表面に垂直及び水平荷重を受ける梁について

表面に垂直及び水平荷重を受ける梁について

能町純雄　菅原　登

On the Stresses of Beam under Surface Tractions Normal and Tangential to its Axis

Sumio Nomachi　　Noboru Sugawara

Abstract

Prof. A.E.H. Love states, in note 312.c of his book "on the moderately thick plate", a ingenious assumption on the stress distribution in the plate; and he makes the complexity of the problems in the plate remarkably simple. In this paper, by applying the above assumption to strips under the plane stress state, caused by any surface tractions normal and tangential at their long sides, the authors obtain the stresses and displacements in them: and also propose the convenient formulae corresponding to the Bernoulli's assumption of plane preservation.

I 緒　　論

Love が，"**on the moderately thick plate**"[1] において厚さの方向の応力度分布を，巧妙な方法で求め，複雑な問題を著しく簡単化したが，これを梁に応用して，表面力として垂直荷重と切線荷重が作用した場合の応力と変位を求め，これに平面保持の **Bernoulli** の仮定を合せて，便利な公式が求められる。

II 中等程度の厚さの梁

x, z なる直交座標軸を考えれば，力の釣合式は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (a)\\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \qquad (b)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

1, Love: The Mathematical Theory of Elasticity 312.C (1934)

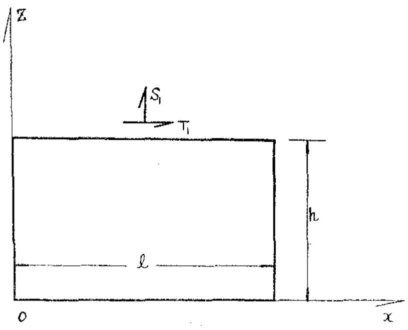

Fig.1

第１図のように $z=0$ で表面力が存在せず，$z=h$ で S_1，T_1 なる表面力があるとすれば，境界条件と（1）の（b）式とを組合せて

$$
\left.\begin{aligned}
&z=0 \text{ にて } \sigma_z=0 \quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\\
&z=h \text{ にて } \sigma_z=\frac{S_1}{t} \quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\frac{\partial T_1}{\partial x}\,\frac{1}{t}
\end{aligned}\right\}\quad(2)
$$

但しtは板の厚さである，

と書く事が出来る。次に適合条件から

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_z$$

と置けば

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0\\
&\nabla^2\Theta = 0 \qquad \nabla^4\sigma_z = 0
\end{aligned}\right\}\quad(3)
$$

従つて

$$\sigma_z = S_1\cdot f(z)$$

と置けば，(3)式から

$$\nabla^4 S_1\cdot f(z)$$

今，S_1 が $\dfrac{d^2S_1}{dx^2}=0$ であると仮定する。一般に荷重はこの仮定を満足するものである。

然る時は

$$\Delta^2\, S_1\cdot f(z) = \frac{S_1\,d^4f(z)}{dx^4} + 2\,\frac{d^2S_1}{dx^2}\,\frac{d^2f(z)}{dz^2} + \frac{S_1 d^4f(z)}{dz^4} = 0 \tag{4}$$

$$\text{故に}\quad \frac{d^4f(z)}{dz^4} = 0$$

上の関係から直ちに

$$f(z) = C_0z^3 + C_2z^2 + C_3z + C_4 \tag{5}$$

上式中 C_0, C_2, C_3, C_4 は（2）式に与えられる条件によつて定まる，計算の結果次のようになる。

$$\sigma_z = \frac{S_1}{h^3t}\,z^2(3h-2z) - \frac{dT_1}{dx}\,\frac{1}{h^2t}\,z^2(z-h) \tag{6}$$

これを（1）の（b）式に代入して x について積分すれば

$$\tau_{xz} = -\frac{6z(h-z)}{h^3t}\int S_1\,dx + \frac{z(3z-2h)}{h^2t}\,T_1 + \phi_0 \tag{7}$$

ただし $\int S_1dx$ 中に積分常数は含まれるものとする。

次に上式を (1) の (a) 式に代入して x について積分すれば

$$\sigma_x = -\frac{6(h-2z)}{h^3t}\int S_1 dx^2 + \frac{(6z-2h)}{h^2t}\int T_1 dx + \phi_0 x + \phi_1 \tag{8}$$

