室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

室蘭工業大学研究報告 第3巻第1号 全1冊

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-05-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/2930

正　　誤

前号（第三巻第一号）に誤植がありましたので御訂正願います。

頁　　行	誤	正
目　次　最　下　行	総目次（第1号—第5号）	総目次（第1号—第3号）
裏表紙　最　下　行	A General Table of Contents. Vol. II (No. 1–No. 5)	A General Table of Contents. Vol. II (No. 1–No. 3)

室蘭工業大学

研究報告

第三巻 第一号

昭和三十三年六月

MEMOIRS

OF

THE MURORAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

VOL. 3 NO. 1

JUNE 1958

MURORAN HOKKAIDO

JAPAN

Editing Committee

T. Ohga	President.	*Chairman of the Committee*
K. Morita	Asst. Prof.	*Civil Engineering*
M. Naito	Asst. Prof.	*Mechanical Engineering*
H. Sato	Prof.	*Chemical Engineering*
S. Sawa	Prof.	*Electrical Engineering*
S. Sayama	Prof.	*Mining Engineering*
D. Washiyama	Prof.	*Literature*
M. Yoshida	Prof.	*Mathematics*
S. Ohta	Prof.	*Chief Librarian*

All communications regarding the memoirs should be addressed to the chairman of the committee.

These publications are issued at irregular intervals. When they amount to about 800 pages, they form one volume.

室蘭工業大学研究報告　第三巻 第一号

目　　次

頁

炭酸ガス法に関する実験的研究（第2報）…… 内藤正鄰 菊地千之 1

硫化鉄鉱中に随伴する稀少鉱物の回収に関する研究
　第1報　ホロベツナイトの塩化焙焼 …… 西田恵三 田中章彦 及川弘 川村信一 7

硫黄精錬釜の調査ならびに研究（第2報）
　鋳鉄釜について …… 西田恵三 及川弘 17

直列コンデンサ系統の過補償における一解析 …… 三浦五郎 33

キナルジンの空気接触酸化 …… 小松藤男 41

イソキノリンの空気酸化 …… 小松藤男 61

桁梁の撓み理論に関する基礎的研究（III） …… 中村作太郎 81

弾性固定桁の立体的解法と格子飯桁橋への応用計算 …… 中村作太郎 119

河川流域における融雪流出量の算定について …… 境　隆雄 145

On one Method for Solving Three-Dimensional Stress Problems
　by Means of Finite Fourier Transforms …… Sumino Nomachi 167

電位差滴定法における電極（双金属）の選択について
　一酸化滴定（第5報） …… 上野幸三 太刀川哲平 193

A Study of the Categories of Summation …… Yoshio Kinokuniya 207

昭和32年度研究業績 …… 217

第2巻　総目次（第1号—第5号）…… i

炭酸ガス法に関する実験的研究 (第2報)

内藤正鄰・菊地千之

Experimental Investigation of Carbon Dioxide Proecss (II)

Masachika Naito and Kazuyuki Kikuchi

Abstract

In the previous paper, some experimental results were reported on the general properties of Carbon Dioxide Process of Moulds. In this paper, investigations were carried out on the relation between the amount of contained water and the compressive strength of moulds, and further the effective quantity of carbon dioxide contained within moulds was measured by the chemical reaction.

I. 緒　　言

前報[1]においては市販の数種の人工珪砂とサンドセットを用いて，炭酸ガス法による鋳型硬化に関する基礎的実験結果を報告した。元来鋳物砂の鋳型に対し要求せられる条件は，強度，通気度，造型性，崩壊性，鋳肌の良否等複雑多岐で，中にはその性質の相反するものもあり，その調整は中々困難である。従つて個々の性質，性能を充分明らかにした上で総合的に最も良い条件を決定することが必要である。この観点より本報告においては先ず強度の問題を取上げた。特に鋳型成型後の放置時間と強度については従来まちまちの報告[2]もあるのでこの点の検討を行なつた。

次に炭酸ガスが水ガラスと反応してどの程度砂混合物に吸収されるかについては資料[3]も少ないので鋳型に消費せられる炭酸ガスの有効量の測定をも合せ行なつた。

最後に最近炭酸ガス法に炭酸ガスは必要かという報告[4]もあるのでこれについても若干の

1) 内藤・菊地： 室工大研報， 2, 43 (1957).
内藤・菊地： 日本機械学会創立60周年記念第2区学術講演会講演， 昭和32年7月13日.
2) 立花・外4氏： 名工試報告， 4, 355 (1955).
関戸： 精密鋳造， I, No. 3 (1956).
浜住： 鋳物砂と鋳型材料， 136 (1957).
3) A. Tipper: Foundry Trade J., 100, 2059 (1956).
木戸・南村： 鋳物， 30, No. 1 (1958).
4) Carl E. Wulff: Modern Casting, 32, 28 (1957).

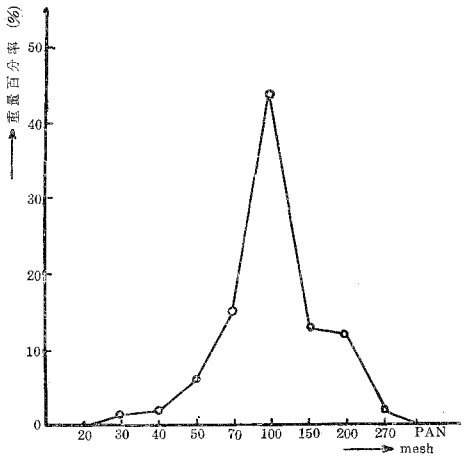
考察を行なつた。

II. 実験方法

この実験に使用した砂は土岐津6号珪砂でその粒度分布は第1図に示すものであり，粒状は Sub-Angular に Angular, Crystalline が混入している。

粘結剤は日産化学サンドセットで，混練法，試験片寸法，炭酸ガス吹込み法等も前報同様である。混合比はすべて，砂重量に対し粘結剤4%，ペレット2%とし，炭酸ガス吹込み時間は10秒，30秒の2種類とした。

1回の試験に対し試験片は4～10個同時に作製したものを用いた。



第1図　土岐津6号粒度分布

1) 圧縮強さと水分

実験方法は炭酸ガスを吹込んだ後すぐこれを秤量し，乾燥炉に入れて35±5℃で30分，2時間，6時間，10時間，24時間の時間乾燥し，再び秤量後圧縮試験を行なつた。砂はあらかじめ充分乾燥してあるので，前後の秤量の差は試験片中の粘結剤が失つた水分と考えられる。

次に底部に湯を入れ充分湿らせた容器の中に試験片を密閉して同様の実験を行なつた。この場合も秤量により試験片に含まれた水分の量を知ることが出来る。

2) 炭酸ガス有効量の測定

炭酸ガスを鋳型のすみずみまで充分通すには，炭酸ガス雰囲気の中に置くだけでは不充分で普通はある程度の圧力(0.5～2気圧)で強制吹込みを行なう。従つて相当多量の炭酸ガスが無駄に放散されることになる。使用した炭酸ガスがどの程度化学反応により鋳型硬化に消費されるかを知るため次の実験を行なつた。

炭酸ガス吹込みにより硬化した試験片を縦に4個の小片に切断しその各々をよく混合した後20gづつとつて4組のサンプルを作つた。これに6規定の HCl 15cc を反応させ発生する炭酸ガスの量を容積法で測定した。装置は化学反応式既知の $NaHCO_3$ と HCl により検定したが誤差は約3%程度であつた。炭酸ガスの吹込み時間は0, 5, 10, 30, 60秒の5種とし吹込み量は流量計で測定した。

