平板及び平面弾性問題に対する有限なフーリェ変換の応用

平板及び平面弾性問題に対する有限なフーリェ変換の応用

能　町　純　雄

On Applications of Finite Fourier Transformation to Problems in Thin Plate and Plane Elasticity

Sumio Nomachi

Abstract

In finite Fourier transformation there are certain operational properties similar to those of Laplace transformation.

G. Doetsch, L. Fantappié, H. Kniess, and other mathematicians have been studying the above properties, H. Kniess especially, derives the fundamental operational relation in finite sine and cosine transformation, and applys them for the simbolic calculation of the ordinary differential equations. After that R. V. Churchill, in his text, adopts the same method in solving the potential in slot, that is denoted by Laplace's partial differential equation. In this paper, denoting the finite Fourier transformation in a rectangular domain by L and integrating the condition of equilibrium of forces of the thin plate, the plane stress, and the plane strain, the writer obtains the inverse transformation of displacements in them.

I　ま え が き

有限な Fourier 変換は一種の変換法則を有しているが，その特性は Laplace 変換の演算子的特性に類似している。これについては G. Doetsch [1], L. Fantappié [2], 及び H. Kniess [3] 等が広汎な研究を行つている。ことに H. Kniess は基本変換式を導いてこれを常微分方程式の記号解法に応用した。また R. V. Churehill のテキスト[4] には矩形境界を有する Laplace の偏微分方程式，例えば Slot 内の Potential の解法にこの変換を応用しているが

1　G. Doetsch : Math. Ann., 62, 52 (1935)
2　L. Fantappié : Memorie derra classe scienze fisiche matematichee e naturali 4, 55—69 (1933)
3　H. Kniess : Math. Zeitsch., 44, 226—292 (1939)
4　R. V. Churchill : Modern Operational Mathematics in Engineering, P. 282 (1944)

これは H. Kniess の方法と線形常微分方程式との組合せによつて解を求めてある。ここでは有限な Fourier 変換を拡張して偏微分方程式の記号解法を物理的な立場から考えて弾性諸問題の一般解を誘導しよう。

II　有限な Fourier 変換

$f(x)$ は変数 x の或る有限区間上で部分的に連続な函数を表わすものとし，その変換を 0～a までとすれば次の積分

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\,,\\&\int_0^a f(x)\cos\frac{m\pi}{a}dx \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

の中上式は Fourier-sin 変換，下式は Fourier-cos 変換であつて，これを H. Kniess にしたがつて

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}dx = S_m[f(x)]\,,\\&\int_0^a f(x)\cos\frac{m\pi}{a}dx = C_m[f(x)]\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

で表わす。この演算は $f(x)$ の有限な sin 変換，及び cos 変換と呼ばれるものでいずれも自然数 m のみの函数を生ずる。そして Fourier 級数の理論によつて

$$\left.\begin{aligned}&f(x)=\frac{2}{a}\sum_m \sin\frac{m\pi}{a}x\cdot S_m[f(x)]\,,\\&f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx+\frac{2}{a}\sum_m\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot C_m[f(x)]\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

なる逆変換関係が存在する。すなわち $f(x)$ の有限な sin 或は cos 変換が求まれば（3）の関係式から $f(x)$ が求められる。

ζ_{xy} を変域（0 a），（0 b）で定義される部分的に連続な函数とし，前記の演算記号を拡張して次のように定める。

$$S_m S_n[\zeta_{xy}]=\int_0^a\int_0^b \zeta_{xy}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy\,, \tag{4}$$

$$C_m C_n[\zeta_{xy}]=\int_0^a\int_0^b \zeta_{xy}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy\,, \tag{5}$$

$$S_m C_n[\zeta_{xy}]=\int_0^a\int_0^b \zeta_{xy}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy\,, \tag{6}$$

$$C_m S_n[\zeta_{xy}]=\int_0^a\int_0^b \zeta_{xy}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy\,, \tag{7}$$

ただし　$m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots.$

そうすれば次の逆変換関係が存在する，すなわち

$$\zeta_{xy}=\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot S_mS_n[\zeta_{xy}], \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{xy}=&\frac{2}{ab}\int_0^a\int_0^b\zeta_{xy}\,dx\,dy+\frac{2}{ab}\sum_m\cos\frac{m\pi}{a}x\int_0^b C_m[\zeta_{xy}]\,dy\\&+\frac{2}{ab}\sum_n\cos\frac{n\pi}{b}y\int_0^a C_m[\zeta_{xy}]\,dx\\&+\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot C_mC_n[\zeta_{xy}],\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{xy}=&\frac{2}{ab}\sum_m\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\int_0^b S_m[\zeta_{xy}]\,dy\\&+\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot S_mC_n[\zeta_{xy}],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{xy}=&\frac{2}{ab}\sum_m\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\int_0^a S_n[\zeta_{xy}]\,dx\\&+\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot C_mS_n[\zeta_{xy}],\end{aligned} \tag{11}$$

2次元の場合には以上のように sin と cos の組合せによる変換の形が四個ある。それで任意の変換を作る函数を L とおいて一般的な関係を求めることにする。

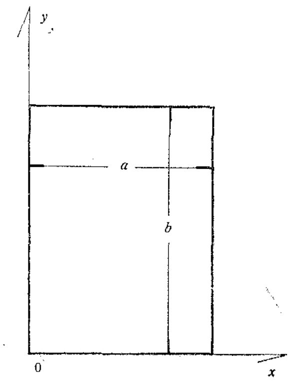
Ⅲ　直角異方性板

第1図のような矩形板が x 及び y 方向でその性質が異る場合を考える。板の弾性係数を E, 断面2次モーメント，及びポアソン比を $J_x,\ J_y,\ \nu_x,\ \nu_y$ とし M. T. Huber[5] に従がつて

$$N_x=\frac{1}{1-\nu_x\nu_y}EJ_x,\quad (x\text{ 方向曲げ剛さ})$$

$$N_y=\frac{1}{1-\nu_x\nu_y}EJ_y,\quad (y\text{ 方向曲げ剛さ})$$

とし同じく捩り剛度を $C_x,\ C_y$[6] とすれば x 方向曲げモーメント M_x, y 方向曲げモーメント M_y, x 及び y 方向捩りモーメント $M_{xy},\ M_{yx}$ はそれぞれ



