差異、法制の不備、兵乱の頻発等の障害を克服し、危険防止の緩衝として仲介機関を必要とし、中国民族資本家との連繫を行わざるをえなかつた。開口前の公行は貿易統制の主要機能のほかこの仲介機関としての副次的機能を果すものであつたが公行廃止後、これに代る機構が買辦組織である。しかし買辦組織は外国勢力の支配が滲透する過程に、相務的なものから従属的なものに変化した。いわゆる買辦資本は中国民族資本の外国勢力に対する隷属型態であつて、これは中国民族資本の寄生形態である。⁵

上述のやうに、中国経済は中国民族資本のうける内外両面の拘束と制約によつて、きわめて変則的な発展をとげている。換言すれば、中国経済は近代革命をへたにも拘らず封建勢力の盤踞があり、独立国であるにも拘らず外国勢力の支配があるという、封建性と殖民地性の二面性格によつてはなはだしく変則的な発展過程をもっている。

小論において、中国経済の封建性、殖民地性といわれるものの実存を摘出したいと思う。封建勢力と外国勢力の活動の実態を観察し、それによつて封建性、殖民地性を事実によつて解明したいのである。

II 封建勢力の跳梁

中国において外国勢力が不平等条約の手厚い庇護の下ではあるが、きわめて自由かつ広範囲にわたつて活動しえたのは中国封建勢力の民族資本家階級に対する索制によるものであつた。

中国封建勢力は軍閥、官僚と地主によつて代表される。

中国経済の近代化は地主寄生の封建的土地所有制を清算せずには行われがたい。強制と隷属

5 許滌新、官僚資本論 P. 11.

関係の特殊封建的土地所有制の維持は変革期における危険負担を農民に転嫁するため、地主階級にとって切実な生活欲求であつた。新思潮に刺戟された農民を抑圧し、伝統的な農民暴動に備えるため、地主と軍閥の密接な結合が行われる。軍閥の多くは地主であり、身分的には地主と軍閥は一体不可分の関係にある。軍閥は民国革命後も地方における事実上の主権者であつて官僚はその収税管理人であつた。

軍閥の覇業的欲望は内戦の頻発となつて表れた。もちろん内戦は、他の角度からすれば、農民、手工業者、商業資本家の封建勢力に対する暴動であるともみなしうるであらう。しかしそれはたんに内戦の復合的要素であるにしかすぎない。内戦の頻発とその進展による経済の衰頹は外国勢力に対する中国の弱点を一層拡大し、外国勢力の中国進出を一層容易にした。

一九一二年から三〇年まで、内戦発生省は

| 次 年 | 1912 | 1913 | 1914 | 1915 | 1916 | 1917 | 1918 | 1919 | 1920 | 1921 | 1922 | 1923 | 1924 | 1925 | 1926 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 省 数 | 1 | 6 | — | — | 9 | 5 | 9 | 2 | 7 | 7 | 10 | 6 | 8 | 13 | 15 | 14 | 16 | 14 | 10 |

に及び、軍閥盤踞の四川においては一九一五年から三五年にいたる間に内戦発生じつに四七七回、軍費年平均二万三千兩の巨額に達している。これらの軍事費はもつぱら農民の剝削によるものであつた。内乱と剝削は農民離農の普遍的原動力であつて、都市人口の膨脹は工商業の発展にもとづくものはきわめて少なく、多くは農村経済崩潰による離農の結果であつた。⁶

封建勢力の主要な剝削手段は地代、租税、公債および貨幣発行である。

(a) 地代 中国農業は典型的な小規模経営であつて、一九三四年自作四％、自作兼小作二四％、小作三六％、全農家の六〇％以上が地代の影響下にあつた。

地代はいわゆる力租、物租、錢租が交々行われている。力租は北支の土地貧瘠の地方に多く人役十日から二十日、畜役三日から三十日、その他雑役が任意的に課せられる。物租はもつとも広濶に行われ、封建時代の代表をなすもので、総収穫物の平均五〇％、最高八〇％以上に達し、きわめて収削の強いものである。錢租は官公有地と商業資本発達地方に行われ、地価の平均一〇％程度である。中国の地代は封建以来誠に「不借刀殺人」的な苛酷さをもっているが、民国後も地租の誅求は一層はなはだしく、一九〇四年から二四年の二十年間に地代の上騰率は実に一四五から一九四がくづけきけん％を示している。地代の購買年は普通十年であるが、次第に短縮され、たとえば陝西、四川、福建、雲南の各省の購買年は五年以下であつて、購買年の短縮は實質上地代の上騰を意味するものであつた。

正額地代以外に、地代不納の準備金または田産権の一部とみられる押租とよぶ敷金がある。押租の額は小作契約のつど仲介人が協定し、大体地代額に準じて取立てるが、江西のやうに毎

6 金輪海、中国農村経済研究、P. 14, P. 78.

畝百元に及ぶものもある。

その他人工課(河南), 力米(江蘇), 田婆鷄(浙江), 小租錢(江西), 年肉(湖南)等の地代正額に幾倍する経済外的収奪がある。これらの貢献は主要農産物, 副産物, 副業産物, 金錢, 宴饗等多様の型式で行われ, 時には農民の生命, その妻子の身体に及ぶものがあつた。⁷

(b) 租 税 地方賦税の大宗は田賦と塩税である。

田賦は元来国税であるが, 北伐以来地方政府の収入となつている。⁸

地方財政収入にしめる田賦の比重は

| 省 | 田賦の百分率 | 年 度 | 省 | 田賦の百分率 | 年 度 | 省 | 田賦の百分率 | 年 度 |
|-----|--------|------|-----|--------|------|-----|--------|------|
| 河 北 | 27.27 | 1931 | 貴 州 | 25.36 | 1931 | 熱 河 | 39.16 | 1932 |
| 山 東 | 65.56 | 1933 | 広 東 | 16.26 | 1932 | 新 疆 | 44.74 | 1931 |
| 陝 西 | 23.58 | 1931 | 雲 南 | 17.04 | 1932 | 江 蘇 | 48.71 | 1933 |
| 察哈爾 | 23.66 | 1932 | 青 海 | | | 江 西 | 23.09 | 1932 |
| 安 徽 | 39.71 | 1932 | 寧 夏 | 35.20 | 1932 | 浙 江 | 41.41 | 1932 |
| 湖 北 | 5.64 | 1932 | 河 南 | 59.03 | 1932 | 福 建 | 13.90 | 1931 |
| 湖 南 | 18.09 | 1933 | 山 西 | 47.68 | 1932 | 広 西 | 22.21 | 1932 |

で, その重要部分をしめている。⁹ 田賦は本税よりもじつは附加税が主要収入をなしてをり, 一九三〇年附加税の数は,

| 省 | 県 | 田 賦 種 類 | 省 | 県 | 田 賦 種 類 |
|-----|-----|---------------|-----|-----|---------|
| 広 東 | 田 平 | 12種 (内附加税10種) | 陝 西 | | 18種 |
| 雲 南 | 元 課 | 19種 (内附加税18種) | 福 建 | | 80余種 |
| 河 北 | 徐 水 | 23種 (内附加税21種) | 察哈爾 | | 100余種 |
| 湖 北 | 随 県 | 23種 (内附加税20種) | 浙 江 | 余 建 | 34種 |
| 江 蘇 | 江 浦 | 30種 (内附加税26種) | 四 川 | | 45種 |

であつて附加税額は本税額の数倍, あるいは三十余倍に達するものすら存在した。¹⁰ くわえて軍閥は地方財政を壟断し, 軍費の浩繁から任意に田賦を豫徴し, 豫徴のもつとも惨酷な四川においては

| 県 名 | 予徴年数 | 県 名 | 予徴年数 | 県 名 | 予徴年数 |
|---------|------|-----------|------|-----------|------|
| 隆 昌 | 22年 | 李 其 相 防 区 | 24年 | 宣 漢 | 22年 |
| 順 慶 | 21年 | 劉 文 輝 防 区 | 31年 | 梓 桐 | 31年 |
| 温 九 県 | 30年 | 劉 存 厚 防 区 | 40年 | 鄧 錫 候 防 区 | 24年 |
| 劉 湖 防 己 | 24年 | 資 中 | 21年 | 田 頌 堯 防 区 | 33年 |

7 田秋烈, 中国地租の形式和性質, 千家駒篇, 中国農村経済論文集, P.P.76—95.

8 田秋烈, 上掲論文, 前掲書, P. 88.

9 金輪海, 上掲書, P.P. 92—93.

10 金輪海, 上掲書, P. 90.

にみられるとおり、じつに四十年にわたる豫徴が行われている。¹¹

塩税は中央、地方の任意課税であつて、本税は元来はなほは少額であるが、附加税目が多くたとえば四川南部の如く印花税、護商旗税、船捐、臨時軍費、江防費、護商税、附加捐、塩務整理費、出口税、進口税、過道捐、平価費、峽防費、原有護商費、新加護商費の如く多様にわたり、まさに本税額の幾倍なるかを知らざるの状態であつた。¹²

しかし田畑税、塩税等の正税による剝削は、正税以外の雑税による剝削に比べればなお軽少であつた。雑税の抽出はあらゆる生活行為に及び、そのばつこはあまねく全国にわたつている。たとえば広東省湖仙における雑税は交通税、客棧捐、税契附加捐、中資捐、租用捐、爆烈品捐、洋紙捐、娯樂捐、花筵捐、花票捐、花業牌照捐、酒席捐、猪屠捐、牛皮捐、牛頭捐、蠟燭捐、船牌捐、香燭捐、禁煙捐、賭捐、齋醮捐、游神捐、迷信捐、鷄鴨鴨捐、海味捐、病虫害捐、糖寮捐、糖菓捐、磨薯捐、粉砵捐、印花捐、青菓捐、竹木捐、築馬路捐、歩道捐、商業牌照捐、沙田局捐、田畝捐、特別田畝捐、土布捐、疋頭捐、救国捐、航空捐、国防捐、錫箔捐、紙錘捐、酒税、酒類牌照捐、京菓捐、麻雀捐、電戲附加捐、礦石捐、舶來肥料捐、戲牌捐、戲院月捐、演戲捐、廣告捐、潔淨捐、糞溺捐、烙槍捐、廟宇捐、人力車牌照捐、警衛捐、水巡捐、漁業税、新婚捐、猪交媾捐、猪苗捐、生豬捐等があり、まったく収挙に暇がない。一九三五年二千余種、一千万元の雑税が廃止されているが、しかし旧税に代つて新税すでに踵を接して表れる有様であつた。¹³

(c) 公債 財政収支の均衡は經濟安定の最大關鍵であるが、中国中央政府の財政収支は

| 年 度 | 支 出 | 収 入 | 赤 字 | 赤字の 百分率 | 年 度 | 支 出 | 収 入 | 赤 字 | 赤字の百分率 |
|------|-----|-----|-----|------------|------|-----|-----|-----|--------|
| | 百万元 | 百万元 | 百万元 | | | 百万元 | 百万元 | 百万元 | |
| 1930 | 774 | 557 | 217 | 28.0 | 1933 | 836 | 689 | 147 | 17.6 |
| 1931 | 749 | 619 | 130 | 17.4 | 1934 | 941 | 745 | 196 | 20.8 |
| 1932 | 699 | 613 | 86 | 12.2 | | | | | |

の如く歴年赤字である。支出の主要部分は債務賠償金と軍事費であり、赤字は主として公債と紙幣の発行によつて補填された。

中央政府の公債発行額は

| 年 度 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 | 1931 | 1932 | 1933 | 1934 |
|-------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------|-------------|-------------|
| 金額(元) | 31,090,074 | 103,000,000 | 243,000,000 | 174,000,000 | 416,000,000 | — | 124,000,000 | 112,000,000 |

で、¹⁵ 一九三一年未償還公債の累積額は九二六百万元に達している。¹⁶

11 金翰海, 上掲書, P. 94.

12 金翰海, 上掲書, P. 95.

13 金翰海, 上掲書, P.P. 94—96.

14 林維夫, 新貨幣政策実施一周年, 社会科学, 第二卷, 第二期.

15 金翰海, 上掲書, P. 81.

16 王承志, 中國金融資本論, P. 28.

地方政府も中央政府と同断で、各省市の公債発行額は

| 年度 | 1927前 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 | 1931 | 1932 | 1933 | 1934 |
|-------|------------|------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 金額(元) | 67,995,513 | 12,530,736 | 8,593,366 | 22,441,425 | 20,256,659 | 32,798,935 | 49,568,000 | 47,957,730 | 75,300,000 |

の如く巨額であつて、軍閥支配の省市財政は紊乱をきわめ、まことに上に債台高築の苦あり、下に民窮財尽の象ある社会相を示している。¹⁷

(d) 貨幣発行

古来中国は幣制に統一がなく、民国成立後も紙幣、輔幣の乱発乱鑄が続き、錢荘と銀行は紙幣発行と公債発行の利益によつて成立し発展したものといつて過言ではない。とくに地方錢荘、省市立銀行は軍閥の強借によつて経営が壟断され、あるいは軍閥の財政庫として成立し、紙幣乱発の用具となつた。¹⁸

錢荘は土着旧式銀行で、その創設は清代嘉永年間であるといわれる。一九三二年全国錢荘数は一三〇二家、封建資本の中枢機関として民国以後も商業金融の分野に隠然たる勢力をもつていた。¹⁹ 中国新式銀行の創設はやうやく一八九六年であるが、一九三五年一三四七家、公債濫発政策によつて雨後春筍の如く簇出した。銀行の有価証券保有額は総資産の一五%前後に達し銀行投資中機関投資(公債)は四二%以上、銀行営業は公債の高利に依存する投機的なものであつた。しかも銀行資本の背景は封建収削資金であり、銀行経営者の多くは錢荘の出資者または重役であつた。²⁰

一九三五年新貨幣令実施直前、発券特権をもつ国、省、市および私立各銀行はじつに三十六行、その発行額は六、五三六百万元に達し、銀行券は事実上不換化していた。²¹ しかし紙幣のうち私票の剝削性をもつとも強く、広く全土に発行が行われ、たとえば陝西省十一県の私票八十余種、江西省宜春県の発券八十余家、大都市には通常十数家の発券が存在した。²²

輔幣の乱鑄乱発もはなはだしく、銀角、制錢および銅元の硬貨のほか、銅元票、制錢票があり、硬貨はどれも質劣軽量、濫鑄によつて幣価はいちじるしく跌落した。たとえば上海市場における銀元一元に対する銅元の相場は

| 年 | 1912 | 1916 | 1921 | 1927 | 1928 | 1929 | 1930 | 1931 | 1932 | 1933 | 1934 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 銅元文數 | 1230 | 1270 | 1546 | 2684 | 2715 | 2873 | 2692 | 2713 | 1937 | 2950 | 3162 |

17 金輪海, 上掲書, P. 82.

18 吳承禧, 中国的銀行, P. 138.

19 潘子豪, 中国錢莊概要, P. 13.
施伯珩, 錢莊学, P.P. 1-20.

20 王承志, 上掲書, P. 26.
吳承禧, 上掲書, P. 128.

21 中国銀行經濟研究室, 中国紙幣発行及其流通状況之解剖, 中行月行, 第一卷, 第二期.

22 揚蔭溥, 中国金融論, P. 118.

で、この間幣価は三分の一に跌落している。銅元の流通が広くかつ大衆的であるだけにその減価の与える影響ははなはだ深刻であつた。²³ なかでも貨幣収奪の悲惨をきわめたのは軍閥盤踞の四川で、紙幣に中国、重慶、美豊、川康、平民、建設、川西北、聚興誠、成益の銀行券、銀幣に漢大洋、重慶銅、元局大洋、成都造幣廠大洋、省自鑄の竜鬚大洋、重慶金字大洋、重慶大洋、青崗珊大洋、その他省外銀幣十余種、輔幣に川竜雲南廠権、唐頭、遠頭、銅権、その他七種があり銅元の跌価は一九三四年いたる十年間に百分の五十八、その紊乱状態は他に類例をみない。²⁴

(e) 高利貸 農村における重租重賦は農民を貧窮化させ、いきおい彼等を借錢借財の途においやるが、農村金融に適正な機関がなく、そのため高利貸のはなはだしい跳梁を招いた。

高利貸の重要なものは典当(質屋)といわゆる高利貸である。典当の抵当貸月利は二分から一割、高利貸借のそれは三割から八割に及ぶ苛烈なものである。

農村高利貸の著明なものは

| 借 款 名 称 | 本 利 と 償 還 | 通 行 地 方 |
|-----------|---------------------------------------|---------------------|
| 青 苗 | 借穀一石 三個月内償還一石八斗 | 広 東 陽 江 一 帯 |
| 九 頭 鳥 | 借銀九元 二日後償還十元 | 江 蘇 崑 山 嘉 定 |
| 鴿 子 地 | 土地抵当 地上一切の取入利子 | 江 蘇 省 |
| 百 哥 洋 | 本銀一元 二日後利子一角 利子支払延引一回毎利子倍加 | 江 蘇 省 |
| 九 出 十 三 婦 | 借銀一元 実借九角 利子三分 償還元本一元 | 広 東 省 東 江 一 帯 |
| 借 三 還 四 | 借銀三元 利子一元 償還四元 | 江 蘇 省 蘇 州 吳 江 |
| 念 個 頭 | 借銀二十元 月刊一元 | 江 蘇 省 蘇 州 吳 江 |
| 通 利 橋 借 貸 | 借銀一元 日歩一角 期限五日 期限未償還利子元本繰入 | 広 東 省 仏 山 県 |
| 孤 老 錢 | 毎月算術級数的に利子増加 | 湖 南 桃 源 県 |
| 印 子 細 | 借銀一元 毎日銅元十五枚、二十枚、三十枚、償還 | 江 蘇 |
| 十 元 五 斗 | 借錢十元一角 一年内利子加算米五斗償還 | 江 蘇 省 崑 山、上 海 各 郷 村 |
| 複 利 債 | 借洋一元 利子一分五厘 三月未償還利子元金繰入 | 広 東 粵 安 饒 平、湖 南 臨 湘 |
| 借 十 交 六 | 借 十 元 実倍六元 | 広 東 省 海 康 |
| 借 穀 債 | 借 一 元 取 獲 時 穀 四、五 斗 償 還 | 広 東 竜 川 曲 江 |
| 借 水 穀 | 借 一 元 穀 三 石 償 還 | 湖 南 省 郴 県 |
| 聽 長 不 聽 短 | 小作借糧食一石一年の最高価格を元本に最低価格を利子に計算 糧食償還利子四分 | 山 東 省 平 曹 兩 県 |
| 乾 利 湿 利 | 乾利毎元月利百分の五十 湿利毎元利子米二斗 | 広 東 羅 定 |

であり、他に三道篷、粒頭米、押穀租がある。これら以外に借糧、借農具があり、借糧はたとえば山西各県の貸借麦一石利子五斗から八斗、借農具はたとえば湖南の借牛一日五、六角、いづれも重利盤剝、農村経済の崩潰を尖锐化させている。²⁵

23 佟志仲、我国輔幣問題之検討、吳小甫編、中国貨幣問題叢論、P. 245.

24 姜作用、四川幣制紊乱之一考察、東方雜誌、第三卷、第二二号.

25 金翰海、上掲書、P.P. 105-106.

傅築夫、中国經濟衰落之歴史的原因、東方雜誌、第三九卷、第一四号.

中国経済崩壊の重要素因として、他に水旱虫害等の天災があげられる。しかし天災の害は人災、天災によつて重加され、はるかにこれらの害に及ばない。

民国成立後、中央集権は軍閥割拠によつて「牛頭不對的馬嘴的」であり、民族資本の活動は封建勢力の抑圧によつて萎縮し、外国資本の侵入を誘引した。²⁶ 封建勢力は覇業の欲望から外国勢力と結託し自己保存を意図したが、その基盤である経済の衰退を招き、外国勢力への隷属を余儀なくされた。²⁷

Ⅲ 外国勢力の支配

十九世紀の中葉から二十世紀の初頭にいたる時期においておこつた中国経済の変化は、まったく中国歴史に先例のないものであつた。この変化の端緒は鴉片戦争とその結果である南京条約である。²⁸ かつて中国はいわゆる北夷南蛮による教多くの侵略をこうむつたが、それらによつて中国経済が支配され、また変化することはなかつた。しかし一八四二年の開口以来、外国勢力は中国経済を根底から震撼し、経済制度の多くのものは崩壊した。中国は度々外国勢力に抵抗したが、そのつど戦争に敗れ、独立は侵され、領土は分割され、経済は衰退した。

中国と外国勢力との戦争は、そのあるものは単なる排外的反抗と暴動であるが、しかしその大部分のものは外国勢力の尚酷な中国進出政策に伴う作意的な戦争であつた。資本主義的先進国は商品販売の推广と原料獲得の必要から新しい市場を求めて中国に殺倒した。中国と外国勢力との戦争は、このやうな経済進出に先行する武力行使と考えられるのである。

清朝末から民国革命にいたる間に、外国勢力の武力干渉は

26 王承志、上掲書、P. 172.