III. 実験結果とその考察

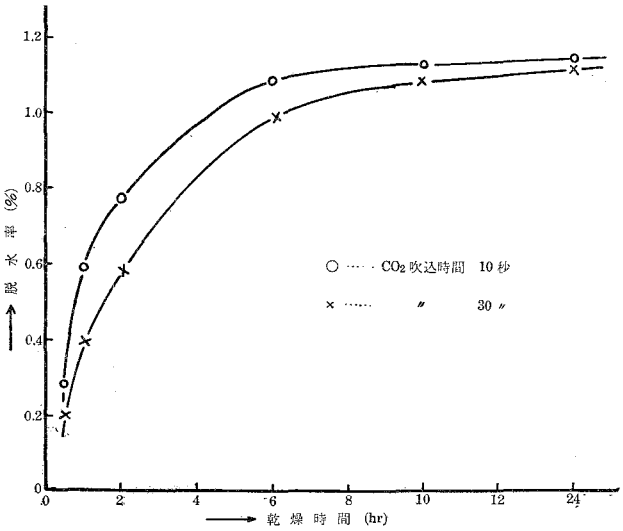
1) 圧縮強さと水分

第2図は試験片中の水分が乾燥時間とともにどのように抜けて行くかを示したもので縦軸

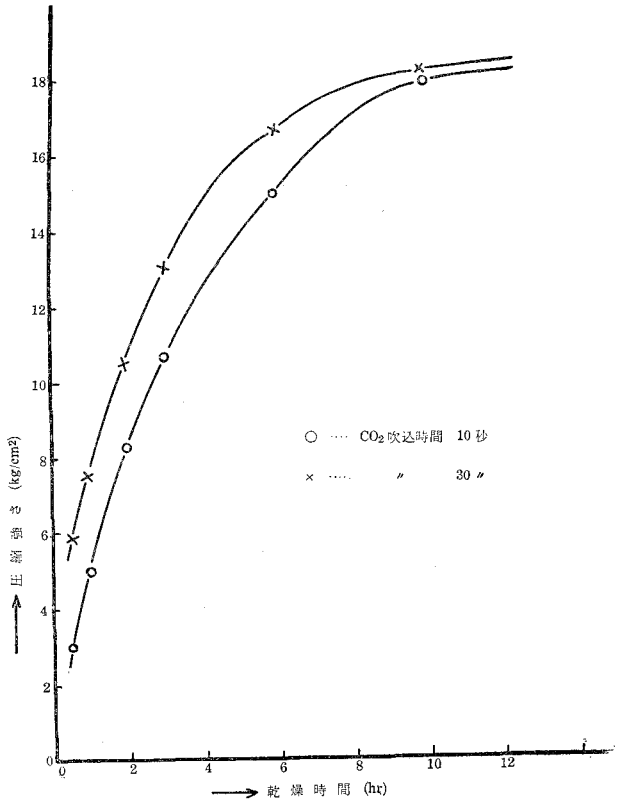
は蒸発した水分の試験片に対する重量100分率を示す。(これを脱水率と仮称する) これによると始めは抜けかたが早いが,除々に遅くなり10時間位からは中々抜けにくくなることが分る。これは水ガラスに炭酸ガスを通じたために砂粒子をとりまいて出来た反応硬化層が,乾燥とともにだんだん厚くなり水分の蒸発を防げるためと考えられる。10秒吹込みに比べ30秒の方が蒸発が遅れるのも,それだけ硬化層が厚いためであると云えよう。

第3図は乾燥時間と圧縮強さとの関係を示す。10秒に比べ30秒の方が当然高く出るが,いづれも常温よりわずか高い程度の温度(35±5°C)で短時間に相当な強度が得られることが分る。しかしこの程度の温度では充分な乾燥が行なわれないため,強度の増加率の減少は見られるが第2図と同様に最大は示すことが出来ない。高温で乾燥すれば更に水分の除去は出来るが (脱水率2%で大体完全乾燥) 混合したペレットが軟化するのでこの程度にとどめた。

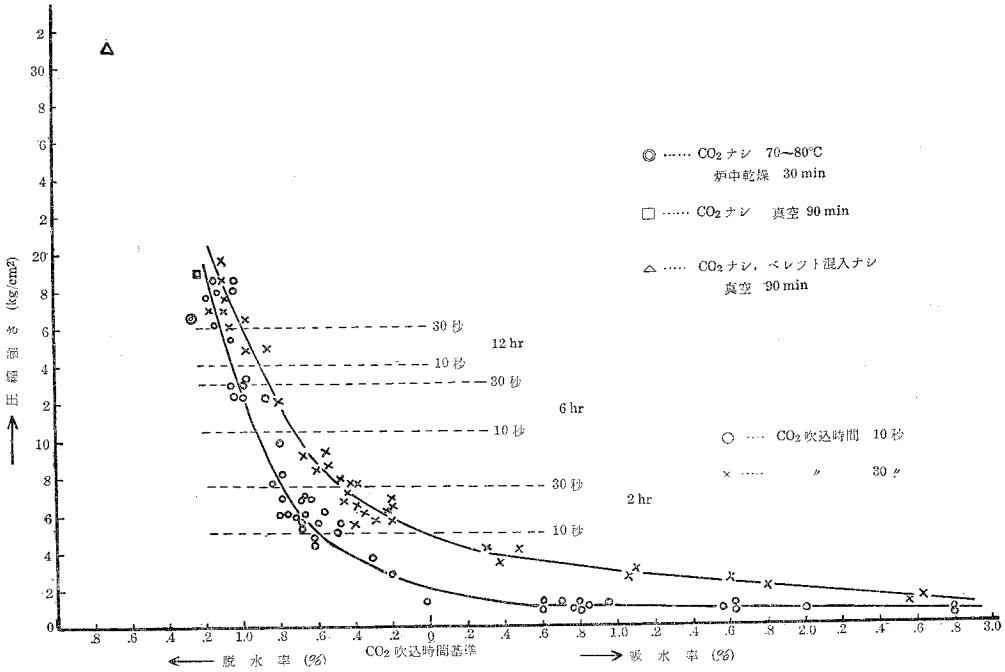
第4図は試験片が乾燥あるいは吸湿することにより強度がいかに変化するかを示したものである。これによると乾燥硬化することによつて強度はどんどん増加し,逆に水分を多く含むほど軟弱化することが分



第2図 乾燥時間と脱水率との関係



第3図 乾燥時間と圧縮強さとの関係



第 4 図　脱水率，吸水率と圧縮強さとの関係

る。従来の報告[5]には放置時間とともに強度は増加するというのが多いが中には逆に低下するという報告もあり，また増加するというものでもピークの出かたがまちまちであるが，これらは放置した場所の乾湿の条件が異なるために，そのような結果が出たものと考えられる。なお図には比較のために湿度 45～55% の室内にそれぞれ 2，6，12 時間放置した場合を点線で示してある。

次に最近 Wisconsion 大学の Carl E. Wulff 氏[6]は "CO_2 プロセスに CO_2 は必ずしも必要でない" また "小さな中子には乾燥 N_2 又は乾燥圧縮空気によつても CO_2 以上ではないといえども同程度硬化し得る" と発表している。そこで何故このような結果がでるかを調べるため次の実験を行なつた。

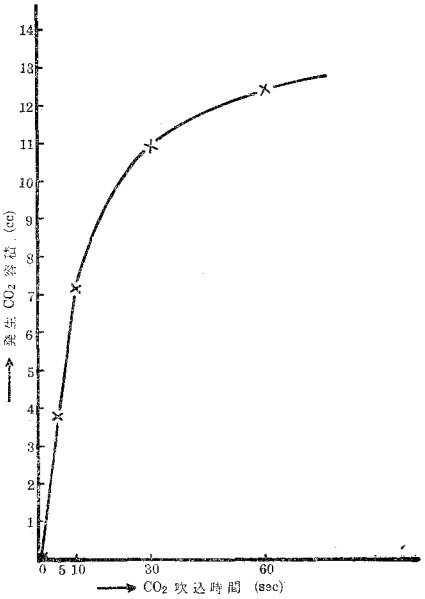
珪砂と粘結剤を手早く混練し，成型した試験片を炭酸ガスを通さずに密閉容器に入れ真空ポンプで空気を除いた。かくすることにより炭酸ガスに触れずに水分を除くことが出来た。(真空保持時間 90 分)

一方比較のためやはり炭酸ガスを通さない試験片を 70～80°C で 30 分間炉中乾燥を行なつた。(この場合は空気中に若干存在する炭酸ガスとの接触はさけられない) この結果は炭酸ガス

5) 前掲脚註 2).
6) 前掲脚註 4).

による硬化皮膜の影響は少ないので水分は抜け易く，脱水率は前者で1.10～1.25%，後者で1.0～1.35%であり，強度については前者で14～22 kg/cm²，後者で15～18 kg/cm²の高い強度が得られた。以上はいづれもペレットが混入されているが，ペレットを混入していない場合は脱水率1.65%，最高強度35.5 kg/cm²が得られた。比較のため平均値を同じ第4図に示してある。以上の結果より，粘結剤は炭酸ガスの影響を受けず単に水分が蒸発することにより乾燥固化し，炭酸ガスを通したものに近い強度が得られることが分る。従つて鋳型の硬化は，水分を失つて硬化することと，化学反応により硬化することとの二つより成るものと考えると，前者がその大部分を占めるものと判断される。このように考えれば硬化のみに関しては炭酸ガスが必ずしも必要でないと云えるわけで，乾燥 N_2 又は乾燥圧縮空気によつても相当の強度が得られると云うことも充分考えられることである。

このことは単に強度の点のみから云えば，鋳型を乾燥さえすれば炭酸ガスは要らないと云うことで，これでは乾燥不要という CO_2 プロセスの大なる利点が失われることになる。しかし実際問題としては，炭酸ガスを通さない生の型は甚だ弱くすぐ使用することは困難であるが，炭酸ガスを通したものは短時間で相当の強度が得られる点からも炭酸ガスの不要ということは必ずしも云えないであろう。



第5図　CO_2 吹込時間と CO_2 有効反応量
（試験片20 g に対し）

2) 炭酸ガス有効反応量

前述の方法で得られた炭酸ガスの容積（有効反応量と仮称する）と炭酸ガスの吹込み時間との関係を第5図に示す。ただしこの場合，市販のサンドセットは水ガラスの他に種々の添加物が混合されているので，塩酸を注いだ時これらから発生するガスがあるので，これはあらかじめ測定して引去つた（平均4.2 cc)。従つて縦軸は水ガラスのみに反応した炭酸ガスの量を示している。大体時間がたてば飽和することが予想され，30秒以上はさして効果は得られないことが分る。実際通した炭雑ガス量に対する比を有効率と名づけ，その値を次表に示す。

これによれば使用炭酸ガスの大半は無駄に捨て去られることになるわけで，強制通気をする以上ある程度はさけられないが，経済上は勿論衛生管理の面からも，ガスの有効適切な使用法については充分研究の必要がある。

