



## 桁梁の撓み理論に関する基礎的研究(1)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-05-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 中村, 作太郎 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3078">http://hdl.handle.net/10258/3078</a>

# 桁梁の撓み理論に関する基礎的研究<sup>☆</sup>(I)

中村作太郎

## Fundamental Studies on the Deflection Theory of Beam.

Sakutaro Nakamura

### Abstract

This thesis is fundamental studies, in which the author compared, discussed, and made clear the exact differences of various theoretical deflections and physical experimental deflections of beam, and by which he will establish new deflection theory of beam in the near future.

### I 緒 論

桁或は梁の撓みについては、従来諸研究者によつて理論値と実験値の比較が行われている。それらの結果は区々別々であり、実験値が理論値よりも稍々大なる事もあれば理論値が実験値よりも少しく大きい事もある。而もその桁或は梁を形作る断面の形、材質、荷重の大きさによつて著しく異つている。實際的の技術的撓み測定に於ては、橋梁に用いる鈹桁の如く割合に単独に働く場合もあれば合成桁の如く鉄筋コンクリート床版が主桁と協力作用を行う場合もあり、それから統一的な結論を見出す事は極めて難しい事である。Bach. U. Graf氏の鉄筋コンクリート床版の実験結果<sup>1</sup>では荷重の比較的小さい範囲では実験値の方が理論計算値よりも大きく荷重の比較的大なる範囲では、理論計算値の方が少しく大きいと述べている。坂静雄氏の実験結果<sup>2</sup>では理論計算値との誤差が絶対平均6.76%であつたと報告している。伊木茂氏、米沢博氏、大村裕氏の共同研究による橋本橋の架設工事及び応力測定報告の実験結果<sup>3</sup>によれば、撓み測定値は計算値の0.19~0.42平均25%でかなり小さい値を与え、これは鉄筋コンクリート床版と主桁との協力作用及びこれによる各桁への荷重分布の影響のためと考えられる。又、成瀬

☆ 第2回応用力学聯合学術講演会に於て一部研究発表“桁梁の弾性的撓みに関する研究”。1952.  
Sakutaro Nakamura: The Theoretical Studies on Elastic Deflection of Beam.

Proceeding of the 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics, May, 1954

1. 2. 坂静雄: 鉄筋コンクリート梁の撓みに関する材料力学的研究, 建築学会論文集 第12号, 1939.

3. 伊木茂, 米沢博, 大村裕: 橋本橋架設工事及び応力測定報告(2). 土木技術誌 第3巻 第6号, 1953.

勝武氏による合成桁の実験的研究に於ける曲げ応力と撓みに関する研究<sup>4</sup>に於ては、実験値は理論計算値と比較すると荷重の割合少ない範囲では平均3%程度大きい事を示している。然し、ヒステシスの往路の部分をとれば両者は接近し、ある断面では寧ろ、実測値は、計算値より幾分小さくなると述べている。これらの結果を総合すると、荷重の比較的小さい範囲では、理論計算値よりも実験撓度の方が幾分大きくなる事が度々あり、荷重が相当大きくなつて来ると理論計算値の方が寧ろ大きくなる傾向にある。然し乍ら、諸家によつて行われているこれらの撓み実験は、計算撓度を確かめて見る程度の技術的測定が大部分で、何れも、梁の断面や材質が単純でなく、純粋性を欠いている。即ち、梁の撓み理論の真性を比較深求し、梁の基本的撓み理論について論じている研究は、最近科学の著しい進歩にも拘らず殆ど見当らない。著者は、これらの点について、最も真に近い撓み理論を見出すため、理論計算値と実験値を純粋な意味で徹底的に比較深求するため、厳密な物理実験<sup>5</sup>を行つた。実験に當つて特に意を用いた事柄を列記すれば次の如くである。

(1)、梁の模型は出来るだけ厳密を期すため、標準型の物理実験用の寸法、即ち約、幅1.60cm厚さ0.450cm、支間40cmのものを用い、断面の形状の影響を受ける撓み値の差を出来るだけなくするように単純な矩形断面を採用した。而も、同じ矩形断面の梁でも幅に比べ高さの深い梁は、幅に比べ高さの薄い梁よりも実験値が理論計算値に近いか或は寧ろ理論計算値よりも小さい傾向にあるので、実験値の方が計算値よりも大きくなる事があるかも知れぬと推定される薄い梁を実験に用いた。著者は、この薄い標準型の模型梁の事を、純模型梁と名付ける。

(2)、荷重の比較的小さい時は、実験撓度の方が理論計算値よりも大きい傾向にある事に鑑み実験に於ける荷重の範囲は主として弾性限度内に於けるものを取扱つた。

(3)、材質の異なるために生ずる撓みの変化状態を知るため、三種の材質、鋼鉄、白樺、孟宗竹の梁について実験を行つた。

(4)、撓みの測定には、島津製作所の製作せる撓み弾性率測定装置を用い、光の挺子の原理を応用した。

(5)、実験に於ける単一集中荷重  $P=0.20\text{kg}$  とし、最大1,400kgまでの範囲を取扱つた。両端単純支持状態に於ける実験撓度、軸張力1.0kgを両側に作用せしめた場合の実験撓度、両支点上に集中荷重  $W$  がある場合の実験撓度を求めた。

計算に用いた理論撓度は、普通の単純桁の理論による撓度、軸張力を考慮せる三角級数によ

4. 成瀬勝武：合成桁の実験的研究に於ける曲げ応力と撓み，土木技術誌 第11巻 第4号，1950.

5. 山形大学農学部 物理学研究室に於ける著者の撓み測定，1950.

つて表示せられる理論撓度,<sup>6</sup> 軸張力を考慮せる超越函数に依つて表示せられる理論撓度,<sup>7</sup> などである。これらの各撓み理論による計算撓度の間では余り差が目立たなく最大8%位であり軸力の影響が最も大きい事が明かとなつた。実験結果との間には相当の差を生じ、10~20%程度実験撓度の方が大きかつた。この事は、理論撓度の危険性を意味するもので注目し得る問題であると思う。次に、両支点上に、 $W=1.0\text{kg}$  の荷重ある場合は実験撓度が約20~45%の減少を見、この減少率は両支点上に載る荷重の増加にともないある曲線を示す事が分つた。これらの原因について種々考究せる結果については結論の所で述べる。尚、各種の撓み理論による微分方程式の解、公式の誘導、計算等には非常な時間と労力を費したが、途中の誘導、計算などは、必要なもの以外は省略し結果のみ詳細に掲載する。

## II 桁梁の撓みに関する各種公式の基本理論

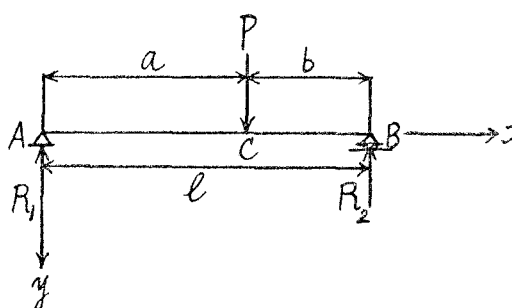
### 1. 単純梁の理論に依る撓度。(第1図参照)

撓曲線の微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$  に於て

$$M = P \cdot \frac{b}{l} x \dots\dots 0 \leq x \leq a, \quad M = P \cdot \frac{a}{l} (l-x) \dots\dots a \leq x \leq l$$

$$\left. \begin{aligned} \text{とすれば } \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{Pb}{lEJ} x \dots\dots 0 \leq x \leq a \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{Pa}{lEJ} (l-x) \dots\dots a \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1) 式を解いて、撓み  $y$  は次の如く得られる。



$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{Pbx}{6lEJ} (l^2 - b^2 - x^2) \dots\dots 0 \leq x \leq a \\ y &= \frac{Pa(l-x)}{6lEJ} \{b(l+a) - (l-x)^2\} \dots\dots a \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

茲に、 $M$ : 任意の点の曲げもーめんと、 $E$ : 弾性率、 $J$ : 断面の慣性モーメント

第1図 単純梁の図

6. S. Timoshenko: Theory of Elasticity. 1934, S. Timoshenko and J. M. Lessells: Applied Elasticity, 1925.  
 片山健次郎. 北島顯正共訳: テイモシエンコ材料力学. 1942.  
 井坂富士雄. 江崎伸市. 森徹共訳: テイモシエンコ弾性体の力学. 1942.