第 1 図

5　M. T. Huber : Der Bauing., 12, 354—360 (1923)

6　M. T. Huber は $2C=C_x=C_y$ と仮定しているが，一般に $C_x=C_y$ とならない。すなわち捩り応力度は x, y 方向で一点において等しくなるが，それによる合モーメントは等しくならないことは円筒殻の場合などと同様である。

$$
\left.
\begin{aligned}
&M_x = -N_x\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) && (a)\\
&M_y = -N_y\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right) && (b)\\
&M_{xy} = -C_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \qquad M_{yx} = -C_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} && (c)
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

とかくことができる。板に作用する荷重を $q \cdot f(xy)$ とすれば力の釣合の方程式は

$$
\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = q \cdot f(xy) \tag{13}
$$

函数 L を媒介として変換を作るのであるが

$$
\int_0^a \int_0^b F\,L\,dx\,dy = \int F\,L\,dA \tag{14}
$$

とおけば次の関係がある。

$$
\int \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} L\,dA = \int_0^b \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} L\right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \left[M_x \frac{\partial L}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=a} dy + \int M_x \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dA\,. \tag{15}
$$

$$
\int \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} L\,dA = \int_0^a \left[\frac{\partial M_y}{\partial x} L\right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \left[M_y \frac{\partial L}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=b} dx + \int M_y \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dA\,. \tag{16}
$$

$$
\int \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} L\,dA = \int_0^a \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} L\right]_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^b \left[M_{xy} \frac{\partial L}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=a} dy + \int M_{xy} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA\,. \tag{17}
$$

$$
\int \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} L\,dA = \int_0^b \left[\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} L\right]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \left[M_{yx} \frac{\partial L}{\partial x}\right]_{y=0}^{y=b} dx + \int M_{yx} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA\,. \tag{18}
$$

しかるに

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^a M_{xy} \frac{\partial L}{\partial x} dx = \Big[M_{yx}\,L\Big]_0^a - \int_0^a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} L\,dy\\
&\int_0^b M_{xy} \frac{\partial L}{\partial y} dy = \Big[M_{xy}\,L\Big]_0^b - \int_0^b \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} L\,dx
\end{aligned}
\right\} \tag{19}
$$

これを上式 (17), (18) に代入して

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} L\,dx = &\int_0^a \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} L\right]_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^b \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} L\right]_{x=0}^{x=a} dy\\
&-\Big[\Big[M_{xy}\,L\Big]_0^a\Big]_0^b + \int M_{xy} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} L\,dA = &\int_0^a \left[\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} L\right]_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^b \left[\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} L\right]_{x=0}^{x=a} dy\\
&-\Big[\Big[M_{yx}\,L\Big]_0^a\Big]_0^b + \int M_{yx} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA
\end{aligned} \tag{21}
$$

したがつて x, y 方向の周辺反力をそれぞれ R_x R_y とすれば

$$
R_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}\,,
$$

$$R_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \ , \qquad (22)$$

の関係があるから (15), (16), (20), (21) の各式より

$$\int \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \right\} L\,dA = q \int f(xy)\, L\, dA$$

は次のようになる。

$$\int_0^b \Big[R_x L \Big]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \Big[R_y L \Big]_{y=0}^{y=b} dx - \Big[\Big[(M_{xy} + M_{yx}) \Big]_0^a \Big]_0^b$$

$$- \int_0^a \Big[M_x \frac{\partial L}{\partial x} \Big]_{x=0}^{x=a} dx - \int_0^a \Big[M_y \frac{\partial L}{\partial y} \Big]_{y=0}^{y=b} dy$$

$$+ \int \left\{ M_x \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} + M_y \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right\} dA = q \int f(xy)\, L\, dA \qquad (23)$$

また一方

$$\int M_{xy} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA = -C_x \int \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA$$

$$= -C_x \left\{ \Big[\Big[\zeta \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \Big]_0^a \Big]_0^b - \int_0^b \Big[\zeta \frac{\partial^3 L}{\partial x \partial y^2} \Big]_{x=0}^{x=a} dy \right.$$

$$\left. - \int_0^a \Big[\zeta \frac{\partial^3 L}{\partial x^2 \partial y} \Big]_{y=0}^{y=b} dx + \int \zeta \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} dA \right\} \qquad (24)$$

$$\int M_{yx} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dA = -C_y \left\{ \Big[\Big[\zeta \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \Big]_0^a \Big]_0^b - \int_0^b \Big[\zeta \frac{\partial^3 L}{\partial x \partial y^2} \Big]_{x=0}^{x=a} dy \right.$$

$$\left. - \int_0^a \Big[\zeta \frac{\partial^3 L}{\partial x^2 \partial y} \Big]_{y=0}^{y=b} dx + \int \zeta \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} dA \right\} \qquad (25)$$

次に

$$\int \left\{ M_x \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right\} dA$$

$$= \int \left\{ \left(N_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2} + N_x \nu_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \left(N_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + N_y \nu_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right\} dA$$

$$= \int_0^b \Big[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial^2 L}{\partial x_2} + N_y \nu_x \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \Big]_{x=0}^{x=a} dy$$

$$- \int_0^b \Big[\zeta \left(N_x \frac{\partial^3 L}{\partial x^3} + N_y \nu_x \frac{\partial^3 L}{\partial x \partial y^2} \right) \Big]_{x=0}^{x=a} dy$$

$$+ \int_0^a \Big[\frac{\partial \zeta}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + N_x \nu_y \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right) \Big]_{y=0}^{y=b} dx \qquad (26)$$

$$- \int_0^a \Big[\zeta \left(N_y \frac{\partial^3 L}{\partial y^3} + N_x \nu_y \frac{\partial^3 L}{\partial x^2 \partial y} \right) \Big]_{y=0}^{y=b} dx$$

$$+ \int \left\{ N_x \frac{\partial^4 L}{\partial x^4} + (\nu_y N_x + \nu_x N_y) \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} + N_y \frac{\partial^4 L}{\partial y^4} \right\} \zeta\, dA \ ,$$