炭酸ガス吹込時間 (秒)	炭酸ガス流量 (ℓ)	有効反応量 (cc)		有効率 (%)
		20 g	130 g (試験片)	
10	2.45	7.0	45.5	1.85
30	12.25	11.0	71.5	0.59

IV. 結　　言

以上の結果を要約すると次のごとくである。

1) 炭酸ガス法による鋳型の強度は含有水分と大なる関係を持ち，水分が少なくなる程強度は増大する。

2) 単に強度を得る目的ならば，乾燥させるだけで充分で必ずしも炭酸ガスは必要としない。

3) 炭酸ガスが鋳型中で有効に反応する量は極めて少なく，使用量の 0.5～2% 程度である。

本研究を行なうにあたり，多大の御教示と御援助を与えられた本学化研究室柏木教官に深甚なる謝意を表すると共に，実験に当つて援助を惜しまなかつた工学士井上一郎，黒滝正治両君に感謝の意を表する。

(昭和 33 年 4 月 30 日受理)

硫化鉄鉱中に随伴する稀少鉱物の回収に関する研究

第 1 報　ホロベツナイトの塩化焙焼*

西田恵三・田中章彦・及川　弘・川村信一

Extraction from Rare Minerals associated with Pyrite (Part I)

On the Chloridizing Roasting of Horobetsunite

Keizo Nishida, Akihiko Tanaka, Hiroshi Oikawa
and Shinichi Kawamura

Abstract

The pyrite from Horobetsu mine in Hokkaido is associated with rare mineral named "Horobetsunite", which is said to consist of Sb-sulfide and Bi-sulfide in solid solution.

We picked up this mineral in tiny sizes from pyrite blocks crashed, and chloridized them under passing chlorine gas (80 cc per min.) at various temperatures.

From these experiments, the follwing details were found.

These mineral pieces (−20～+32 mesh, about 0.8 gm) evaporate out in 10 min. at 350°C, and 45 min. at 300°C. At lower temperature they reduce their weight rapidly at first, and then more slowly with linear velocity. At 100°C, especially their weight increases at initial period of test, then decreases gradually.

Above observation indicates that these mineral pieces are chloridized at first into each chloride, and the Sb-chloride evaporates very rapidly, and at next period Bi-chloride follows, because of difference of these vapor pressures.

Accordingly, if we chloridize the Horobetsunite at proper temperature, we can separate the constituents from each other in the form of chloride, and under optimum condition probably extract them from pyrite.

I. 緒　　言

北海道有珠郡壮ベツ村所在の幌別鉱山は，自然硫黄と硫化鉄鉱の鉱山として，古くから知られているが，この硫化鉄鉱鉱床中に，蒼鉛；アンチモンを含む硫化鉱物が見出されることは，昭和11年に三井鉱山K.K.の西脇氏が指摘しており，さらに昭和23年に早稲田大学の早瀬氏[1)]

---

* 昭和32年11月日本金属学会北海道支部講演会において発表。

1) 早瀬：鉱山地質，日本鉱山地質学会 Vol. 2, No. 6 (1952年).

は，この蒼鉛；アンチモンの硫化物からなる鉱物を特に“ホロベツナイト”(Horobetsunite) と命名し，他に類例のない鉱物であることを発表した。同氏の研究によれば，ホロベツナイトは輝蒼鉛鉱 (Bi_2S_3) と輝安鉱 (Sb_2S_3) の単なる混合物ではなく，これら両者の固溶体であることを検鏡試験およびX線解析によつて確認した。すなわち，本鉱物は輝蒼鉛鉱；輝安鉱と同じ結晶系（斜方晶系）の構造を有し，しかも，その格子常数が両鉱物の中間にある。

ひるがえつて，これら蒼鉛；アンチモン金属は，単体鉱物としての産出の少ない我国の現状* では，これが生産量の増加は重要な課題であろうと考えられる。従つて，同鉱業所において，これら両種金属が同時に産出することが早くから注目されていた処であるが，その産状は，早瀬氏も発表している通り，特定の硫化鉄鉱床中にかすかに網状に走つているにすぎない。従つて，同鉱業所でも，これが回収は行なつておらず，硫酸製造用売鉱中に混入して，分散するにすぎない状態である。

著者らは，かかる現況にかんがみ，これら稀少産出の鉱物から貴重な金属を回収する目的で本研究を行なつたのであるが，酸化物；塩化物の生成による蒸発に関する基礎的な研究の中，ここでは塩化物に関する結果を報告して，参考に供したい。

II. 塩化焙焼

蒼鉛；アンチモン両種の硫化物に関するこれまでの各種工業的製錬法を見るに，その実際的操作の困難およびその理論の不明確によるものか，いまだに塩化焙焼を行なつた例は少ない。1800 年代に Mitcherlich[2] が発表している処によると，Sb_2S_3 に Cl_2 ガスを通すことにより，Sb と Cl_2 の親和力により三塩化物 ($SbCl_3$) が出来ることをのべており，又，多量に通じると，さらに五塩化物 ($SbCl_5$) を生成するが，これは次式

$$SbCl_5 \longrightarrow SbCl_3 + Cl_2$$

に従つて分解して三塩化物になることをも示し，しかもこの反応が 140°C で始まり，180°C で甚だしくなるとのべている。一方，Bi_2S_3 に関しては，同年代に Muir；Eagles[3] がのべる処によれば，次式

$$Bi_2S_3 + 3Cl_2 \longrightarrow 2BiCl_3$$

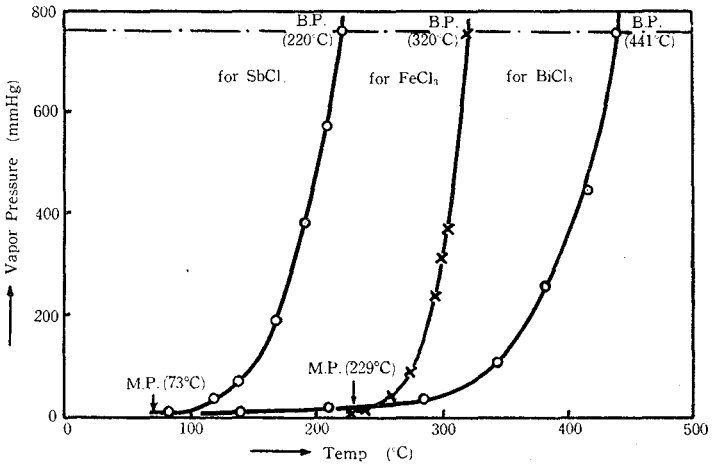
に従つて三塩化物 ($BiCl_3$) が出来ることを示している。

---

* 工業技術院地質調査所：日本鉱産資源概観 (1956) によれば，1953 年にアンチモンは 321 ton（約 107 カ所の鉱山での総計）の産出があり，蒼鉛については，同年に約 50 ton（4 カ所の精錬所総計）の産出を見るにすぎない。

2) E. Mitcherlich：J. prakt. Chem., [1] 19 (1840), 455；内海：“アンチモン”(無機化学全書 IV-4)(丸善出版 K. K.).

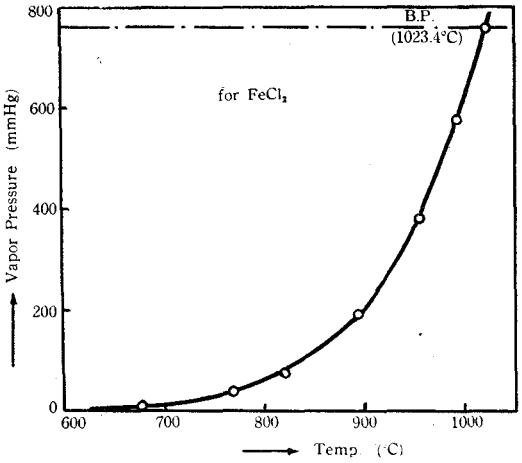
3) Muir；Eagles：J. Chem. Soc., 67 (1895), 90；内海：“蒼鉛”(無機化学全書 IV-5)(丸善出版 K.K.).



第1図　(a) 各種塩化物の温度-蒸気圧曲線

さらにまた，蒼鉛；アンチモンの三塩化物に関しては，文献[4]によれば，第1図に示されるごとく，$BiCl_3$ では融点：229°C；沸点：441°C であり，$SbCl_3$ については，同図に示したごとく，融点：73°C；沸点：220 °C である。

もちろん本鉱物は Bi_2S_3 および Sb_2S_3 それぞれの機械的混合物ではないが，これが塩化物となつた場合には，明らかに，それぞれの蒸気圧の差から単体分離が可能となることは想像出来る。



第1図　(b) 塩化第一鉄の温度-蒸気圧曲線

しかしながら，前述の産状からも分る通り，非常に低品位であつて，主体は硫化鉄鉱 (FeS_2) である。しかして，これら鉱物を硫化鉄鉱と共に原料とする工業的見地に立つて考える場合，塩化焙焼における硫化鉄の挙動が問題となるであろう。Levy；Gray[5]によれば，次式

$$FeS_2+Cl_2 \rightarrow FeCl_2+S_2$$

4) 佐野：日本金属学会誌，第3巻，第12号 (1939).
C. G. Maier：Dep. Inst. Bur-Mines, Tech. Paper 360, Washington (1925).
内海："蒼鉛" (無機化学全書 IV-5)；内海："アンチモン" (無機化学全書 IV-4), (丸善出版 K. K.).