27 羅敦偉、中国経済之兩大危機及其对策、中国経済、第三卷、第一期。

J. E. Orchard (高奇徳)、劉敏瑛訳、中国工業化発展遅延之分析、方顯延編輯、中国経済、下、P. 693.

28 南京条約の主要内容は 一. 清国政府は英国に賠償金 2,100万両を支払う。内 1,200万両は軍費 300万両は債務、600万両は喪失鴉片費、賠償金は四年分割払とする。英国は揚子江一帯の地方を占領し、第一年賠償金支払後撤兵する。ただし舟山、鼓浪嶼の二ヶ所は償金完済し五口開放後に撤兵返還する。二. 清国政府は英国に香港を割譲する。三. 清国政府は広州、廈門、福州、寧波、上海の五口を貿易港として開き、英国領事の居住と英商とその家族の自由来往を許可する。英商の貨物は法による輸入税を支払つた後、清国商人によつて内陸各地に運搬される場合関税を加重課徴されることはない。

| 年 代 | 事 件 | 備 考 |
|------|--------------------------------|---------------------------|
| 1840 | 英人舟山島を陥れ寧波を囲む（鴉片戦争）。 | 南東条約（1842）。 香港英領となる。 |
| 1857 | 英仏同盟軍広東省を陥れ、巡撫拍賣を捕う。 | |
| 1858 | 英仏同盟軍大沽砲台を占領す。 露国黒竜江省を置く。 | |
| 1859 | 英仏軍柴棍を占領す。 | |
| 1860 | 英仏軍北京を陥る。 露国烏里江東岸をうる。 | 天津清英清仏条約 （1860）。 |
| 1868 | 露国布哈拉汗を保護国とす。 | |
| 1871 | 露国伊犁地方を占領す。 | 伊犁条約（1881）。 |
| 1873 | 仏兵安南東京の河内城を占領す。 | |
| 1882 | 仏兵安南東京に拠る。 | |
| 1883 | 仏軍越南の南定を攻破す。 | 仏安条約（1883）。 |
| 1884 | 仏軍太原を占領す。清、仏に宣戦布告す。 | |
| 1885 | 仏軍福建省、台湾に進攻す。 | 清仏条約（1885）。 |
| 1886 | 英緬甸を滅す。 | 越南仏領となる。 清英緬甸条約（1897）。 |
| 1895 | 日軍威海衛、中莊、營口、田庄台、澎湖島を占領す（日清戦争）。 | 日清馬関条約（1895）。 |
| 1897 | 独軍膠州湾を占領す。 | |
| 1898 | 独軍膠州湾を租借す。 露国旅順大連を租借す。 | |
| 1899 | 英国九竜及び威海衛を租借す。 仏国広州湾を租借す。 | |
| 1900 | 各国聯合軍天津北京を陥る（義和団の乱）。 | 庚子条約（1900）。 |

であつて、この結果外国勢力は中国に治外法権をしき、関税自主権を奪い、あるいは租界を設け、賠償金を要求するなど各様の權益を取得したのである。これらの權益は、じつはすべて外国勢力が主権国の大権と考えているものに対する決定的な侵害であつた。

外国勢力の中国進出の主要な経済的方法は賠償、商品輸入、直接資本輸入および貨幣発行である。

(a) 賠償 鴉片戦争以来外国勢力が中国に要求した賠償金は

| 名 称 | 鴉片戦争 | 英仏戦争 | 伊犁戦争 | 日清戦争 | 義和団の乱 |
|---------|------|------|------|------|-------|
| 金額（百万両） | 21 | 16 | 9 | 230 | 450 |

である。賠償金の国家財政に与える影響はきわめて大きく、国民政府成立後も国家財政支出に占める比重は

| 年代 | 債務と賠償金 | | 軍事費 | | 年代 | 債務と賠償金 | | 軍事費 | |
|------|------------|------|------------|------|------|------------|------|------------|------|
| | 金額 | 比率 | 金額 | 比率 | | 金額 | 比率 | 金額 | 比率 |
| 1930 | 百萬元 290 | 37.5 | 百萬元 312 | 40.2 | 1933 | 百萬元 244 | 29.2 | 百萬元 373 | 44.6 |
| 1931 | 270 | 26.1 | 304 | 40.6 | 1934 | 237 | 25.2 | 333 | 49.2 |
| 1932 | 210 | 30.0 | 321 | 45.9 | 1935 | 256 | 31.6 | 339 | 42.5 |

のとおり、軍事費とともに主要な部分をなしている。²⁹

中国財政は歴年赤字で、賠償金による政府への圧迫は官僚政府の苛税と地主階級の租額引上げを招き、帰するところその本源である農民の剝削を重加することとなつた。³⁰

(b) 商品輸入 外国勢力の中国経済への進入は、はじめ完成財輸入の形式で行われた。³¹ 近代的機械生産である外国商品に対して、中国工産品は品質、価格において到底競合することができず従来の市場から駆逐された。³²

輸入外国商品は、いうまでもなく、工産物であり、輸入中国商品は農、鉱産物である。ところが輸入商品のこの傾向は第一次大戦後いちじるしく変化し

| 順位 年代 | 百万海關金 | | | | | | | | | |
|----------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|------------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1929 | 綿貨 13.76 | 糖類 7.80 | 棉花 7.20 | 金属鉱物 5.60 | 小麦粉 5.06 | 米 4.66 | 油類 4.36 | 毛製品 3.53 | 化学製品 2.77 | 紙類 2.70 |
| 1930 | 綿貨 11.44 | 棉花 10.10 | 米 9.26 | 糖類 6.60 | 金属鉱物 5.79 | 油類 4.19 | 化学製品 3.58 | 機械類 3.38 | 紙類 2.85 | 蠟燭 2.74 |
| 1931 | 棉花 12.49 | 綿貨 8.45 | 小麦 6.11 | 糖類 5.99 | 金属鉱物 5.94 | 油類 4.50 | 米 4.49 | 煙草 3.39 | 紙類 3.04 | 機械類 2.17 |
| 1932 | 米 11.36 | 棉花 11.33 | 綿貨 8.55 | 油類 5.77 | 金属鉱物 5.72 | 車輛 5.04 | 小麦 4.94 | 糖類 4.45 | 小麦粉 3.34 | 化学製品 3.32 |
| 1933 | 米 11.17 | 棉花 7.29 | 金属鉱物 7.21 | 小麦 6.52 | 油類 6.50 | 綿貨 5.30 | 化学製品 3.82 | 紙類 3.26 | 機械類 3.21 | 糖類 3.12 |

にみられる如くに、農産物が輸入の首位をしめるにいたつている。³³

29 林維夫, 新貨幣政策実施一周年, 社会科学, 第二卷, 第二期.

30 林維夫, 上掲論文, 上掲書.

31 秦 璋, 帝國主義与中国經濟之前途, 中国經濟, 第三卷, 第三期.

32 王承志, 中国金融資本論, P. 194.

余捷琼, 中国的新貨幣政策, P. 2.

33 金輪海, 中国農村經濟研究, P.P. 180—181.

中国の外国貿易は

| 年 度 | 輸 入 | 輸 出 | 差 (△出超) | 年 度 | 輸 入 | 輸 出 | 差 (△出超) |
|------|---------|---------|------------|------|-----------|-----------|------------|
| | 千海関金 | 千海関金 | 千海関金 | | 千海関金 | 千海関金 | 千海関金 |
| 1864 | 51,293 | 54,005 | △ 2,713 | 1924 | 101,821 | 771,784 | 246,427 |
| 1895 | 172,853 | 143,293 | 59,670 | 1925 | 947,865 | 776,353 | 171,512 |
| 1905 | 447,101 | 227,887 | 219,214 | 1926 | 1,124,221 | 854,295 | 259,926 |
| 1912 | 473,097 | 370,520 | 102,577 | 1927 | 1,012,914 | 918,620 | 19,284 |
| 1918 | 554,893 | 485,883 | 69,010 | 1928 | 1,195,969 | 991,355 | 204,614 |
| 1919 | 646,898 | 630,809 | 16,189 | 1929 | 1,265,779 | 1,015,687 | 250,092 |
| 1920 | 762,250 | 541,632 | 220,616 | 1930 | 1,309,756 | 897,844 | 414,912 |
| 1921 | 906,122 | 601,255 | 304,867 | 1931 | 1,427,573 | 887,451 | 540,122 |
| 1922 | 945,150 | 644,982 | 300,258 | 1932 | 1,049,246 | 492,641 | 556,605 |
| 1923 | 926,403 | 752,914 | 170,487 | 1933 | 863,700 | 392,700 | 470,900 |

に明かであるが、歴年二〇%から六〇%の赤字であつて、³⁴ 輸入総額にしめる農産物輸入額は

| 年 度 | 食料輸入額 | 総輸入額 | 総輸入額にしめる 食料輸入額 | 入 超 額 | 入超にしめる 食料輸入額 |
|------|---------|-----------|-------------------|---------|-----------------|
| | 千海関金 | 千海関金 | % | 千海関金 | % |
| 1927 | 138,578 | 1,012,914 | 12.6 | 94,322 | 147.1 |
| 1928 | 101,536 | 1,195,969 | 8.5 | 204,614 | 49.6 |
| 1929 | 144,848 | 1,265,779 | 11.5 | 250,092 | 57.9 |
| 1930 | 167,364 | 1,309,756 | 12.7 | 414,912 | 40.2 |
| 1931 | 183,392 | 1,427,573 | 12.8 | 524,014 | 35.9 |

で、貿易赤字の平均六六%に相当している。³⁵ 農産物輸入増加の原因は農業生産性の停滞、人口増加による農業の人口扶持力の相対的減少、農産品の工業原料化の増大等に求められるが、その主因は上述のやうな内為的なものではなく世界恐慌による過剰農産物の国際的投売に基づく外為的なものである。恐慌の速効的救済策は輸出増加である。しかし大戦後の国際経済は集団地域貿易主義が支配的であり、これは自由貿易主義を建前とする資本主義と矛盾するものであつた。軍備拡張、関税障壁、貨幣戦争は資本主義における国際的矛盾の集約的表現であるが一九三〇年国際関税休戦会議と一九三三年国際経済会議は、この矛盾に対決する試みをもつものであつた。³⁶ こうした国際経済の環境において、中国市場はまったく無為開放的であり、し

34 秦 瑤, 上掲論文, 上掲書.

35 鄧飛貴, 中国経済の衰落程度及其前途, 中国経済, 第一卷, 第一期.

36 譚勁健, 国際経済会議之将来及其對於我国経済關係, 中国経済, 第一卷, 第三期.
章乃器, 矛盾百出之世界経済, 申報月報, 第二卷, 第七号.

たがって中国経済は外国勢力の劇烈な角逐場となつた。上述した農産物の輸入額増大傾向はその当然の帰結であつた。外国農産品の流入は中国農産物の市場価格を下落させ、農業の資本主義的企業経営を不可能にした。輸出と輸入の両面において農産物がともに大宗をしめるという事実のなかに、外国勢力による原料収買と工産物販売との間における不等価交換以外の、中国農業収奪の絡線を見出すことができるであろう。本来農産物商品化率の向上は農業経営の近代化を刺戟するものであるが、外国農産物の流入による市場閉鎖と手工業の一般の衰落によつて中国農産物の商品化率はいちじるしく低下し、中国農業は依然として原始的経営に停滞せざるをえなかつた。

(c) 資本輸入 商品輸入はやがて資本の直接輸入に進み、この段階に、外国勢力の支配は中国経済の流通過程から生産過程にいたる全過程に滲透し、中国伝来の経済機構は徹底的な解体過程に入つたのである。

外国資本の輸入は開口直後始められているが、それは条約上の規定によるものではなかつた。外国資本の、中国進出の嚆矢は日清馬関条約第六条第四項『日本国臣民へ清国各開市場開港場 = 於テ、自由 = 各種ノ製造業 = 従事スルコトヲ得ベク……』であつた。

資本輸入は約款と投資の二つの形態がある。

約款は資本輸入のうちもつとも支配性の露骨なものである。一九三一年中国への約款額は

| 国 別 | 英 | 日 | 仏 | 伊 | 米 | 和 | 独 | 北歐諸国 | 計 |
|------------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|------|---------|
| 金額 (千弗) | 225,800 | 224,100 | 97,400 | 42,000 | 41,700 | 18,700 | 12,000 | 400 | 710,600 |
| 百分率 | 31.8 | 31.5 | 13.7 | 5.9 | 5.9 | 2.6 | 1.7 | 0.1 | 100.0 |

で、全外資の三〇%をしめている。³⁷ 借款の多くは政治借款で、それらのほとんどが軍費に費消され、生産に充用れる部分は微々たる有様である。もちろん産業的借款もなくはない。主要な産業的借款は鉄道敷設に対するものである。

中国国有鉄道の外債所有高は

| 路線名 | 外 債 | 料 債 | 路線名 | 外 債 | 料 債 |
|------|----------------------------|----------------------------|------|------------------------|-------------------------|
| 平漢鐵路 | 55,314,500.70 ^元 | 40,739,716.96 ^元 | 広韶鐵路 | 43,446.14 ^元 | 114,111.50 ^元 |
| 津浦鐵路 | 191,607,550.35 | 29,061,511.53 | 吉長鐵路 | 14,960,654.70 | — |
| 平綏鐵路 | 21,706,196.15 | 62,220,666.18 | 四洮鐵路 | 74,037,600.00 | — |
| 北寧鐵路 | 16,734,518.40 | 8,741,511.15 | 吉敦鐵路 | 45,686,861.98 | — |
| 京滬鐵路 | 54,553,176.00 | — | 寧湘鐵路 | 6,259,718.40 | — |

37 C. F. Ramer, Foreign Investment in China, 1933, PP. 69—70.

| | | | | | |
|-------|----------------|--------------|--------------|------------------|----------------|
| 滬杭甬鐵路 | 9,810,000.00 | — | 浦信鐵路 | 6,098,179.13 | — |
| 膠濟鐵路 | 56,000,000.00 | 325,136.28 | 同成鐵路 | 21,624,788.97 | — |
| 正太鐵路 | — | — | 株欽鐵路 | 10,767,297.80 | — |
| 道清鐵路 | 13,739,082.08 | — | 潯孟鐵路 | 3,125,117.62 | — |
| 隴海鐵路 | 216,704,359.59 | 116,704.70 | 包寧鐵路 | 22,464,000.00 | — |
| 汴洛鉄海 | 5,992,500.00 | — | 潭厦鐵路 | — | 58,476.15 |
| 湘鄂鐵路 | 124,205,211.00 | 4,274,112.10 | 財政部負担 の路債 | 80,024,380.00 | — |
| 広九鐵路 | 27,425,119.78 | 664,490.57 | 総計 | 1,078,884,259.57 | 146,366,437.00 |

で、外国資本は鉄道資本の八〇%以上をしめ、鉄道収益は外債利子支払額に満たない状態であった。³⁸ 外国勢力は鉄道約款の保証として鉄道敷設権を獲得し、敷設資材と車輛を独占的に供給し、債務償還まで鉄道経営権を支配したのである。

主要な約款に

| 借 款 名 | 借 款 内 容 |
|------------------------|--|
| 英 独 統 借 款 | 1899年、16百万磅、関税と湖北、江蘇、安徽、貨物通過税(釐金) 7百万両を担保。 |
| 英 仏 借 款 (1908年金磅公債) | 1908年10月12日発行、英の滙豊、仏の東方滙理銀行と約款、5百万磅、平漢鉄路の利潤担保、利子は関税で支払う。 |
| 湖 広 鉄 道 借 款 | 1911年英、独、仏、米の四国銀行団と約款、6百万磅、河南、湖北の百貨通過税(釐金) 穀物税と塩税を担保。 |
| クリスツフカンパニー 克利斯浦公司借款 | 1912年、清朝時代の借款整理と興業用、10百万磅、塩税有先担保。 |
| 善 後 借 款 | 1912年、仏、独、英、日、白の五国銀行団と約款、25百万磅。 |
| 中 仏 米 弗 借 款 | 1925年5月27日発行、3,893,900米弗。 |
| 中 伊 米 弗 借 款 | 伊の庚子賠償金(義和団の乱)の未償還金を以て、17,589,061米弗。 |
| 中 白 米 弗 六 厘 公 債 | 伊の庚子賠償金の未償還金を以て、5,000,000米弗。 |

がある。これらの約款のいちじるしい特長は関税、塩税、釐金等を担保として押収することである。³⁹

関税、塩税の中国国家財政収入にしめる比重は

| | 関 税 | 塩 税 | 統 税 | 煙酒印花税 | 礦 税 | 交首所税 | 銀行税 | 財産収入 |
|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| 1932 | 51.74 | 22.76 | 13.95 | 6.62 | 0.34 | 0.02 | — | 0.96 |
| 1933 | 52.12 | 13.76 | 13.96 | 5.36 | 0.39 | 0.24 | — | 0.53 |
| 1934 | 41.65 | 20.70 | 12.72 | 3.92 | 0.30 | 0.01 | 0.17 | 0.60 |
| 1935 | 35.67 | 19.42 | 2.83 | 3.58 | 0.40 | 0.20 | 0.16 | 0.92 |

38 金輪海, 上掲書, P.P. 68--69.

39 金輪海, 上掲書, P.P. 63--66.

| 事業収入 | 行政収入 | 営業純益 | 借款収入 | 協款収入 | 其他収入 | 総計 |
|------|------|------|------|------|-------|-------------------------|
| 0.24 | 1.82 | — | — | — | — | 100.0 (621,707.350元) |
| 0.25 | 1.79 | 0.17 | — | — | — | 100.0 (680,415.589元) |
| 2.32 | 1.36 | 0.91 | 5.44 | 0.72 | 9.07 | 100.0 (918,111.044元) |
| 2.17 | 1.14 | 4.20 | 7.31 | 0.38 | 12.20 | 100.0 (957,154.006元) |

であつて、その主要部分をなしている。⁴⁰ 財政支出における債務の八〇%は外国借款で、賠償金を含めて支出の三〇%以上をしめ、かくて中国財政大権は債主である外国勢力に制禦されることとなつている。

外国投資は、原則的には、有無相通の関係における国際協調のあらわれであつて、それ自体中国民族資本の発展を阻害する性格をもつものではない。しかし外国投資は中国市場争奪を目的とし、原料と市場に対する欲求を動因とするものであつて、民族資本と真向から競合しその活動をまつたく抑圧した。

外国の中国投資は一九三一年において

| 国別 | 英 | 日 | 露 | 米 | 仏 | 独 | 白 | 和 | 伊 | 北欧諸国 | 計 |
|------------|-----------|-----------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|-------|-----------|
| 金額 (千弗) | 1,189,200 | 1,136,900 | 273,200 | 196,800 | 142,400 | 87,000 | 89,000 | 28,700 | 46,400 | 3,900 | 3,242,500 |
| 百分比 | 36.7 | 35.1 | 8.4 | 6.1 | 5.9 | 2.7 | 2.7 | 0.9 | 1.4 | 0.1 | 100.00 |

の巨額に達している。⁴¹

投資の産業別内訳は

| 項目 | 政治的投資 | 運輸 | 交通業と公共事業 | 鉱業 | 製造業 | 銀行と金融業 | 地産 | 貿易業 | 其ノ他 | 租界工部局借款 | 計 |
|------------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 金額 (千弗) | 427,700 | 846,300 | 128,700 | 128,900 | 376,300 | 214,700 | 339,200 | 483,700 | 282,800 | 14,200 | 3,242,500 |
| 百分比 | 13.2 | 26.1 | 4.0 | 4.0 | 11.6 | 6.6 | 10.5 | 14.9 | 8.7 | 0.4 | 100.0 |

である。投資の三〇%を運輸交通がしめる事実は、外国投資の性格をしめすものとして注目にあたいする。⁴² 地域経済から国民経済へ、さらに国際経済への発展を可能ならしめる経済的関鍵は流通における貨幣と交通である。交通の中でこの機能をもつともよく発現したのは船舶と鉄道であつた。しかし交通は貿易市場の拡大が領土の拡大を意味した歴史的事実からして、殖民主義の重要な手段であつた。元来交通業、とくに船舶と鉄道は、大規模な固定設備を必要とし、資本の転用性の欠如、即時財的用役の場所的制約、需要の非弾力性、需要の個別性等

40 秦 璋、中国経済建設之途径、中国経済、第三卷、第八期。

41 C. F. Remer, op. cit. P.P. 69—70.

42 C. F. Remer, op. cit. P.P. 69—70.

から、きわめて独占的性格が強い企業である。民族資本の成長が劣弱である中国において、近代的交通業の発展に殆んど見るべきものがなく、当然の結果として交通業は外国勢力によつて独占された。中国における外国資本の交通業への集中的投下は、外国資本の性格を描写する重要な指標となるものである。ただし中国交通業の外国支配は、経験上中国経済発展の鍵となりえなかつたことを示している。

中国の鉄道は、すでに述べたやうに、外国勢力の中国経済支配の中心的段階となつていて船舶もまた完全に外国勢力の支配下におかれている。

中国における主要船舶会社の所有船舶数は

| 会社名 | 国別 | 船舶数 | 屯数 | 会社名 | 国別 | 船舶数 | 屯数 |
|-------------|----|-----|--------|--------|----|-----|--------|
| 招商局 政記公司 | 華 | 24 | 34,792 | 怡和輪船公司 | 英 | 34 | 55,253 |
| 三北公司 | 華 | 23 | 22,199 | 賽賜洋行 | 英 | 8 | 18,443 |
| 北方公司 | 華 | 18 | 19,974 | 開灤礦務局 | 英 | 20 | 43,620 |
| 鴻安公司 | 華 | 6 | 7,190 | 日清汽船会社 | 日 | 19 | 24,577 |
| 肇興公司 | 華 | 7 | 7,255 | 大連汽船会社 | 日 | 17 | 25,093 |
| 太古輪船公司 | 英 | 7 | 6,319 | 捷江公司 | 米 | 10 | 4,220 |
| | | 65 | 90,329 | | | | |

であつて、外国会社の所有船舶数は隻数、屯数ともに圧倒的に多く、一九三二年中国各港往來の船舶は約七一百万屯、その中四一百万屯は外国船舶で六八%をしめる状態であつた。⁴⁴

中国産業の中心は軽工業であり、紡糸紡織業がその中核である。「男耕女織」の古語のとおり、織布は農民手工業として発達し、紡糸業とともに歴史の長い民族工業であつて、開口以来民族資本のもつとも活潑な展開をみている。しかし民族紡織業は一九三〇年以来外国製品の流入によつて市場を失い、さらに外国企業の設立によつて全面的に崩壊した。⁴⁵

中国紡織業は日、英によつて支配されている。

一九三三年、華、日、英の企業比重は

| | 工場数 | 資本 (元) | 錠数 | 織機数 | 労働者数 | 棉花使用量 (担) | 産糸量 (包) | 産布量 (疋) |
|----|-----|-------------|-----------|--------|---------|-----------|-----------|-----------|
| 日本 | 45 | 208,903,488 | 1,821,280 | 14,082 | 77,792 | 3,191,769 | 823,437 | 7,587,767 |
| 英国 | 3 | 8,260,000 | 177,228 | 2,480 | 13,189 | 345,932 | 76,315 | 1,737,986 |
| 中国 | 82 | 139,430,800 | 2,449,394 | 17,018 | 164,275 | 5,301,989 | 1,480,915 | 6,854,091 |

43 佐波宣平, 交通概論, PP. 39-40.