ただし $\int S_1 dx^2$ は x について二度積分する事を表わす。又 ϕ_0, ϕ_1 は z のみの函数で積分常数である。

次に歪成分の間に満足されるべき適合条件を次の形で表わす，即ち

$$2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x-\nu\sigma_z)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_z-\nu\sigma_x) \tag{9}$$

この式に (6), (7), (8) 式を代入して

$$2(1+\nu)\left\{-6(h-2z)\frac{S_1}{h^3t}+(6z-2h)\frac{1}{h^2t}\frac{dT_1}{dx}\right\}$$

$$=\frac{d^2\phi_0}{dz^2}x+\frac{d^2\phi_1}{dz^2}-2\nu\left\{6(h-2z)\frac{S_1}{h^3t}-(6z-2h)\frac{1}{h^2t}\frac{dT_1}{dx}\right\}$$

故に
$$-12(h-2z)\frac{S_1}{h^3t}+\frac{2}{h^2t}(6z-2h)\frac{dT_1}{dx}=\frac{d^2\phi_0}{dz^2}x+\frac{d^2\phi_1}{dz^2} \tag{10}$$

両辺を z で二度積分して

$$z^2(3h-2z)\frac{S_1}{h^3t}-z^2(z-h)\frac{2}{h^2t}\frac{dT_1}{dx}=\phi_0 x+\phi_1 \tag{11}$$

x 方向及び z 方向の変位を夫々 u, w とすれば

$$\left.\begin{aligned} &E\frac{\partial u}{\partial x}=\sigma_x-\nu\sigma_z && (c)\\ &E\frac{\partial w}{\partial z}=\sigma_z-\nu\sigma_x && (d)\\ &G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\tau_{xz} && (e)\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

なる関係がある，(c) と (d) 式より

$$Eu=6(h-2z)\int\frac{S_1dx^3}{h^3t}+(6z-2h)\int\frac{T_1dx^2}{h^2t}+\phi_0\frac{x^2}{2}+\phi_1x+\phi_2$$

$$-\nu z^2(3h-2z)\int\frac{S_1dx}{h^3t}-\nu z^2(z-h)\frac{T_1}{h^2t} \tag{13}$$

$$Ew=z^3\left(h-\frac{z}{2}\right)\frac{S_1}{h^3t}-z^3\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{1}{h^2t}\frac{dT_1}{dx}-\nu 6z(h-z)\int\frac{S_1dx^2}{h^3t}$$

$$-\nu z(3z-2h)\int\frac{T_1dx}{h^2t}-\nu\int(\phi_0x+\phi_1)\,dz+\psi(x) \tag{14}$$

この式を公式 (12) の (e) 式に代入して

$$2(1+\nu)\left\{-6z(h-z)\int\frac{S_1dx}{h^3t}+z(3z-2h)\frac{T_1}{h^2t}+\phi_0(z)\right\}$$

$$= -12\int \frac{S_1 dx^3}{h^3 t} + 6\int \frac{T_1 dx^2}{h^2 t} + \frac{d\phi_0}{dz}\frac{x^2}{2} + \frac{d\phi_1}{dz}x + \frac{d\phi_2}{dz}$$

$$-2\nu\, 6z(h-z)\int \frac{S_1 dx}{h^3 t} - 2\nu z(3z-2h)\frac{T_1}{h^2 t} + z^3\left(h-\frac{z}{2}\right)\frac{1}{h^3 t}\frac{dS_1}{dx}$$

$$-z^3\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{1}{h^2 t}\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \nu\int \phi_0 dz + \frac{d\psi}{dx}(x) \tag{15}$$

上式中

$$\frac{d\psi}{dx}(x) = 12\int \frac{S_1 dx^3}{h^3 t} - 6\int \frac{T_1 dx^2}{h^2 t}$$

$$\frac{ds_1}{dx} = \frac{d^2 T_1}{dx^2} = \text{常数}$$

であるから

$$\phi_0(z) = z^2\left(h-\frac{z}{2}\right)\frac{1}{h^3 t}\frac{dS_1}{dx} - z^3\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{1}{h^2 t}\frac{d^2 T_1}{dx^2}$$