5) Levy；Gray："J. W. Mellor", A Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chem., Vol. XIV., p. 11.

の反応が250°Cで始まることを示しているが，ここで生ずるSも又Cl_2によつて次式

$$S_2+Cl_2 \rightarrow S_2Cl_2$$

の反応を起して一塩化硫黄(S_2Cl_2)を生成することは明らかである。しかして生成した$FeCl_2$は，さらに多量のCl_2ガスの流通により，$FeCl_3$を生ずることも考えられる。鉄塩化物の蒸気圧は，前図に示す通り，$FeCl_2$については，1,023.4°Cの沸点を有し，$BiCl_3$の沸点(441°C)においてはほとんど無視出来る蒸気圧を有するにすぎないが，一方，$FeCl_3$に関しては，沸点(320°C)が低くく，丁度，両塩化物の中間の温度に相当している。従つて，主体原料である硫化鉄鉱との分離は，もし焙焼が，塩化第一鉄のみを生成する様に行なわれるならば，明らかにこれを分離することが出来る。

これら焙焼によつて得られる揮発物は非常に純度が高いため，次の段階の電解精錬等を有利に行ない得ると考えられる。

問題は，これら蒼鉛；アンチモン硫化物の固溶体であると言われるホロベツナイトがいかなる条件において最も有利に塩化物に変えることが出来るかにある。

現在まで，かかる硫化物の塩化焙焼という例が少ないので，著者らは，先ず，最も手始めとして，一定流量(80 cc/min.)のCl_2ガス気流中で，各温度；各時間におけるホロベツナイトのみの重量変化を測定し，この結果を解析して，今後の研究の基礎とした。

III.　試料および実験方法

1.　試料について

ホロベツナイトは写真1に示すごとく，その外観は輝安鉱に類似しており，その大いさは最大2～5 mmの長さを有し，巾約1～0.5 mm位で，これらは硫化鉄鉱床中に脈状に存在しているが，これを破砕後摘出することにより，単体分離を行ない，さらに−20～+32メッシュに篩分け，これを二硫化炭素(CS_2)で十分洗滌したものを試料とした。この鉱物の分析結果は，早瀬氏によれば，第1表のごとく

第1表　原鉱の化学分析値

Bi	Sb	S	Fe	残　査	全　量
56.93	21.49	21.57	tr.	tr.	99.99%

$Bi_2S_3 : Sb_2S_3 = 70.03 : 29.97 \approx 7 : 3$　(重量比)
$Bi_2S_3 : Sb_2S_3 = 60.65 : 39.35 \approx 6 : 4$　(モル比)

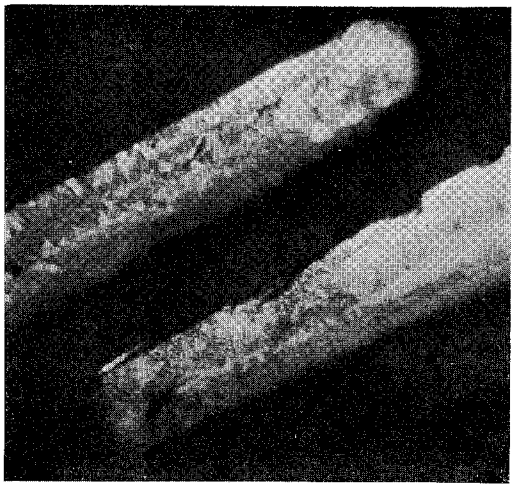
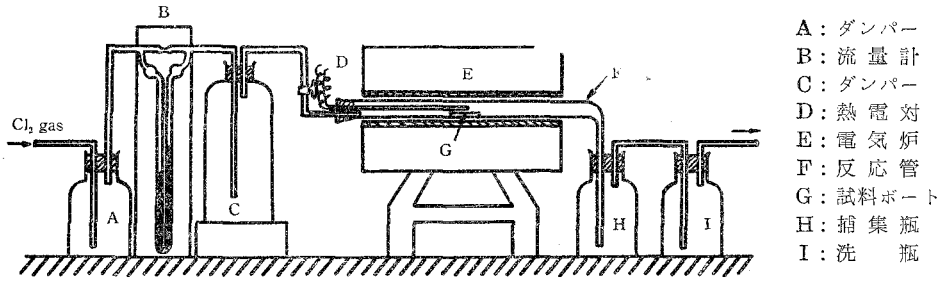


写真 1　ホロベツナイト粒子　　×95

であるが，時にはこれより幾分ずれることもある。

2. 実験方法

実験装置は第2図に示すごとく，直径23 mmφ，長さ560 mmの硬質ガラス管を用い，その一端は図のごとく絞り，これを捕集ビン(常温)に接続し，市販塩素ガスを直接導き，余剰Cl_2ガス(その他のガスも含む)をアスピレーターを用いて系外に放出した。

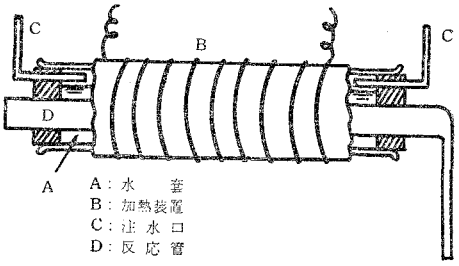


第2図　実験装置　(略図)

反応管中には試料を約0.8 g散布した硫黄定量用磁性ボートを置き，これにCl_2ガスを通した。

加熱装置は，150°C以上の場合には電気炉を用い，100°Cの場合には，特に第3図のごとき沸騰水套を用いて行なつた。温度測定は反応管内で行ない，水銀温度計で低温を，熱電対で高温を測定した。

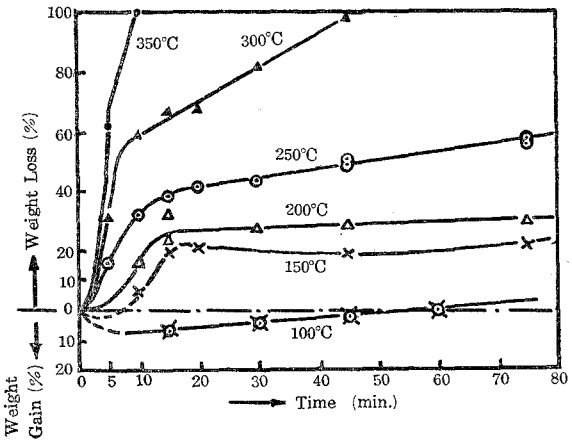
反応開始に当つては，低温度になるに従つて適当に試料の予熱を行なつた(100°Cの場合)。反応時間終了後，試料の入つたボートをデシケーター中で常温に冷却し，その反応前後の重量変化を測定した。



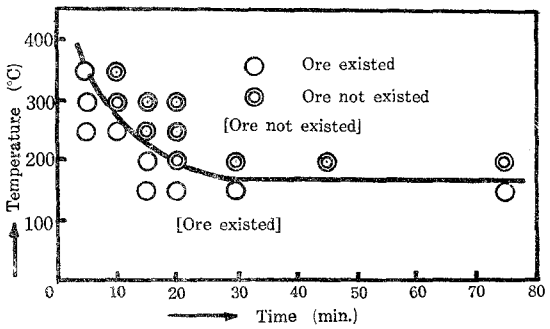
第3図　水套式加熱装置

IV. 実験結果

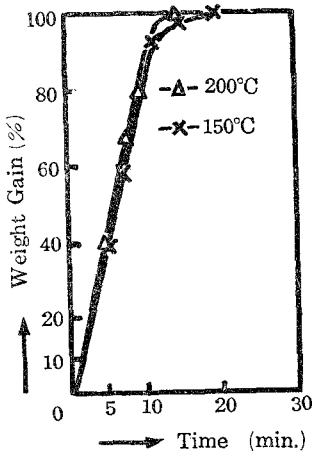
各温度における各時間での重量変化(%)を一括して示せば，第4図の通りである。これによれば，200°C以上の場合と，それより低温の場合とでは，明らかにその傾向が異なつている。特に，100°Cの場合には，最初から重量増加が認められる。また，300°Cの場合には，僅か45分で，350°Cの時には10分以内で完全に揮発してしまうことが知られる。150°C，200°Cおよび250°Cの場合には，大体15分位まで，急激な重量減少が最初に認められ，ついで，それ以後では，その減少がおそくなる。150°Cの場合には，逆に重量増加が生じている。もちろん，この場合にも長時間になれば重量減少が示される。300°Cでは，250°Cの時と同様の傾向が示



第4図　各温度における重量の時間的変化



第5図　各温度における試料の時間的変化



第6図　輝安鉱の塩化焙焼結果

されているが，その時間的変化は一層急激である。

なお，ボート中の残留物を観察するに，低温度；短時間ほど，その中に鉱物原形が多く，高温になるに従つて，短時間でも原鉱物が消失して，淡黄色の物質に変化する。これらの変化を各温度；各時間について示せば，第5図のごとくである。