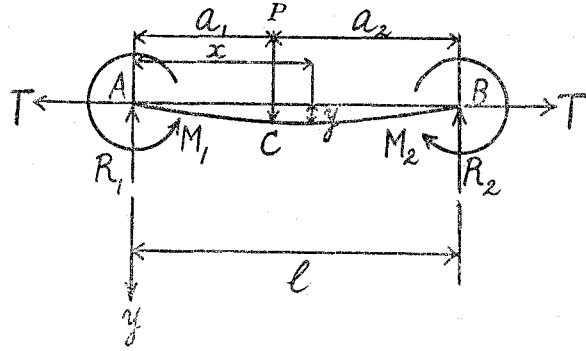
7. 鷹部屋福平: Etude de la Force Longitudinale et la Moment de Flexion aux Extremités de la Pièce Complètement Encastree. 北海道帝国大学工学部紀要, 第1巻 第1号, 1926.  
 鷹部屋福平: Etudes sur la force longitudinale de la pièce encastree, les murs étant complètement dociles aux déplacements angulaires. 北海道帝国大学工学部紀要, 第1巻 第2号, 1926.  
 鷹部屋福平: 高級桁梁論, 1929.

2. 軸張力を考慮せる超越函数に依つて表示せれるら理論撓度

(1) 一般の場合

第 2 図 超越函数による梁の図

軸力のない梁の一般式は、周知の如く、 $M = -EI \frac{d^2y}{dx^2}$  にて表わす事が出来る。而して、軸力なき梁に於ては、 $M$  は  $x$  のみの函数であるが軸力の作用する場合には、 $M$  は  $x$  と  $y$  との函数である。茲に、 $M$ : 任意の点の曲げも一めんと、 $E$ : 弾性率、 $I$ : 断面の慣性能率



今、第 2 図に於ては、軸力が作用するから  $E$  の代りに  $K$  を用いる。

$$K = E + \frac{T}{A} = E \left( 1 + \frac{T}{EA} \right) \tag{3}$$

即ち、 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{KI}$  (4)

支間  $l$ 、梁の断面積  $A$ 、慣性能率  $I$  は一定の梁  $AB$  の支点より  $a_1$  なる距離に集中荷重  $P$  が載るものとする。(4)式に於て、

$$\left. \begin{aligned} M &= R_1 \cdot x - M_1 - T \cdot y \dots\dots 0 \leq x \leq a_1 \\ M &= R_2(l-x) - M_2 - T \cdot y \dots\dots a_1 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{T}{KI} y + \frac{1}{KI} (R_1 x - M_1) &= 0 \dots\dots 0 \leq x \leq a_1 \\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{T}{KI} y + \frac{1}{KI} \{R_2(l-x) - M_2\} &= 0 \dots\dots a_1 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

(6)式に於て、 $T$ : 軸張力、 $R_1, R_2$ : 支点に於ける反力、 $M_1, M_2$ : 支点に於ける曲げも一めんと、今、弯曲が微量であるとし、 $T$  は  $x$  に関係なく一定であると仮定すると、 $K$  は  $x$  に無関係となる。そこで、微分方程式の解は、次の如く示される。

$$\left. \begin{aligned} y &= A_1 e^{\xi x} + A_2 e^{-\xi x} + \frac{R_1}{T} x - \frac{M_1}{T} \dots\dots 0 \leq x \leq a_1 \\ y &= B_1 e^{\xi x} + B_2 e^{-\xi x} + \frac{R_2(l-x)}{T} - \frac{M_2}{T} \dots\dots a_1 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

茲に、 $\xi = \sqrt{\frac{T}{KI}}$

$$\left. \begin{aligned} A \text{端では、} & x=0, y=0; \quad x=0, \quad dy/dx = \varphi_1 \\ B \text{端では、} & x=l, y=0; \quad x=l, \quad dy/dx = -\varphi_2 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

これらの境界条件より  $A_1, A_2, B_1, B_2$  を求めれば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2T\xi} (M_1\xi - R_1 + T\varphi_1) \\ A_2 &= \frac{1}{2T\xi} (M_1\xi + R_1 - T\varphi_1) \\ B_1 &= \frac{\cosh\xi l - \sinh\xi l}{2T\xi} (M_2\xi + R_2 - T\varphi_2) \\ B_2 &= \frac{\cosh\xi l + \sinh\xi l}{2T\xi} (M_2\xi - R_2 + T\varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{故に, } y &= \frac{M_1}{T} (\cosh\xi x - 1) - \frac{R_1}{T\xi} (\sinh\xi x - \xi x) + \frac{\varphi_1}{\xi} \sinh\xi x \cdots \cdots 0 \leq x \leq a_1 \\ y &= \frac{M_2}{T} \left\{ \cosh\xi(l-x) - 1 \right\} - \frac{R_2}{T\xi} \left\{ \sinh\xi(l-x) - \xi(l-x) \right\} + \frac{\varphi_2}{\xi} \sinh\xi(l-x) \cdots \cdots a_1 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{又, } M_x &= \frac{R_1}{\xi} \sinh\xi x - M_1 \cosh\xi x - \varphi_1 \xi K I \sinh\xi x \cdots \cdots 0 \leq x \leq a_1 \\ M_x &= \frac{R_2}{\xi} \sinh\xi(l-x) - M_2 \cosh\xi(l-x) - \varphi_2 \xi K I \sinh\xi(l-x) \cdots \cdots a_1 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

反力ともめんとの釣合条件より,  $R_1 + R_2 + P = 0$ ,  $R_1 l - M_1 - P(l - a_1) + M_2 = 0$ , 更に, C点に於ては, slope並に撓み  $y$  の AC, CB 両側について求めた式が相等しいと云う条件より, 2つの式が得られる。都合4式より,  $R_1, R_2, M_1, M_2$  を求めると次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= P\delta \sinh\omega \left\{ k_2 \cosh\omega + \sinh\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) - \sinh\omega \right\} - T \cdot \delta (\varphi_1 - \varphi_2) \sinh^2\omega \\ R_2 &= P\delta \sinh\omega \left\{ k_1 \cosh\omega + \sinh\left(\frac{k_2 - k_1}{2}\right) - \sinh\omega \right\} + T \cdot \delta (\varphi_1 - \varphi_2) \sinh^2\omega \\ M_1 &= \frac{P\delta a}{2k_1} \left\{ \sinh k_1 + \sinh k_2 - \sinh 2\omega + k_2 (\cosh 2\omega - 1) - 2\omega (\cosh k_2 - 1) \right\} \\ &\quad + \frac{T \cdot \delta l}{4\omega} \left\{ \varphi_1 (\sinh 2\omega - 2\omega \cosh 2\omega) + \varphi_2 (\sinh 2\omega - 2\omega) \right\} \\ M_2 &= \frac{P\delta \cdot b}{2k_2} \left\{ \sinh k_1 + \sinh k_2 - \sinh 2\omega + k_1 (\cosh 2\omega - 1) - 2\omega (\cosh k_1 - 1) \right\} \\ &\quad + \frac{T \cdot \delta l}{4\omega} \left\{ \varphi_2 (\sinh 2\omega - 2\omega \cosh 2\omega) + \varphi_1 (\sinh 2\omega - 2\omega) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

茲に,  $\delta = (\omega \sinh 2\omega - \cosh 2\omega + 1)^{-1}$

$$\omega = \frac{l}{2} \xi, \quad k_1 = a_1 \xi, \quad k_2 = (l - a_1) \xi$$

(12)式を撓みの式(10)に代入すれば, 任意の点に単一集中荷重が載る場合の撓みの一般式が得られる。撓み式に含まれる軸張力  $T$  は, 次式に依つて求める事が出来る。

$$\text{一般式} \quad T = \frac{A}{I \cdot l} \int_x^y \frac{y}{2} M_x dx \quad (13)$$