44 金輪海, 上掲書, P. 70.

45 王子建, 中国土布業之前途, 千家駒編, 中国農村經濟論文集, PP. 127-146

で中国企業の糸、とくに布の生産は英国をしのいでいるが、いわゆる土布は洋布に比べて品質粗悪で商品的な価値が小さく、その多くは農民の自給に消費されるに過ぎなかつた。⁴⁶

中国の重工業は石炭と鉄鉄の採掘業が主で、その主要鉄山の採掘権は一八九八年清独膠澳租界条約における「各鉄道附近、三十哩以内…独商人=石炭ノ採掘ヲ許シ…」にはじまり、辛丑条約をへて、ほとんど外国勢力に掌握されている。

一九三二年中国石炭業は

| | 外 国 | | | 合 辦 | | | 中 国 | |
|------------|--------|--------|-----|--------|--------|-----|--------|-----|
| | 日 | 英 | ソ | 中 日 | 中 英 | 中 独 | 近代的 | 原始的 |
| 資 本 (千元) | 11,000 | 12,000 | — | 27,000 | 26,000 | 750 | 26,160 | ? |
| 生 産 量 (千噸) | 5,000 | 700 | 180 | 1,400 | 4,780 | 600 | 8,277 | 600 |

で、主要炭山四六のうち、外国独占六、合辦二四で外国資本は生産の五〇%以上、また鉄鉄業は鉄石生産量の五〇%以上、鉄鉄生産量の九〇%以上をしめている。⁴⁷

(e) 紙幣発行 外国投資の中国への流入は在華外国銀行の放資の形式をとるが、この場合放資の手段は中国貨幣であるのが正常である。しかし事実はこれとことなり、放資の主要部分は外国銀行の発行券が使用されているのである。

中国における外国銀行の設立は、英の東方銀行をもつて嚆矢とする。その後各国銀行の進出があり、一九二五年には英五、米四、日一〇、仏二、和二、伊二、白一、露一、合辦二の二九行をかぞえるにいたつた。一九三一年中外銀行の経営実績は

| 国 別 | 実収資本 | 公債金 | 預 金 | 紙幣発行 | 純 益 | 資 産 |
|--------------------|---------|---------|-----------|---------|--------|-----------|
| | 千元 | 千元 | 千元 | 千元 | 千元 | 千元 |
| 中国(中央、中国、交通等29行) | 155,784 | 47,347 | 1,860,656 | 392,367 | 21,065 | 2,569,606 |
| 外国(滙豊、正金、花旗、滙理の4行) | 516,000 | 257,606 | 6,803,152 | 352,941 | 54,745 | 8,472,314 |

で、外国銀行は遙かに中国銀行を凌駕し、上海国際銀錢業公会委員一六名中、外国銀行委員は八、麦加利銀行經理がその第一首席をしめる等、中国金融市場は外国銀行によつて完全に操縦されている。⁴⁸

外国銀行は本来外国勢力の経済的的代表機関としての役割を果すものであつたが、これにとどまらず、約款を通じ、また約款の担保である関税、塩税を管理することによつて、その政治的の代弁機関としての性格をもつにいたつた。外国銀行の発券業務はこうした外国銀行の政治的性

46 馮奎善, 近年来中国之棉紗事業, 東方雜誌, 第三一卷, 第一四号.
金翰海, 上掲書, P.P. 73-74.

47 遠 生, 国聯技術合作与中国經濟之前途, 東方雜誌, 第三一卷, 第一四号.
金翰海, 上掲書, P. 72.

48 王承志, 上掲書, P. 56.

格に伴う現象で、銀行券は中国経済収奪の主要手段となつた。

一九二七年外国銀行の発券額は

| 銀行名 | 単位 | 発行額 | 中国幣換算額 (元) | 銀行名 | 単位 | 発行額 | 中国幣換算額 (元) |
|------------------|-----|---------------|---------------|------|-----|------------|---------------|
| 東方匯理銀行 | 法 | 1,690,338,306 | 676,135,322 | 華比銀行 | 法 | 14,026,746 | 5,610,698 |
| 朝鮮銀行 | 日圓 | 124,863,873 | 124,863,873 | 有利銀行 | 磅 | 234,536 | 2,345,360 |
| 台湾銀行 | 日圓 | 53,611,267 | 53,611,267 | 美匯銀行 | 中国円 | 890,050 | 890,050 |
| 滙豐銀行 (香港上海銀行) | 香港磅 | 52,640,984 | 52,640,984 | 花旗銀行 | 弗 | 98,995 | 197,990 |
| 麥加利銀行 (渣打銀行) | 磅 | 1,934,334 | 19,843,340 | 德華銀行 | 中国両 | 84,348 | 67,687 |
| 正金銀行 | 日圓 | 8,751,661 | 8,751,611 | 計 | | | 994,958,323 |

の巨額である。外国銀行の任意発券は、一九三二年十二月停止されたが、なお発券は

| 年 | 滙豐銀行 元 | 麥加利銀行 元 | 有利銀行 元 | 計 元 |
|------|-------------|------------|-----------|-------------|
| 1932 | 131,276,243 | 21,373,385 | 3,026,626 | 155,686,254 |
| 1933 | 135,341,462 | 15,675,160 | 1,800,911 | 152,817,533 |

に示される如く減少はしたが全く停止されてはいない。⁴⁹ 発券額のはなはだしい減少傾向は中国幣制の整備による中国銀行券の流通拡大によることを見逃してはならないが、恐慌後外国勢力の経済収奪の手段が貨幣発行から商品販売に移つた結果と見られている。⁵⁰

外国勢力の共通した性格は中国市場を支配するということであるが、中国への進出に遅速があり、権勢に強弱がありかつ利害相反し、したがって中国における活動の態様が各々異なつてゐる。日本の紡績、英の鉄道、米の航空、また日本の華北、仏の雲南、英の華中の如くに産業的、地域的に、やや判然とした割拠的活動圏を形成している。外国勢力の割拠性は軍閥の割拠性に通ずるもので、外国勢力は権益を維持拡大するため、軍閥の抗争を利用し、植民地主義的収奪性をたくみに封建的収斂性によつて偽装した。

外国勢力は、その進歩の過程として、封建的基礎とそれに立脚する勢力の急激な変革と解体を自ら経験した事実において、中国に対してきわめて強い影響を与え、中国経済の近代化に尽した役割ははなはだ重要であつた。しかし中国と外国勢力との関係は支配と従属の関係であつて、中国経済の近代化は外国資本と企業にとつては副次的な結果であり、それはむしろ矛盾ですらあつた。中国経済の近代化は中国民族資本と企業の停滞を基礎とする外国資本と企業の支

49 揚藝溥、中国金融論、P.P. 222—223.

50 中国銀行経済研究室、中国紙幣発行及其流通状況之解剖、中行月刊、第一一巻、第二期、王承志、上掲書、P.P. 124—125.

配的活動のうちに見られる。中国経済近代化の實質的表現は、したがって奇妙にも封建的諸遺制の残存と中国民族資本主義の停滞のうちに見出されるのである。

IV 結 語

開国当時の中国は軍閥割拠して政治に統一なく、経済又分裂し、外国勢力の政経両面にわたる支配を甘受したが、民族資本家階級が中国の自主権維持とその発展にまつたく無為休眠していたのではない。

中国の自主独立の機運は抗日抗英等の排他的守旧的運動に歪曲された民族主義の型で散発的に現れるが、辛亥革命を基点として、ソビエト革命に刺戟され、五四運動（一九一九年）、治外法権徹廢運動（一九二〇年）をへて反封建反帝国主義運動に発展し、やうやく全国的規模に拡大し、統一政府樹立の輿論を導いた。南北統一戦争（一九二六～三〇年）は、後に蔣、宋、孔、陳のいわゆる四大家族の財經壟断をもたらすが、いづれにせよ、民族資本家階級の勢力伸張によつて推進され、南京中央政府の成立を可能ならしめた。しかし南京政府の樹立は基本上中国の政治的統一の実現を表示するが、それがただちに経済的統一を意味するものではなかつた。しかし廢兩改元（一九三四年）と新貨幣政策（一九三五年）の実施は中国の経済的統一の劃期的な財經政策とみなしうるものであつた。もちろん重要なことは、この経済的統一が民族資本家階級が封建勢力と外国勢力の支配を克服した結果でないことである。それはただ民族資本家階級が封建勢力と外国勢力に対してやうやく対抗勢力として鼎立的地位に成長したことを意味するにすぎなく、むしろ経済的統一はこれら三勢力間の妥協によつて実現されたと考えねばならない。

中国民族経済は、内に封建勢力の屢々剝削と制約があり、外に外国勢力の重々圧迫と束縛があり、内外来攻、したがって半封建的、半殖民地的という言葉をおいて、中国経済のもつ性格を明確にする、より適切な表現を見出すことはできない。

（昭和30年5月31日受理）

51 王承志，中国金融資本論，P. 135.

52 鄧飛黃，中国経済的衰退程度及其前途，中国経済，第一卷，第一期.



$(n+1)$ 次元のフィンスラー空間内の超曲面の 主法曲率の新しい特性付け

永田 幸令

New Characterizations of the Principal Normal Curvatures
of a Hypersurface in an $(n+1)$ -Dimensional Finsler Space

Yukiyoshi Nagata

Abstract

In this paper, the present author gives new characterizations of the principal normal curvatures of a hypersurface and the lines of curvature of a hypersurface in an $(n+1)$ -dimensional Finsler space. And these characterizations are obtained by his using the idea, that is, the principal direction of a vector field in the hypersurface.

I 緒 言

フィンスラー空間の部分空間の理論は、E. Cartan¹, M. Haimovici², H. Hombu³, 及び E. T. Davies⁴ 等に依つて研究された。この論文では E. T. Davies が取扱つた単一法線に沿つて element of support を持つフィンスラー空間内の超曲面を考え、その上の一つのベクトル野の法曲率,⁵ 主方向等の概念を定義し、超曲面の主法曲率及び曲率曲線に新しい意味付けを与えた。

記号法は E. Cartan 及び E. T. Davies に倣つた。

II ベクトルの絶対微分

- 1 E. Cartan. Les espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79 (1934).
- 2 M. Haimovici. Les formules fondamentales dans la theorie des hypersurfaces d'un espace general, Annales Scientifiques de l'Univ. de Jassy, 20 (1934-1935), 39-58.
- 3 H. Hombu. Die Krümmungstheorie im Finslerschen Raume, Jour. Fac. of Sci. Hokkaido Univ., (1), 5 (1936), 67-94.
- 4 E. T. Davies. Subspace of a Finsler space, Proc. London Math. Soc., 49 (1945), 19-39.
- 5 Y. Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955).

基本二次形式

$$(1) \quad ds^2 = g_{\lambda\mu}(x, x') dx^\lambda dx^\mu, \quad 6$$

を持つ $(n+1)$ 次元のファインラー空間 F_{n+1} を考える。その中でベクトル X^λ の絶対微分 DX^λ は次式によつて与えられる。⁷

$$(2) \quad DX^\lambda = dX^\lambda + C_\mu^{\lambda\nu} X^\mu dx'^\nu + \Gamma_\mu^{\lambda\nu} X^\mu dx^\nu$$

こゝに、

$$(3) \quad \Gamma_\mu^{\lambda\nu} = \Gamma^{*\mu\lambda\nu} + C_\mu^{\lambda\rho} x'^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\nu$$

今、 x'^i 方向の単位ベクトルを l^μ とし、 $\omega^\mu = Dl^\mu$ とおけば、(2), (3) に依り

$$(4) \quad \omega^\mu = dl^\mu + l^\nu \Gamma^{*\nu\mu\sigma} dx^\sigma$$

が得られる。

又、 DX^λ は次の形で書き表すこともできる。⁸ 即ち

$$(5) \quad DX^\lambda = (X^\lambda|_{|\mu} + X^\nu A_\nu^{\lambda\mu}) \omega^\mu + X^\lambda|_{|\mu} dx^\mu$$

こゝに

$$X^\lambda|_{|\mu} = \mathcal{L} \frac{\partial X^\lambda}{\partial x'^\mu},$$

$$X^\lambda|_{|\mu} = \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} + X^\nu \Gamma^{*\nu\lambda\mu} - \frac{\partial X^\lambda}{\partial x'^\nu} \cdot \frac{\partial G^\nu}{\partial x'^\mu}$$

今、

$$(6) \quad \overset{0}{\nabla}_\mu X^\lambda \equiv X^\lambda|_{|\mu}, \quad \overset{1}{\nabla}_\mu X^\lambda \equiv X^\lambda|_{|\mu} + A_\mu^{\lambda\rho} X^\rho$$

とおけば、

$$(7) \quad DX^\lambda = \overset{0}{\nabla}_\mu X^\lambda dx^\mu + \overset{1}{\nabla}_\mu X^\lambda \omega^\mu$$

と表し得る。

III 超曲面の基本量及びそれらの間の関係式

今、 F_{n+1} 内で element of support を単一法線に沿つてもつ超曲面 $S: x^\lambda = x^\lambda(u^1, \dots, u^n)$ を考える。

6 x'^λ はファインラー空間内の element of support と呼ばれるものを表はし、ギリシャ文字で書き表された添数は $1, \dots, n+1$ なる値をとる。又、右辺 $g_{\lambda\mu}(x, x') dx^\lambda dx^\mu$ の様に同一項の中に同一文字が下添数及び上添数として書かれているときには、その文字がとり得る総べての値に対して $g_{\lambda\mu}(x, x') dx^\lambda dx^\mu$ の形の項を作つて加え合はす事を意味するものとする。即ち、右辺は

$$\sum_{\lambda=1}^{n+1} \sum_{\mu=1}^{n+1} g_{\lambda\mu}(x, x') dx^\lambda dx^\mu$$

を簡略して書き表したものである。尚詳細は L. P. Eisenhart.

Riemannian geometry, Princeton University Press, (1949) の I 章を参照の事。

7 E. Cartan. Les espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79 (1934). I, VI

8 E. Cartan. Les espaces de Finsler, Actualités Scientifiques et Industrielles, 79 (1934). VIII

$$(8) \quad 'g_{\alpha}(u) = g_{\lambda\mu}(x, x') B_{\alpha}^{\lambda} B_{\alpha}^{\mu}, \quad B_{\alpha}^{\lambda} \equiv \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{\alpha}}$$

とおき, $'g_{ab}(u)$ を S の基本計量テンソルとして採用する。 $|'g_{ab}| \neq 0$ なるときには, 次式によつて $'g^{bc}$ が定義される。即ち

$$(9) \quad 'g^{ab} 'g_{bc} = \delta_c^a$$

従つて

$$(10) \quad B_{\lambda}^{\alpha} = 'g^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} B_{\beta}^{\mu}$$

とおくことに依り B_{λ}^{α} を導入することができる。

我々の考える場合に於いては, l^{λ} は S の法線方向を有つから次の関係式が成立する。¹⁰

$$(11) \quad \begin{cases} a) B_{\alpha}^{\lambda} B_{\lambda}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, & d) B_{\alpha}^{\lambda} B_{\mu}^{\alpha} = B_{\mu}^{\lambda}, \\ b) l_{\lambda} B_{\alpha}^{\lambda} = 0, & e) B_{\mu}^{\lambda} + l^{\lambda} l_{\mu} = \delta_{\mu}^{\lambda} \\ c) l_{\lambda} l^{\lambda} = 1, \end{cases}$$

上式 (11) c) より $l_{\lambda} \omega^{\lambda} = 0$ が得られるから

$$(12) \quad \omega^{\lambda} = B_{\alpha}^{\lambda} \bar{\omega}^{\alpha}, \quad \bar{\omega}^{\alpha} = B_{\mu}^{\alpha} \omega^{\mu}$$

となる。従つて (4) を利用すれば, 超曲面上の方向 $dx^{\lambda} = B_{\alpha}^{\lambda} du^{\alpha}$ に対して (12) は次の形に表される。¹¹

$$(13) \quad \omega^{\lambda} = B_{\alpha}^{\lambda} \left[B_{\mu}^{\alpha} \left(\frac{\partial l^{\mu}}{\partial u^{\alpha}} + \Gamma^{*\mu}_{\rho\sigma} l^{\rho} B_{\alpha}^{\sigma} \right) \right] du^{\alpha} = -B_{\alpha}^{\lambda} \Omega_{\alpha}^{\lambda} du^{\alpha}$$

こゝに

$$\Omega_{\alpha}^{\lambda} = -B_{\mu}^{\alpha} \left(\frac{\partial l^{\mu}}{\partial u^{\alpha}} + \Gamma^{*\mu}_{\rho\sigma} l^{\rho} B_{\alpha}^{\sigma} \right)$$

従つて, 方向 $dx^{\lambda} = B_{\alpha}^{\lambda} du^{\alpha}$ に対する F_{n+1} 中のベクトル X^{λ} の絶対微分は (7) 及び (13) に依つて

$$(14) \quad DX^{\lambda} = (\overset{0}{\nabla}_{\nu} X^{\lambda}) B_{\alpha}^{\nu} du^{\alpha} - (\overset{1}{\nabla}_{\nu} X^{\lambda}) B_{\alpha}^{\nu} \Omega_{\alpha}^{\lambda} du^{\alpha} = \overset{\circ}{D}_c X^{\lambda} du^c$$

但し

$$\overset{\circ}{D}_c X^{\lambda} = B_{\alpha}^{\nu} \overset{0}{\nabla}_{\nu} X^{\lambda} - \overset{1}{\nabla}_{\nu} X^{\lambda} B_{\alpha}^{\nu} \Omega_{\alpha}^{\lambda}$$

に依り与えられる。

今, F_{n+1} 中のベクトル B_{α}^{λ} を考えると, 次式が導き出される。¹²

$$(15) \quad DB_{\alpha}^{\lambda} = \overset{\circ}{D}_c B_{\alpha}^{\lambda} du^c = (\partial_c B_{\alpha}^{\lambda} + \Gamma_{\mu}^{\lambda c} B_{\alpha}^{\mu}) du^c$$

9 ラテン文字で書き表された添数は 1, ..., n の間の値をとる。

10 E. T. Davies. Subspace of a Finsler space, Proc. London Math. Soc., 49 (1945), 19—39, 2, 8

11 E. T. Davies. Subspace of a Finsler space, Proc. London Math. Soc., 49 (1945), 19—39, 8

12 前出 11.