V.　輝安鉱の塩化焙焼について

ホロベツナイトの構成物質である輝安鉱 (Sb_2S_3) について，比較のために同様の実験を行なつたが，これは，大きな輝安鉱結晶から破砕によつて完全物質を取出し，これをホロベツナイトと同様の寸法に篩分けしたものを試料とした。その結果は，わずかであるが，第6図に示した。これによれば，単体輝安鉱では150°Cにおいて20分以内，200°Cでは15分以内で完全に揮発してしまう。ここで特に注目すべきことは，150°C；200°Cでの重量変化が非常に接近していることで，前記 Cl_2 の流速では，ホロベツナイトに比較して，非常に早く揮発することがわかる。

VI.　実験結果に対する考察

揮発物についての分析は，目下続行中で，その結果を得ないが，今一応，先の重量変化について考察することにする。

先の第4図を見るに，最初の短時間における曲線と，それ以後の曲線の二種の曲線が合成されていると見ることは，先の塩化物の蒸気圧の曲線より考えられることである。ただし，100°Cの場合には，温度が低いために，最初の曲線が極

端に長時間にのびたものと考えられる。

次に塩化焙焼の機構を考えるとき，単体としての Sb_2S_3；Bi_2S_3 が機械的に混合している場合は，お互いに関係なく，独立に塩化物の生成および揮発を行なうと考えられる。しかる時は，Sb，Bi 共に簡単に考えて，三塩化物として生成していると考えると，次の過程が行なわれる：

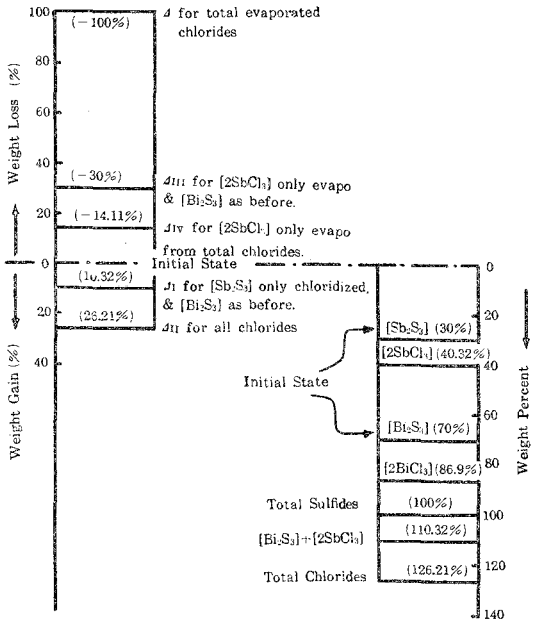
$$2Sb_2S_3+9Cl_2 \rightarrow 4SbCl_3+3S_2Cl_2,$$

$$2Bi_2S_3+9Cl_2 \rightarrow 4BiCl_3+3S_2Cl_2$$

そして，これら塩化物がその時の温度で保持する蒸気圧と関連した大いさで，流通する Cl_2 ガスによつて運び去られることになる。しかして，上式のごとく生成した塩化物の中，$SbCl_3$ は $BiCl_3$ にくらべて，はるかに蒸気圧が大であるため，$SbCl_3$ の沸点 (220°C) 附近ではもちろん，それ以下の温度でも，はるかに早く蒸発すると考えられる。

ただいまの場合，ホロベツナイトは両硫化物の固溶体であるため，単純な輝安鉱にくらべて，その中の Sb_2S_3 分の塩化物の生成がおくれ，その蒸発もおくれることは，先の実験結果（第6図）と比較すれば明らかである。もちろん，その間に生成した $BiCl_3$ もその温度における蒸気圧に関連した重量変化を示すことは当然である。従つて，比較的高温で長時間反応後は，残留物はほとんど $BiCl_3$ と考えてよい。

今両者の中，1種類の硫化物のみを考える場合，先にのべたごとく，硫化物(固)→塩化物(固又は液)→塩化物(気)の二段階の反応過程において，第1段階終了のみでは，その分子量から考えて，当然重量増加が生ずる。ただいまの場合，一塩化硫黄 (S_2Cl_2) はその沸点が 137.6°C であるので，この系から除外して考えてよい。これらの関係を一括計算図示したものが第7図である（原鉱は早瀬氏の結果を使用し，70% Bi_2S_3，30% Sb_2S_3 とした)。これによれば，Sb_2S_3 のみが塩化物となれば 10.32 %の重量増加，Bi_2S_3 も共に塩化物になれば，26.21% 重量増加，また両塩化物の中，$SbCl_3$ のみが揮発すれば，14.11% の重量減少となることがわかる。



第7図　各種反応段階における重量変化

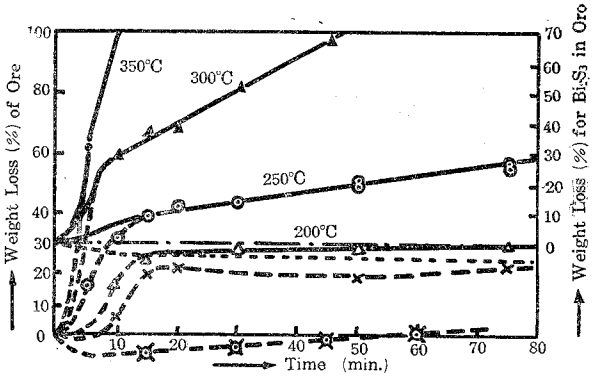
よりも大であれば，その重量変化は，最初より増加となり，その逆の場合には，最初より減少を示すことになる。

これらの考察にもとずいて，先の測定結果を見るに，200°C の反応では，先の第 5 図から，20 分ですでに全部塩化物に変化しており，またそれ以後の経過が直線的減少を示すことから，20 分以後の残留物中には $SbCl_3$ の残留が微量であると考えられる。この関係はさらに高温では一層明らかになり，ある時間が経過すれば，$BiCl_3$ のみの蒸発曲線を示しているものと考えることが出来る。

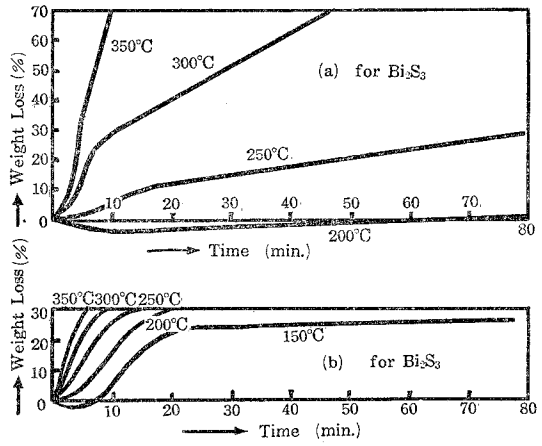
一方，Sb_2S_3 に関しては，原鉱物の原形が残留している以上，ボート内に残存していることは明らかであり，また先の輝安鉱の焙焼曲線とも類似すべきであるが，ただいまの場合には固溶体の一構成物質であるため，その経過はさらに遅緩された様相を示すであろう。

かかる推定のもとに，第 4 図について，原鉱物の 70% Bi_2S_3 から出発して (図では 30% 減量を基点として), $Bi_2S_3 \rightarrow 2BiCl_3$ の変化(揮発をも含めて)を予想した曲線が第 8 図の実線のごとくなる。また，この曲線を用いて，Sb_2S_3 分の変化を推定した曲線をも併記すると，第 9 図 (a), (b) のごとくになる。

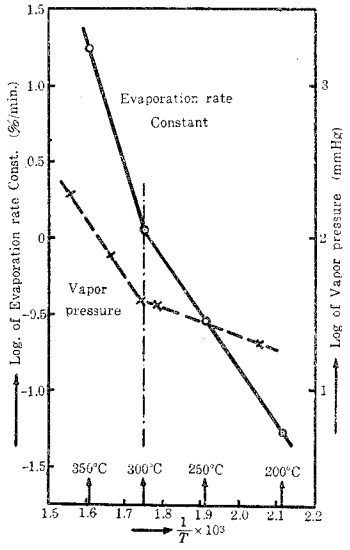
また先の結果から，$BiCl_3$ の揮



第 8 図　試料中の Bi_2S_3 分の重量変化推定曲線



第 9 図　試料中の Bi_2S_3；Sb_2S_3 分の重量変化推定曲線



第 10 図　$BiCl_3$ の蒸発速度と温度との関係

発速度は各温度で大体一定と考えられるので，各温度での $BiCl_3$ の蒸気速度恒数 (%/min.) を求め，これを絶対温度の逆数に対して，対数値でプロットすると，第10図の実線のごとくである。これによれば，大体300°C附近でクニックが認められる。しかして $BiCl_3$ の蒸気圧曲線 (第1図) から，これの対数値を同図に併記すれば，同図の破線のごとく示され，この場合にも，同じ温度で同様のクニックが示されている。本研究においては Cl_2 ガスの流速が一定であるので，当然その温度における蒸発速度はその蒸気圧と直接関係を有する筈であり，ただいまの結果にもその事実が示されている。ただし，300°C 附近でこの曲線にクニックを生じていることに関しては明らかでない。

もちろんこの場合，両種の塩化物が前述のごとく単純な三塩化物とは限らず，他の化合物の生成も考えられる。これは残留物あるいは蒸発物の化学分析によつて確定されることであるが，その場合でも，この傾向には変化を生じないであろう。