これより,  $T = \frac{A}{I \cdot l} \left\{ \int_0^{a_1} \frac{y}{2} M_x dx + \int_{a_1}^l \frac{y}{2} M_x dx \right\}$  (14)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^2 \frac{R_n M_n a_n^6}{k_n^6} (\cosh 2k_n - 2k_n \sinh k_n - 1) \\
 & - \sum_{n=1}^2 \frac{M_n^2 a_n^5}{k_n^4} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} - \frac{2 \sinh k_n}{k_n} + 1 \right) \\
 & - \sum_{n=1}^2 \frac{R_n^2 a_n^7}{k_n^6} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} + \frac{2 \sinh k_n}{k_n} - 2 \cosh k_n - 1 \right) \\
 & - \sum_{n=1}^2 \frac{M_n \varphi_n \alpha_n^4}{k_n^4} (\cosh 2k_n - 2 \cosh k_n + 1) \\
 & + \sum_{n=1}^2 \frac{2 R_n \varphi_n \alpha_n^5 K I}{k_n^4} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} + \frac{\sinh k_n}{k_n} - \cosh k_n - 1 \right) \\
 & - \sum_{n=1}^2 \frac{\varphi_n^2 \alpha_n^3 K^2 I^2}{k_n^2} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} - 1 \right) \\
 & - \frac{4 l K^2 I^3}{A} = 0
 \end{aligned}$$

(15)

これが,  $T$  を求める一般式である。

(2), 両端に, もーめんとの働かない場合,

両端に, もーめんとの働かない場合は 次の如く誘導される。  $M_1 = M_2 = 0$  とし,  $a_1 = \varepsilon l$ ,

$(l - a_1) = (1 - \varepsilon)l$  とすれば,

$$\begin{aligned}
 R_1 &= P(1 - \varepsilon), \quad R_2 = P\varepsilon, \quad \varphi_1 = \frac{Pl^2}{4KI} f_1, \quad \varphi_2 = \frac{Pl^2}{4KI} f_2 \\
 f_1 &= \omega^{-2} \left\{ \frac{\sinh 2\varepsilon\omega + \cosh 2\varepsilon\omega - \sinh 2(2 - \varepsilon)\omega - \cosh 2(2 - \varepsilon)\omega}{\sinh 4\omega + \cosh 4\omega - 1} + 1 - \varepsilon \right\} \\
 f_2 &= \omega^{-2} \left\{ \frac{\sinh 2(1 - \varepsilon)\omega + \cosh 2(1 - \varepsilon)\omega - \sinh 2(1 + \varepsilon)\omega - \cosh 2(1 + \varepsilon)\omega}{\sinh 4\omega + \cosh 4\omega - 1} + \varepsilon \right\} \\
 & 0 < \varepsilon < +1
 \end{aligned}$$

(16)

この場合の撓み  $y$  は, 次の如く表わされる。

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{R_1}{T} (\xi x - \sinh \xi x) + \varphi_1 \sinh \xi x \right\} \dots \dots \dots 0 \leq x \leq a_1 \\
 y &= \frac{1}{\xi} \left[ \frac{R_2}{T} \left\{ \xi(l - x) - \sinh \xi(l - x) \right\} + \varphi_2 \sinh \xi(l - x) \right] \dots \dots \dots a_1 \leq x \leq l
 \end{aligned}$$

(17)

$$\left. \begin{aligned} \text{又, } M_x &= \frac{\sinh \xi x}{\xi} (R_1 - T \varphi_1) \dots \dots \dots 0 \leq x \leq a_1 \\ M_x &= \frac{\sinh \xi (l-x)}{\xi} (R_2 - T \varphi_2) \dots \dots \dots a_1 \leq x \leq l \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{n=1}^2 \frac{2R_n \varphi_n a_n^5 K I}{k_n^4} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} + \frac{\sinh k_n}{k_n} - \cosh k_n - 1 \right) \\ &- \sum_{n=1}^2 \frac{R_n^2 a_n^7}{k_n^6} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} + \frac{2\sinh k_n}{k_n} - 2\cosh k_n - 1 \right) \\ &- \sum_{n=1}^2 \frac{\varphi_n^2 a_n^3 K^2 I^2}{k_n^2} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} - 1 \right) - \frac{4l K^2 I^2}{A} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^2 \left\{ 2K I R_n \varphi_n a_n^5 f_1(k_n) - R_n^2 a_n^7 f_2(k_n) - K^2 I^2 \varphi_n^2 a_n^3 f_3(k_n) \right\} = \frac{4l K^2 I^2}{A} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{茲に, } f_1(k_n) &= \frac{1}{k_n^4} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} - 1 - \cosh k_n + \frac{\sinh k_n}{k_n} \right) \\ f_2(k_n) &= \frac{1}{k_n^6} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} + 2 \frac{\sinh k_n}{k_n} - 2\cosh k_n - 1 \right) \\ f_3(k_n) &= \frac{1}{k_n^2} \left( \frac{\sinh 2k_n}{2k_n} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

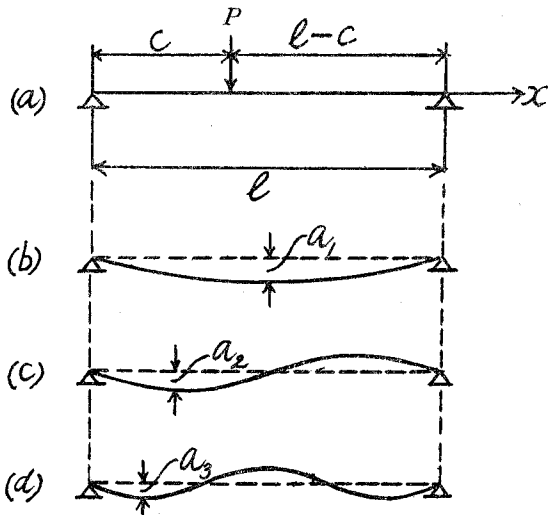
(19)式或は、(20)式より  $T$  を求めれば良い。

3. 三角級数に依つて表示せられる単純梁の理論撓度

梁の撓みを考究する場合、三角級数を用いて撓曲線を表すのが便利な事がある第3図のような両端支持の梁に於て任意の点の撓みは、次の如く三角級数で表される。

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (22)$$

係数  $a_1, a_2, a_3$  等は、正弦曲線の最大縦線値を示し、1, 2, 3等の数字は波の数を示して居る。 $a_1, a_2, a_3$ 等の係数を決定するに次式で与えられる梁の歪エネルギーを考える。



第3図 三角級数による梁の図



$$V = -\frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx \tag{23}$$

(22)式より,  $\frac{d^2y}{dx^2} = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - a_2 2^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi x}{l} - a_3 3^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{3\pi x}{l}$  (24)

(23)式は, これの2乗の積分であるから次の式が得られる。  $V = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2$  (25)

或る弾性係が, 釣合の位置から僅かに変位した場合には, 位置のエネルギーの増は変位の間に作用した外力の仕事量に等しい。今, 外力として1個の荷重  $P$  が左側支点から距離  $C$  の位置に働いたものとすれば, 荷重点の縦変位は,  $da_n \sin \frac{n\pi C}{l}$  で外力の仕事量は,  $da_n \left( \sin \frac{n\pi C}{l} \right) P$  一方  $a_n$  が  $da_n$  だけ増した場合の歪エネルギーの増は,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n \text{ である。}$$

故に,  $\frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n = P \sin \frac{n\pi C}{l} \therefore a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \cdot \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi C}{l}$  (26)

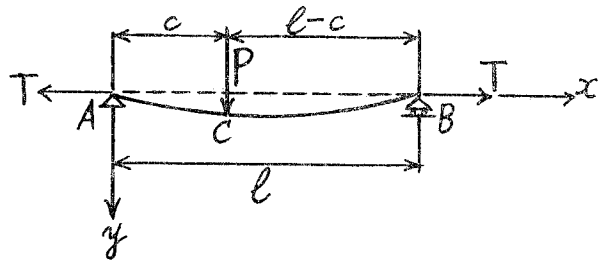
このようにして, (22)式の係数を定めれば次式を得る。

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \left( \sin \frac{\pi C}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^4} \sin \frac{2\pi C}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) \\ = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi C}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{27}$$