(24), (25), (26) を (23) に代入すれば

$$\int_0^b \Big[R_x L \Big]_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^b \Big[M_x \frac{\partial L}{\partial x} \Big]_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a \Big[R_y L \Big]_{y=0}^{y=b} dx$$

$$\left.\begin{aligned}
&-\int_0^a\Big[M_y\frac{\partial L}{\partial y}\Big]_{y=0}^{y=b}dx+\int_0^b\Big[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big(N_x\frac{\partial^2L}{\partial x^2}+\nu_xN_y\frac{\partial^2L}{\partial y^2}\Big)\Big]_{x=0}^{x=a}dx\\
&+\int_0^a\Big[\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big(N_y\frac{\partial^2L}{\partial y^2}+\nu_yN_x\frac{\partial^2L}{\partial x^2}\Big)\Big]_{y=0}^{y=b}dx-\int_0^b\Big[\zeta\Big(N_x\frac{\partial^3L}{\partial x^3}\\
&+\nu_xN_y\frac{\partial^3L}{\partial x\partial y^2}+(C_x+C_y)\frac{\partial^3L}{\partial x\partial y^2}\Big)\Big]_{x=0}^{x=a}dy-\int_0^a\Big[\zeta\Big(N_y\frac{\partial^3L}{\partial y^3}\\
&+\nu_yN_x\frac{\partial^3L}{\partial x^2\partial y}+(C_x+C_y)\frac{\partial^3L}{\partial x^2\partial y}\Big)\Big]_{y=0}^{y=b}dx-(C_x+C_y)\Big[\Big[\zeta\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}\Big]_0^a\Big]_0^b\\
&-\Big[\Big[(M_{xy}+M_{yx})L\Big]_0^a\Big]_0^b+\int\Big(N_x\frac{\partial^4L}{\partial x^4}+\{\nu_yN_x+\nu_xN_y\\
&+C_x+C_y\}\frac{\partial^4L}{\partial x^2\partial y^2}+N_y\frac{\partial^4L}{\partial y^4}\Big)\zeta\,dA=q\int f(xy)\,L\,dA\,.
\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

上式中 $L=\sin\dfrac{m\pi}{a}x\cdot\sin\dfrac{n\pi}{b}y$ とおいて

$$\left.\begin{aligned}
S_m\Big[\zeta_{x=0}\Big]&=-\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)\Big\{(-1)^m\zeta_{a0}-\zeta_{00}\Big\}-\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2S_m\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=0}\Big],\\
S_n\Big[\zeta_{y=b}\Big]&=-\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)\Big\{(-1)^m\zeta_{ab}-\zeta_{0b}\Big\}-\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2S_m\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=b}\Big],\\
S_n\Big[\zeta_{x=0}\Big]&=-\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)\Big\{(-1)^n\zeta_{0b}-\zeta_{00}\Big\}-\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=0}\Big],\\
S_n\Big[\zeta_{x=a}\Big]&=-\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)\Big\{(-1)^n\zeta_{ab}-\zeta_{a0}\Big\}-\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=a}\Big]
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

の関係を適用して $S_mS_n[\zeta]$ の逆返換を作れば

$$\left.\begin{aligned}
\zeta=&\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{N_x\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2B\frac{m^2n^2\pi^4}{a^2b^2}+N_y\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}\Bigg[\\
&\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)\Big\{(-1)^mS_n[(M_x)_{x=a}]-S_n[(M_x)_{x=0}]\Big\}\\
&\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)\Big\{(-1)^nS_m[(M_y)_{y=b}]-S_m[(M_y)_{y=0}]\Big\}\\
&-\Big\{N_x\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^3+(\nu_xN_y+C_x+C_y)\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\Big\}\Big(\frac{b}{n\pi}\Big)^2\\
&\qquad\Big\{(-1)^mS_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=b}\Big]-S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=0}\Big]\Big\}\\
&-\Big\{N_y\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^3+(\nu_yN_x+C_x+C_y)\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\Big\}\Big(\frac{a}{m\pi}\Big)^2\\
&\qquad\Big\{(-1)^nS_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=a}\Big]-S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=0}\Big]\Big\}+q\,S_mS_n[f(xy)]\Bigg]\\
&+\sum_m\sum_n\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,\frac{4}{mn\pi^2}\Big\{(-1)^{m+n}\zeta_{ab}-(-1)^m\zeta_{a0}-(-1)^n\zeta_{0b}+\zeta_{00}\Big\},
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

ただし, $2B=\nu_x N_y+\nu_y N_x+C_x+C_y$,

上式中 $S_n\Big[(M_x)_{x=a}\Big]$, $S_n\Big[(M_x)_{x=0}\Big]$, $S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=a}\Big]$, $S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=0}\Big]$,

$S_m\Big[(M_y)_{y=b}\Big]$, $S_m\Big[(M_y)_{y=0}\Big]$, $S_m\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=b}\Big]$, $S_m\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=0}\Big]$ はそれぞれ n 及び m のみの函数で一辺における2個づつ計8個の境界条件から求められる。次に ζ_{ab}, ζ_{a0}, ζ_{0b}, ζ_{00} なる四隅における沈下は四隅における条件から求められる。

IV 等方板の曲げ

この場合には板の曲げ剛度は $N=Eh^3/12(1-\nu^2)$ (h は板の厚さ ν は板のポアソン比) 板の捩り剛度は $N(1-\nu)/2$ で表わされるから

$$\left.\begin{aligned}
M_x&=-N\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), &&(a)\\
M_y&=-N\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right), &&(b)\\
M_{xy}&=M_{yx}=-N(1-\nu)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} &&(c)
\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

となり, 釣合の式は

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=q\cdot f(xy)\qquad(31)$$

であるから上式の L による変換の部分積分は

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^b\Big[R_xL\Big]_{x=0}^{x=a}dy-\int_0^b\Big[M_x\frac{\partial L}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=a}dy+\int_0^a\Big[R_yL\Big]_{y=0}^{y=b}dx\\
&-\int_0^a\Big[M_yL\Big]_{y=0}^{y=b}dx+N\int_0^b\Big[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2L}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2L}{\partial y^2}\Big)\Big]_{x=0}^{x=a}dy\\
&+N\int_0^a\Big[\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2L}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2L}{\partial x^2}\Big)\Big]_{y=0}^{y=b}dx-N\int_0^b\Big[\zeta\Big(\frac{\partial^3L}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3L}{\partial x\partial y^2}\Big)\Big]_{x=0}^{x=a}dy\\
&-N\int_0^a\Big[\zeta\Big(\frac{\partial^3L}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3L}{\partial x^2\partial y}\Big)\Big]_{y=0}^{y=b}dx-2N(1-\nu)\Big[\Big[\zeta\frac{\partial^2L}{\partial x\,\partial y}\Big]_0^a\Big]_0^b\\
&+2\Big[\Big[M_{xy}L\Big]_0^a\Big]_0^b+N\int\zeta\Big(\frac{\partial^4L}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4L}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4L}{\partial y^4}\Big)dA=q\int f(xy)L\,dA
\end{aligned}\right\}(32)$$