ここに

$$\partial_c B_a^\lambda \equiv \frac{\partial B_a^\lambda}{\partial u^c}, \quad \Gamma_\mu^{\lambda c} \equiv \Gamma_{\mu}^* \lambda_\nu B_c^\nu - A_{\mu}^{\lambda \nu} B_a^\nu \Omega_{.c}^d$$

S の中での接続係数 (connection parameters) は

$$(17) \quad \gamma_b^{ac} = B_{\lambda}^a (\partial_c B_b^\lambda + \Gamma_{\mu}^{\lambda c} B_b^\mu)$$

に依り定義される。

又、オイラー曲率テンソル (Eulerian curvature tensor) は次式に依つて与えられる。

$$(18) \quad \Omega_{bc} = l_\lambda (\partial_c B_b^\lambda + \Gamma_{\mu}^* \lambda_\nu B_b^\mu c^\nu), \quad B_b^{\mu c \nu} \equiv B_b^\mu B_c^\nu$$

(17), (11) e) 及び (18) に依り

$$(19) \quad \partial_b B_a^\alpha = B_c^\alpha \gamma_a^{cb} - \Gamma_{\mu}^{\alpha b} B_a^\mu + l^\alpha \Omega_{ab}$$

を得る。¹³

IV 定義及び結果

以下に於いて論じられる総べての空間の基本二次形式は正定値であると仮定する。 S の各点に対して、任意の或る一つの単位ベクトル野 v^α を関連せしめ、(従つて v^α は $v^\alpha = v^\alpha B_a^\alpha$, $'g_{ab} v^a v^b = 1$ を満す。) s を曲線に沿つての弧の長さとして、 S 上の曲線を $C: u^a = u^a(s)$, ($a=1, \dots, n$) で表し、(19) を利用すると、 C 上の一点 P で次の関係式を得る。¹⁴

$$(20) \quad \frac{Dv^\alpha}{ds} = \frac{\bar{D}v^\alpha}{ds} B_a^\alpha + \Omega_{ab} v^a \frac{du^b}{ds} l^\alpha$$

但し

$$Dv^\alpha = dv^\alpha + \Gamma_{\mu}^{\alpha b} v^\mu du^b, \quad \bar{D}v^\alpha = dv^\alpha + v^c \gamma_c^{ab} du^b$$

(20) の右辺に得られた $\Omega_{ab} v^a \frac{du^b}{ds}$ を点 P に於ける曲線 C に関するベクトル野 v^α の法曲率 (normal curvature) といふ、 $e \cdot_\nu k_n$ で書き表す。(但し、 e は $\Omega_{ab} v^a \frac{du^b}{ds}$ が正のときには $+1$, 負のときには -1 なる値をとる。) そして v^α が単位ベクトル野でないときには、もつと一般的に

$$(21) \quad e \cdot_\nu k_n = \frac{\Omega_{ab} v^a du^b}{(g_{ab} du^a du^b g_{ef} v^e v^f)^{\frac{1}{2}}}$$

に依つて v^α の曲線 C に関する法曲率を定義する。¹⁵

13 Y. Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955). §1

14 Y. Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955). §2

15 前出 14

定義 1 $e \cdot k_n$ の零でない極値を S 中の点 P に於けるベクトル野 v^α の主法曲率 (principal normal curvature) といふ, その対応方向を点 P に於けるベクトル野 v^α の主方向 (Principal direction) といふ。 v^α の主法曲率は

$$(22) \quad |\psi_{ab} - (v k_n)^2 g_{ab}| = 0, \quad (a, b=1, \dots, n)$$

の根に依つて与えられ, v^α の主方向は

$$(23) \quad \{\psi_{ab} - (v k_n)^2 g_{ab}\} du^b = 0$$

をみたす du^b となる。ここに ψ_{ab} は

$$(24) \quad \psi_{ab} = \frac{\Omega_{cb} \Omega_{da} v^c v^d}{g_{ef} v^e v^f}$$

である。

又, 各点での方向が一つのベクトル野 v^α の主方向となつている様な S 上の曲線をそのベクトル野の曲率曲線と名付ける。

定義 2

$$(25) \quad |\Omega_{ab} - K' g_{ab}| = 0$$

の根 K_h , ($h=1, \dots, n$) を S の主法曲率といふ,

$$(26) \quad (\Omega_{ab} - K_h' g_{ab}) \lambda^{a(h)} = 0$$

に依つて定められた方向 $\lambda^{a(h)}$ を S の主方向といふ。又, $\lambda^{a(h)}$ に依つて決定された曲線を S の曲率曲線 (lines of curvature) と名付ける。

定義 3 S の各点での方向が S の主方向を構成する様なベクトル野を S の主ベクトル野, 或は主野 (principal vector field, or principal field) と呼び, 点 P での S の主野のベクトルの方向及びその方向に対応する S の主法曲率を夫々点 P に於ける S の対応主方向 (corresponding principal direction) 及び S の対応主法曲率 (corresponding principal normal curvature) と名付ける。又, S の主野に依つて決められた曲線を S の対応曲率曲線 (corresponding line of curvature) と呼ぶことにする。

$v^\alpha = v^a B_a^\alpha$ とすれば, S 内の一点 P での v^α の主方向は (23) に依つて

$$(23)' \quad \{\psi_{ab} - (v k_n)^2 g_{ab}\} du^b = 0, \quad (a, b=1, \dots, n)$$

をみたす du^b として与えられる。今, 特に v^α が S の主ベクトル野であるとするれば, v^α は

$$(27) \quad \{\Omega_{ab} - K' g_{ab}\} v^a = 0, \quad (a, b=1, \dots, n)$$

を満す。ここに, K は S の対応主法曲率である。(23)' より

$$(v k_n)^2 = \frac{\psi_{ab} v^a du^b}{g_{ab} v^a du^b}$$

を得る。従つて (24), (27) を利用する事により $(v k_n)^2 = K^2$ が導かれ, 点 P に於いて

$e \cdot r k_n = K$ を得る。

即ち、次の定理を得る。

定 理 点 P での S の主ベクトル野の主方向及び主法曲率は、夫々点 P での S の対応主方向及び対応主法曲率になる。従つて S の主ベクトル野の曲率曲線は S の対応曲率曲線となる。

V 結 言

本論文は内地研究（於北大理学部）期間中に修得した研究結果¹⁶ に引き続き、それに関連して新しく得られた結果を簡単に記述したものである。この意味において、内地研究期間中に色々と懇切なる御指導を賜つた北海道大学理学部教授河口商次先生に対し、ここに厚く感謝の意を表したい。又、その期間中、種々御協力下さつた本学理科教室の教員各位に対しても、謝意を表する次第である。

（昭和30年5月12日受付）

16 Y.Nagata. Normal curvature of a vector field in a hypersurface in a Finsler space, Tensor, New Series, Vol. 5, No. 1 (1955).

Fundamental Viewpoints in the Theory of A Priori Measure

Yoshio Kinokuniya*

Abstract

The present author has decided to establish his theory of *a priori measure* basing on four principal hypotheses. The important characteristics will be observed in the assertion of null measure for any set, the power of which is really less than that of continuum and the complete exclusion of non-measurable sets. Some remarks on a study of the occupation of a point are made in supplement.

1. Introduction. In several previous memoirs, in introducing a measure of point called *point-dimension*, so as to define a measure of a set of points called *a priori measure*, I have intended to study the relative structure between the theory of sets and the theory of integral. Recently I had the good fortune to find some important conditions to make the set-theoretical aspect very simple, so that in this paper remarks may be made about a new system of hypotheses, establishing the foundation of our theory of a priori measure and giving a new light on the theory of sets.

We restrict our investigations within the Euclidian space of finite dimension. As for the set of real numbers, the points P_x of which the abscissa is x , is supposed to possess an infinitesimal space called the *occupation* of P_x

$$(x-0, x+0) = ((x)) \quad (1,1)$$

and the point-dimension of P_x

$$\mu_x$$

is considered as the measure of $((x))$; i. e. we posit them in the relation

$$\mu_x = \tilde{m}((x)). \quad (1,2)$$

With \tilde{m} we will indicate an a priori measure; as has been stated several times in the previous memoirs, measure of a set is given by the formula

$$\tilde{m}(M) = \sum_{P \in M} \mu_P$$

μ_P being the point-dimension of the point P .

* 紀国谷芳雄

When the point-dimensions are uniformly equal for each point of the space, it is said they make a *normal system* of point-dimension. When a space E_1 is put in biunivoquely continuous correspondence with the space E for which a normal system of point-dimension μ is given, and if the relation

$$\begin{aligned}\mu_1(P_1) &= \lambda(P)\mu(P) \\ 0 &< \lambda(P) < \infty\ 1\end{aligned}$$

(μ_1 designates the transformed point-dimension in the space E_1 by this correspondence) is satisfied for each point P in E , it is said that μ_1 makes a *regular system* in E_1 ; in other words, the occupation of $P_1(P)$ (the corresponding point in E_1 to the point P in E) is changed in its size by the measure proportion $\lambda(P)$ to be compared with the original occupation of P . These are the facts I stated already in the previous memoirs of mine; in this paper some structural proprieties of an occupation of point shall be investigated, too.

2. Fundamental System of Hypotheses. The following system of hypotheses gives many conveniences, if we adopt it to provide for the sets considered; so, I have decided to take it as the fundamental base to establish the theory of a priori measure. It consists of four hypotheses devided into two groups. The sets are taken in a finite-dimensional Euclidian space.

I. UNDER A NORMAL SYSTEM OF POINT-DIMENSION

I,1) A set M is measurable a priori with respect to a normal system μ when and only when the measure is given by the formula:

$$\tilde{m}(M) = n(M)\mu.$$

$n(M)$ is the inversion number of M , which has been defined to indicate the number of the points contained in M . When M is \mathcal{Q} -measurable M is measurable a priori too and $\tilde{m}(M)$ is equal to the \mathcal{Q} -measure of M .

I,2) On denoting with ψ_i the cardinal of the infinite set M_i ($i=1,2$), if

$$\psi_1 < \psi_2$$

it is destined that

1 $\lambda(P)$ may not be necessarily continuous of P in spite of continuity of the correspondence between the points in E and E_1 .

$$\tilde{m}(M_1)/\tilde{m}(M_2)=0$$

with respect to a normal system, whether M_i is measurable a priori or not.

II. FOR THE GENERAL CASE OF DIMENSION SYSTEM

II.1) If both of M_1 and M_2 be measurable a priori, the sets

$$M_1 \pm M_2$$

are measurable a priori, too.

II.2) If for any set measurable a priori F contained in the given set M , the relation

$$\tilde{m}(F)=0$$

be observed, then it must be that the set M is a priori measurable and

$$\tilde{m}(M)=0.$$

As a measure we mean a non-negative value for any case, so that it may be direct from I, 1) that $\tilde{m}(M)$ is an additive function of a set; i. e. when M_1 and M_2 are a priori measurable and $M_1 \cap M_2 = 0$, we have $\tilde{m}(M_1 + M_2) = \tilde{m}(M_1) + \tilde{m}(M_2)$. I, 2) may be induced from I, 1), but I put it up here in regard to its importance. When $\lim_k \tilde{m}(M_k) = u$ is found on a certain structure, by which the elements of $\lim_k M_k = M$ are distinguished within the limit of enumerability, we will say that the inversion number $n(M)$ is determined and M is measurable a priori. Then the following results are directly obtained.

When the sets $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset M_{k+1} \supset \dots$ are all measurable a priori, it is easily seen that the product of them

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} M_k$$

is measurable a priori too and

$$\tilde{m}(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{m}(M_k).$$

As for the sets $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_k \subset M_{k+1} \subset \dots$ measurable a priori, if $\tilde{m}(M_k)$ are uniformly bounded above, it is proved that the reunion

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_k$$

is measurable and

$$\tilde{m}(\mathbf{M}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{m}(\mathbf{M}_k).$$

To induce II, 1) from the standpoint of I, 1) will be impossible with no auxiliary assumptions.

II, 2) is important specially in point that it leads us to the exclusion of non-measurable set. Under a normal system of point-dimension, it is remarkable that if the condition of II, 2) be satisfied, for any sequence of inversion numbers

$$n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n$$

(n being the supposed inversion number for \mathbf{M}) we shall have

$$n_1 \mu = n_2 \mu = \dots = 0.$$

3. On Null Measure Assertion. *When the cardinal of the set \mathbf{N} is really less than that of continuum, \mathbf{N} is measurable a priori and*

$$\tilde{m}(\mathbf{N}) = 0.$$

This proposition is *Null Measure Assertion*, but to tell the truth, it needs some conditions to be effectively consistent. When the space considered is provided with a normal system of point-dimension, we see the assertion is valid, on account of the hypothesis I, 2), since as is well known there exists a set of continuum power of which the measure is observed as zero in the sense of \mathfrak{L} -measurability. In this section I will show that the assertion is consistent with respect to a regular system of point-dimension.

If \mathbf{N} be a set of points in the space \mathbf{E} , of which the cardinal is really less than that of continuum and \mathbf{E} be provided with a regular system of point-dimension; then it is direct that for any pair of points $x, x' \in \mathbf{E}$ we have

$$0 < \frac{\mu_x}{\mu_{x'}} < \infty. \quad (3.1)$$

Besides, we may suppose with no loss of generality that \mathbf{E} is the linear space of real numbers $(-\infty, \infty)$, and \mathbf{N} is bounded; i. e.

$$\mathbf{N} \subset (a, b) = \mathbf{I}, \quad (-\infty < a < b < \infty).$$

If ξ is a point in \mathbf{N} , on account of (3,1) a positive integer n exists for any point $x \in \mathbf{I-N}$, such that

$$\frac{1}{n-1} > \frac{\mu_x}{\mu_\xi} \geq \frac{1}{n} .$$

Let this number n be denoted as $n(x, \xi)$, and let the set of the points $x (\in \mathbf{I-N})$ for which $n(x, \xi) = k$ be denoted as $\mathbf{X}(\xi, k)$ ($k=1, 2, 3, \dots$).

Then we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}(\xi, k) = \mathbf{I-N} \tag{3,2}$$

because if not so, there exists a point $x \in \mathbf{I-N} - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{X}(\xi, k)$ such as

$$\frac{\mu_x}{\mu_\xi} = 0 \text{ or } \infty ;$$

this is contradictory to (3,1).

As the power of the set $\mathbf{I-N}$ is apparently equal to that of continuum, there exists a set

$$\mathbf{X}(\xi, \kappa)$$

the power of which is equal to that of continuum. Then, on account of the definition of $\mathbf{X}(\xi, \kappa)$, we have

$$\tilde{m}\{\mathbf{X}(\xi, \kappa)\} \geq \frac{1}{\kappa} n\{\mathbf{X}(\xi, \kappa)\} \mu_\xi .$$

On the other hand, there exists at least one point $\xi \in \mathbf{N}$, for which

$$\mu_\xi \geq \frac{\tilde{m}(\mathbf{N})}{n(\mathbf{N})} \tag{3,3}$$

because $\tilde{m}(\mathbf{N}) = \sum_{\xi \in \mathbf{N}} \mu_\xi$. Therefore, supposing the point ξ satisfies the inequality

(3,3) in advance, we have

$$\tilde{m}\{\mathbf{X}(\xi, \kappa)\} \geq \frac{1}{\kappa} n\{\mathbf{X}(\xi, \kappa)\} \frac{\tilde{m}(\mathbf{N})}{n(\mathbf{N})} .$$

By I.2) we see directly

$$\frac{n\{\mathbf{X}(\xi, \kappa)\}}{n(\mathbf{N})} = \infty$$

so that we may have:

that means $b - a \geq \tilde{m}\{\mathbf{X}(\xi, \kappa)\} \geq \infty \tilde{m}(\mathbf{N}) \geq 0$,

$$\tilde{m}(N)=0. \quad \text{Q. E. D.}$$

Since what is mentioned above is verified by using the symbols $\tilde{m}(N)$ or $\tilde{m}(X(\xi, \kappa))$, it seems we may not assert the result for the general case where the sets N or $X(\xi, \kappa)$ may not be always posited as measurable from the first. But, as a matter of fact, the verifying composition mentioned above can be held unchanged on symbolical formalism, so that we may admit the result gained above to be valid generally.

4. **Exclusion of Non-measurability.** When the notion of inversion number was introduced in a previous memoir of mine, I thought in private I could set measurability to be equivalent to conceivability of a set by means of this notion. But I have changed my mind recently when I found I could help the absurdity of measurability by excluding non-measurability by means of the hypothesis II.2).

About a sequence of measurable sets ;

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \dots \subset M,$$

if the set M is bounded² and the space in which M is given is provided with a normal system of point-dimension, $\tilde{m}(M)$ may not be larger than a certain finite number, so that we may not find the disjoint measurable sets $L_k \subset M - B_k$ such as

$$\tilde{m}(L_k) > \varepsilon > 0$$

for an infinite number of k , for any positive number ε fixed. Using this fact, we do not find it difficult to prove :

PROPOSITION: *For any bounded set in a Euclidian space of finite dimension provided with a normal system of point-dimension, there can be found a sequence of a priori measurable sets $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_k \subset B_{k+1} \subset \dots \subset M$ so that the set*

$$M - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \tag{4.1}$$

2 Under the general system of point-dimension a *bounded set* may be defined as a set which is contained in a certain a priori measurable set.

may contain no subset which is measurable a priori with a positive measure;

i. e. for any a priori measurable set F contained in $M - \sum_{k=1}^{\infty} B_k$ we have $\sim(F) = 0$.

Then, on account of II,2) we see directly that the set (4,1) is of null measure; and consequently we conclude that the set $M = \sum B_k + (M - \sum B_k)$ is measurable a priori, since $\sum B_k$ is measurable a priori as verified in the section 2. Thus it is observed that *non-measurability is excluded from our conception of a set*, on our course of study based on the four hypotheses I,1)---II,2).

It is interesting that the denial of non-measurability by means of the hypothesis II,2) is very similar to that of any other parallel lines than the equidistant one by the hypothesis of Euclidian parallelism.

Moreover, we may find any univoque real function $f(P)$ to be measurable in our sense, when we take an application

$$\gamma_P (P \in M, M \text{ being a bounded set})$$

to indicate the general system of point-dimension; because, then the function of a set

$$\tilde{\gamma}(M) = \mathfrak{S} \gamma_P$$

is promised to satisfy the axioms (II,1) and (II,2) as the representation of the a priori measure of M with respect to the system γ_P , and consequently the set of the points for which

$$y - \varepsilon < f(P) \leq y + \varepsilon$$

should be measurable a priori, on condition that the support of $f(P)$ is a bounded set. Those being so, we have:

PROPOSITION : *If the function of a set*

$$\tilde{\gamma}(M) = \mathfrak{S} \gamma_P (\geq 0)$$

be generally regarded as a priori measure, and if the real function $f(P)$ is bounded in module and has its support to be a bounded set with respect to the system γ_P , then the integral

$$\tilde{\gamma}(f(P), M) = \mathfrak{S} f(P) \gamma_P$$

exists in the sense of the generalized Lebesgue composition with respect to γ .

The demonstration is direct. As the sets

$$\mathbf{M}_{n, \varepsilon}(f) = (\mathbf{P}; y_n < f(\mathbf{P}) \leq y_{n+1}) \cap \mathbf{M}$$

$(y_{n+1} = y_n + \varepsilon)$ are all a priori measurable as stated above, both of the sums

$$\sum y_n \gamma(\mathbf{M}_{n, \varepsilon}(f)) = \underline{J}$$

$$\sum y_{n+1} \gamma(\mathbf{M}_{n, \varepsilon}(f)) = \overline{J}$$

exist and tend monotonely to the same limit J , which must be the value to be represented in the form

$$J = \mathcal{E} f(\mathbf{P}) \quad \gamma_P = \tilde{\gamma}(f(\mathbf{P}), \mathbf{M}) \quad \text{Q. E. D.}$$

5. Law of Absorption. Our theory of a priori measure is not only the development reduced from the fundamental system of hypotheses I, 1)---II, 2), but it contains many delicate ideas which seem very natural to our intuition. Among them the notion of occupation of a point is a specially difficult one.

By the occupation

$$((x)) = (x-0, x+0) \tag{5.1}$$

the author means that $((x))$ contains all the possible spacing regarded as lying between the limiting points $x-0$ and $x+0$, and he has asserted that

$$\left. \begin{aligned} \mu_\varepsilon = \tilde{m}(x-0, x+0) &= 2\tilde{m}\left(x - \frac{0}{2}, x + \frac{0}{2}\right) \\ &= 2\tilde{m}(x+0^2, x+0). \end{aligned} \right\} \tag{5.2}$$

Such are of the new categories that have never appeared in any classical books, but are considered very efficient to establish the conception of continuum.

The point

$$x + \lambda \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, 1 > \lambda > 0)$$

is distinct from the point x , because there is observed the distance $\lambda \varepsilon$ between them; but, when we take the limiting process $\varepsilon \rightarrow 0$ the limiting point

$$x + \lambda 0$$

should be regarded as belonging to the occupation (5.1), whereas the position $x + \lambda 0$ itself may not be regarded as overlapping exactly with the position x . Thus the notion of occupation $((x))$ is seen to be different essentially from that of position. The law mentioned above [say, $x + \lambda 0 \in ((x))$] is called *Law of Absorption*.