と置く事が出来るから，(10) 式の両辺を x 及び z で一度づつ積分すれば，

$$2\left\{6z(h-z)\int \frac{S_1 dx}{h^3 t} + z(3z-2h)\frac{T_1}{h^2 t}\right\} = \frac{d\phi_0}{dz}\frac{x^2}{2} + \frac{d\phi_1}{dz}x + \frac{d\phi_2}{dz} \tag{16}$$

と書く事が出来る。これを (15) 式に代入すれば，次のようになる。

$$-12\int \frac{S_1 dx^3}{h^3 t} + 6\int \frac{T_1 dx^2}{h^2 t} + \frac{d\psi}{dx} + z^3\left(h-\frac{z}{2}\right)\frac{dS_1}{dx}\frac{1}{h^3 t}$$

$$-z^3\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{1}{h^2 t}\frac{d^2 T_1}{dx^2} - (2+3\nu)\phi_0(z) - 2(1+\nu)\phi_0(z) - \nu\int \phi_0(Z) = 0$$

上式第3項までは x のみの函数である。又第4項以下は S_1 及び T_1 が

$$\frac{d^2 S_1}{dx^2} = \frac{d^2 T_1}{dx^2} = 0$$

なる性質であるから，すべて z のみの函数である。故に

$$\psi = \frac{12}{h^3 t}\int S_1 dx^4 + \frac{6}{h^2 t}\int T_1 dx^3 \tag{17}$$

$$-2(1+\nu)\phi_0(z) - \nu\int \phi_0 dz = \frac{z^3}{h^3 t}\left(h-\frac{z}{2}\right)\frac{dS_1}{dx} - \frac{z^3}{h^2 t}\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{d^2 T_1}{dx^2} \tag{18}$$

となる。従つて

$$Eu = \frac{6(h-2z)}{h^3 t}\int S_1 dx^3 + \frac{(6z-2h)}{h^2 t}\int T_1 dx^2 + (2-\nu)\left\{\frac{z^2(3h-2z)}{h^3 t}\int S_1 dx + \frac{z^2(z-h)}{h^2 t}T_1\right\} \tag{19}$$

$$Ew = \frac{12}{h^3 t}\int S_1 dx^4 - \frac{6}{h^2 t}\int T_1 dx^3 - \nu\left\{\frac{6z(h-z)}{h^3 t}\int S_1 dx^2 + \frac{z(3z-2h)}{h^2 t}\int T_1 dx\right\}$$

$$+(1-2\nu)\left\{\frac{z^3}{h^3t}\left(h-\frac{z}{2}\right)S_1-\frac{z^3}{h^2t}\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{dT_1}{dx}\right\} \tag{20}$$

$$\tau_{xz}=\frac{6z(h-z)}{h^3t}\int S_1dx+\frac{z(3z-2h)}{h^2t}T_1+\phi_0 \tag{21}$$

$$\sigma_x=\frac{6(h-2z)}{h^3t}\int S_1dx^2+\frac{(6z-2h)}{h^2t}\int T_1\,dx+2z^2(3h-2z)\frac{S_1}{h^3t}$$
$$-\frac{2}{h^2t}z^2(z-h)\frac{dT_1}{dx} \tag{22}$$

これらの各公式で **Moderate thickness** の梁の応力度と変位が求まつたが，式中の各項の影響を調べるために

$$x=l\xi \qquad 0\leqq\xi\leqq1$$

と置けば

$$\sigma_z=\frac{S_1}{h^3t}z^2(3h-2z)-\frac{dT_1}{d\xi}\frac{1}{lh^2t}z^2(z-h) \tag{23}$$

$$\tau_{xz}=-\frac{6z(h-z)l}{h^3t}\int S_1d\xi+\frac{z(3z-2h)}{h^2t}T_1+\phi_0 \tag{24}$$

$$\sigma_x=\frac{6(h-2z)l^2}{h^3t}\int S_1d\xi^2-\frac{(6z-2h)l}{h^2t}\int T_1d\xi+\frac{2z^2(3h-2z)}{h^3t}S_1$$
$$-2\frac{z^2(z-h)}{h^2lt}\frac{dT_1}{d\xi} \tag{25}$$