上式中 $L=\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$ とおいて逆変換を作れば

$$\zeta=\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\left[\frac{m\pi}{a}\left\{(-1)^mS_n\left[(M_x)_{x=0}\right]\right.\right.$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-S_n[(Mx)_{x=0}]\Big\}+\frac{n\pi}{b}\Big\{(-1)^n S_m[(M_y)_{y=b}]-S_m[(M_y)_{y=0}]\Big\}\\
&-N\Big\{\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2+(2-\nu)\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\Big\}\Big(\frac{b}{n\pi}\Big)^2\Big\{(-1)^m S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=a}\Big]\\
&-S_n\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big)_{x=0}\Big]\Big\}-N\Big\{\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^3+(2-\nu)\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\Big\}\Big(\frac{a}{m\pi}\Big)^2\\
&\Big\{(-1)^n S_m\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=b}\Big]-S_m\Big[\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\Big)_{y=0}\Big]\Big\}+q\,S_m S_n[f(xy)]\Big]\\
&+\sum_m\sum_n\frac{4}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\Big\{\zeta_{ab}(-1)^{m+n}-\zeta_{a0}(-1)^m-\zeta_{0b}(-1)^n+\zeta_{00}\Big\},
\end{aligned}\right\}\quad(33)
$$

上式は等方矩形板の撓みの一般式で｛　　｝内の周辺における未知の sin 変換8個は各辺の8 個の境界条件によつて求められ ζ_{ab}, ζ_{a0}, ζ_{0b}, ζ_{00} は四隅の条件から求まる。

また $L=\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y$ とおいて逆変換公式（10）を用いればζは次の形になる。

$$
\left.\begin{aligned}
\zeta=&\frac{2}{ab}\sum_m\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x}{N\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4}\Big[\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)\Big\{(-1)^m\int_0^b(M_x)_{x=a}dy-\int_0^b(M_x)_{x=0}dy\Big\}\\
&-N\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^3\Big\{(-1)^m\int_0^b(\zeta)_{x=a}dy-\int_0^b(\zeta)_{x=0}dy\Big\}+S_m[(R_y)_{y=b}]\\
&-S_m[(R_y)_{y=0}]-N\nu\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2\Big\{S_m\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)_{y=b}\Big]-S_m\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)_{y=0}\Big]\Big\}\\
&+q\int_0^b S_m[f(xy)]dy\Big]+\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y}{N\Big\{\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2+\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2\Big\}^2}\Big[\\
&\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)\Big\{(-1)^m C_n[(M_x)_{x=a}]-C_n[(M_x)_{x=0}]\Big\}-(-1)^n S_m[(R_y)_{y=b}]\\
&+S_m[(R_y)_{y=0}]+N\Big\{\Big(\frac{n\pi}{b}\Big)^2+\nu\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^2\Big\}\Big\{(-1)^n S_m\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)_{y=b}\Big]\\
&-S_m\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)_{y=0}\Big]+N\Big\{\Big(\frac{m\pi}{a}\Big)^3+(2-\nu)\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\Big\}\Big\{(-1)^m C_n[(\zeta)_{x=a}]\\
&-C_n[(\zeta)_{x=0}]\Big\}+q\,S_m C_n[f(xy)]\Big],
\end{aligned}\right\}\quad(34)
$$

$m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,$

同じやうな方法で境界未知数 $S_m[(R_y)_{y=b}]$, $S_m[(R_{y=0}]$, $S_m\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)_{y=b}\Big]$, $S_m\Big[\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)_{y=0}\Big]$, $C_n[(M_x)_{x=a}]$, $C_n[(M_x)_{x=0}]$, $C_n[(\zeta)_{x=a}]$, $C_n[(\zeta)_{x=0}]$ は8個の境界条件によつて求められる。ただし

$$2C_0[(M_x)_{x=a}]=\int_0^b (M_x)_{x=a}\,dy,\qquad 2C_0[(M_x)_{x=0}]=\int_0^b (M_x)_{x=0}\,dy,$$

$$2C_0[(\zeta)_{x=a}]=\int_0^b (\zeta)_{x=a}\,dy,\qquad 2C_0[(\zeta)_{x=0}]=\int_0^b (\zeta)_{x=0}\,dy,$$

であり，$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{ab}$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{a0}$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{0b}$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{00}$ の値を上式中て四隅の条件を満足するように $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{ab}$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{a0}$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{0b}$, $\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{00}$ を調整すれば求める撓み ζ が得られる。次に $L=\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$ の場合は公式(34)中 m と n，a と b，x と y を交代して求められる。最後に $L=\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y$ と代入して逆変換公式(9)を用いれば ζ は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\zeta=&\frac{q}{Nab}\int\zeta\,dA+\frac{2}{ab}\sum_m\frac{\cos\frac{m\pi}{a}x}{N\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4}\Bigg[-(-1)^m\int_0^b(R_x)_{x=a}dy\\
&+\int_0^b(R_x)_{x=0}dy+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{(-1)^m\int_0^b\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}dy-\int_0^b\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}dy\right\}\\
&-C_m[(R_y)_{y=b}]+C_m[(R_y)_{y=0}]+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=b}\right]\right.\\
&\left.-C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0}\right]\right\}-(-1)^m\{(M_{xy})_{ab}-(M_{xy})_{a0}\}+(M_{xy})_{0b}-(M_{xy})_{00}\\
&+q\int_0^b C_m[f(xy)]\,dy\Bigg]+\frac{2}{ab}\sum_n\frac{\cos\frac{n\pi}{b}y}{N\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}\Bigg[-(-1)^n\int_0^a(R_y)_{y=b}dx\\
&+\int_0^a(R_y)_{y=0}dx+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left\{(-1)^n\int_0^a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=b}dx-\int_0^a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0}dx\right\}\\
&-C_n[(R_x)_{x=a}]+C_n[(R_x)_{x=0}]+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left\{C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}\right]\right.\\
&\left.-C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}\right]\right\}-(-1)^n\{(M_{xy})_{ab}-(M_{xy})_{0b}\}+(M_{xy})_{a0}-(M_{xy})_{00}\\
&+q\int_0^a C_n[f(xy)]\,dx\Bigg]+\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y}{N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\Bigg[\\
&-(-1)^mC_n[(R_x)_{x=a}]+C_n[(R_x)_{x=0}]-(-1)^nC_m[(R_y)_{y=b}]+C_m[(R_y)_{y=0}]\\
&+N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\left\{(-1)^mC_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}\right]-C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}\right]\right\}\\
&+N\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\left\{(-1)^nC_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=b}\right]-C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0}\right]\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

$$+qC_mC_n[f(xy)]-(M_{xy})_{ab}(-1)^{m+n}-(M_{xy})_{a0}(-1)^m-(M_{xy})_{0b}(-1)^n-(M_{xy})_{00}\Big]\Big\}$$