上式(27)は, II の(2)式をフーリエ級数に展開したものであつて同じものである。

4. 軸張力を考慮せる三角級数に依つて表示せられる理論撓度

三角級数式(22)は, 第4図の如く梁が横荷重の他に縦の圧縮又は引張力を受ける場合には特に便利である第4図に於て, 引張力  $T$  が働く場合撓曲線は軸方向に伸び  $B$  点は移動する。長さの全歪は, 変位が極く小さい場合, 軸方向伸びは,



第4図 三角級数による軸力ある梁の図

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx \tag{28}$$

(28)式に於て,  $y$  は, 級数(22)で与えられるから  $\lambda = \frac{\pi^2}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$  (29)

第4図に於て, 横荷重  $P$  も縦荷重  $T$  も共に仕事をする。縦力  $T$  の微小仕事は,  $-T \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n$

$da_n$ であり、横力の仕事 $da_n \left( \sin \frac{n\pi C}{l} \right) P$ との和が位置のエネルギーの増即ち  $dV$ に等しい。

故に、
$$P \sin \frac{n\pi C}{l} da_n - T \frac{\pi^2}{2l} n^2 a_n da_n = \frac{EI\pi^4}{2l^3} n^4 a_n da_n,$$

従つて
$$a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \cdot \frac{1}{n^2 \left( n^2 + \frac{TI^2}{EI\pi^2} \right)} \sin \frac{n\pi C}{l} \quad (30)$$

縦荷重の値とその限界値との比を $\alpha = \frac{TI^2}{EI\pi^2}$ とすれば、
$$a_n = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \cdot \frac{1}{n^2(n^2 + \alpha)} \sin \frac{n\pi C}{l} \quad (31)$$

これを級数(22)に代入すれば次の如くなる。

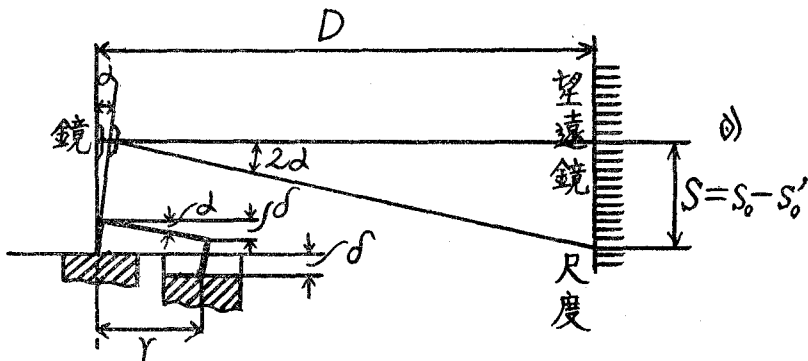
$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \left( \frac{1}{1+\alpha} \sin \frac{\pi C}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2^2(2^2+\alpha)} \sin \frac{2\pi C}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right) \\ = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+\alpha)} \sin \frac{n\pi C}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (32)$$

これを横力  $P$  のみの場合の式(27)と比較すれば撓みが減少した事が分る。縦引張力の代りに縦圧縮力が作用するときは、 $\alpha$  は  $-\alpha$  となるから撓みは軸力のない場合に比べて増加する。

### III 実験の原理と方法

撓みの測定には島津製作所の製作せる撓み弾性率測定装置を用いた。即ち、頂角を $120^\circ$ に作りたる鋼製の枕1対を堅牢なる1対の鉄柱上に固定したるもの、錘な吊すべき刃、錘受及び200gの錘7個よりなり、撓みは光の挺子に依つて、これを測定するものである。

#### 、実験の原理と公式



第5図 梁の撓み測定に於ける原理の図

第5図に於て

$\alpha$  = 鏡の傾きの角

$\delta$  = 荷重に依る撓み (cm)

$S_0$  = 錘りを載せる前の尺度の読み (cm)

$S_0'$  = 錘りを載せた後の尺度の読み (cm)

$D$  = 鏡と尺度との距離 (cm)

$r$  = 光の挺子の軸となれる 2 脚を結ぶ線と第 3 脚との距離 (cm)

$$S = S_0 - S_0' = \text{初めと終りの読みの差 (cm) とすれば, } \sin\alpha = \frac{\delta}{r} \quad (39)$$

$$\text{反射光線は, 鏡の廻転角の 2 倍だけ傾くから } \tan 2\alpha = \frac{S}{D} \quad (40)$$

$$(40)\text{式より, } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\frac{\delta}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{r}\right)^2}}{1 - 2\left(\frac{\delta}{r}\right)^2} = \frac{S}{D} \quad (41)$$

$$(41)\text{式から, } \delta^4 - r^2\delta^2 + \frac{r^4}{4\left(\frac{D^2}{S^2} + 1\right)} = 0 \quad (42)$$

$\delta^4$  は極めて小さいから消略し次式を得る。

$$\delta^2 \doteq \frac{r^2}{4\left(\frac{D^2}{S^2} + 1\right)} \quad (43)$$

$$\text{故に, } \delta = \frac{r \cdot S}{D} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D^2}{D^2 + S^2}} \quad (44)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{D^2}{D^2 + S^2}} \quad (45)$$

$$\text{とすれば, } \delta \doteq \mu \frac{r \cdot S}{D} \quad (46)$$

(45)式に於て,  $S$  が極めて小さい時 即ち傾斜角  $\alpha$  が非常に小さい時は,  $S^2$  は省略し得るから,

$$\mu = \frac{1}{2} \text{ となり, } (46)\text{は, } \delta \doteq \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot S}{D} \quad (47)$$

となる。

## 2. 試験梁の諸数値並に実験器具, 機械類

### (1) 試験梁の諸数値

鋼鉄, 白樺, 孟宗竹の 3 種の材料にて試験梁を各 5 本づつ製作し実験に用いた。又, 各種梁の弾性率  $E$ , 剪断弾性係数  $G$  などについては別の実験によつて, 数値を算出し, 各実験に於ては総て平均値を採用した。その結果は, 第 1 表, 第 2 表の如くである。

第1表 梁の諸数値(1)

種別	$b$ (cm)	$t$ (cm)	$s$ (cm)	$W$ (g)	$l$ (cm)
鋼鉄梁	1.600	0.450	44.00	255.36	40.00
白樫梁	1.576	0.439	44.00	21.19	40.00
孟宗竹梁	1.340	0.438	43.65	19.70	40.00

第2表 梁の諸数値(2)

種別	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$E$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$G$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$k$	$I_z$ (cm <sup>4</sup> )	$r_z$ (cm)
鋼鉄梁	0.720000	2,100,000	830,000	1.50	0.012150	0.1299038
白樫梁	0.691864	135,000	97,000	1.50	0.011125	0.1268062
孟宗竹梁	0.586701	150,000	77,000	1.50	0.009380	0.1264425

- (註)
- $b$  ..... 梁断面の幅 (cm)
  - $t$  ..... 梁断面の厚さ (cm)
  - $s$  ..... 梁の長さ (cm)
  - $W$  ..... 梁1個の重さ (g)
  - $l$  ..... 支間 (cm)
  - $A$  ..... 断面積 (cm<sup>2</sup>)
  - $E$  ..... 弾性率 (kg/cm<sup>2</sup>)
  - $G$  ..... 剪断弾性係数 (kg/cm<sup>2</sup>)
  - $k$  ..... 剪断弾性補正係数
  - $I_z$  .....  $Z$ 軸に関する慣性モーメント (cm<sup>4</sup>)
  - $r_z$  .....  $Z$ 軸に関する環動半径 (cm)

(2), 実験器具, 機械類

撓み弾性率測定装置, 光の挺子, 螺旋測微尺, 尺度, 望遠鏡, 物指, キャリパー(長さ約130 mm,  $\frac{1}{20}$  mmの精度), 精密マイクロメーター(0より25mmまでを $\frac{1}{100}$  mmの精度にて測り得る), 其他, 各種弾性率測定装置, 剛性率測定装置など, 弾性に関する物理実験器具, 機械類一切,