In fact it seems very natural that on the process

$$x' \rightarrow x$$

generally we should have

$$\lim x' \in ((x)), \tag{5.3}$$

whereas, to conform to the calculating process (5.2) it must be exactly

$$x + \frac{0}{2} \in ((x)) \quad \text{but} \quad x + 2 \cdot 0 \in ((x))$$

on the definition (5.1). To remove such a contradiction it may be reasonable if we consider that the designation $x + \frac{0}{2}$ or $x + 2 \cdot 0$ may not indicate the simple limiting process of the types

$$x + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{or} \quad x + 2\varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

but they may suggest some structural relation of the occupations $((x)) = (x-2 \cdot 0, x+2 \cdot 0), (x-\frac{0}{2}, x+0)$ or $(x-\frac{0}{2}, x+2 \cdot 0)$ etc. to the formula

$$\mathbf{I} = (0, 1) = \bigotimes_{x \in \mathbf{I}} ((x)).$$

If we accept this distinction, it will be to indicate the fact (5.3) by the term "law of absorption" generally.

6. Resilience. On the study of continuum, it has been an important remark that any point $x \in (-\infty, \infty)$ has no contiguous point. G. Cantor posited to take the three points $x-0, x$ and $x+0$ as the same to indicate the position of the point \mathbf{P}_x , but it is well known in the theories of integral and real functions, to distinguish these three is necessary in some cases. The source of the discussions on well-ordered sets too, may be understood to have lain in the absurdity of contiguity of the real numbers.

The first observation of the contiguous state of the real numbers has been made with respect to the law of absorption from our point of view, and then an inversion of this law is posited to make the notion of *resilience*; in other words, we elucidate the absurd contiguity of the real numbers to be caused by the resilience of each point. An occupation may be considered as dwelling in its expansive state only when it is considered to have some mechanical propriety --- say, *resilience*.

On the elementary plane geometry, we learned a famous casuistic process, to verify any length larger than the proper length of a line segment l , to be possibly adoptable as the measure of l , by using auxiliary lines parallel to each side of a triangle of which l is the base. From our standpoint of view, this is not a mere paradox, but it may be valid when we bestow each point of l with two directions of resilience parallel to each sides of the triangle.

In the general Euclidian space of finite dimension, each point is considered to have its resilience expansive in the directions of the coordinate-axes so that the aggregative structure of the space may be observed to make a continuum very naturally.

Besides the notion of resilience we shall have another inversion of the law of absorption, which is found to be needed when the absorbed limiting point is considered to be separated from inward the occupation, on moving along the inverse process of the limiting given in the first. Such is a phenomenon to be observed in mechanical historicity; we study it for instance on the observation of the histories of distribution and call it *Law of Dissolution*.

You will perfectly understand the ideas described in this paper if you will refer to the following works by the same author.

- i) *On Continuum*, Mem. Muroran Univ. Eng. Vol. I, No.3 (1952);
- ii) *A Course of Radonian Calculus* (1953) (this booklet will be obtained at Maruzen, Sapporo Japan);
- iii) *A Synthetic Light on the Distributions and their Stochasticity*, Mem. Muroran Univ. Eng. Vol. I, No.5 (1954).

Mathematical Seminar in the Muroran Univ. Eng., Hokkaido

(Received April 6, 1955)

On Numerical Differentiation

Masao Yoshida*

Abstract

In this report the writer investigates a practical method for numerical differentiation of a tabulated function, which does not employ the differences of the tabulated values. Short tables are added for convenience of practical applications.

It is frequently necessary to determine the derivatives of a function from their tabulated values. Up to the present, usual method for such a purpose depends mainly on the interpolation formulas containing the differences of the tabulated values. Since the construction of the tables of differences is very troublesome for the computers, it is rather desirable and convenient to express the derivative of a function approximately by a linear combination of the tabulated values whenever calculating machine is available.

The present writer, as outlined below, proposes a direct method for numerical differentiation which does not employ the differences of the tabulated values, basing on the Lagrange's interpolation formula.

Now, let $f(x)$ be a polynomial of n -th degree which assumes the values $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ respectively at the points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$; where x 's are all distinct. Then the polynomial $f(x)$ can be reduced to the form known as the Lagrange's interpolation formula

$$f(x) = \sum_{j=0}^n y_j \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

In the important case in which the values of the x 's are equally spaced so that

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

the formula becomes

* 吉田正夫

$$f(x) = \sum_{j=0}^n y_j (-1)^{n+j} \left[\binom{n}{j} / n! \right] s(s-1)(s-2)\cdots(s-j-1)(s-j+1)\cdots(s-n),$$

where we set $x = x_0 + hs$ and $\binom{n}{j}$ as usual denotes the binomial coefficient.

Differentiation of the above equation gives

$$f'(x) = \frac{1}{h} \frac{df}{ds} = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^n D_{nj}(s) y_j$$

where

$$D_{nj}(s) = (-1)^{n+j} \left[\binom{n}{j} / n! \right] \frac{d}{ds} \left[\prod_{k=0}^n (s-k) / (s-j) \right]$$

If the tables of the coefficients $D_{nj}(s)$ are prepared for the possible values of n , j , and s , the computations of the derivatives of the tabulated functions from their tabulated values will be much facilitated by the aid of calculating machines.

The writer has prepared short tables of the coefficients $D_{nj}(s)$ for $n=2, 3, 4, 5$ and for range from $s=0.00$ to $s=0.50$ at intervals of 0.01 .

These tables apply to the problems where equally spaced values of $x : x_0, x_1, x_2, \dots$ are given and the point x at which differentiation is to be made is nearer to x_0 , than to x_1 . If the point x is nearer to x_1 than to x_0 , the points are to be numbered \dots, x_2, x_1, x_0 .

In either case $s = (x - x_0) / (x_1 - x_0)$.

(Received May 31, 1955)

| s | D ₂₀ | D ₂₁ | D ₂₂ | s | D ₃₀ | D ₃₁ | D ₃₂ | D ₃₃ |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.00 | -1.50 | 2.00 | -0.50 | 0.00 | -1.83333 | 3.00000 | -1.50000 | 0.33333 |
| 0.01 | -1.49 | 1.98 | -0.49 | 0.01 | -1.81338 | 2.95015 | -1.46015 | 0.32338 |
| 0.02 | -1.48 | 1.96 | -0.48 | 0.02 | -1.79352 | 2.90060 | -1.42060 | 0.31353 |
| 0.03 | -1.47 | 1.94 | -0.47 | 0.03 | -1.77378 | 2.85135 | -1.38135 | 0.30378 |
| 0.04 | -1.46 | 1.92 | -0.46 | 0.04 | -1.75413 | 2.80240 | -1.34240 | 0.29413 |
| 0.05 | -1.45 | 1.90 | -0.45 | 0.05 | -1.73458 | 2.75375 | -1.30375 | 0.28458 |
| 0.06 | -1.44 | 1.88 | -0.44 | 0.06 | -1.71513 | 2.70540 | -1.26540 | 0.27513 |
| 0.07 | -1.43 | 1.86 | -0.43 | 0.07 | -1.69578 | 2.65735 | -1.22735 | 0.26578 |
| 0.08 | -1.42 | 1.84 | -0.42 | 0.08 | -1.67653 | 2.60960 | -1.18960 | 0.25653 |
| 0.09 | -1.41 | 1.82 | -0.41 | 0.09 | -1.65738 | 2.56215 | -1.15215 | 0.24738 |
| 0.10 | -1.40 | 1.80 | -0.40 | 0.10 | -1.63833 | 2.51500 | -1.11500 | 0.23833 |
| 0.11 | -1.39 | 1.78 | -0.39 | 0.11 | -1.61938 | 2.46815 | -1.07815 | 0.22938 |
| 0.12 | -1.38 | 1.76 | -0.38 | 0.12 | -1.60053 | 2.42160 | -1.04160 | 0.22053 |
| 0.13 | -1.37 | 1.74 | -0.37 | 0.13 | -1.58178 | 5.37535 | -1.00535 | 0.21178 |
| 0.14 | -1.36 | 1.72 | -0.36 | 0.14 | -1.56313 | 2.32940 | -0.96940 | 0.20313 |
| 0.15 | -1.35 | 1.70 | -0.35 | 0.15 | -1.54458 | 2.28375 | -0.93375 | 0.19458 |
| 0.16 | -1.34 | 1.68 | -0.34 | 0.16 | -1.52613 | 2.23840 | -0.89840 | 0.18613 |
| 0.17 | -1.33 | 1.66 | -0.33 | 0.17 | -1.50778 | 2.19335 | -0.86335 | 0.17778 |
| 0.18 | -1.32 | 1.64 | -0.32 | 0.18 | -1.48953 | 2.14860 | -0.82860 | 0.16953 |
| 0.19 | -1.31 | 1.62 | -0.31 | 0.19 | -1.47138 | 2.10415 | -0.79415 | 0.16138 |
| 0.20 | -1.30 | 1.60 | -0.30 | 0.20 | -1.45333 | 2.06000 | -0.76000 | 0.15333 |
| 0.21 | -1.29 | 1.58 | -0.29 | 0.21 | -1.43538 | 2.01615 | -0.72615 | 0.14538 |
| 0.22 | -1.28 | 1.56 | -0.28 | 0.22 | -1.41753 | 1.97260 | -0.69260 | 0.13753 |
| 0.23 | -1.27 | 1.54 | -0.27 | 0.23 | -1.39978 | 1.92935 | -0.65935 | 0.12978 |
| 0.24 | -1.26 | 1.52 | -0.26 | 0.24 | -1.38213 | 1.88640 | -0.62640 | 0.12213 |
| 0.25 | -1.25 | 1.50 | -0.25 | 0.25 | -1.36458 | 1.84375 | -0.59375 | 0.11458 |
| 0.26 | -1.24 | 1.48 | -0.24 | 0.26 | -1.34713 | 1.80140 | -0.56140 | 0.10713 |
| 0.27 | -1.23 | 1.46 | -0.23 | 0.27 | -1.32978 | 1.75935 | -0.52935 | 0.09978 |
| 0.28 | -1.22 | 1.44 | -0.22 | 0.28 | -1.31253 | 1.71760 | -0.49760 | 0.09253 |
| 0.29 | -1.21 | 1.42 | -0.21 | 0.29 | -1.29538 | 1.67615 | -0.46615 | 0.08538 |
| 0.30 | -1.20 | 1.40 | -0.20 | 0.30 | -1.27833 | 1.63500 | -0.43500 | 0.07833 |
| 0.31 | -1.19 | 1.38 | -0.19 | 0.31 | -1.26138 | 1.59415 | -0.40415 | 0.07138 |
| 0.32 | -1.18 | 1.36 | -0.18 | 0.32 | -1.24453 | 1.55360 | -0.37360 | 0.06453 |
| 0.33 | -1.17 | 1.34 | -0.17 | 0.33 | -1.22778 | 1.51335 | -0.34335 | 0.05778 |
| 0.34 | -1.16 | 1.32 | -0.16 | 0.34 | -1.21113 | 1.47340 | -0.31340 | 0.05113 |
| 0.35 | -1.15 | 1.30 | -0.15 | 0.35 | -1.19458 | 1.43375 | -0.28375 | 0.04458 |
| 0.36 | -1.14 | 1.28 | -0.14 | 0.36 | -1.17813 | 1.39440 | -0.25440 | 0.03813 |
| 0.37 | -1.13 | 1.26 | -0.13 | 0.37 | -1.16178 | 1.35535 | -0.22535 | 0.03178 |
| 0.38 | -1.12 | 1.24 | -0.12 | 0.38 | -1.14553 | 1.31660 | -0.19660 | 0.02553 |
| 0.39 | -1.11 | 1.22 | -0.11 | 0.39 | -1.12938 | 1.27815 | -0.16815 | 0.01938 |
| 0.40 | -1.10 | 1.20 | -0.10 | 0.40 | -1.11333 | 1.24000 | -0.14000 | 0.01333 |
| 0.41 | -1.09 | 1.18 | -0.09 | 0.41 | -1.09738 | 1.20215 | -0.11215 | 0.00738 |
| 0.42 | -1.08 | 1.16 | -0.08 | 0.42 | -1.08153 | 1.16460 | -0.08460 | 0.00153 |
| 0.43 | -1.07 | 1.14 | -0.07 | 0.43 | -1.06578 | 1.12735 | -0.05735 | -0.00422 |
| 0.44 | -1.06 | 1.12 | -0.06 | 0.44 | -1.05013 | 1.09040 | -0.03040 | -0.00987 |
| 0.45 | -1.05 | 1.10 | -0.05 | 0.45 | -1.03458 | 1.05375 | -0.00375 | -0.01542 |
| 0.46 | -1.04 | 1.08 | -0.04 | 0.46 | -1.01913 | 1.01740 | 0.02260 | -0.02087 |
| 0.47 | -1.03 | 1.06 | -0.03 | 0.47 | -1.00378 | 0.98135 | 0.04865 | -0.02622 |
| 0.48 | -1.02 | 1.04 | -0.02 | 0.48 | -0.98853 | 0.94560 | 0.07440 | -0.03147 |
| 0.49 | -1.01 | 1.02 | -0.01 | 0.49 | -0.97338 | 0.91015 | 0.09985 | -0.03662 |
| 0.50 | -1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.50 | -0.95833 | 0.87500 | 0.12500 | -0.04167 |

| s | D ₄₀ | D ₄₁ | D ₄₂ | D ₄₃ | D ₄₄ |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.00 | -2.08333 33 | 4.00000 00 | -3.00000 00 | 1.33333 33 | -0.25000 00 |
| 0.01 | -2.05429 15 | 3.91378 27 | -2.90559 90 | 1.28701 60 | -0.24090 82 |
| 0.02 | -2.02549 87 | 3.82846 13 | -2.80239 20 | 1.24139 47 | -0.23196 53 |
| 0.03 | -1.99695 38 | 3.74403 20 | -2.71037 30 | 1.96465 33 | -0.22317 05 |
| 0.04 | -1.96865 60 | 3.66049 07 | -2.61953 60 | 1.15222 40 | -0.21452 27 |
| 0.05 | -1.94060 42 | 3.57783 33 | -2.52987 50 | 1.10866 67 | -0.20602 08 |
| 0.06 | -1.91279 73 | 3.49505 60 | -2.44138 40 | 1.06578 93 | -0.19766 40 |
| 0.07 | -1.88523 45 | 3.41515 47 | -2.35405 70 | 1.02358 80 | -0.18945 12 |
| 0.08 | -1.85791 47 | 3.33512 53 | -2.26788 80 | 0.98205 87 | -0.18138 13 |
| 0.09 | -1.83083 68 | 3.25596 40 | -2.18287 10 | 0.94119 73 | -0.17345 35 |
| 0.10 | -1.80400 00 | 3.17766 67 | -2.09900 00 | 0.90100 00 | -0.16566 67 |
| 0.11 | -1.77740 32 | 3.10022 93 | -2.01626 90 | 0.86146 27 | -0.15801 98 |
| 0.12 | -1.75104 53 | 3.02364 80 | -1.93467 20 | 0.82258 13 | -0.15051 20 |
| 0.13 | -1.72492 55 | 2.94791 87 | -1.85420 30 | 0.78435 20 | -0.14314 22 |
| 0.14 | -1.69904 27 | 2.87303 73 | -1.77485 60 | 0.74677 07 | -0.13590 93 |
| 0.15 | -1.67339 58 | 2.79900 00 | -1.69662 50 | 0.70933 33 | -0.12881 25 |
| 0.16 | -1.64798 40 | 2.72580 27 | -1.61950 40 | 0.67353 60 | -0.12185 07 |
| 0.17 | -1.62280 62 | 2.65344 13 | -1.54348 70 | 0.63787 47 | -0.11502 28 |
| 0.18 | -1.59786 13 | 2.58191 20 | -1.46856 80 | 0.60284 53 | -0.10832 80 |
| 0.19 | -1.57314 85 | 2.51121 07 | -1.39474 10 | 0.56844 40 | -0.10176 52 |
| 0.20 | -1.54866 67 | 2.44133 33 | -1.32000 00 | 0.53466 67 | -0.09533 33 |
| 0.21 | -1.52441 48 | 2.37227 60 | -1.25033 90 | 0.50150 93 | -0.08903 15 |
| 0.22 | -1.50039 20 | 2.30403 47 | -1.17975 20 | 0.46896 80 | -0.08285 87 |
| 0.23 | -1.47659 72 | 2.23660 53 | -1.11023 33 | 0.43703 87 | -0.07681 38 |
| 0.24 | -1.45302 93 | 2.16998 40 | -1.04177 60 | 0.40571 73 | -0.07089 60 |
| 0.25 | -1.42968 75 | 2.10416 67 | -0.97437 50 | 0.37500 00 | -0.06510 42 |
| 0.26 | -1.40657 07 | 2.03914 93 | -0.90802 40 | 0.34488 27 | -0.05943 73 |
| 0.27 | -1.38367 78 | 1.97492 80 | -0.84271 70 | 0.31536 13 | -0.05389 45 |
| 0.28 | -1.36100 80 | 1.91149 87 | -0.77344 80 | 0.28643 20 | -0.04847 47 |
| 0.29 | -1.33856 02 | 1.84885 73 | -0.71521 10 | 0.25809 07 | -0.04317 68 |
| 0.30 | -1.31633 33 | 1.78700 00 | -0.65300 00 | 0.23033 33 | -0.03800 00 |
| 0.31 | -1.29432 65 | 1.72592 27 | -0.59180 90 | 0.20315 60 | -0.03294 32 |
| 0.32 | -1.27253 87 | 1.66562 13 | -0.53163 20 | 0.17655 47 | -0.02800 53 |
| 0.33 | -1.25096 88 | 1.60609 20 | -0.47246 30 | 0.15052 53 | -0.02318 55 |
| 0.34 | -1.22961 60 | 1.54733 07 | -0.41429 60 | 0.12506 40 | -0.01848 27 |
| 0.35 | -1.20847 92 | 1.48933 33 | -0.35712 50 | 0.10016 67 | -0.01389 58 |
| 0.36 | -1.18755 73 | 1.43209 60 | -0.30094 40 | 0.07582 93 | -0.00942 40 |
| 0.37 | -1.16684 95 | 1.37561 47 | -0.24574 70 | 0.05204 80 | -0.00506 62 |
| 0.38 | -1.14635 47 | 1.31938 53 | -0.19152 80 | 0.02881 87 | -0.00082 13 |
| 0.39 | -1.12607 18 | 1.26490 40 | -0.13828 10 | 0.00613 73 | 0.00331 15 |
| 0.40 | -1.10600 00 | 1.21066 67 | -0.08600 00 | -0.01600 00 | 0.00733 33 |
| 0.41 | -1.08613 82 | 1.15716 93 | -0.03467 90 | -0.03759 73 | 0.01124 52 |
| 0.42 | -1.06648 53 | 1.10440 80 | 0.01568 80 | -0.05865 87 | 0.01504 80 |
| 0.43 | -1.04704 05 | 1.05237 87 | 0.06510 70 | -0.07918 80 | 0.01874 28 |
| 0.44 | -1.02780 27 | 1.00107 73 | 0.11358 40 | -0.09918 93 | 0.02233 07 |
| 0.45 | -1.00877 08 | 0.95050 00 | 0.16112 50 | -0.11866 67 | 0.02581 25 |
| 0.46 | -0.98994 40 | 0.90064 27 | 0.20773 60 | -0.13762 40 | 0.02918 93 |
| 0.47 | -0.97132 12 | 0.85150 13 | 0.25342 30 | -0.15606 53 | 0.03246 22 |
| 0.48 | -0.95290 13 | 0.80307 20 | 0.29819 20 | -0.17399 47 | 0.03563 20 |
| 0.49 | -0.93468 35 | 0.75535 07 | 0.34204 90 | -0.19141 60 | 0.03869 98 |
| 0.50 | -0.91666 67 | 0.70833 33 | 0.38500 00 | -0.20833 33 | 0.04166 67 |