VII. 結　　言

以上の重量変化の測定結果から考えるに，塩化焙焼によれば，比較的低温で簡単に，ホロベツナイトを塩化物として揮発させることが出来る。しかもごく低温度，例えば，150～200°C の範囲ではホロベツナイト中の蒼鉛；アンチモンの塩化物を生成させながら両者を分離することが出来る。また，硫化鉄鉱中に含まれるホロベツナイトについても選鉱によつてある程度の濃縮を行なえば，第1段階の温度，すなわち，250～300°C で，先ず，ホロベツナイト全部を蒸発し，さらに低温でこれから蒼鉛；アンチモンを分離することも可能となるであろう。

もちろん，本研究においては，試料の不足のため，特定の粒度，特定の Cl_2 ガス流速のみで行なつた結果であるので，さらにこれを実際的に有利に行なうためには，なお今後の研究によらねばならない。

終りに当り，本研究のために，試料提供その他種々の便宜を与えて下さつた幌別鉱業所長山口清治氏をはじめ，工務部長増子良男氏，辻山明宏氏の諸氏に，また塩素ガスを提供された幌別ソーダ工場長国分恒次氏に対して厚く感謝する次第である。また，本研究の実際的操作を受持つた工学士片山博君，ならびに金属工学研究室松尾正孝氏に感謝する。

なお，本研究は，文部省科学研究費によるものであることを附記して感謝の意を表する次第である。

(昭和33年4月28日受理)

硫黄精錬釜の調査ならびに研究* (第2報)

鋳鉄釜について

西田恵三・及川　弘

Investigations of Pots Corroded on Sulfur Smelting (Part II)

On the Cast Iron Pot

Keizo Nishida and Hiroshi Oikawa

Abstract

Examining some test pieces out of cast iron pots used for sulfur smelting, we investigated the process of corrosion and the change of mechanical properity.

The results found are as follows:

(1) The inner wall of the pot seems to harden a little, but in the course of corrosion the decomposition of cementite occurs. The outer wall, on the other hand, is decarburized.

(2) Even the mottled cast iron changes into grey structure, and the graphite in it becomes coarse in the long use. Incidentally it so much accelerates the sulfur attack and the decrease of mechanical strength as well, that results the failure in a short time.

Consequently it is much desired that the effective alloying elements are added to protect the cast iron from the graphitsization at the same time sulfur attack.

I. 緒　　言

北海道幌別鉱業所において，硫黄焼取り用釜として最も普通に使用されている鋳鉄釜の使用期間は，最小6.5月～最大12.5月と報告されている** が，その破損状況を見ると，ある特定の位置，すなわち，焰の吹上げ部(釜の底部より約30 cm上方の弯曲部)が，特にその肉厚を減少すると同時に亀裂を発生し破損に到つている(写真1参照)。一方，不銹鋼製の釜についての調査研究の結果[1]では，釜材の厚さが相当に減少した後にはじめて破損に到つている。すなわち，これはその操業条件から見て，鋳鉄釜では，かかる肉厚に到れば，その機械的強度が使用

* 日本金属学会第42回春季講演会において発表した内容の一部である。(1958年)

** 幌別鉱業所：不銹鋼精錬釜の試験結果報告．(昭和27年).

1) 西田：室蘭工業大学研究報告．第2巻，第2号 (1955).

写真 1　破損釜の状態

条件に耐え得なくなる結果によるものであろうと判断される。したがつて，その材料の経済的使用という目的からすれば，耐硫化性はもちろん，その機械的強度(特に耐熱性)の改善が強く要望されるところである。

現在までの鋳鉄に関する耐硫化性を目的とする腐蝕研究としては，まず，村上氏等[2]による鼠鋳鉄についての研究があり，これによれば，その硫化物生成速度は共析炭素鋼にくらべて約1/5となつている(硫黄の沸点温度での研究)。また，スケールは二層に分かれ，内層には黒鉛が見られる。次に川端氏等による鼠鋳鉄，斑鋳鉄および白鋳鉄中に Cr を約3%まで添加した材料について，850°C；6時間での硫黄蒸気雰囲気で行なつた研究[3]があり，これによれば，Cr の効果はこの範囲では大したことはないが，特に問題は，白鋳鉄の場合がはるかに耐硫化性を示し，鼠鋳鉄の約1/20にも重量変化が減少したことを報告している(約1% Cr 含有の場合)。一方，塩沢氏等がさらに40% Cr まで添加した場合について，硫化水素気流中(900°C；10時間まで)で研究した結果[4]によると，やはり，3% Cr までは急激に耐硫化性を示すが，それ以上の添加量になると，明らかに耐硫化性が緩慢となり，40%まで組成と共に直線的に重量増加が低下して来ている。また塩沢・中井両氏[5]は，さらに Al-添加(10%まで)，Si-添加(約10%まで)の鋳鉄について，同様に H_2S 気流中での試験(900°C, 10時間)を行ない，特に Al-鋳鉄では，10%添加で非常に良好な耐硫化性を示すことを報告している。その他，V-添加，W-添加の鋳鉄についても同様の試験を行ない[6]，二層に分れたスケールが生成し，その外層には合金元素がほとんど見られないことを示している。しかしながら，その腐蝕進行中に生ずる材料の各種の変化については，あまり明らかにされていない状態である。さらに，釜が実際現場において使用される場合，その使用期間が研究室内での測定時間に較べてはるかに長いため，異常な変化も生じることは，先の著者の不銹鋼釜についての研究結果[1]からも考えられることであつて，これらの変化が知られることによつて，今後の耐硫化性材料がより良く発展するものと考えられる。かかる見地から，現場で使用破損した釜材について二～三の研究を行なつて得た結果を報告する。

---

2) 村上・長崎：日本金属学会誌．第3巻，第4号(1939)．
3) 川端・上村・本田・米田：鉄と鋼．第39年，第3号(1953)，日本鉄鋼協会第45回講演大会大要．
4) 塩沢・中井：Report of the Castings Research Laboratory No. 4 (1953)，早稲田大学鋳物研究所．
5) 塩沢・中井：鉄と鋼．第40年，第3号(1954)，日本鉄鋼協会第47回講演会大要．
6) 塩沢・中井：鉄と鋼．第42年，第9号(1956)，日本鉄鋼協会第52回講演会大要．

II. 研究方法ならびに研究結果

A. 普通鋳鉄釜について

この種の鋳鉄釜は大体内外層共に斑鋳鉄で，写真2に見られる組織を有しており，これの成分分析値を示せば第1表の通りである。

第1表 普通鋳鉄釜材の成分値

C % (Total)	C % (G.C.)	Si %	Mn %	P %	S %	Al %
3.03	1.90	0.96	0.25	0.417	0.272	--

釜の形状は不銹鋼と大差はないが，この場合は，特に一枚釜と言つて，釜の本体が一体となつたものが使用されている。試料としては，最初の肉厚が約 25 mm であつたものが，使用損耗により，約 14～15 mm までに減少した部分を用いた。これについて，その内外表面における組織変化の観察，硬度変化の測定，サルファープリント試験および各種腐蝕液による組織の検出を行なつた。

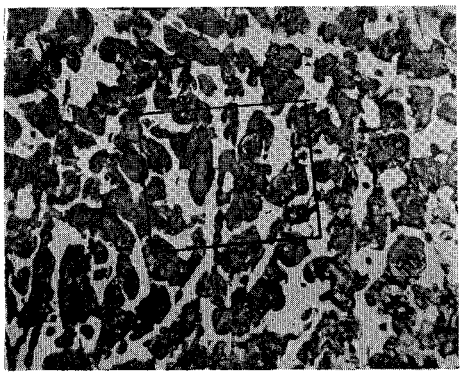
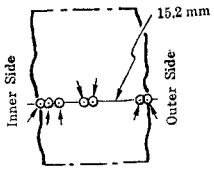


写真 2 普通鋳鉄釜の組織 ×93
白色部分はセメンタイト
灰色部分はパーライト

1) 顕微鏡組織について

この試片について第1図に示した場所で一連の組織を示せば，写真3～写真9のごとくである。これからわかる通り，大体内側より 8～9 mm までは遊離黒鉛が見られるが，これより外側ではほとんど存在しない。同時に内側附近ではセメンタイト結晶が非常に少ないが，外表面附近では非常に多い。したがつて内側より 8～9