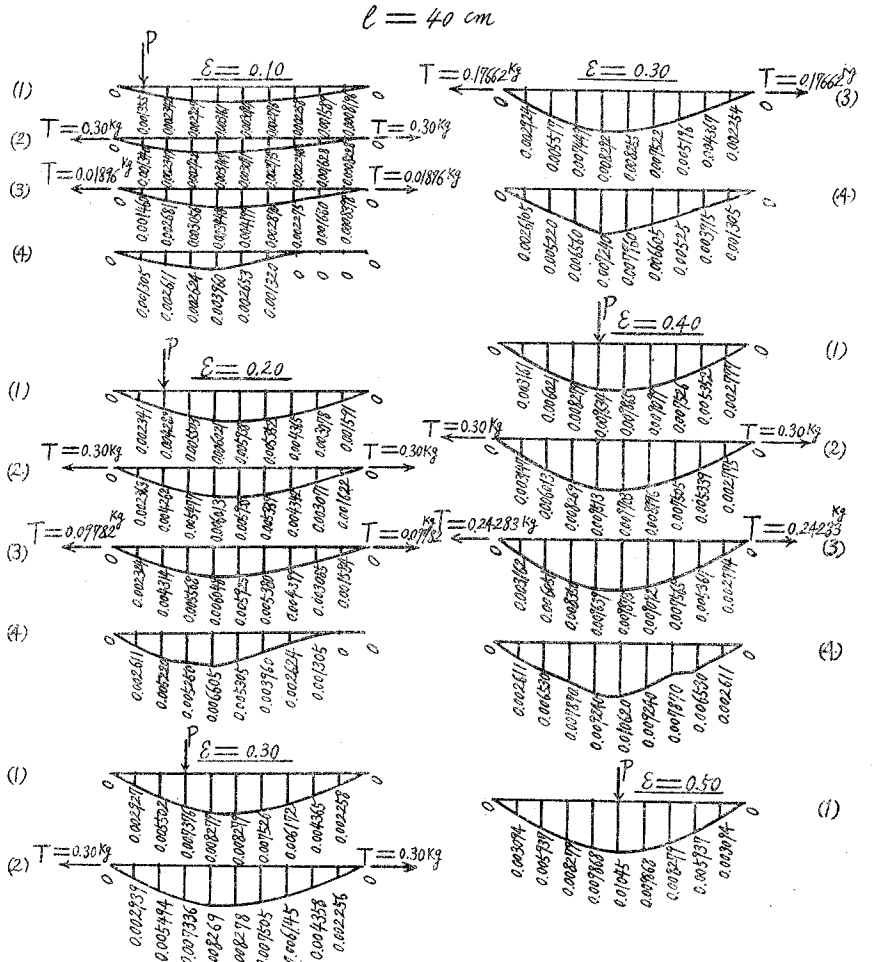
IV 各種の撓度理論公式に依る計算と実験の結果

第3表 (3)の軸張力  $T$  の計算表

$T = \xi^2 KI$ (kg)																	
		$\varepsilon$	$\omega$	$\xi$	$T$			$\varepsilon$	$\omega$	$\xi$	$T$			$\varepsilon$	$\omega$	$\xi$	$T$
鋼鉄	白	0.1	0.01724	0.000862	0.01896	白	0.1	0.19380	0.009690	0.14248	孟宗竹	0.1	0.19490	0.009745	0.13362		
		0.2	0.03916	0.001958	0.09782		0.2	0.26600	0.01330	0.26567		0.2	0.26810	0.013410	0.25282		
		0.3	0.05262	0.002631	0.17662		0.3	0.34200	0.01710	0.43917		0.3	0.35240	0.01762	0.43682		
	樫	0.4	0.05170	0.003085	0.24283	0.4	0.41570	0.02079	0.64885	0.4	0.42370	0.02119	0.63146				
		0.5	0.06272	0.003136	0.25093	0.5	0.44310	0.02216	0.73719	0.5	0.44780	0.02239	0.70529				

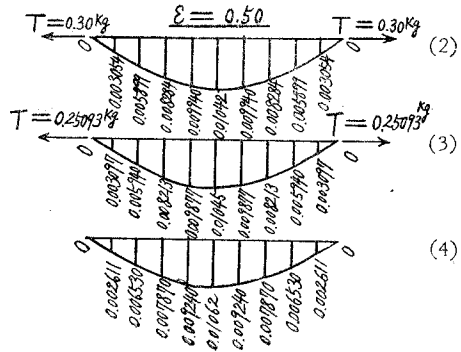
第 6 図

任意の点に単一集中荷重  $P=0.20\text{kg}$  を受ける鋼鉄梁の各点に於ける撓度図



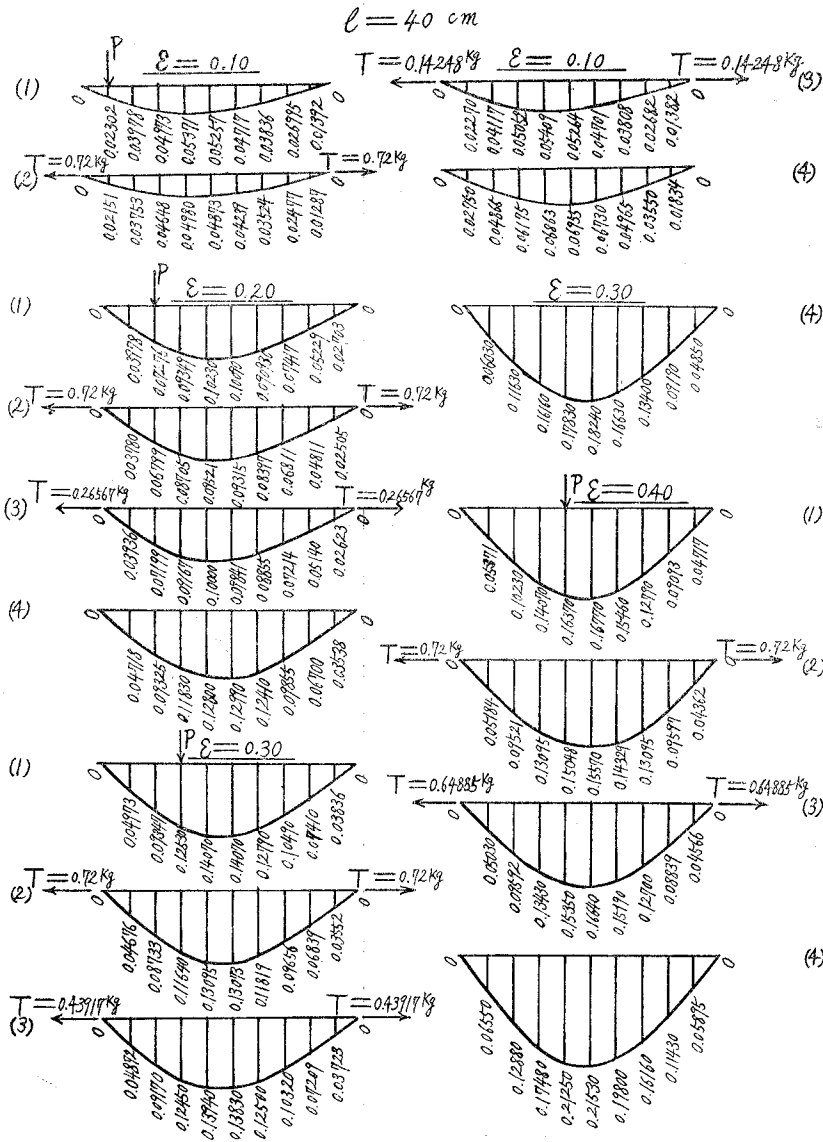
(註)