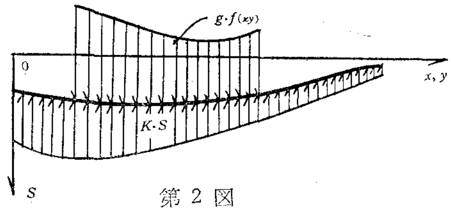
$m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots,$

上式中8個の境界未知数 $C_n[(R_x)_{x=a}]$, $C_n[(R_x)_{x=0}]$, $C_m[(R_y)_{y=b}]$, $C_m[(R_y)_{y=0}]$, $C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}\right]$, $C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}\right]$, $C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{y=b}\right]$, $C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]_{y=0}$ は一辺について2つづつの計8個の境界値件から求められ，M_{xy} の四隅における値は四隅の境で定められる。以上同じ ζ ではあるが，どの変換を用いるかは問題によつて便利な形を選ぶのがよい。

V 彈性基礎上の矩形板

この場合沈下に比例する基礎からの反力が作用するものと仮定してその反力係数を $K(\mathrm{kg/cm^3})$ とすれば力の釣合式は

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial^2 x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=q\cdot f(xy)-\zeta\cdot K\ . \qquad (36)$$



第2図

適合の件式(30)の関係と上式の L 変換の部分積分から公式(32)と類似の公式が作られる，その相違は(32)式，左辺の終項 $N\int\zeta\cdot\Delta^2L\cdot dA$ の代りに $N\int\zeta(\Delta^2L+KL)dA$ となるだけであるが，これを利用して ζ を求める。

$\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$ による ζ の解,

$$\left.\begin{aligned}
\zeta=&\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2+K}\left[\frac{m\pi}{a}\left\{(-1)^mS_n[(M_x)_{x=a}]\right.\right.\\
&\left.-S_n[(M_x)_{x=0}]\right\}+\frac{n\pi}{b}\left\{(-1)^nS_m[(M_y)_{y=b}]-S_m[(M_y)_{y=0}]\right\}\\
&-N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3+(2-\nu)\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\right\}\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\left\{(-1)^mS_m\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)_{x=a}\right]\right.\\
&\left.-S_n\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)_{x=0}\right]\right\}-N\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3+(2-\nu)\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\right\}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\\
&\left\{(-1)^nS_m\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)_{y=b}\right]-S_m\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)_{y=0}\right]\right\}+qS_mS_n[f(xy)]\\
&+\sum_m\sum_n\frac{4}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\left\{\zeta_{ab}(-1)^{m+n}-\zeta_{a0}(-1)^m\right.\\
&\left.\left.-\zeta_{0b}(-1)^n+\zeta_{00}\right\}\left\{1-\frac{K}{N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2+K}\right\}\right],
\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

$\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y$ による解

$$
\begin{aligned}
\zeta =& \frac{1}{ab}\int\frac{q\cdot f(xy)}{K}dA+\frac{2}{ab}\sum_m\frac{\cos\frac{m\pi}{a}x}{N\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+K}\Bigg[-(-1)^m\int_0^b(R_x)_{x=a}dy \\
&+\int_0^b(R_x)_{x=0}dy+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{(-1)^m\int_0^b\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}dy-\int_0^b\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}dy\right\} \\
&-C_m[(R_y)_{y=b}]+C_m[(R_y)_{y=0}]+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=b}\right]\right. \\
&\left.-C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0}\right]\right\}-(-1)^m\{(M_{xy})_{ab}-(M_{xy})_{a0}\}+(M_{xy})_{0b}-(M_{xy})_{00} \\
&+q\int_0^bC_m[f(xy)]dy\Bigg]+\frac{2}{ab}\sum_n\frac{\cos\frac{n\pi}{b}y}{N\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4+K}\Bigg[(-1)^n\int_0^a(R_y)_{y=b}dy \\
&-\int_0^a(R_y)_{y=0}dx+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left\{(-1)^n\int_0^a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=b}dx-\int_0^a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0}dx\right\} \\
&-C_n[(R_x)_{x=a}]+C_n[(R_x)_{x=0}]+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\left\{C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}\right]-C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}\right]\right\} \\
&-(-1)^n\{(M_{xy})_{ab}-(M_{xy})_{0b}\}+(M_{xy})_{a0}-(M_{xy})_{00}+q\int_0^aC_n[f(xy)]dx\Bigg] \\
&+\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y}{N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2+K}\Bigg[-(-1)^mC_n[(R_x)_{x=a}]+C_n[(R_x)_{x=0}] \\
&-(-1)^nC_m[(R_y)_{y=b}]+C_m[(R_y)_{y=0}]+N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\} \\
&\left\{(-1)^mC_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=a}\right]-C_n\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x=0}\right]\right\}+N\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\} \\
&\left\{(-1)^nC_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=b}\right]-C_m\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=0}\right]\right\}+q\,C_m\,C_n[f(xy)] \\
&-(M_{xy})_{ab}(-1)^{m+n}+(M_{xy})_{a0}(-1)^m+(M_{xy})_{0b}(-1)^n-(M_{xy})_{00}\Bigg],
\end{aligned}
\qquad (38)
$$

VI 矩形板の熱応力

温度分布が板に曲げを与えるように中立面からの距離 z では

$$\frac{2z}{h}t''(xy)$$

であるとすれば

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -N\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{2(1+\nu)\alpha t''}{h}\right), && (a)\\ M_y &= -N\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{2(1+\nu)\alpha t''}{h}\right), && (b)\\ M_{xy} &= -(1-\nu)N\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y}\ . && (c)\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