| s | D ₃₀ | D ₃₁ | D ₃₂ | D ₃₃ | D ₃₄ | D ₃₅ |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0.00 | -2.28333 33 | 5.00000 00 | -5.00000 00 | 3.33333 33 | -1.25000 00 | 0.20000 00 |
| 0.01 | -2.24604 53 | 4.87255 18 | -4.82313 73 | 3.20455 43 | -1.19967 73 | 0.19175 38 |
| 0.02 | -2.20917 93 | 4.74686 47 | -4.64919 87 | 3.07820 14 | -1.15036 87 | 0.18368 07 |
| 0.03 | -2.17273 24 | 4.62292 47 | -4.47815 83 | 2.95425 07 | -1.10206 32 | 0.17577 85 |
| 0.04 | -2.13670 14 | 4.50071 79 | -4.30999 04 | 2.83267 84 | -1.05474 99 | 0.16804 54 |
| 0.05 | -2.10103 36 | 4.38023 05 | -4.14466 93 | 2.71346 09 | -1.00841 80 | 0.16047 94 |
| 0.06 | -2.05687 59 | 4.26144 87 | -3.98216 94 | 2.59657 47 | -0.96305 67 | 0.15307 85 |
| 0.07 | -2.03107 53 | 4.14435 88 | -3.82246 53 | 2.48199 63 | -0.91865 53 | 0.14584 08 |
| 0.08 | -1.99667 90 | 4.02894 72 | -3.66553 17 | 2.36970 24 | -0.87520 32 | 0.13876 44 |
| 0.09 | -1.96268 41 | 3.91520 02 | -3.51134 33 | 2.25966 97 | -0.83268 97 | 0.13184 72 |
| 0.10 | -1.92908 75 | 3.80310 42 | -3.35987 50 | 2.15187 50 | -0.79110 42 | 0.12508 75 |
| 0.11 | -1.89588 64 | 3.69264 57 | -3.21110 17 | 2.04629 53 | -0.75043 62 | 0.11848 33 |
| 0.12 | -1.86307 80 | 3.58381 12 | -3.06499 84 | 1.94290 77 | -0.71067 52 | 0.11203 26 |
| 0.13 | -1.83065 92 | 3.47658 73 | -2.92154 03 | 1.84168 93 | -0.67181 08 | 0.10573 37 |
| 0.14 | -1.79862 73 | 3.37096 07 | -2.78070 27 | 1.74261 74 | -0.63383 27 | 0.09958 47 |
| 0.15 | -1.76697 94 | 3.26691 80 | -2.64246 09 | 1.64566 93 | -0.59673 05 | 0.09358 36 |
| 0.16 | -1.73571 26 | 3.16444 59 | -2.50679 04 | 1.55082 24 | -0.56049 39 | 0.08772 86 |
| 0.17 | -1.70482 41 | 3.05353 12 | -2.37366 67 | 1.45805 43 | -0.52511 27 | 0.08201 80 |
| 0.18 | -1.67431 11 | 2.96416 07 | -2.24306 54 | 1.36734 27 | -0.49057 67 | 0.07644 97 |
| 0.19 | -1.64417 06 | 2.86632 13 | -2.11496 23 | 1.27866 53 | -0.45687 42 | 0.07102 21 |
| 0.20 | -1.61440 00 | 2.77000 00 | -1.98933 33 | 1.19200 00 | -0.42400 00 | 0.06573 33 |
| 0.21 | -1.58499 64 | 2.67518 37 | -1.86615 43 | 1.10732 47 | -0.39193 92 | 0.06058 15 |
| 0.22 | -1.55595 69 | 2.58185 94 | -1.74540 14 | 1.02461 74 | -0.36068 34 | 0.05556 49 |
| 0.23 | -1.52727 89 | 2.49001 42 | -1.62705 07 | 0.94385 63 | -0.33022 27 | 0.05065 18 |
| 0.24 | -1.49895 96 | 2.39963 52 | -1.51107 84 | 0.86501 97 | -0.30054 72 | 0.04550 02 |
| 0.25 | -1.47099 61 | 2.31070 96 | -1.39746 09 | 0.78808 59 | -0.27164 71 | 0.04127 86 |
| 0.26 | -1.44338 57 | 2.22322 47 | -1.28617 47 | 0.71303 34 | -0.24351 27 | 0.03678 51 |
| 0.27 | -1.41612 58 | 2.13716 77 | -1.17719 63 | 0.63984 07 | -0.21613 42 | 0.03241 79 |
| 0.28 | -1.38921 34 | 2.05252 59 | -1.07050 24 | 0.56848 64 | -0.18950 19 | 0.02817 54 |
| 0.29 | -1.36264 60 | 1.96928 67 | -0.96606 97 | 0.49894 93 | -0.16360 62 | 0.02405 59 |
| 0.30 | -1.33642 08 | 1.88743 75 | -0.86387 50 | 0.43120 83 | -0.13843 75 | 0.02005 75 |
| 0.31 | -1.31053 51 | 1.80696 58 | -0.76389 53 | 0.36524 23 | -0.11398 63 | 0.01617 86 |
| 0.32 | -1.28498 62 | 1.72785 92 | -0.66610 77 | 0.30103 04 | -0.09024 32 | 0.01241 76 |
| 0.33 | -1.25977 15 | 1.65010 52 | -0.57048 93 | 0.23855 17 | -0.06719 87 | 0.00877 26 |
| 0.34 | -1.23488 81 | 1.57369 14 | -0.47701 74 | 0.17778 54 | -0.04484 34 | 0.00524 21 |
| 0.35 | -1.21033 36 | 1.49860 55 | -0.38566 93 | 0.11871 09 | -0.02316 80 | 0.00182 44 |
| 0.36 | -1.18610 52 | 1.42483 52 | -0.29642 24 | 0.06130 77 | -0.00216 32 | -0.00148 22 |
| 0.37 | -1.16220 02 | 1.35236 83 | -0.20925 43 | 0.00555 53 | 0.01818 02 | -0.00467 93 |
| 0.38 | -1.13861 61 | 1.28119 27 | -0.12414 27 | -0.04856 66 | 0.03787 13 | -0.00776 85 |
| 0.39 | -1.11535 03 | 1.21129 62 | -0.04106 53 | -0.10107 83 | 0.05691 93 | -0.01075 16 |
| 0.40 | -1.09240 00 | 1.14266 67 | 0.04000 00 | -0.15200 00 | 0.07533 33 | -0.01363 00 |
| 0.41 | -1.06976 27 | 1.07529 22 | 0.11507 53 | -0.20135 17 | 0.09312 23 | -0.01640 54 |
| 0.42 | -1.04743 59 | 1.00916 07 | 0.19618 26 | -0.24915 33 | 0.10295 30 | -0.01907 95 |
| 0.43 | -1.02541 68 | 0.94426 03 | 0.27134 37 | -0.29542 47 | 0.12686 12 | -0.02165 37 |
| 0.44 | -1.00370 30 | 0.88057 92 | 0.34458 03 | -0.34018 56 | 0.14282 88 | -0.02412 96 |
| 0.45 | -0.98229 19 | 0.81810 55 | 0.41591 41 | -0.38345 57 | 0.15820 70 | -0.02650 89 |
| 0.46 | -0.96118 09 | 0.75682 74 | 0.48536 66 | -0.42525 46 | 0.17300 46 | -0.02879 31 |
| 0.47 | -0.94036 75 | 0.69673 32 | 0.55295 93 | -0.46560 17 | 0.18723 03 | -0.03098 36 |
| 0.48 | -0.91984 92 | 0.63781 12 | 0.61871 36 | -0.50451 63 | 0.20089 28 | -0.03308 22 |
| 0.49 | -0.89962 33 | 0.58004 98 | 0.68265 07 | -0.54201 77 | 0.21400 07 | -0.03509 02 |
| 0.50 | -0.87968 75 | 0.52343 75 | 0.74479 17 | -0.57812 50 | 0.22656 25 | -0.03700 92 |

On Term by Term Integration

Masao Yoshida

Abstract

In this note the writer proves some theorems on integration of a sequence of the functions integrable in the sense of Perron, analogous to those in the theory of the Lebesgue integral.

In the following arguments we treat, for simplicity, exclusively finite functions of a real variable, integrable in the sense of Perron and $\int_a^b f(x)dx$ denotes the Perron integral of the function $f(x)$ over a finite interval $[a, b]$. The results remain true for $n(\geq 2)$ dimensional integrals.

Theorem I. Let $\{f_n(x)\}$ be a sequence of the integrable functions defined on $[a, b]$ and converges to a function $f(x)$ as $n \rightarrow \infty$ almost everywhere in $[a, b]$. If there exist two functions $g(x)$ and $h(x)$ integrable over $[a, b]$ such that $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ for all n and x in $[a, b]$, then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Proof. We define functions $\varphi_n(x)$, $\varphi(x)$, and $\psi(x)$ by putting

$$\varphi_n(x) = f_n(x) - g(x), \quad \varphi(x) = f(x) - g(x), \quad (n=1, 2, \dots),$$

and

$$\psi(x) = h(x) - g(x).$$

Since the functions $\varphi_n(x)$ and $\psi(x)$ non-negative and integrable are summable over $[a, b]$ and satisfy the inequality $0 \leq \varphi_n(x) \leq \psi(x)$ for all n and x in $[a, b]$, the sequence $\{\varphi_n(x)\}$ converges as $n \rightarrow \infty$ to a summable function $\varphi(x)$ almost everywhere in $[a, b]$. Then, by Lebesgue's theorem, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_a^b \varphi_n(x) dx = (L) \int_a^b \varphi(x) dx$$

where $(L) \int_a^b \varphi_n(x) dx$ and $(L) \int_a^b \varphi(x) dx$ denote the Lebesgue integrals of $\varphi_n(x)$

and $\varphi(x)$ respectively.

Now, if we substitute $f_n(x) - g(x)$ and $f(x) - g(x)$ respectively for $\varphi_n(x)$ and for $\varphi(x)$ into the above equation, recalling that the summable function $\varphi_n(x)$ is integrable, and that the function $f(x)$ is also integrable as sum of the two integrable functions $\varphi(x)$ and $g(x)$, we can immediately obtain the desired result.

Corollary. If $\{f_n(x)\}$ is a uniformly bounded sequence of the integrable functions defined on $[a, b]$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ exists almost everywhere in $[a, b]$, then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Theorem II. Let $\{f_n(x)\}$ be a monotone sequence of the integrable functions defined on $[a, b]$ and converges to a integrable function $f(x)$ almost everywhere in $[a, b]$. Then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Proof. We first prove the theorem for a monotone increasing sequence $\{f_n(x)\}$. Putting

$$g_n(x) = f_n(x) - f_1(x) \quad (n=2, 3, \dots),$$

the sequence $\{g_n(x)\}$ of the integrable functions converges, by assumption, to a integrable function $g(x) = f(x) - f_1(x)$ almost everywhere in $[a, b]$ and the inequality $0 \leq g_n(x) \leq g(x)$ holds for $n=2, 3, \dots$ almost everywhere in $[a, b]$. Then by Theorem I. we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Substituting $f_n(x) - f_1(x)$ and $f(x) - f_1(x)$ respectively for $g_n(x)$ and for $g(x)$ into the above equation, we have at once

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

For a monotone decreasing sequence $\{f_n(x)\}$ we may proceed by precisely the same argument with $g_n(x) = f_1(x) - f_n(x)$, $n=2, 3, \dots$ and the result is true in this case.

Theorem III. Let $\{f_n(x)\}$ be a monotone sequence of the integrable functions defined on $[a, b]$. If $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ exists and is finite, then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

Proof. It is sufficient to prove the result in the case of a monotone increasing sequence. Define the functions $g_n(x)$ as follows :

$$g_n(x) = f_n(x) - f_1(x) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

The sequence $\{g_n(x)\}$ of the summable functions converges to a function $g(x) = f(x) - f_1(x)$, where $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Since $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ exists and is finite by assumption, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx$ also exists and is finite. Then by Fatou's lemma the function $g(x)$ is summable. Accordingly the function $f(x)$, as sum of the two integrable functions $g(x)$ and $f_1(x)$, must be integrable. It is clear that immediate application of Theorem II. proves the validity of the result.

Theorem IV. Let $\{f_n(x)\}$ be a monotone sequence of the measurable functions of the constant sign defined on $[a, b]$ such that the limit function $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ and $f_1(x)$ are integrable over $[a, b]$. Then we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Proof. For a monotone non-negative sequence inequality

$$0 \leq f_n(x) \leq 2f(x) + f_1(x)$$

holds for all n and x in $[a, b]$.

Since the functions $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) are measurable and the function $2f(x) + f_1(x)$, as the function non-negative and integrable, is summable. Then $f_n(x)$ are integrable. Accordingly by Theorem I. we have desired result.

In the case of a non-positive monotone sequence we may verify the result, using $\{-f_n(x)\}$ instead of $\{f_n(x)\}$.

(Received May 31, 1955)

A Numerical Table of the Laguerre Functions

Masao Yoshida*

By the Laguerre functions we mean the functions defined by the relation,

$$l_n(x) = (1/n!) \exp(-x/2) L_n(x),$$

where $L_n(x)$ is the Laguerre polynomial of the n -th degree.

In this report the present writer gives a table of the numerical values of the functions $l_n(x)$, $n=2, 3, 4, 5, 6$ and 7 ; from $x=0.00$ to $x=1.00$ at intervals of 0.01 , from $x=1.00$ to $x=5.00$ at intervals of 0.05 , and from $x=5.0$ to $x=10.0$ at intervals of 0.1 .

Numerical values of the $l_n(x)$ given in this table are correct to nine decimal places with the possible errors less than half one unit in the last place.

(Received May 31, 1955)

* 吉田正夫

| x | $l_2(x)$ | $l_3(x)$ | $l_4(x)$ | $l_5(x)$ | x |
|------|--------------|---------------|---------------|---------------|------|
| 0.00 | 1.00000 0000 | 1.00000 0000 | 1.00000 0000 | 1.00000 0000 | 0.00 |
| 0.01 | 0.97516 1980 | 0.96531 1191 | 0.95550 9821 | 0.94575 7705 | 0.01 |
| 0.02 | 0.95064 5850 | 0.93123 9553 | 0.91202 8633 | 0.89301 1782 | 0.02 |
| 0.03 | 0.92644 8524 | 0.89777 7333 | 0.87939 1730 | 0.84173 3988 | 0.03 |
| 0.04 | 0.90256 6938 | 0.86491 6854 | 0.82803 0122 | 0.79189 6495 | 0.04 |
| 0.05 | 0.87899 8058 | 0.83265 0512 | 0.78748 1732 | 0.74347 1886 | 0.05 |
| 0.06 | 0.85573 8871 | 0.80097 0807 | 0.74788 0199 | 0.69643 3147 | 0.06 |
| 0.07 | 0.83278 6391 | 0.76987 0278 | 0.70921 0464 | 0.65075 3665 | 0.07 |
| 0.08 | 0.81013 7655 | 0.73934 1564 | 0.67145 7666 | 0.60640 7224 | 0.08 |
| 0.09 | 0.78778 9725 | 0.70937 7377 | 0.63365 1128 | 0.56336 7996 | 0.09 |
| 0.10 | 0.76573 9687 | 0.67997 0497 | 0.59864 4348 | 0.52161 0539 | 0.10 |
| 0.11 | 0.74398 4651 | 0.65111 3793 | 0.56355 5021 | 0.48110 9791 | 0.11 |
| 0.12 | 0.72252 1750 | 0.62280 0187 | 0.52932 5009 | 0.44184 1067 | 0.12 |
| 0.13 | 0.70134 8143 | 0.59502 2690 | 0.49594 0363 | 0.40378 0520 | 0.13 |
| 0.14 | 0.68046 1010 | 0.56777 4378 | 0.46338 7303 | 0.36690 2797 | 0.14 |
| 0.15 | 0.65985 7555 | 0.54104 8404 | 0.43165 2227 | 0.33118 5718 | 0.15 |
| 0.16 | 0.63953 5005 | 0.51483 7987 | 0.40072 1704 | 0.29660 5584 | 0.16 |
| 0.17 | 0.61949 0510 | 0.49136 4119 | 0.37058 2477 | 0.26313 9529 | 0.17 |
| 0.18 | 0.59972 1644 | 0.46393 7060 | 0.34122 1454 | 0.23076 4997 | 0.18 |
| 0.19 | 0.58022 5401 | 0.43923 3341 | 0.31262 5713 | 0.19945 9833 | 0.19 |
| 0.20 | 0.56099 2199 | 0.41501 8762 | 0.28478 2497 | 0.16920 2184 | 0.20 |
| 0.21 | 0.54204 0379 | 0.39128 6890 | 0.25767 9211 | 0.13997 0541 | 0.21 |
| 0.22 | 0.52334 6302 | 0.36803 1357 | 0.23130 3424 | 0.11174 3727 | 0.22 |
| 0.23 | 0.50491 4352 | 0.34524 5866 | 0.20564 2864 | 0.08450 0891 | 0.23 |
| 0.24 | 0.48674 1936 | 0.32292 4183 | 0.18068 5418 | 0.05822 1506 | 0.24 |
| 0.25 | 0.46882 6480 | 0.30106 0141 | 0.15641 9129 | 0.03288 5362 | 0.25 |
| 0.26 | 0.45116 5432 | 0.27964 7637 | 0.13283 2195 | 0.00847 2566 | 0.26 |
| 0.27 | 0.43375 6264 | 0.25868 0633 | 0.10991 2967 | -0.01503 6466 | 0.27 |
| 0.28 | 0.41659 6466 | 0.23815 3154 | 0.08764 9949 | -0.03766 1012 | 0.28 |
| 0.29 | 0.39968 3551 | 0.21805 9289 | 0.06603 1794 | -0.05942 0046 | 0.29 |
| 0.30 | 0.38301 5049 | 0.19839 3189 | 0.04504 7304 | -0.08033 2199 | 0.30 |
| 0.31 | 0.36658 8517 | 0.17914 9066 | 0.02468 5426 | -0.10041 5983 | 0.31 |
| 0.32 | 0.35040 1526 | 0.16032 1196 | 0.00493 5253 | -0.11968 9357 | 0.32 |
| 0.33 | 0.33445 1672 | 0.14190 3914 | -0.01421 3977 | -0.13817 0167 | 0.33 |
| 0.34 | 0.31873 6568 | 0.12389 1616 | -0.03277 2885 | -0.15587 5930 | 0.34 |
| 0.35 | 0.30325 3849 | 0.10627 8757 | -0.05075 1954 | -0.17282 3885 | 0.35 |
| 0.36 | 0.28800 1169 | 0.08905 9851 | -0.06816 1524 | -0.18903 0994 | 0.36 |
| 0.37 | 0.27297 6202 | 0.07222 9473 | -0.08501 1798 | -0.20451 3946 | 0.37 |
| 0.38 | 0.25817 6642 | 0.05578 2253 | -0.10131 2853 | -0.21928 9161 | 0.38 |
| 0.39 | 0.24360 0201 | 0.03971 2881 | -0.11707 4615 | -0.23337 2792 | 0.39 |
| 0.40 | 0.22924 4611 | 0.02401 6102 | -0.13230 6890 | -0.24678 0732 | 0.40 |
| 0.41 | 0.21510 7624 | 0.00868 6720 | -0.14701 9347 | -0.25952 8614 | 0.41 |
| 0.42 | 0.20118 7010 | -0.00628 0407 | -0.16122 1526 | -0.27163 1814 | 0.42 |
| 0.43 | 0.18748 0558 | -0.02089 0364 | -0.17492 2842 | -0.28310 5459 | 0.43 |
| 0.44 | 0.17398 6075 | -0.03514 8183 | -0.18813 2577 | -0.29396 4426 | 0.44 |
| 0.45 | 0.16070 1389 | -0.04905 8840 | -0.20085 9893 | -0.30422 3344 | 0.45 |
| 0.46 | 0.14762 4343 | -0.06262 7257 | -0.21311 3823 | -0.31389 6604 | 0.46 |
| 0.47 | 0.13475 2801 | -0.07585 8304 | -0.22490 3282 | -0.32299 8355 | 0.47 |
| 0.48 | 0.12208 4644 | -0.08875 6795 | -0.23623 7059 | -0.33154 2512 | 0.48 |
| 0.49 | 0.10961 7771 | -0.10132 7495 | -0.24712 3825 | -0.33954 2755 | 0.49 |
| 0.50 | 0.09735 0098 | -0.11357 5114 | -0.25757 2134 | -0.34701 2536 | 0.50 |