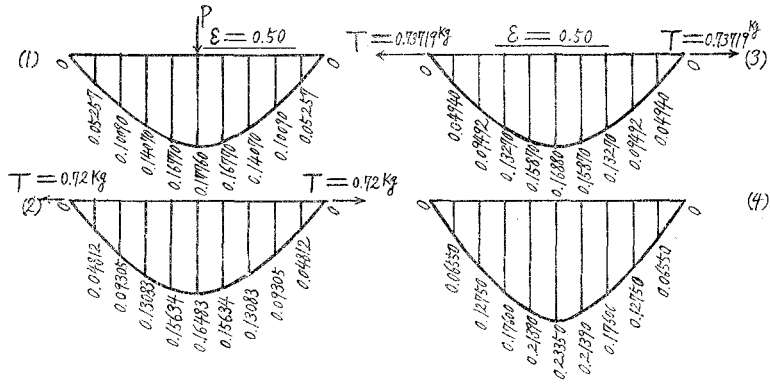
- (1)..... 単純梁の理論撓度
- (2)..... 三角級数を用い軸張力を考慮せる単純梁の理論撓度
- (3)..... 軸張力を考慮せる超越函数に依つて表示せられる理論撓度
- (4)..... 両端単純支持状態に於ける実験撓度



第 7 図

任意の点に単一集中荷重  $P=0.20\text{kg}$  を受ける白樺梁の各点に於ける撓度図

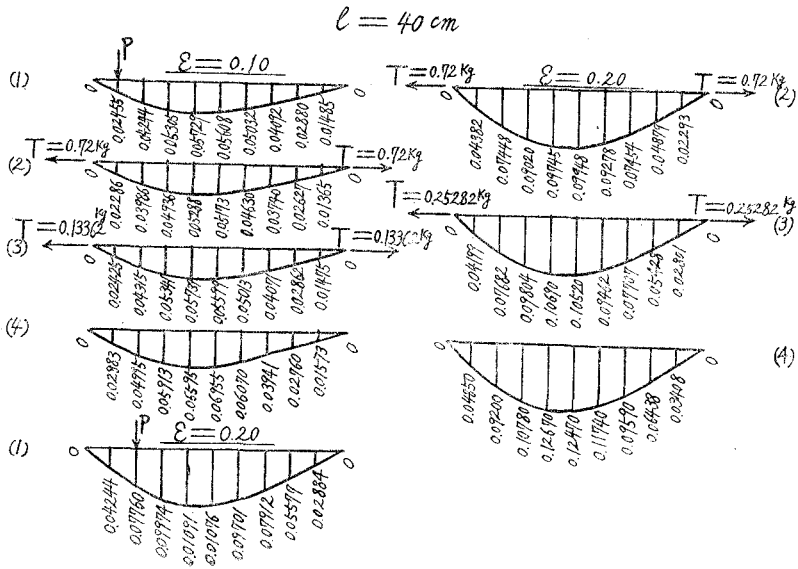


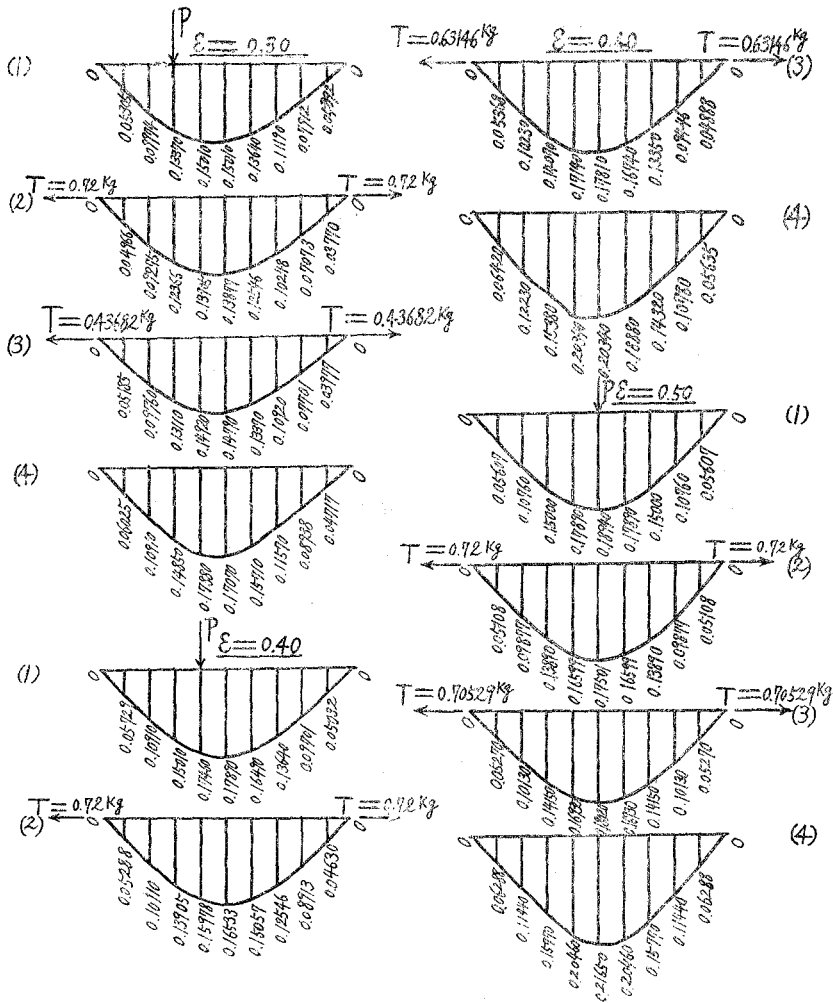


- (註) (1)…… 単純梁の理論撓度  
 (2)…… 三角級数を用い軸張力を考慮せる単純梁の理論撓度  
 (3)…… 軸張力を考慮せる超越函数に依つて表示せられる理論撓度  
 (4)…… 両端単純支持状態に於ける実験撓度

第 8 図

任意の点に単一集中荷重  $P=0.20\text{kg}$  を受ける孟宗竹梁の各点に於ける撓度図





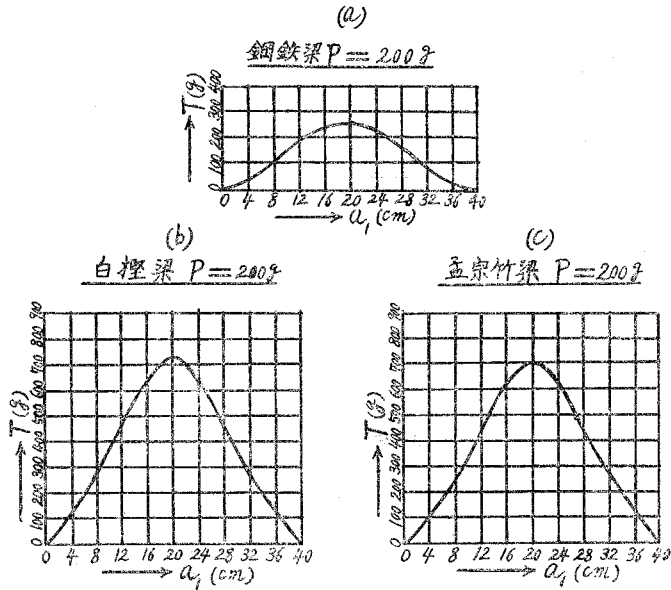
(註)

- (1)..... 単純梁の理論撓度
- (2)..... 三角級数を用い軸張力を考慮せる単純梁の理論撓度
- (3)..... 軸張力を考慮せる超越函数に依つて表示せられる理論撓度
- (4)..... 両端単純支持状態に於ける実験撓度



第 9 図

超越函数を用いた梁に於ける軸張力 $T$ の変化曲線図



(註)