の関係があるから釣合の式 (31) と上式から x, y についての変換を作り ζ を求めれば

$$\left.\begin{aligned} \zeta =& \frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\Bigg[\left(\frac{m\pi}{a}\right)\Big\{(-1)^m S_n[(M_x)_{x=a}]\\ &-S_n[(M_x)_{y=0}]+\left(\frac{n\pi}{b}\right)\Big\{(-1)^n S_m[(M_y)_{y=b}]-S_m[(M_y)_{y=0}]\Big\}\\ &-N\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3+(2-\nu)\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\right\}\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\left\{(-1)^m S_n\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)_{x=a}\right]\right.\\ &\left.-S_n\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)_{x=0}\right]\right\}-N\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3+(2-\nu)\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\right\}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\\ &\left\{(-1)^n S_m\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)_{y=b}\right]-S_m\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)_{y=0}\right]\right\}\Bigg]\\ &+\sum_m\sum_n\frac{4\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{mn\pi^2}\left\{\zeta_{ab}(-1)^{m+n}-\zeta_{a0}(-1)^m-\zeta_{0b}(-1)^n+\zeta_{00}\right\}\\ &-\frac{4}{ab}\frac{2(1+\nu)\alpha}{h}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}S_m S_n[t'']\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

$m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,$

上式から四辺共，単純支持の場合は

$$\zeta_{x=a}=\zeta_{x=0}=\zeta_{y=b}=\zeta_{y=0}=0$$

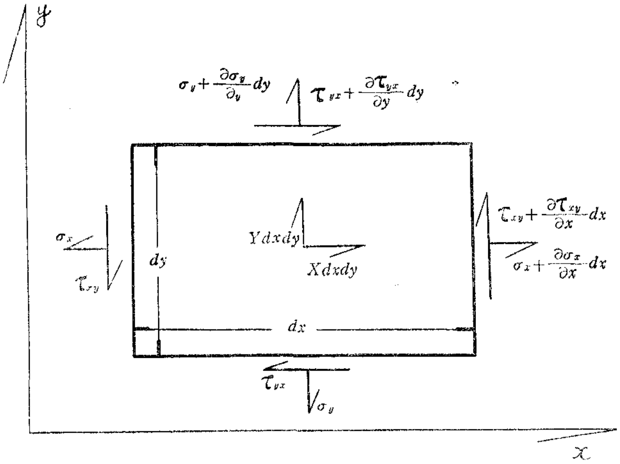
$$(M_x)_{x=a}=(M_x)_{x=0}=(M_y)_{y=b}=(M_y)_{y=0}=0$$

から

$$\zeta=-\frac{4}{ab}\frac{2(1+\nu)\alpha}{h}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}S_m S_n[t''],$$

VII 平 面 應 力

この問題は Airy の函数による重調和偏微分方程式で与えられ古くから論議されているが一般解に任意の境界条件を適用するのは容易でない。しかし Fourier 変換を用いれば矩形領域の任意の境界条件を満足し易い変位の一般解が簡単に求められる。



応力度の釣合は x 方向及び y 方向垂直応力度を σ_x, σ_y 剪断応力度を τ_{xy} とし x 方向及び y 方向物体力を X, Y とすれば

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=X\,, &(a)\\&\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=Y\,. &(b)\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

また平面応力の場合の応力と歪の関係は, x 方向, y 方向の変位をそれぞれ u, v とすれば

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right), &(a)\\&\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right), &(b)\\&\tau_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). &(c)\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

L 変換による部分積分を作れば

$$\int\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}L\,dA=\int_0^y\Big[\sigma_x L\Big]_{x=0}^{x=a}dy-\int\sigma_x\frac{\partial L}{\partial x}dA\quad,\tag{43}$$

上式右辺の第2項に (42) の (a) 式の関係を代入して更に部分積分を続ければ

$$\begin{aligned}\int\sigma_x\frac{\partial L}{\partial x}dA&=\int\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial L}{\partial x}dA\\&=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\int_0^b\Big[u\frac{\partial L}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=a}dy+\nu\int_0^a\Big[v\frac{\partial L}{\partial x}\Big]_{y=0}^{y=b}dx\right.\\&\qquad\left.-\int u\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dA-\nu\int v\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dA\right),\end{aligned}\tag{44}$$

また

$$\int\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}L\,dA=\int_0^a\Big[\tau_{xy}L\Big]_{y=0}^{y=b}dx-\int\tau_{xy}\frac{\partial L}{\partial y}dA\quad,\tag{45}$$

上式に (42) の (c) 式を代入して

$$\int \tau_{xy} \frac{\partial L}{\partial y} dA = G\int\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial L}{\partial y}\, dA$$

$$= G\left(\int_0^a\left[u\frac{\partial L}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=b}dx+\int_0^b\left[v\frac{\partial L}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=a}dy\right.$$

$$\left.-\int u\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}Ad-\int v\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dA\right). \qquad (46)$$

したがつて (43), (44), (45), (46) の関係を

$$\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)LdA-\int XLdA=0$$

に代入して

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b\left[\sigma_x L\right]_{x=0}^{x=a}dy+\int_0^a\left[\tau_{xy}L\right]_{y=0}^{y=b}dx-\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^b\left[u\frac{\partial L}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=a}dy\\&-G\int_0^a\left[u\frac{\partial L}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=b}dx-\frac{\nu E}{(1-\nu^2)}\int_0^a\left[v\frac{\partial L}{\partial x}\right]_{y=0}^{y=b}dx\\&-G\int_0^b\left[v\frac{\partial L}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=a}dy+\frac{E}{2(1-\nu^2)}\int u\left(2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right.dA\\&+\frac{E(1+\nu)}{2(1-\nu^2)}\int v\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dA-\int XLdA=0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

全く同様にして (41) の (b) 式の L' 変換を作つて部分積分すれば

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a\left[\sigma_y L'\right]_{y=0}^{y=b}dx+\int_0^b\left[\tau_{xy}L'\right]_{x=0}^{x=a}dy-\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^a\left[v\frac{\partial L'}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=b}dx\\&-G\int_0^b\left[\frac{vL'}{\partial x}\right]_{x=0}^{x=a}dy-\frac{\nu E}{1-\nu^2}\int_0^b\left[u\frac{\partial L'}{\partial y}\right]_{x=0}^{x=a}dy\\&-G\int_0^a\left[u\frac{\partial L'}{\partial x}\right]_{y=0}^{y=b}dx+\frac{E}{2(1-\nu^2)}\int v\left(2\frac{\partial^2 L'}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2 L'}{\partial x^2}\right)dA\\&+\frac{E(1+\nu)}{2(1-\nu^2)}\int u\frac{\partial^2 L'}{\partial x\partial y}dA-\int YL'dA=0\,.\end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