$$Eu=\frac{6(h-2z)l^3}{h^3t}\int S_1d\xi^3+\frac{(6z-2h)l^2}{h^2t}\int T_1d\xi^2$$
$$+(2-\nu)\left\{\frac{z^2(3h-2z)l}{h^2t}\int S_1d\xi+\frac{z^2(z-h)}{h^2t}T_1\right\} \tag{26}$$

$$Ew=\frac{12l^4}{h^3t}\int S_1d\xi^4-\frac{6l^3}{h^2t}\int T_1d\xi^3-\nu\left\{\frac{6z(h-z)l^2}{h^3t}\int S_1d\xi^2+\frac{z(3z-2h)l}{h^2t}\int T_1d\xi\right\}$$
$$+(1-2\nu)\left\{\frac{z^3}{h^3t}\left(h-\frac{z}{2}\right)S_1-\frac{z^3}{h^2lt}\left(\frac{z}{4}-\frac{h}{3}\right)\frac{dT_1}{d\xi}\right\} \tag{27}$$

III　平面保持理論による梁

これらの結果からわかるように，l が h より相当大きくなれば，近似的に次のように書く事が出来る。

$$\sigma_z=\frac{z^2(3h-2z)}{h^3t}S_1-\frac{z^2(z-h)}{h^2t}\frac{dT_1}{dx} \tag{28}$$

$$\tau_{xz}=-\frac{6z(h-z)l}{h^3t}\int S_1d\xi+\frac{z(3z-2h)}{h^2t}T_1 \tag{29}$$

$$\sigma_x=\frac{6(h-2z)l^2}{h^3t}\int S_1d\xi^2-\frac{(6z-2h)l}{h^2t}\int T_1d\xi \tag{30}$$

$$Eu=\frac{6(h-2z)l^3}{h^3t}\int S_1d\xi^3-\frac{(6z-2h)l^2}{h^2t}\int T_1d\xi^2 \tag{31}$$

$$Ew=\frac{12l^4}{h^3t}\int S_1d\xi^4+\frac{6l^3}{h^2t}\int T_1d\xi^3 \tag{32}$$

Iをこの板の z 方向断面二次モーメント，Wを同じく断面係数とすれば，上式は次のようになる。

$$\sigma_z=\frac{z^2(3h-2z)}{12I}S_1 \quad -\frac{z^2(z-h)}{6Wl}\frac{dT_1}{d\xi} \tag{33}$$

$$\tau_{xz}=-\frac{z(h-z)l}{2I}\int S_1d\xi+\frac{z(3z-2h)}{6W}T_1 \tag{34}$$

$$\sigma_x=\frac{(h-2z)l^2}{2I}\int S_1d\xi^2-\frac{(6z-2h)l}{6W}\int T_1d\xi \tag{35}$$

$$Eu=\frac{(h-2z)l^3}{2I}\int S_1d\xi^3-\frac{(6z-2h)l^2}{6W}\int T_1d\xi^2 \tag{36}$$

$$Ew=\frac{l^4}{I}\int S_1d\xi^4+\frac{l^3}{W}\int T_1d\xi^3 \tag{37}$$

上の各式中省略された各項は，表わされている項に比べ h^2/l^2 倍の大きさである。従つて，$l=10h$ ならば 1/100 のオーダーとなる。叉，上式は歪に関する平面保持の **Bernoulli** の仮定を満足している，故に $T_1=0$ と置けば，これらの式は梁の初等理論による曲げの公式と一致する。表面力として同じ程度の大きさの垂直荷重と切線荷重が作用する場合には，切線荷重の影響は，垂直荷重に比べ h/l 倍である事を公式 (33)～(37) は示している。$h=0$ にてS_2, T_2 なる表面力が作用する場合には，