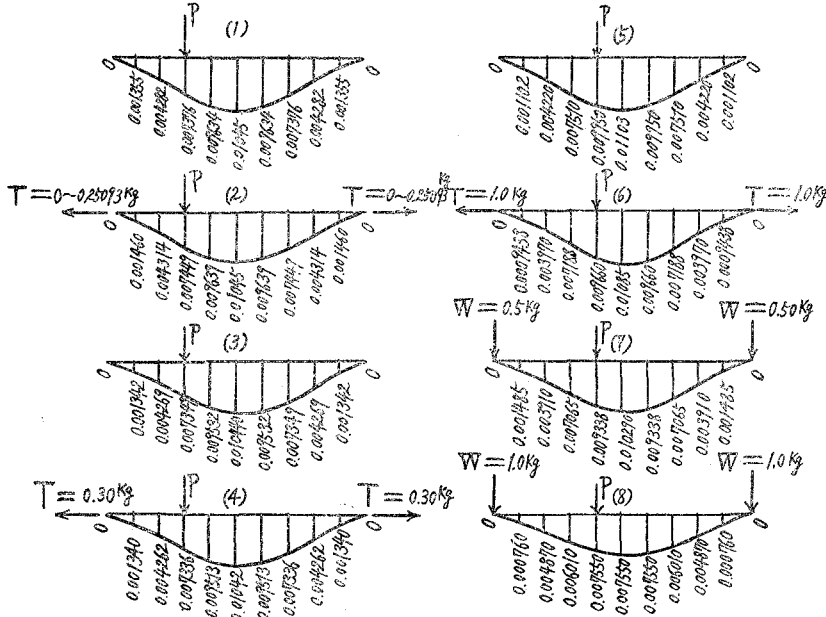
本研究論文を取纏めるに当り、次に記する諸先生の御高言と御支援を賜つた事に対し深く感謝致し敬意を表する次第であります

室 蘭 工 業 大 学 前 学 長	工 博	井 口 鹿 象 教 授
室 蘭 工 業 大 学 土 木 工 学 教 室		佐 伯 利 吉 教 授
山 形 大 学 文 理 学 部 物 理 学 研 究 室	理 博	佐 藤 貞 彌 教 授
〃 農 学 部 農 業 工 学 研 究 室		久 保 健 次 教 授
北 海 道 大 学 工 学 部 土 木 工 学 教 室	工 博	酒 井 忠 明 教 授
京 都 大 学 工 学 研 究 所	工 博	成 岡 昌 夫 教 授

第 10 図

任意の点に単一集中荷重  $P=0.20\text{kg}$  を受ける鋼鉄梁の荷重点撓度図

実験に於ける最大追加荷重  $nP=1.40\text{kg}$

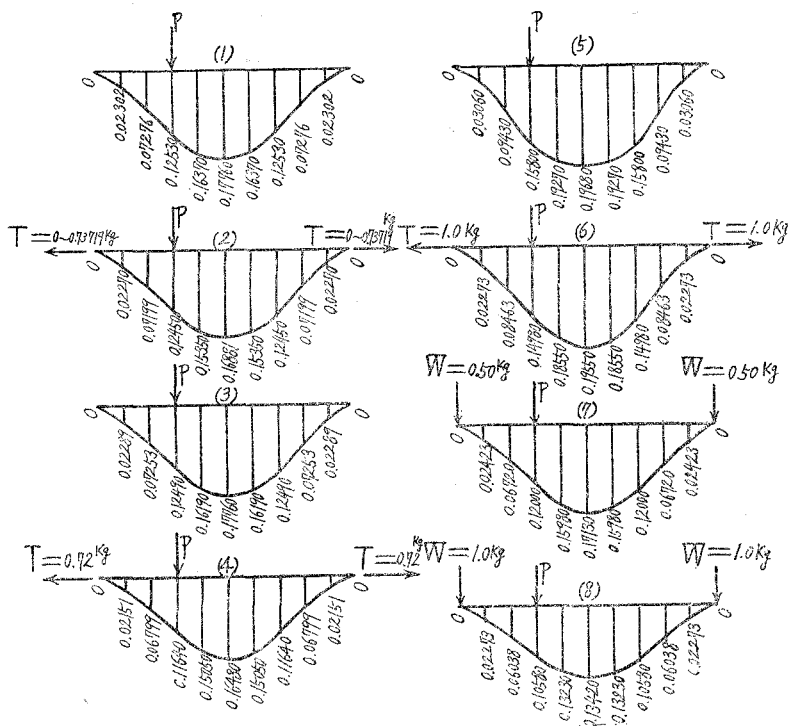


(註)

- (1)..... 単純梁の理論撓度
- (2)..... 軸張力を考慮せる超越函数に依り表示せられる理論撓度
- (3)..... 三角級数に依つて表示せられる単純梁の理論撓度
- (4)..... 軸張力を考慮せる三角級数に依つて表示せられる理論撓度
- (5)..... 両端単純支持状態に於ける実験撓度
- (6)..... 軸張力  $1.0\text{kg}$  を両側に作用せしめた場合の実験撓度
- (7)..... 両支点上に集中荷重  $W=0.50\text{kg}$  ある場合の実験撓度
- (8)..... 両支点上に集中荷重  $W=1.0\text{kg}$  ある場合の実験撓度

但し(3)の値は級数の項を数多くとれば(1)の数値に近づく

第 11 図

任意の点に単一集中荷重 $P=0.20\text{kg}$ を受ける白樫梁の荷重点撓度図実験に於ける最大追加荷重 $7P=0.80\text{kg}$ 

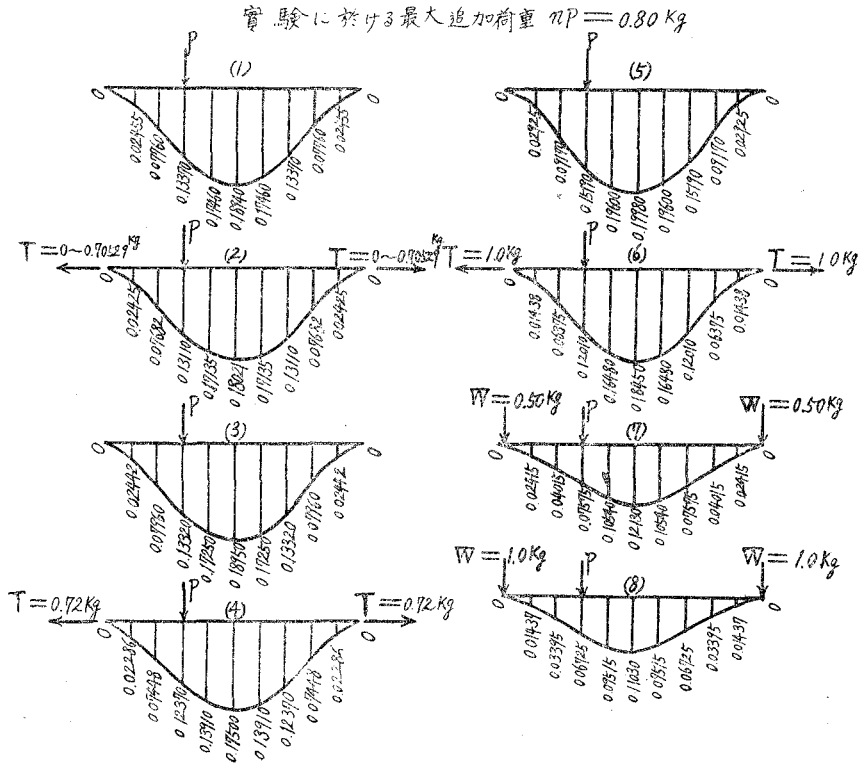
(註)

- (1)…… 単純梁の理論撓度
- (2)…… 軸張力を考慮せる超越函数に依り表示せられる理論撓度
- (3)…… 三角級数に依つて表示せられる単純梁の理論撓度
- (4)…… 軸張力を考慮せる三角級数に依つて表示せられる理論撓度
- (5)…… 両端単純支持状態に於ける実験撓度
- (6)…… 軸張力 $1.0\text{kg}$ を両側に作用せしめた場合の実験撓度
- (7)…… 両支点上に集中荷重 $W=0.50\text{kg}$ ある場合の実験撓度
- (8)…… 両支点上に集中荷重 $W=1.0\text{kg}$ ある場合の実験撓度