さて $L=\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$,

$L'=\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y$

とおけば (47) 式から

$m=0$ では

$$S_n[(\sigma_x)_{x=a}]-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]-G\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left\{(-1)^n\int_0^a(u_{y=b})dx-\int_0^a(u_{y=0})dx\right\}$$

$$-G\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left\{C_n[v_{x=a}]-C_n[v_{x=0}]\right\}-S_n[X]$$

$$-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\int_0^a S_n[u]dx=0 \quad , \tag{49}$$

$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$では

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^m S_n[(\sigma_x)_{x=a}]-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]-G\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left\{(-1)^n C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\right\}\\&-G\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left\{(-1)^m C_n[v_{x=a}]-C_n[v_{x=0}]\right\}-C_mS_n[X]\\&=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left\{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\cdot C_mS_n[u]\\&+\frac{E(1+\nu)}{2(1-\nu^2)}\frac{mn\pi^2}{ab}\Big\}\cdot S_mC_n[v]\ .\end{aligned}\right\}\tag{50}$$

次に (48) 式から

$n=0$ では

$$\left.\begin{aligned}&S_m[(\sigma_y)_{y=b}]-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]-G\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left\{(-1)^m\int_0^b(v_{x=a})dy\right.\\&\left.-\int_0^b(v_{x=0})dy\right\}-G\left(\frac{m\pi}{a}\right)\Big(C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\Big)-S_m[Y]\\&-\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\int_0^b S_m[u]dy\ ,\end{aligned}\right\}\tag{51}$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$の場合には

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^n S_m[(\sigma_y)_{y=b}]-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]-G\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left\{(-1)^m C_n[v_{x=a}]\right.\\&\left.-C_n[v_{x=0}]\right\}-G\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left\{(-1)^n C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\right\}-S_mC_n[Y]\\&=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left\{2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}S_mC_n[v]\\&+\frac{E(1+\nu)}{2(1-\nu^2)}\frac{mn\pi^2}{ab}\cdot C_mS_n[u]\ .\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

(50), (52) 式を連立に解いて $C_mS_n[u]$, $S_mC_n[v]$ を求め, (49), (51) 式から $\int_0^a S_n[u]dx$, $\int_0^b S_m[u]dy$ を求めて逆変換を作れば

$$\begin{aligned}u=&\frac{2}{ab}\sum_n\sin\frac{n\pi}{b}y\left[\frac{2(1-\nu^2)}{E}\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\left\{S_n[(\sigma_x)_{x=a}]-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]\right\}\right.\\&-(1-\nu)\left(\frac{b}{n\pi}\right)\left\{(-1)^n\int_0^a(u_{y=b})dx-\int_0^a(u_{y=0})dx\right\}\\&\left.-(1-\nu)\left(\frac{b}{n\pi}\right)\left\{C_n[v_{x=a}]-C_n[v_{x=0}]\right\}-\frac{2(1-\nu^2)}{E}\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2S_n[X]\right]\\&-\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\left[\frac{(1+\nu)}{2E}\left\{2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right.\right.\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+(1-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\Big\}\Big\{(-1)^m S_n[(\sigma_x)_{x=a}]-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]\Big\}\\
&-\frac{(1+\nu)^2}{2E}\frac{mn\pi^2}{ab}\Big\{(-1)^n S_m[(\sigma_y)_{y=b}]-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]\Big\}\\
&-\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3-\nu\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\right\}\Big\{(-1)^n C_m]u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\Big\}\\
&-\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3-\nu\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\right\}\Big\{(-1)^m C_n[v_{x=a}]-C_n[v_{x=0}]\Big\}\\
&-\frac{(1+\nu)}{2E}\left\{2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\cdot C_m S_n[X]\\
&+\frac{(1+\nu)^2}{2E}\frac{mn\pi^2}{ab}S_m C_n[Y],
\end{aligned}\right\}\quad(53)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
v=&\frac{2}{ab}\sum_m \sin\frac{m\pi}{a}x\Big[\frac{2(1-\nu^2)}{E}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\Big\{S_m[(\sigma_x)_{x=b}]-S_m[(\sigma_x)_{y=0}]\\
&-(1-\nu)\left(\frac{a}{m\pi}\right)\Big\{(-1)^m\int_0^b(v_{x=0})dy-\int_0^b(v_{x=0})dy\Big\}\\
&-(1-\nu)\left(\frac{a}{m\pi}\right)\Big\{C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\Big\}-\frac{2(1-\nu^2)}{E}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2 S_m[Y]\Big]\\
&-\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y}{\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\Big[\frac{(1+\nu)}{2E}\left\{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\\
&\Big\{(-1)^n S_m[(\sigma_y)_{y=b}]-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]\Big\}-\frac{(1+\nu)^2}{2E}\frac{mn\pi^2}{ab}\Big\{(-1)^m S_n[(\sigma_x)_{x=a}]\\
&-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]\Big\}-\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3-\nu\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\right\}\Big\{(-1)^m C_n[v_{x=a}]-C_n[v_{x=0}]\Big\}\\
&-\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3-\nu\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\right\}\Big\{(-1)^n C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\Big\}\\
&-\frac{(1+\nu)}{2E}\left\{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+(1-\nu)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}S_m C_n[Y]\\
&+\frac{(1+\nu)^2}{2E}\frac{mn\pi^2}{ab}C_m S_n[Y],
\end{aligned}\right\}\quad(54)
$$

上式中 $m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,$

また $S_n[(\sigma_x)_{x=a}]$, $S_n[(\sigma_x)_{x=0}]$, $C_n[v_{x=a}]$, $C_n[v_{x=0}]$, $S_m[(\sigma_y)_{y=b}]$, $S_m[(\sigma_y)_{y=0}]$, $C_m[u_{y=b}]$, $C_m[u_{y=0}]$ は，m 及び n のみの未知函数で一辺について2個づつの8個の境界条件らら求められる。$\int_0^a(u_{y=b})dx$, $\int_0^a(u_{y=0})dx$, $\int_0^b(v_{x=a})dy$, $\int_0^b(v_{x=0})dy$ を含む項は剛体としての移動を示すもので全く応力に関係はない。