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z&=-\frac{(h-z)^2(h+2z)}{12I}S_2+\frac{(z-h)^2z}{6Wl}\frac{dT_2}{d\xi}\\
\tau_{xz}&=\frac{(h-z)zl}{2I}\int S_2d\xi-\frac{(h-z)(h-3z)}{6W}T_2\\
\sigma_x&=\frac{(h-2z)l^2}{2I}\int S_2d\xi^2+\frac{(4h-6z)l}{6W}\int T_2d\xi\\
Eu&=\frac{(h-2z)l^3}{2I}\int S_2d\xi^3+\frac{(4h-6z)l^2}{6W}\int T_2d\xi^2\\
Ew&=\frac{l^4}{I}\int S_2d\xi^4+\frac{l^3}{W}\int T_2d\xi^3
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

IV　P.S.C.においてグラウトした場合と然らざる場合との相違

この問題は実験によつて種々検討されているが，力学的に明確な説明がされていないようである。ピアノ線をグラウトすればその各部について連続的に圧縮をコンクリートに与えるものと考えられるから，その分布を第3図のように仮定出来る。叉，外力は常に表面力として作用

するから，この力は剪断力の形でコンクリート体に入り込む，従つて $S_1=0$ と置いて第3図の関係から

$$\frac{lp}{4} = P \qquad\qquad p = \frac{4P}{l}$$

故に公式 (33)〜(37) 中の T_1 は

$$T_1 = p\left(1-\frac{2x}{l}\right) = \frac{4P}{l}\left(1-\frac{2x}{l}\right)$$

となるから，

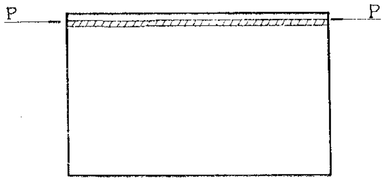

Fig. 2

$$\sigma_z = \frac{z^2(z-h)}{6Wl}\frac{4P}{l} \tag{39}$$

$$\tau_{xz} = \frac{z(3z-2h)}{6W}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\frac{4P}{l} \tag{40}$$

$$\sigma_x = -\frac{(6z-2h)l}{6W}\frac{4P}{l}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right)+C \tag{41}$$

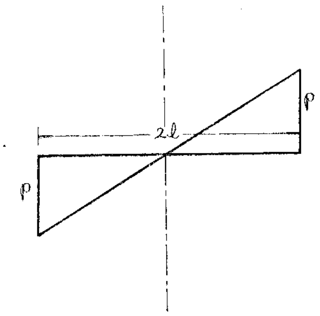

Fig. 3

C は積分常数である。

$x=0$ 及び l で中央線 $z=\frac{h}{2}$ に関して $+P\times\frac{h}{2}$ なる曲げモーメントが存在するから

$$\int_0^h C(h-z)l\,dz = +P\times\frac{h}{2}$$

故に　$C=\frac{P}{A}$

$$Eu = \frac{(6z-2h)l}{6W}4P\left(\frac{x^2}{2l^2}-\frac{x^3}{3l^3}-\frac{1}{12}\right)+\frac{P}{A}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{2}\right) \tag{42}$$

$$Ew = \frac{l^2}{W}4P\left(\frac{x^3}{6l^3}-\frac{x^4}{12l^4}-\frac{x}{12l}\right)+\frac{P}{A}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{x}{l}\right) \tag{43}$$

然るに，グラウトしていない梁は端部において P なる圧縮が作用するだけである。

この場合の σ_x は

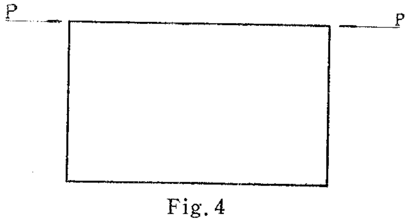

Fig. 4

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{P}{A}-\frac{Ph}{2I}\left(z-\frac{h}{2}\right)\\ \sigma_x &= \frac{P}{A}-\frac{P}{W}\left(z-\frac{h}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

で与えられる。

グラウトした場合には

$$\sigma_x=\frac{4P(h-3z)}{3W}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\frac{P}{A} \tag{45}$$

V 結　　言

以上，**Love** の **Moderately thickness** の板に用いた仮定によつて二次元問題を解いて，表面に，垂直力と，切線力を受ける梁の応力，変位を誘導し，**Bernoulli** の平面保持の仮定を満足する近似解を求め，簡単な例を示したが，これは，積層梁や多面体型の筒殼構造等に応用する事が出来る。

（昭和31年4月27日受理）