| x | $l_2(x)$ | $l_3(x)$ | $l_4(x)$ | $l_5(x)$ | x |
|------|---------------|---------------|---------------|---------------|------|
| 0.50 | 0.09735 0098 | -0.11357 5114 | -0.25757 2134 | -0.34701 2536 | 0.50 |
| 0.51 | 0.08527 9561 | -0.12550 4314 | -0.26759 0419 | -0.35396 5081 | 0.51 |
| 0.52 | 0.07340 4111 | -0.13711 9702 | -0.27718 7000 | -0.36041 3391 | 0.52 |
| 0.53 | 0.06172 1719 | -0.14842 5834 | -0.28637 0080 | -0.36637 0246 | 0.53 |
| 0.54 | 0.05023 0371 | -0.15942 7227 | -0.29514 7750 | -0.37184 8211 | 0.54 |
| 0.55 | 0.03892 8071 | -0.17012 8331 | -0.30352 7938 | -0.37685 9634 | 0.55 |
| 0.56 | 0.02781 2842 | -0.18053 3558 | -0.30933 9464 | -0.38141 6652 | 0.56 |
| 0.57 | 0.01688 2720 | -0.19064 7270 | -0.31912 7526 | -0.38553 1193 | 0.57 |
| 0.58 | 0.00613 5761 | -0.20047 3777 | -0.32636 2234 | -0.38921 4980 | 0.58 |
| 0.59 | -0.00442 9963 | -0.21001 7346 | -0.33323 0325 | -0.39247 9530 | 0.59 |
| 0.60 | -0.01481 6364 | -0.21928 2193 | -0.33973 9236 | -0.39533 6162 | 0.60 |
| 0.61 | -0.02502 5339 | -0.22827 2489 | -0.34589 6298 | -0.39779 5996 | 0.61 |
| 0.62 | -0.03505 8765 | -0.23699 2358 | -0.35170 8738 | -0.39986 9959 | 0.62 |
| 0.63 | -0.04491 8505 | -0.24544 5878 | -0.35718 3828 | -0.40156 8781 | 0.63 |
| 0.64 | -0.05460 6408 | -0.25363 7081 | -0.36232 8154 | -0.40290 3008 | 0.64 |
| 0.65 | -0.06412 4303 | -0.26156 9955 | -0.36714 9076 | -0.40388 2993 | 0.65 |
| 0.66 | -0.07347 4006 | -0.26924 8441 | -0.37165 3275 | -0.40451 8910 | 0.66 |
| 0.67 | -0.08265 7316 | -0.27667 6438 | -0.37584 7477 | -0.40482 0745 | 0.67 |
| 0.68 | -0.09167 6018 | -0.28385 7801 | -0.37973 8312 | -0.40479 8311 | 0.68 |
| 0.69 | -0.10053 1879 | -0.29079 6339 | -0.38333 2316 | -0.40446 1238 | 0.69 |
| 0.70 | -0.10922 6654 | -0.29749 5822 | -0.38663 5929 | -0.40381 8985 | 0.70 |
| 0.71 | -0.11776 2080 | -0.30395 9973 | -0.38965 5498 | -0.40288 0837 | 0.71 |
| 0.72 | -0.12613 9880 | -0.31019 2476 | -0.39239 7277 | -0.40165 5911 | 0.72 |
| 0.73 | -0.13436 1762 | -0.31619 6971 | -0.39486 7431 | -0.40015 3154 | 0.73 |
| 0.74 | -0.14242 9419 | -0.32197 7059 | -0.39707 2033 | -0.39838 1351 | 0.74 |
| 0.75 | -0.15034 4530 | -0.32753 6297 | -0.39901 7067 | -0.39634 9122 | 0.75 |
| 0.76 | -0.15810 8758 | -0.33287 8203 | -0.40070 8429 | -0.39406 4928 | 0.76 |
| 0.77 | -0.16572 3752 | -0.33800 6255 | -0.40215 1928 | -0.39153 7070 | 0.77 |
| 0.78 | -0.17319 1148 | -0.34292 3890 | -0.40335 3288 | -0.38877 3694 | 0.78 |
| 0.79 | -0.18051 2567 | -0.34763 4507 | -0.40431 8134 | -0.38578 2793 | 0.79 |
| 0.80 | -0.18768 9613 | -0.35214 1464 | -0.40504 7591 | -0.38257 2207 | 0.80 |
| 0.81 | -0.19472 3880 | -0.35644 8082 | -0.40556 0496 | -0.37914 2958 | 0.81 |
| 0.82 | -0.20161 6946 | -0.36055 7641 | -0.40584 8846 | -0.37552 2600 | 0.82 |
| 0.83 | -0.20837 0376 | -0.36447 3387 | -0.40592 2418 | -0.37169 8521 | 0.83 |
| 0.84 | -0.21498 5719 | -0.36819 8525 | -0.40578 6439 | -0.36768 4648 | 0.84 |
| 0.85 | -0.22146 4515 | -0.37173 6224 | -0.40544 6058 | -0.36348 8096 | 0.85 |
| 0.86 | -0.22780 8285 | -0.37508 9615 | -0.40490 6346 | -0.35911 5839 | 0.86 |
| 0.87 | -0.23401 8540 | -0.37826 1795 | -0.40417 2296 | -0.35457 4717 | 0.87 |
| 0.88 | -0.24009 6778 | -0.38125 5822 | -0.40324 8824 | -0.34987 1433 | 0.88 |
| 0.89 | -0.24604 4481 | -0.38407 4719 | -0.40214 0773 | -0.34501 2558 | 0.89 |
| 0.90 | -0.25186 3120 | -0.38672 1474 | -0.40085 2908 | -0.34000 4532 | 0.90 |
| 0.91 | -0.25755 4153 | -0.38919 9039 | -0.39938 9923 | -0.33485 3664 | 0.91 |
| 0.92 | -0.26311 9023 | -0.39151 0333 | -0.39775 6439 | -0.32956 6138 | 0.92 |
| 0.93 | -0.26855 9164 | -0.39365 8238 | -0.39595 7003 | -0.32414 8012 | 0.93 |
| 0.94 | -0.27387 5994 | -0.39564 5603 | -0.39399 6092 | -0.31860 5219 | 0.94 |
| 0.95 | -0.27907 0919 | -0.39747 5243 | -0.39187 8115 | -0.31294 3571 | 0.95 |
| 0.96 | -0.28414 5334 | -0.39914 9940 | -0.38960 7409 | -0.30716 8761 | 0.96 |
| 0.97 | -0.28910 0619 | -0.40067 2442 | -0.38718 8242 | -0.30128 6363 | 0.97 |
| 0.98 | -0.29393 8144 | -0.40204 5465 | -0.38462 4817 | -0.29530 1834 | 0.98 |
| 0.99 | -0.29865 9266 | -0.40327 1692 | -0.38192 1267 | -0.28922 0517 | 0.99 |
| 1.00 | -0.30326 5330 | -0.40435 3773 | -0.37909 1662 | -0.28304 7641 | 1.00 |

| x | $l_2(x)$ | $l_3(x)$ | $l_4(x)$ | $l_5(x)$ | x |
|------|---------------|---------------|---------------|---------------|------|
| 1.00 | -0.30326 5330 | -0.40435 3773 | -0.37908 1662 | -0.28304 7641 | 1.00 |
| 1.05 | -0.32461 6006 | -0.40769 2563 | -0.36298 0682 | -0.25098 5235 | 1.05 |
| 1.10 | -0.34328 5137 | -0.40780 7358 | -0.34405 2000 | -0.21735 6706 | 1.10 |
| 1.15 | -0.35942 7735 | -0.40499 5106 | -0.32273 4542 | -0.18269 7146 | 1.15 |
| 1.20 | -0.37319 1913 | -0.39953 4871 | -0.29943 1629 | -0.14748 5444 | 1.20 |
| 1.25 | -0.38471 9152 | -0.39168 8702 | -0.27451 3145 | -0.11214 4413 | 1.25 |
| 1.30 | -0.39414 4561 | -0.38170 2470 | -0.24831 7599 | -0.07704 7127 | 1.30 |
| 1.35 | -0.40159 7127 | -0.36980 6673 | -0.22115 4080 | -0.04252 0404 | 1.35 |
| 1.40 | -0.40719 9949 | -0.35621 7191 | -0.19330 4106 | -0.00884 8488 | 1.40 |
| 1.45 | -0.41107 0478 | -0.34113 6028 | -0.16502 3381 | +0.02372 3518 | 1.45 |
| 1.50 | -0.41332 0734 | -0.32475 2005 | -0.13654 3457 | 0.05498 6419 | 1.50 |
| 1.55 | -0.41405 7523 | -0.30724 1432 | -0.10807 3309 | 0.08476 3916 | 1.55 |
| 1.60 | -0.41338 2647 | -0.28876 8748 | -0.07980 0824 | 0.11290 9779 | 1.60 |
| 1.65 | -0.41139 3099 | -0.26948 7131 | -0.05189 4213 | 0.13930 5212 | 1.65 |
| 1.70 | -0.40818 1260 | -0.24953 9084 | -0.02450 3342 | 0.16385 6388 | 1.70 |
| 1.75 | -0.40383 5082 | -0.22905 6995 | +0.00223 9005 | 0.18649 2153 | 1.75 |
| 1.80 | -0.39343 8267 | -0.20816 3666 | 0.02821 5934 | 0.20716 1878 | 1.80 |
| 1.85 | -0.39207 0441 | -0.18697 2825 | 0.05332 5318 | 0.22583 3465 | 1.85 |
| 1.90 | -0.33480 7318 | -0.16558 9615 | 0.07747 8730 | 0.24249 1488 | 1.90 |
| 1.95 | -0.37672 0863 | -0.14411 1054 | 0.10060 0442 | 0.25713 5466 | 1.95 |
| 2.00 | -0.36787 9441 | -0.12262 6480 | 0.12262 6480 | 0.26977 8257 | 2.00 |
| 2.05 | -0.35834 7970 | -0.10121 7978 | 0.14350 3730 | 0.28044 4567 | 2.05 |
| 2.10 | -0.34818 8060 | -0.07996 0776 | 0.16318 9100 | 0.28916 9572 | 2.10 |
| 2.15 | -0.33745 8156 | -0.05392 0776 | 0.18164 8709 | 0.29599 7639 | 2.15 |
| 2.20 | -0.32621 3662 | -0.03816 9218 | 0.19885 7185 | 0.30094 7859 | 2.20 |
| 2.25 | -0.31450 7078 | -0.01775 4432 | 0.21479 6921 | 0.30417 9388 | 2.25 |
| 2.30 | -0.30238 8115 | +0.00226 9230 | 0.22945 7432 | 0.30565 7574 | 2.30 |
| 2.35 | -0.28990 3817 | 0.02185 5377 | 0.24283 4738 | 0.30548 5900 | 2.35 |
| 2.40 | -0.27709 8675 | 0.04096 2413 | 0.25493 0781 | 0.30374 8339 | 2.40 |
| 2.45 | -0.26401 4733 | 0.05955 3254 | 0.26575 2876 | 0.30049 3665 | 2.45 |
| 2.50 | -0.25069 1697 | 0.07759 5049 | 0.27531 3203 | 0.29583 1125 | 2.50 |
| 2.55 | -0.23716 7034 | 0.09505 8922 | 0.28362 8327 | 0.28983 3404 | 2.55 |
| 2.60 | -0.22347 6070 | 0.11191 9723 | 0.29071 8748 | 0.28258 4219 | 2.60 |
| 2.65 | -0.20965 2084 | 0.12815 5789 | 0.29660 8484 | 0.27416 8143 | 2.65 |
| 2.70 | -0.19572 6397 | 0.14374 8725 | 0.30132 4676 | 0.26467 0113 | 2.70 |
| 2.75 | -0.18172 8459 | 0.15868 3184 | 0.30489 7227 | 0.25417 4937 | 2.75 |
| 2.80 | -0.16768 5935 | 0.17294 6671 | 0.30735 8456 | 0.24276 7149 | 2.80 |
| 2.85 | -0.15362 4731 | 0.18652 9345 | 0.30874 2781 | 0.23053 0145 | 2.85 |
| 2.90 | -0.13956 9321 | 0.19942 3840 | 0.30908 6427 | 0.21754 6369 | 2.90 |
| 2.95 | -0.12554 2326 | 0.21162 5089 | 0.30842 7147 | 0.20389 6777 | 2.95 |
| 3.00 | -0.11156 5080 | 0.22313 0160 | 0.30680 3970 | 0.18966 0636 | 3.00 |
| 3.05 | -0.09765 7449 | 0.23393 8102 | 0.30425 6963 | 0.17491 5304 | 3.05 |
| 3.10 | -0.08333 7950 | 0.24404 9795 | 0.30082 7013 | 0.15973 6039 | 3.10 |
| 3.15 | -0.07012 3808 | 0.25346 7810 | 0.29655 5624 | 0.14419 5832 | 3.15 |
| 3.20 | -0.05653 1025 | 0.26219 6278 | 0.29148 4733 | 0.12836 5268 | 3.20 |
| 3.25 | -0.04307 4429 | 0.27024 0763 | 0.28565 6537 | 0.11231 2407 | 3.25 |
| 3.30 | -0.02976 7736 | 0.27760 8143 | 0.27911 3334 | 0.09610 2687 | 3.30 |
| 3.35 | -0.01662 3601 | 0.28430 6501 | 0.27189 7383 | 0.07979 8842 | 3.35 |
| 3.40 | -0.00365 3670 | 0.29034 5014 | 0.26405 0766 | 0.06346 0846 | 3.40 |
| 3.45 | +0.00393 0924 | 0.29573 3859 | 0.25561 5273 | 0.04714 5866 | 3.45 |
| 3.50 | 0.02172 1743 | 0.30043 4111 | 0.24663 2290 | 0.03090 8230 | 3.50 |

| x | $l_2(x)$ | $l_3(x)$ | $l_4(x)$ | $l_5(x)$ | x |
|------|--------------|---------------|---------------|---------------|------|
| 3.50 | 0.02172 1743 | 0.30048 4111 | 0.24663 2290 | 0.03090 8230 | 3.50 |
| 3.55 | 0.03410 8544 | 0.30460 7661 | 0.23714 2700 | 0.01479 9414 | 3.55 |
| 3.60 | 0.04628 3689 | 0.30811 7128 | 0.22718 8679 | -0.01131 9668 | 3.60 |
| 3.65 | 0.05823 9874 | 0.31102 5731 | 0.21680 4186 | -0.01684 0146 | 3.65 |
| 3.70 | 0.06997 0539 | 0.31334 7466 | 0.20603 3755 | -0.03228 2192 | 3.70 |
| 3.75 | 0.08146 9826 | 0.31509 6533 | 0.19491 3564 | -0.04741 7985 | 3.75 |
| 3.80 | 0.09273 2544 | 0.31628 7773 | 0.18348 0811 | -0.06221 0176 | 3.80 |
| 3.85 | 0.10375 4132 | 0.31693 6355 | 0.17177 1781 | -0.07662 4150 | 3.85 |
| 3.90 | 0.11453 0628 | 0.31705 7769 | 0.15982 1800 | -0.09062 7979 | 3.90 |
| 3.95 | 0.12505 8633 | 0.31666 7769 | 0.14766 5199 | -0.10419 2364 | 3.95 |
| 4.00 | 0.13533 5283 | 0.31578 2327 | 0.13533 5283 | -0.11729 0579 | 4.00 |
| 4.05 | 0.14535 8220 | 0.31441 7584 | 0.12286 4303 | -0.12989 8407 | 4.05 |
| 4.10 | 0.15512 5559 | 0.31258 9802 | 0.11028 3437 | -0.14199 4073 | 4.10 |
| 4.15 | 0.16463 5866 | 0.31031 5326 | 0.09762 2771 | -0.15355 8173 | 4.15 |
| 4.20 | 0.17388 8128 | 0.30761 0548 | 0.08491 1287 | -0.16457 3602 | 4.20 |
| 4.25 | 0.18288 1733 | 0.30449 1864 | 0.07217 6857 | -0.17502 5477 | 4.25 |
| 4.30 | 0.19161 6440 | 0.30097 5650 | 0.05944 6234 | -0.18490 1060 | 4.30 |
| 4.35 | 0.20009 2361 | 0.29707 8221 | 0.04674 5051 | -0.19418 9680 | 4.35 |
| 4.40 | 0.20830 9938 | 0.29281 5813 | 0.03410 8906 | -0.20288 2651 | 4.40 |
| 4.45 | 0.21626 9921 | 0.28820 4548 | 0.02152 7958 | -0.21097 3197 | 4.45 |
| 4.50 | 0.22397 3352 | 0.28326 0416 | 0.00905 7746 | -0.21845 6362 | 4.50 |
| 4.55 | 0.23142 1540 | 0.27799 9247 | -0.00329 1616 | -0.22532 8936 | 4.55 |
| 4.60 | 0.23861 6048 | 0.27243 6698 | -0.01550 0017 | -0.23158 9374 | 4.60 |
| 4.65 | 0.24555 8674 | 0.26658 8226 | -0.02754 8423 | -0.23723 7709 | 4.65 |
| 4.70 | 0.25225 1434 | 0.26046 9077 | -0.03941 8856 | -0.24227 5478 | 4.70 |
| 4.75 | 0.25869 6548 | 0.25409 4269 | -0.05109 4385 | -0.24670 5642 | 4.75 |
| 4.80 | 0.26489 6424 | 0.24747 8577 | -0.06255 9101 | -0.25053 2506 | 4.80 |
| 4.85 | 0.27085 3642 | 0.24063 6521 | -0.07379 8101 | -0.25376 1641 | 4.85 |
| 4.90 | 0.27657 0945 | 0.23358 2356 | -0.08479 7471 | -0.25639 9812 | 4.90 |
| 4.95 | 0.28205 1221 | 0.22633 0061 | -0.09554 4259 | -0.25845 4899 | 4.95 |
| 5.0 | 0.28729 7495 | 0.21889 3330 | -0.10602 6457 | -0.25993 5829 | 5.0 |
| 5.1 | 0.29710 0739 | 0.20351 9862 | -0.12615 3620 | -0.26121 5713 | 5.1 |
| 5.2 | 0.30600 7142 | 0.18756 5543 | -0.14510 0862 | -0.26032 9090 | 5.2 |
| 5.3 | 0.31404 4642 | 0.17116 4381 | -0.16280 3651 | -0.25737 7912 | 5.3 |
| 5.4 | 0.32124 2351 | 0.15430 3857 | -0.17921 4701 | -0.25247 4444 | 5.4 |
| 5.5 | 0.32763 0289 | 0.13717 8535 | -0.19428 0766 | -0.24573 9364 | 5.5 |
| 5.6 | 0.33323 9143 | 0.11983 6363 | -0.20798 6630 | -0.23729 9999 | 5.6 |
| 5.7 | 0.33810 0056 | 0.10235 5526 | -0.22030 9496 | -0.22728 8688 | 5.7 |
| 5.8 | 0.34224 4429 | 0.08480 9123 | -0.23124 0585 | -0.21584 1273 | 5.8 |
| 5.9 | 0.34570 3757 | 0.06726 5245 | -0.24077 9876 | -0.20309 5719 | 5.9 |
| 6.0 | 0.34805 9479 | 0.04978 7068 | -0.24893 5342 | -0.18919 0860 | 6.0 |
| 6.1 | 0.35069 2835 | 0.03243 2970 | -0.25572 2208 | -0.17426 5257 | 6.1 |
| 6.2 | 0.35228 4763 | 0.01525 6663 | -0.26116 2239 | -0.15845 6185 | 6.2 |
| 6.3 | 0.35331 5786 | -0.00169 2659 | -0.26528 3055 | -0.14189 8723 | 6.3 |
| 6.4 | 0.35381 5931 | -0.01837 0167 | -0.26811 7473 | -0.12472 4953 | 6.4 |
| 6.5 | 0.35381 4646 | -0.03473 5228 | -0.26970 2888 | -0.10706 3262 | 6.5 |
| 6.6 | 0.35334 0744 | -0.05075 1238 | -0.27008 0682 | -0.08903 7737 | 6.6 |
| 6.7 | 0.35242 2337 | -0.06638 5445 | -0.26929 5661 | -0.07076 7648 | 6.7 |
| 6.8 | 0.35108 6800 | -0.08160 8770 | -0.26739 5539 | -0.05236 7021 | 6.8 |
| 6.9 | 0.34936 0729 | -0.09639 5625 | -0.26443 0437 | -0.03393 4284 | 6.9 |
| 7.0 | 0.34726 9909 | -0.11072 3739 | -0.26045 2432 | -0.01560 1981 | 7.0 |