Ⅷ 平　面　歪

この場合には力の釣合の式は（41）と同じでフツクの法則は

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\frac{2G}{1-2\nu}\left\{(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right\}, &(a)\\&\sigma_y=\frac{2G}{1-2\nu}\left\{(1-\nu)\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right\}, &(b)\\&\tau_{xy}=G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), &(c)\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

で与えられる。したがつて

$$\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)LdA-\int XLdA=0$$

は，部分積分を施して

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^b\Big[\sigma_xL\Big]_{x=0}^{x=a}dy+\int_0^a\Big[\tau_{xy}L\Big]_{y=0}^{y=b}dx-\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\int_0^b\Big[u\frac{\partial L}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=a}dy\\&-G\int_0^a\Big[u\frac{\partial L}{\partial y}\Big]_{y=0}^{y=b}dx-\frac{2G\nu}{1-2\nu}\int_0^a\Big[v\frac{\partial L}{\partial x}\Big]_{y=0}^{y=b}dx-G\int_0^b\Big[v\frac{\partial L}{\partial y}\Big]_{x=0}^{x=a}dy\\&+G\int u\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2L}{\partial x^2}+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}\right)dA+\frac{G}{1-2\nu}\int v\frac{\partial^2L}{\partial x\partial y}dA-\int XLdA=0,\end{aligned}\right\}(56)$$

また

$$\int\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right)L'dA-\int YL'dA=0$$

から

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^a\Big[\sigma_yL'\Big]_{y=0}^{y=b}dx+\int_0^b\Big[\tau_{xy}L'\Big]_{x=0}^{x=a}dy-\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\int_0^a\Big[v\frac{\partial L'}{\partial y}\Big]_{y=0}^{y=b}dx\\&-G\int_0^b\Big[v\frac{\partial L'}{\partial x}\Big]_{x=0}^{x=a}dy-\frac{2G\nu}{1-2\nu}\int_0^b\Big[u\frac{\partial L'}{\partial y}\Big]_{x=0}^{x=a}dy-G\int_0^a\Big[u\frac{\partial L'}{\partial x}\Big]_{y=0}^{y=b}dx\\&+G\int v\left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2L'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2L'}{\partial x^2}\right)dA+\frac{G}{1-2\nu}\int u\frac{\partial^2L'}{\partial x\partial y}dA-\int YL'dA=0.\end{aligned}\right\}(57)$$

上式中 $L=\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$, $L'=\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y$ とおいて逆変換公式から u 及び v を求めれば次のように書くことが出来る。

$$\begin{aligned}u=&\frac{2}{ab}\sum_n\sin\frac{n\pi}{b}y\Big[\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\Big\{S_n[(\sigma_x)_{x=a}]-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]\\&-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{b}{n\pi}\right)\Big\{(-1)^n\int_0^a(u_{y=b})dx-\int_0^a(u_{y=0})dx\Big\}\\&-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{b}{n\pi}\right)\Big\{C_n[v_{x=a}]-C_n[v_{x=0}]\Big\}-\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2S_n[X]\Big]\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n \frac{\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y}{\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\left[\frac{1}{G}\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}\right.\\
&\left\{(-1)^m S_n[(\sigma_x)_{x=a}]-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]\right\}-\frac{\frac{mn\pi^2}{ab}}{2G(1-\nu)}\left\{(-1)^n S_m[(\sigma_y)_{y=b}]\right.\\
&\left.-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]\right\}-\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\right\}\left\{(-1)^n C_m[u_{y=b}]\right.\\
&\left.-C_m[u_{y=0}]\right\}-\left\{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{m^2n\pi^3}{a^2b}\right\}\left\{(-1)^m C_n[v_{x=a}]\right.\\
&-C_n[v_{x=0}]-\frac{1}{G}\left\{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}C_m S_n[X]\\
&\left.+\frac{\frac{mn\pi^2}{ab}}{2G(1-\nu)}S_m C_n[Y]\right],
\end{aligned}\right\}\quad(58)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
v=&\frac{2}{ab}\sum_m\sin\frac{m\pi}{a}x\left[\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2\left\{S_m[(\sigma_y)_{y=b}]-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]\right\}\right.\\
&-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{a}{m\pi}\right)\left\{(-1)^m\int_0^b(v_{x=a})dx-\int_0^b(v_{x=0})dx\right\}\\
&\left.-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{a}{m\pi}\right)\left\{C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\right\}-\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\left(\frac{a}{m\pi}\right)^2S_m[Y]\right]\\
&-\frac{4}{ab}\sum_m\sum_n\frac{\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y}{\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2}\left[\frac{1}{G}\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\right.\\
&\left\{(-1)^n S_m[(\sigma_y)_{y=b}]-S_m[(\sigma_y)_{y=0}]\right\}-\frac{\frac{mn\pi^2}{ab}}{2G(1-\nu)}\left\{(-1)^m S_n[(\sigma_x)_{x=a}]\right.\\
&\left.-S_n[(\sigma_x)_{x=0}]\right\}-\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\right\}\left\{(-1)^m C_n[v_{x=a}]\right.\\
&\left.-C_n[v_{x=0}]\right\}-\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{mn^2\pi^3}{ab^2}\right\}\left\{(-1)^n C_m[u_{y=b}]-C_m[u_{y=0}]\right\}\\
&\left.-\frac{1}{G}\left\{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right\}S_m C_n[Y]+\frac{\frac{mn\pi^2}{ab}}{2G(1-\nu)}C_m S_n[X]\right],
\end{aligned}\right\}\quad(59)
$$

$m,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,$

IX むすび

以上直交座標 $x,\ y$ の $(0\,a)$, $(0\,b)$ で示される矩形領域で，弾性平板及び二次元弾性問題の力の釣合式から有限な L 変換を作り，フツクの法則を考慮しながら部分積分を施して変位

についての L 変換を誘導した後 L に逆変換関係を有する函数を代入して一般解を求めたのである。この方法によれば

1 積分未知数として境界における物理的条件がその儘表わされる。

2 平面応力，又は平面歪のような2次元弾性問題は，従来のように **Airy Function** などを用いることなく，変位が，2元1次連立方程式を解くことによつて直ちに求まる。

という二つの特徴がある。本論文においては，平板及び2次元弾性問題について一般解を誘導しただけで数値計算は行つていないがこれは今後にゆづる。またこの方法は3次元弾性問題にも適用でき，地震或は円筒殻の未知の分野に対して有力な方法と思われる。

（昭和31年4月27日受理）