但し (3)の数値は級数の項を数多くとれば(1)の数値に近づく

第 12 図

任意の点に単一集中荷重  $P=0.20\text{kg}$  を受ける孟宗竹梁の荷重点撓度図



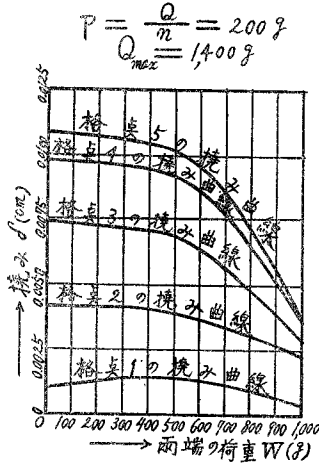
(註)

- (1)..... 単純梁の理論撓度
- (2)..... 軸張力を考慮せる超越函数に依り表示せられる理論撓度
- (3)..... 三角級数に依つて表示せられる単純梁の理論撓度
- (4)..... 軸張力を考慮せる三角級数に依つて表示せられる理論撓度
- (5)..... 両端単純支持状態に於ける実験撓度
- (6)..... 軸張力1.0kgを両側に作用せしめた場合の実験撓度
- (7)..... 両支点上に集中荷重  $W=0.50\text{kg}$  がある場合の実験撓度
- (8)..... 両支点上に集中荷重  $W=1.0\text{kg}$  がある場合の実験撓度

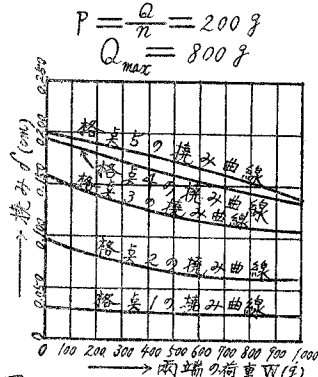
但し (3)の数値は級数の項を数多くとれば(1)の数値に近づく

両支点上に集中荷重  $W$  を受ける梁の  $P=0.20\text{kg}$  に依る荷重点撓度の実験結果

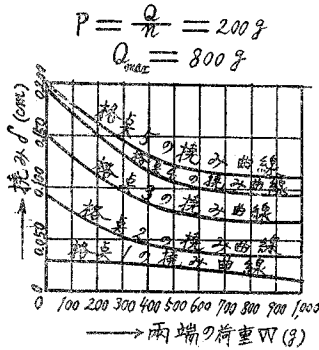
第13圖 鋼鉄梁の荷重点撓度  $W-d$  曲線



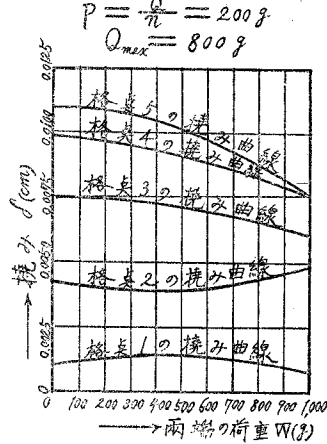
第14圖 白樺梁の荷重点撓度  $W-d$  曲線



第15圖 孟宗竹梁の荷重点撓度  $W-d$  曲線



第16圖 鋼鉄梁の荷重点撓度  $W-d$  曲線



第 4 表

種 別	鋼 鉄 梁			白 樺 梁			孟 宗 竹 梁		
	中央撓度	比 率	増減比率	中央撓度	比 率	増減比率	中央撓度	比 率	増減比率
(1)	0.01045	1.0	0 %	0.1776	1.0	0 %	0.1894	1.0	0 %
(2)	0.01045	1.0	0 %	0.1688	0.950	- 5 %	0.1802	0.952	- 4.8%
(3)	0.01042	0.997	- 0.3%	0.1648	0.929	- 7.1%	0.1750	0.924	- 7.6%
(4)	0.01103	1.055	+ 5.5%	0.1968	1.108	+ 10.8%	0.1998	1.054	+ 5.4%
(5)	0.01085	1.038	+ 3.8%	0.1955	1.101	+ 10.1%	0.1845	0.975	- 2.5%
(6)	0.01029	0.984	- 1.6%	0.1713	0.965	- 3.5%	0.1213	0.640	- 36.0%
(7)	0.00755	0.723	- 27.7%	0.1342	0.756	- 24.4%	0.1103	0.583	41.7%

- (註) (1)..... 単純梁の理論撓度  
 (2)..... 軸張力を考慮せる超越函数に依り表示せられる理論撓度  
 (3)..... 軸張力を考慮せる三角級数に依つて表示せられる理論撓度  
 (4)..... 両端単純支持状態に於ける実験撓度  
 (5)..... 軸張力  $T=1.0\text{kg}$  を両側に作用せしめた場合の実験撓度  
 (6)..... 両支点上に集中荷重  $W=0.50\text{kg}$  ある場合の実験撓度  
 (7)..... 両支点上に集中荷重  $W=1.0\text{kg}$  ある場合の実験撓度

第4表は、各種の理論撓度と実験撓度の最大について比較せる結果を示せるものである。

## V 結 論

撓みに対する各種理論に依つて計算せる結果と実験撓度とを比較すればこの実験に関する限り次の事が云える。先づ最初に、各撓度理論に依つて求めた値の最大差を%で表わして見ると鋼鉄梁で約3%、白樫梁で約9.5%、孟宗竹梁で約10%になる。次に、両端単純支持状態に於ける実験撓度は、理論撓度に比し、鋼鉄梁にて約5.5~13.0%、白樫梁にて約11.0~31.0%、孟宗竹梁にて約5.0~19.0%の増加を示して居る。即ち、実験撓度は、理論撓度に比べ材料により多少の差はあるけれども、荷重の割合小さい範囲では平均約10~20%だけ大きい事となる。又、第4表によつても明かな如く、最大撓度（中央荷重点撓度）を比較すれば、実験撓度は理論撓度に比べ、最大差、鋼鉄梁にて、約6%、白樫梁にて、約18%、孟宗竹梁にて、約13%だけ大きくなつて居る。此の事柄は、現在用いられている桁や梁の撓度理論公式は、荷重の比較的小さい範囲に於て、高さの薄い桁や梁に用いられれば、危険側にあり、注意を要する事となる。又撓度に於て差があると云う事は、内部の応力状態も異つて来る証拠であつて、撓度の基本理論について、充分なる吟味と研究を要すると思う。種々考究せる結果について述べれば、次の如くである。先づ材質により弾性率 $E$ が変化するからではないかと考えて見たが、これに対しては、別個に、弾性率 $E$ の物理学的実験を種々行つて見たし、荷重も比較的小さいのであるから、それが主なる原因ではないと考えられる。軸力の影響は本理論計算に於てさえ最大約8%で相当大きく、この軸力の変化如何によつては撓みに大きな影響を与えるものと思う。例えば負の軸力即ち軸圧縮力が生ずれば撓みは増大する理である。又深く考究せる結果、(1)、軸力の作用線が必ずしも中立軸に一致するとは限らない事、(2)、桁梁の幅、高さなどの寸法の影響を考慮しなければならない事、(3)、微小変位の影響を考え、撓曲線の位置の変化と支間の変位を考慮しなければならない事などに思い当つた。次に、両支点上に集中荷重 $W=1.0\text{kg}$ が載る場合の実験撓度は、両支点上に集中荷重ない場合に比べ、約20~45%の減少を見、この減少率は、両支点上に載る荷重が増加すれば、鋼鉄の場合は増し、白樫の場合は一定直線を示し、孟宗竹の場合は逆に減つて来る傾向がある。この問題については先づ、両支点上に載る荷重の或程度の分布幅の影響、摩擦により生ずる軸力の影響、支点到ける材料の圧縮の影響等考慮して見たが、何れも多少の影響のある事は認めるが、その主なる原因ではなく、結局、支点到ける反力の移動のため生ずる負の曲げも一めんとの影響、支点到ける集中荷重の慣性力の影響等が最も大きな原因である事に思い当つた。以上述べた諸問題に対する原因の探究とその解析、それによる新理論の確立などは、桁梁の撓み理論に関する基礎的研究、(Ⅱ)、(Ⅲ)で次の機会に論ずる事とする。

(昭和31年4月27日)