第1図 写真撮影場所略図

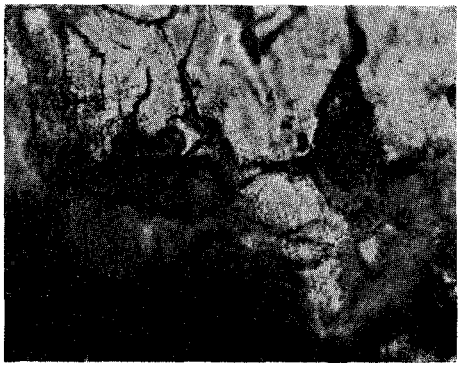


写真 3 内側表面 ×300

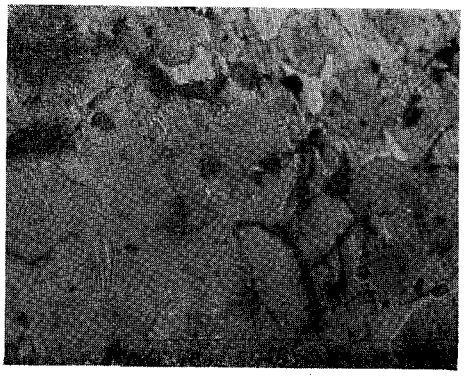


写真 4　内側より 1.7 mm　× 300

写真 5　内側より 2.3 mm　× 300

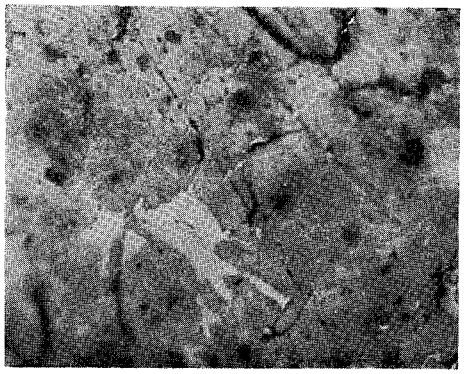


写真 6　内側より 6.3 mm　× 300

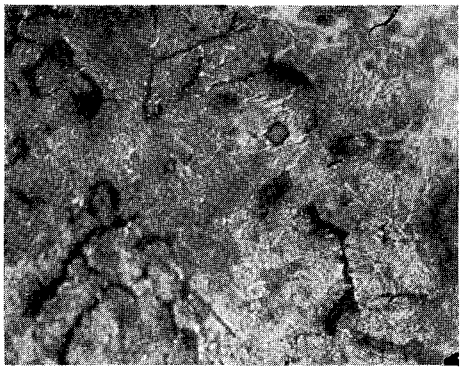


写真 7　内側より 7.7 mm　× 300

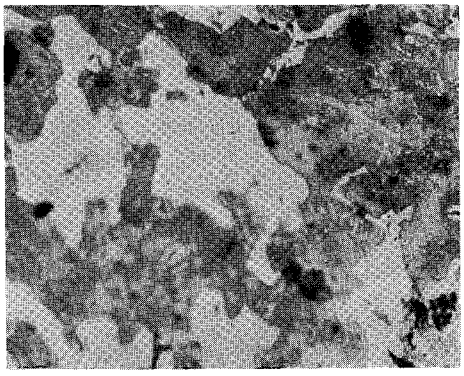


写真 8　内側より 14 mm

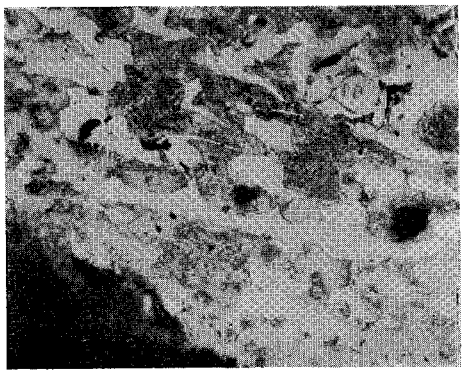


写真 9　外側表面附近　× 300

mmを境として次のように分類される：

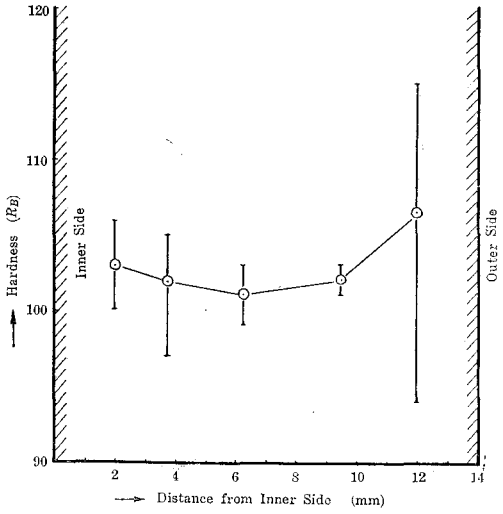
	セメンタイトの量	黒鉛の量
釜の内側	少い	多い
釜の外側	非常に多い	ほとんどない

しかして，先の写真2から見られる通り，最初は明らかにパーライト＋セメンタイトのみで，黒鉛は見られない。したがつて，かかる組織が実際使用中に上記組織の内側のごとく変化を生ずるのであるが，温度分布から考えて，釜の内側より外側において高温である事実からすれば，釜材の内側部分に黒鉛が多いことは，硫黄腐蝕によつて，鋳鉄内部にセメンタイトの分解（すなわち黒鉛の発生）が促進されることが推定される。

2) 硬度測定

上記の試片とは異なるものについて，内側から外側にわたつてロックウエル“Bスケール”で測定した硬度分布を図示すれば第2図および第3図である。これによれば，相当のバラツキ

第2図 普通鋳鉄釜材断面の硬度分布 (R_B)



第3図 普通鋳鉄釜材断面の硬度変化 (R_B)

があるが，その平均値から見れば，中央部分が最も軟かく，外側にくらべて内側が幾分低値を示している。その他の試料場所でも，同一厚さ減少では同様に中央部分が軟化している。

3) サルフアープリント試験

普通の方法でサルファープリント試験を行なつた結果，試料の内外ともに同一の濃度が示され，これによれば，硫黄の進入，硫化物の生成は試片内部では全然見られない。

4) 各種腐蝕液による組織について

1)において5% HNO_3 アルコール液によるエッチ組織を示したが，さらに次にのべる各種の腐蝕液によつてエッチを行ない，その組織を検出した。検出場所を大体試料の内側，中央部および外側に大別し，その主なる組織を示せば，写真10～写真24のごとくである。

a) 5% HNO_3 アルコール液によるエッチ組織

これは先にも他の試片について示したが，写真10，写真11は外表面附近で，セメンタイトが多量に見られ，黒鉛はない。写真12，写真13は中央部で，少量のセメンタイトがある外，大部分がパーライトで，その中に細長い黒鉛が走つているのが見られる。写真14は黒鉛がさらに太く大きくなつているのがわかる。

写真 10　外側表面附近　　× 93

写真 11　写真10拡大　　× 300

写真 12　中央附近　　× 93

写真 13　写真12拡大　　× 300

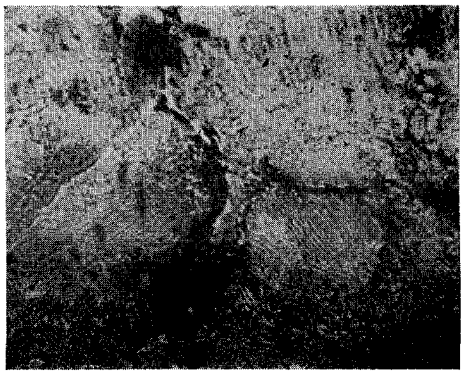


写真 14　中央別の所　　× 300

b) ピクリン酸ソーダ液によるエッチ組織

この腐蝕液はセメンタイトとフエライトの区別に用いられるものであるが，ただいまの場合，写真 15～写真 19 に見られるごとく，初析セメンタイトは淡青色，パーライトは黄褐色，フエライトは着色せずに現われており，特にパーライトの縞状セメンタイトが明瞭に示されている。これによれば，外側表面に存在しているセメンタイトが中央附近では消失し，黒鉛が出て来ているが，写真 19 (特に内側表面附近) で

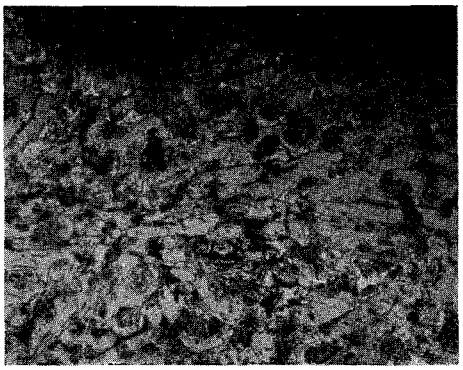


写真 15 外側表面附近 × 93

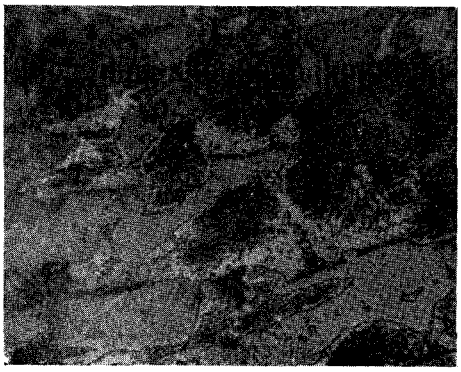


写真 16 写真 15 拡大 × 300

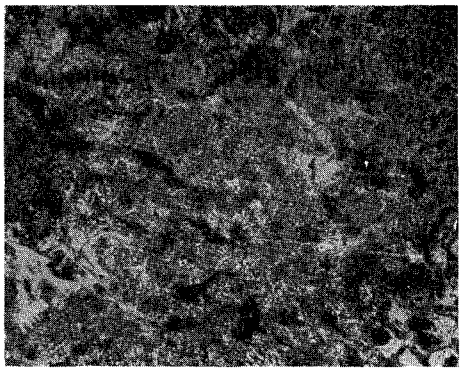


写真 17 中央附近 × 93

写真 18 写真 17 拡大 × 300

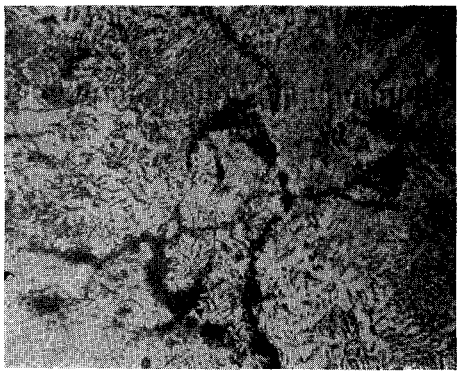


写真 19 内側附近 × 300

は粗大な形状が示されている。

c) 赤血塩アルカリ液によるエッチ組織 (76°C, 5.5 min)