| x | $l_2(x)$ | $l_3(x)$ | $l_4(x)$ | $l_5(x)$ | x |
|------|--------------|---------------|---------------|---------------|------|
| 7.0 | 0.34726 9909 | -0.11072 3739 | -0.26045 2432 | -0.01560 1981 | 7.0 |
| 7.1 | 0.34613 1908 | -0.12457 3975 | -0.25551 5125 | +0.00256 3432 | 7.1 |
| 7.2 | 0.34209 3004 | -0.13793 0151 | -0.24967 3246 | 0.02046 1752 | 7.2 |
| 7.3 | 0.33905 4275 | -0.15077 8870 | -0.24298 2291 | 0.03800 9117 | 7.3 |
| 7.4 | 0.33574 5490 | -0.16310 9345 | -0.23549 8183 | 0.05512 8058 | 7.4 |
| 7.5 | 0.33218 8161 | -0.17491 3235 | -0.22727 6966 | 0.07174 7498 | 7.5 |
| 7.6 | 0.32840 2931 | -0.18618 4478 | -0.21837 4527 | 0.08780 2715 | 7.6 |
| 7.7 | 0.32440 9581 | -0.19691 9143 | -0.20884 6338 | 0.10323 5259 | 7.7 |
| 7.8 | 0.32022 7038 | -0.20711 5237 | -0.19874 7231 | 0.11799 2854 | 7.8 |
| 7.9 | 0.31587 3383 | -0.21677 2642 | -0.18813 1193 | 0.13202 9251 | 7.9 |
| 8.0 | 0.31136 5861 | -0.22589 2880 | -0.17705 1176 | 0.14530 4067 | 8.0 |
| 8.1 | 0.30672 0905 | -0.23447 9029 | -0.16555 8946 | 0.15778 2613 | 8.1 |
| 8.2 | 0.30195 4146 | -0.24253 5580 | -0.15370 4935 | 0.16943 5675 | 8.2 |
| 8.3 | 0.29708 0429 | -0.25006 8311 | -0.14153 8120 | 0.18023 9312 | 8.3 |
| 8.4 | 0.29211 3836 | -0.25708 4169 | -0.12910 0820 | 0.19017 4625 | 8.4 |
| 8.5 | 0.28706 7707 | -0.26359 1156 | -0.11645 4097 | 0.19922 7525 | 8.5 |
| 8.6 | 0.28195 4656 | -0.26959 8222 | -0.10362 6703 | 0.20738 8441 | 8.6 |
| 8.7 | 0.27678 6596 | -0.27511 5164 | -0.09066 6002 | 0.21465 2171 | 8.7 |
| 8.8 | 0.27157 4759 | -0.28015 2527 | -0.07761 2432 | 0.22101 7524 | 8.8 |
| 8.9 | 0.26632 9720 | -0.28472 1517 | -0.06450 4570 | 0.22648 7122 | 8.9 |
| 9.0 | 0.26106 1418 | -0.28883 3909 | -0.05137 9109 | 0.23106 7127 | 9.0 |
| 9.1 | 0.25577 9183 | -0.29250 1979 | -0.03827 0848 | 0.23476 7000 | 9.1 |
| 9.2 | 0.25049 1746 | -0.29573 8409 | -0.02521 2634 | 0.23759 9234 | 9.2 |
| 9.3 | 0.24520 7281 | -0.29855 6240 | -0.01223 5623 | 0.23957 9129 | 9.3 |
| 9.4 | 0.23993 3410 | -0.30096 8783 | +0.00631 2122 | 0.24072 4529 | 9.4 |
| 9.5 | 0.23467 8232 | -0.30298 9576 | 0.01336 0561 | 0.24105 5605 | 9.5 |
| 9.6 | 0.22944 5346 | -0.30463 2316 | 0.02592 6995 | 0.24059 4614 | 9.6 |
| 9.7 | 0.22424 3873 | -0.30591 0814 | 0.03830 6893 | 0.23936 5692 | 9.7 |
| 9.8 | 0.21907 8475 | -0.30683 8938 | 0.05047 8401 | 0.23739 4606 | 9.8 |
| 9.9 | 0.21395 4366 | -0.30743 0573 | 0.06242 1390 | 0.23470 8608 | 9.9 |
| 10.0 | 0.20887 6357 | -0.30769 9580 | 0.07411 7417 | 0.23133 6180 | 10.0 |

| x | $l_6(x)$ | $l_7(x)$ | x | $l_6(x)$ | $l_7(x)$ |
|------|---------------|---------------|------|---------------|---------------|
| 0.00 | 1.00000 0000 | 1.00000 0000 | 0.50 | -0.39262 8494 | -0.40368 2993 |
| 0.01 | 0.93605 4679 | 0.92640 0579 | 0.51 | -0.39585 6934 | -0.40292 3231 |
| 0.02 | 0.88408 8199 | 0.85555 5094 | 0.52 | -0.39853 2889 | -0.40160 1444 |
| 0.03 | 0.81435 3133 | 0.78739 3744 | 0.53 | -0.40067 4346 | -0.39974 1089 |
| 0.04 | 0.75650 5830 | 0.72184 8084 | 0.54 | -0.40229 8923 | -0.39736 5045 |
| 0.05 | 0.70060 1415 | 0.65885 1001 | 0.55 | -0.40342 3873 | -0.39449 5631 |
| 0.06 | 0.64659 6273 | 0.59833 6699 | 0.56 | -0.40406 6091 | -0.39115 4608 |
| 0.07 | 0.59444 7541 | 0.54204 0673 | 0.57 | -0.40424 2119 | -0.38736 3197 |
| 0.08 | 0.54411 3093 | 0.48449 9688 | 0.58 | -0.40396 8153 | -0.38314 2083 |
| 0.09 | 0.49555 1535 | 0.43105 1763 | 0.59 | -0.40326 0046 | -0.37851 1428 |
| 0.10 | 0.44872 2189 | 0.37983 6144 | 0.60 | -0.40214 3317 | -0.37349 0880 |
| 0.11 | 0.40358 5088 | 0.33079 3291 | 0.61 | -0.40060 3152 | -0.36809 9582 |
| 0.12 | 0.36010 0960 | 0.28386 4852 | 0.62 | -0.39868 4413 | -0.36235 6183 |
| 0.13 | 0.31823 1225 | 0.23899 3650 | 0.63 | -0.39639 1642 | -0.35627 8846 |
| 0.14 | 0.27793 7977 | 0.19612 3658 | 0.64 | -0.39373 9065 | -0.34988 5257 |
| 0.15 | 0.23918 3984 | 0.15514 9797 | 0.65 | -0.39074 0500 | -0.35041 7909 |
| 0.16 | 0.20193 2667 | 0.11616 8850 | 0.66 | -0.38740 9858 | -0.33621 7742 |
| 0.17 | 0.16614 8102 | 0.07897 7575 | 0.67 | -0.38376 0153 | -0.32897 6887 |
| 0.18 | 0.13179 5000 | 0.04357 4559 | 0.68 | -0.37980 4501 | -0.32148 5941 |
| 0.19 | 0.09883 8706 | 0.00990 9260 | 0.69 | -0.37555 5630 | -0.31376 0340 |
| 0.20 | 0.06724 5184 | -0.02206 7821 | 0.70 | -0.37102 5983 | -0.30581 5097 |
| 0.21 | 0.03693 1042 | -0.05240 5154 | 0.71 | -0.36622 7721 | -0.29766 4809 |
| 0.22 | 0.00801 3376 | -0.08115 0202 | 0.72 | -0.36117 2729 | -0.28932 3664 |
| 0.23 | -0.01968 9954 | -0.10834 9437 | 0.73 | -0.35587 2623 | -0.28080 5451 |
| 0.24 | -0.04616 0615 | -0.13404 8354 | 0.74 | -0.35033 8750 | -0.27212 3567 |
| 0.25 | -0.07142 9667 | -0.15829 1489 | 0.75 | -0.34458 2195 | -0.26329 1023 |
| 0.26 | -0.09552 7602 | -0.18112 2435 | 0.76 | -0.33861 3786 | -0.25432 0454 |
| 0.27 | -0.11848 4353 | -0.20258 3859 | 0.77 | -0.33244 4097 | -0.24522 4127 |
| 0.28 | -0.14032 9299 | -0.22271 7516 | 0.78 | -0.32608 3451 | -0.23601 3945 |
| 0.29 | -0.16109 1276 | -0.24156 4264 | 0.79 | -0.31954 1929 | -0.22670 1457 |
| 0.30 | -0.18079 8585 | -0.25916 4083 | 0.80 | -0.31282 9368 | -0.21729 7865 |
| 0.31 | -0.19947 8998 | -0.27555 6084 | 0.81 | -0.30595 5371 | -0.20781 4029 |
| 0.32 | -0.21715 9767 | -0.29077 8529 | 0.82 | -0.29892 9305 | -0.19826 0478 |
| 0.33 | -0.23386 7633 | -0.30486 8844 | 0.83 | -0.29176 0312 | -0.18864 7410 |
| 0.34 | -0.24962 8831 | -0.31786 3632 | 0.84 | -0.28445 7301 | -0.17898 4706 |
| 0.35 | -0.26446 9102 | -0.32979 8689 | 0.85 | -0.27702 8980 | -0.16928 1933 |
| 0.36 | -0.27841 3693 | -0.34070 9017 | 0.86 | -0.26948 3813 | -0.15954 8350 |
| 0.37 | -0.29148 7374 | -0.35062 8837 | 0.87 | -0.26183 0067 | -0.14979 2916 |
| 0.38 | -0.30371 4437 | -0.35959 1604 | 0.88 | -0.25407 5797 | -0.14002 4294 |
| 0.39 | -0.31511 8708 | -0.36763 0022 | 0.89 | -0.24622 8850 | -0.13025 0860 |
| 0.40 | -0.32572 3552 | -0.37477 6051 | 0.90 | -0.23829 6872 | -0.12048 0708 |
| 0.41 | -0.33555 1881 | -0.38106 0928 | 0.91 | -0.23028 7309 | -0.11072 1655 |
| 0.42 | -0.34462 6160 | -0.38651 5173 | 0.92 | -0.22220 7414 | -0.10098 1247 |
| 0.43 | -0.35296 8416 | -0.39116 8605 | 0.93 | -0.21406 4245 | -0.09126 6766 |
| 0.44 | -0.36060 0241 | -0.39505 0354 | 0.94 | -0.20586 4673 | -0.08158 5235 |
| 0.45 | -0.36754 2803 | -0.39818 8873 | 0.95 | -0.19761 5386 | -0.07194 3425 |
| 0.46 | -0.37381 6849 | -0.40061 1951 | 0.96 | -0.18932 2887 | -0.06234 7856 |
| 0.47 | -0.37944 2713 | -0.40234 6722 | 0.97 | -0.18099 3502 | -0.05280 4807 |
| 0.48 | -0.38444 0322 | -0.40341 9680 | 0.98 | -0.17263 3382 | -0.04332 0321 |
| 0.49 | -0.38882 9205 | -0.40385 6689 | 0.99 | -0.16424 8506 | -0.03390 0208 |
| 0.50 | -0.39262 8494 | -0.40368 2993 | 1.00 | -0.15584 4683 | -0.02455 0051 |

| x | $l_6(x)$ | $l_7(x)$ | x | $l_6(x)$ | $l_7(x)$ |
|------|---------------|---------------|------|---------------|---------------|
| 1.00 | -0.15584 4683 | -0.02455 0051 | 3.50 | -0.16689 1620 | -0.25298 8539 |
| 1.05 | -0.11373 3279 | +0.02097 1246 | 3.55 | -0.17924 2977 | -0.25466 3231 |
| 1.10 | -0.07192 7344 | 0.06402 8030 | 3.60 | -0.19071 8419 | -0.25513 7334 |
| 1.15 | -0.03098 2362 | 0.10414 8840 | 3.65 | -0.20129 9334 | -0.25444 3985 |
| 1.20 | 0.00863 3466 | 0.14096 9651 | 3.70 | -0.21097 1463 | -0.25262 0208 |
| 1.25 | 0.04652 6283 | 0.17422 1471 | 3.75 | -0.21972 4701 | -0.24970 6511 |
| 1.30 | 0.08237 1812 | 0.20371 8993 | 3.80 | -0.22755 2886 | -0.24574 6500 |
| 1.35 | 0.11590 8083 | 0.22935 0228 | 3.85 | -0.23445 3596 | -0.24078 6501 |
| 1.40 | 0.14692 9174 | 0.25106 7050 | 3.90 | -0.24042 7942 | -0.23487 5199 |
| 1.45 | 0.17527 9416 | 0.26887 6593 | 3.95 | -0.24548 0360 | -0.22806 3297 |
| 1.50 | 0.20084 8044 | 0.28283 3427 | 4.00 | -0.24961 8411 | -0.22040 3176 |
| 1.55 | 0.22356 4258 | 0.29303 2465 | 4.05 | -0.25285 2574 | -0.21194 8585 |
| 1.60 | 0.24339 2673 | 0.29960 2543 | 4.10 | -0.25519 6048 | -0.20275 4342 |
| 1.65 | 0.26032 9132 | 0.30270 0626 | 4.15 | -0.25666 4557 | -0.19287 6041 |
| 1.70 | 0.27439 6854 | 0.30250 6588 | 4.20 | -0.25727 6156 | -0.18236 9793 |
| 1.75 | 0.28564 2899 | 0.29921 8528 | 4.25 | -0.25705 1043 | -0.17129 1967 |
| 1.80 | 0.29413 4932 | 0.29304 8571 | 4.30 | -0.25601 1379 | -0.15969 8948 |
| 1.85 | 0.29995 8269 | 0.28421 9130 | 4.35 | -0.25418 1104 | -0.14764 6925 |
| 1.90 | 0.30321 3149 | 0.27295 9575 | 4.40 | -0.25158 5771 | -0.13519 1675 |
| 1.95 | 0.30401 2293 | 0.25950 3292 | 4.45 | -0.24825 2371 | -0.12238 8371 |
| 2.00 | 0.30247 8652 | 0.24408 5090 | 4.50 | -0.24420 9180 | -0.10929 1409 |
| 2.05 | 0.29874 3335 | 0.22693 8930 | 4.55 | -0.23948 5593 | -0.09595 4235 |
| 2.10 | 0.29294 3952 | 0.20829 5950 | 4.60 | -0.23411 1984 | -0.08242 9204 |
| 2.15 | 0.28522 2594 | 0.18838 2758 | 4.65 | -0.22811 9556 | -0.06876 7434 |
| 2.20 | 0.27572 4693 | 0.16741 9973 | 4.70 | -0.22154 0205 | -0.05501 8690 |
| 2.25 | 0.26459 7507 | 0.14562 0982 | 4.75 | -0.21440 6390 | -0.04123 1266 |
| 2.30 | 0.25198 8956 | 0.12319 0912 | 4.80 | -0.20675 1005 | -0.02745 1887 |
| 2.35 | 0.23804 6558 | 0.10032 5777 | 4.85 | -0.19860 7264 | -0.01372 5622 |
| 2.40 | 0.22291 6487 | 0.07721 1794 | 4.90 | -0.19000 8582 | -0.00009 5807 |
| 2.45 | 0.20674 2742 | 0.05402 4849 | 4.95 | -0.18098 8474 | +0.01339 6026 |
| 2.50 | 0.18966 6424 | 0.03093 0101 | 5.0 | -0.17158 0449 | 0.02671 0198 |
| 2.55 | 0.17182 5105 | 0.00808 1703 | 5.1 | -0.15173 4102 | 0.05265 6411 |
| 2.60 | 0.15335 2283 | -0.01437 7367 | 5.2 | -0.13073 4068 | 0.07746 4115 |
| 2.65 | 0.13437 6929 | -0.03631 5366 | 5.3 | -0.10883 9308 | 0.10038 6401 |
| 2.70 | 0.11502 3092 | -0.05761 1832 | 5.4 | -0.08630 0965 | 0.12270 8477 |
| 2.75 | 0.09540 9585 | -1.07815 7383 | 5.5 | -0.06336 0446 | 0.14274 7549 |
| 2.80 | 0.07564 9723 | -0.09785 3673 | 5.6 | -0.04024 7807 | 0.16085 2317 |
| 2.85 | 0.05585 1129 | -0.11661 3130 | 5.7 | -0.01718 0428 | 0.17690 2144 |
| 2.90 | 0.03611 5576 | -0.13435 8700 | 5.8 | +0.00563 8051 | 0.19080 5943 |
| 2.95 | 0.01653 8887 | -0.15102 3550 | 5.9 | 0.02801 8535 | 0.20250 0345 |
| 3.00 | -0.00278 9127 | -0.16655 0727 | 6.0 | 0.04978 7068 | 0.21195 0563 |
| 3.05 | -0.02178 4693 | -0.18089 2786 | 6.1 | 0.07078 5214 | 0.21914 4217 |
| 3.10 | -0.04037 0060 | -0.19401 1403 | 6.2 | 0.09087 0252 | 0.22409 3546 |
| 3.15 | -0.05847 3473 | -0.20587 6958 | 6.3 | 0.10991 5213 | 0.22683 2038 |
| 3.20 | -0.07602 9096 | -0.21646 8107 | 6.4 | 0.12780 8764 | 0.22741 2508 |
| 3.25 | -0.09297 6921 | -0.22577 1347 | 6.5 | 0.14445 4960 | 0.22590 5259 |
| 3.30 | -0.10926 2664 | -0.23378 0566 | 6.6 | 0.15977 2895 | 0.22239 6135 |
| 3.35 | -0.12483 7629 | -0.24049 6596 | 6.7 | 0.17369 6237 | 0.21698 4597 |
| 3.40 | -0.13965 8566 | -0.24952 6759 | 6.8 | 0.18617 2701 | 0.20978 1839 |
| 3.45 | -0.15368 7513 | -0.25008 4420 | 6.9 | 0.19716 3437 | 0.20090 8953 |
| 3.50 | -0.16689 1620 | -0.25298 8539 | 7.0 | 0.20664 2372 | 0.19049 5160 |

| x | $l_6(x)$ | $l_7(x)$ | x | $l_6(x)$ | $l_7(x)$ |
|-----|--------------|---------------|------|---------------|---------------|
| 7.0 | 0.20664 2372 | 0.19749 5160 | 9.0 | 0.11983 8300 | -0.12957 8509 |
| 7.1 | 0.21459 5502 | 0.17867 6124 | 9.1 | 0.10623 5257 | -0.14204 0643 |
| 7.2 | 0.22102 0148 | 0.16559 2335 | 9.2 | 0.09229 0341 | -0.15355 6016 |
| 7.3 | 0.22592 4198 | 0.15138 7604 | 9.3 | 0.07807 7106 | -0.16403 4212 |
| 7.4 | 0.22932 5320 | 0.13620 7635 | 9.4 | 0.06366 7198 | -0.17359 2181 |
| 7.5 | 0.23125 0179 | 0.12019 8714 | 9.5 | 0.04913 0101 | -0.18205 4039 |
| 7.6 | 0.23173 3644 | 0.10350 6484 | 9.6 | 0.03453 2914 | -0.18945 0825 |
| 7.7 | 0.23081 8007 | 0.08627 4840 | 9.7 | 0.01994 0154 | -0.19577 0230 |
| 7.8 | 0.22855 2215 | 0.05864 4913 | 9.8 | 0.00541 3587 | -0.20100 6308 |
| 7.9 | 0.22499 1107 | 0.05075 4163 | 9.9 | -0.00898 7914 | -0.20515 9168 |
| 8.0 | 0.22019 4681 | 0.03273 5570 | 10.0 | -0.02320 8484 | -0.20323 4643 |
| 8.1 | 0.21422 7384 | 0.01471 6930 | | | |
| 8.2 | 0.20715 7428 | -0.00317 9771 | | | |
| 8.3 | 0.19905 6124 | -0.02083 8870 | | | |
| 8.4 | 0.18999 7269 | -0.03815 1473 | | | |
| 8.5 | 0.18005 6545 | -0.05501 5805 | | | |
| 8.6 | 0.16931 0963 | -0.07133 7487 | | | |
| 8.7 | 0.15783 8334 | -0.08702 9741 | | | |
| 8.8 | 0.14571 6785 | -0.10195 2143 | | | |
| 8.9 | 0.13302 4301 | -0.11621 7586 | | | |
| 9.0 | 0.11983 8300 | -0.12957 8509 | | | |



昭和三十年十二月十五日印刷
昭和三十年十二月二十日発行

〔非売品〕

編輯兼 室蘭工業大学
発行者

東京都千代田区霞ヶ関三ノ四（文部省内）

印刷者 本井喜一

東京都千代田区霞ヶ関三ノ四（文部省内）

印刷所 財団法人文教協会印刷部

CONTENTS

Vol. 2. NO. 1

JUNE 1955

Whole No. 6

| | Page |
|---|------|
| Steady Operation Characteristics of Series Capacitors in Long-distance Transmission Lines. (I)..... G. Miura | 1 |
| Analysis of a Variable Constant Electric Circuit by Laplacian Transformation..... G. Miura & T. Yamagami | 15 |
| An Application of Heaviside Operators to Variable-constant Circuit Problem..... T. Yamagami, G. Miura & R. Date | 29 |
| Studies on Components of Usneaceae in Hokkaido (IV)..... H. Sato | 39 |
| Ammoniation of Peat (III)..... M. Sasaki, T. Yahata & H. Sato | 51 |
| On the Stress Corrosion of Commercial Brass Wire..... K. Nishida | 59 |
| On the Spectrophotometric Determination of I-picoline..... F. Komatsu | 93 |
| On the New Solution of Arched Bridge loaded with a Torsional Moment..... S. Nakamura | 101 |
| On the Bending of Beams and Rectangular Plates on Elastic Foundation with Discontinuous Property..... S. Nomachi | 133 |
| The Solubility of Ammonium Phosphomolybdate to Diluted Nitric Acid..... K. Ueno | 147 |
| On the Selection of Bimetallic Electrodes for the Potentiometric Titration (in Neutralization)..... K. Ueno & T. Tachikawa | 153 |
| A Study of Attitudes toward Psychic Phenomena..... S. Kawamura | 163 |
| The San Fan Movement, Wu Fan Movement and other Financial, Economic Works under these Movement in New China..... T. Miki | 173 |
| The Analysis of the Feudal and Colonial Characteristic Feature of Chinese Economy..... T. Miki | 185 |
| New Characterizations of the Principal Normal Curvetures of Hypersurface in an $(n+1)$ -Dimensional Finsler Space..... Y. Nagata | 205 |
| Fundamental Viewpoints in the Theory of A Priori Measure... Y. Kinokuniya | 211 |
| On Numerical Differentiation..... M. Yoshida | 221 |
| On Term by Term Integration..... M. Yoshida | 227 |
| A Numerical Table of the Laguerre Functions..... M. Yoshida | 231 |