本試薬はCr-鋼中のクロム炭化物検出液(村上氏試薬)であるが，これの高温エッチによれば，写真20～写真24に見られる通り，さらにセメンタイト粒子内部の細部まで示されることがわかる。これによると，セメンタイト粒子(パーライト中の縞状セメンタイトをも含めて)は濃茶色となり，フエライト粒子は淡青色となる。

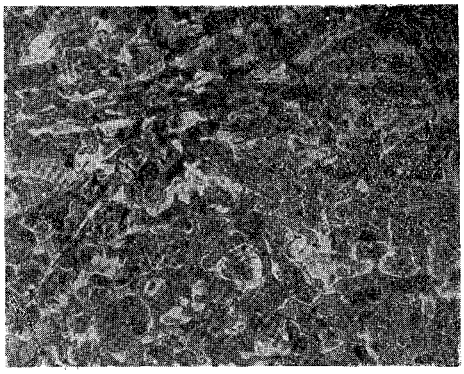


写真 20　外側表面附近　×93

写真 21　上拡大　×300

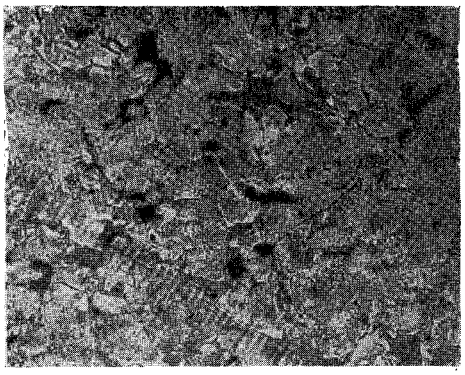


写真 22　中央附近　×93

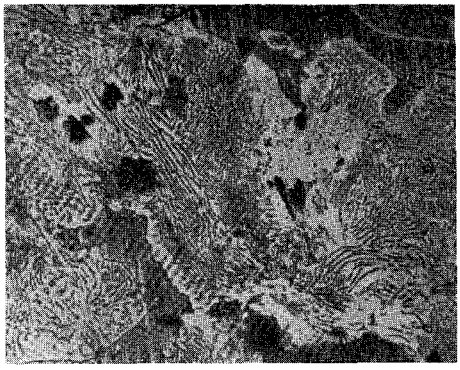


写真 23　写真22拡大　×300

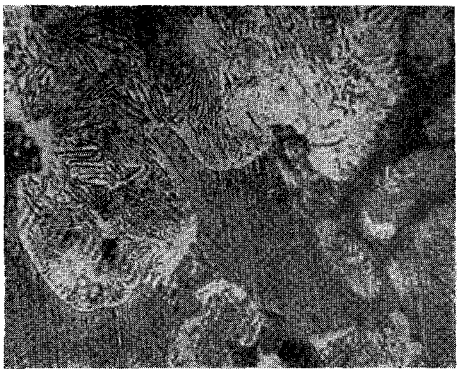


写真 24　中央内側附近　×300

以上より各腐蝕検出液を比較すると，赤血塩アルカリ試薬が最も細部まで組織を現わすことが明らかである。また，ただいまの組織においても，先に1)でのべた通りの現象が示されている。

B. いわゆる特殊鋳鉄釜について

これは某製作所において作られた試験用特殊鋳鉄釜であるが，分析結果は第2表の通り，

第2表 特殊鋳鉄釜材の成分値

C % (Total)	Si %	Mn %	P %	S %	Mo %	Al %
3.12	1.60	0.36	0.600	0.243	0.03	0.065

Mo, Al については不純物の程度でしかないが，一応現場使用の状態を列記すれば下記の通りである*。これは普通鋳鉄釜と左右別対称に7ケあて並列におき，同一状態のもとで使用したが，その結果によれば

a) 使用耐久期間は両種とも全く同一であり，平均命数は10カ月である。

b) 処理容量は普通鋳鉄釜にくらべて，約10～15% 増加した。これらの差異は使用後4カ月位から現われ，したがつて，硫黄産出量も平均1日当り60～120 kg 増加した。これは附着生成スケールの多少によるものと考えられる。

c) スケールの生成状況は普通鋳鉄釜にくらべて緩慢である (20～30 mm)。したがつて普通鋳鉄釜の1/2の生成速度である。破損釜の形状は，普通釜と異なり，全体の形が扁平状になつている。

以上の結果から見れば，普通鋳鉄釜よりはスケールの生成が遅いこと，したがつて熱伝導もよく，その処理量も幾分増加しているものと思われる。しかしながら，その命数がほとんど同一である点から見て，少量の原鉱増加(普通釜の1割強増加)が，最終時の釜材の強度にかえつて影響しているものと思われる。

本精錬釜の破損部 (厚さ約10 mm) では外観が半融状を呈している。あまり組織の異常変化が多いと，釜材の腐蝕の進行状態が不明になる恐れがあるので，この中，比較的厚い部分 (約17 mm 厚で試片Aと名付ける) と，破損端との中間の厚さの部分 (約12 mm 厚で試片Bと名付ける) を用いた。これらについて，先の普通鋳鉄釜の場合と同様に，サルファープリント試験，硬度測定および顕微鏡組織の観察 (各種試薬による) を行なつた。以下これらについてのべる。

---

* 北海道硫黄株式会社幌別鉱業所，増子総務部長の御好意による。

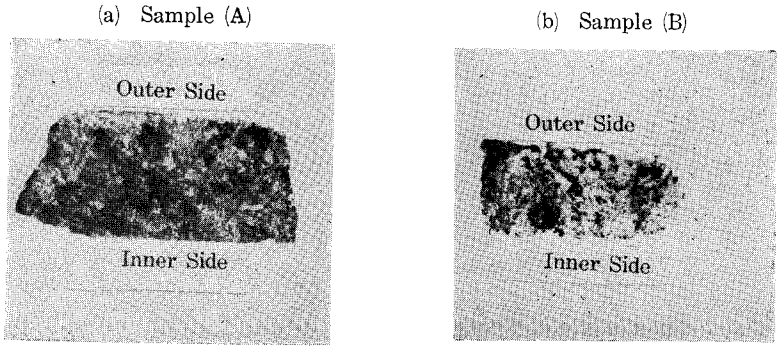


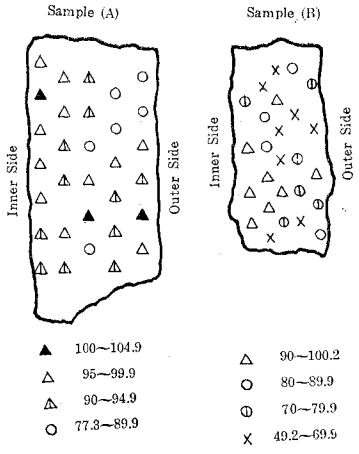
写真 25　サルファープリント

1) サルファープリント試験

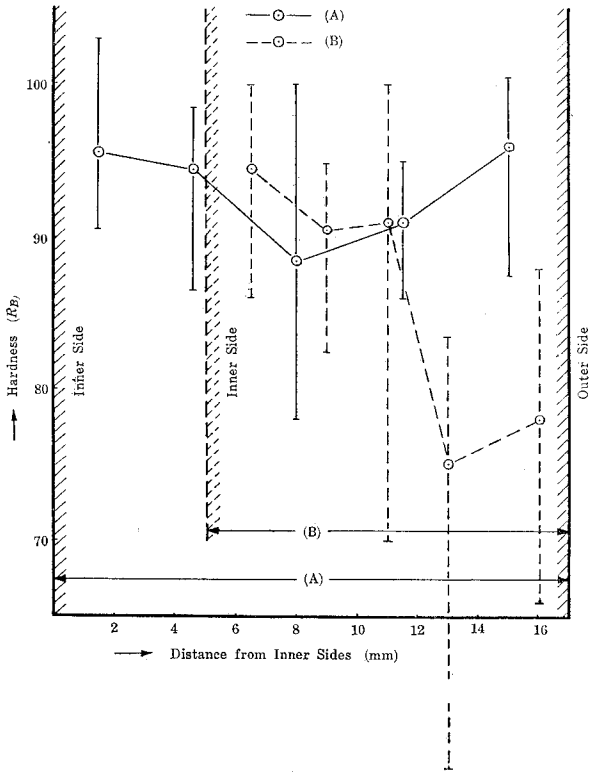
A, B両試片についてサルファープリントを示すと写真 25 a, b のごとくである。試片 A では，相当硫黄の濃度差が各所で見られるが，内外の差はないように思われる。また試片 B については，A よりはるかにその濃度がうすい。しかしこれは同一プリント条件ではないので，実際はこれほど差異がないことが明らかである。ただ，試片 A での濃度差が特に著しいことが注目される。

2) 硬度測定

前記両試片の硬度（ロックウエル "B" スケール）を測定した結果を第 4 図および第 5 図に示す。この図におい



第 4 図　特殊鋳鉄釜材断面の硬度分布 (R_B)



第 5 図　特殊鋳鉄釜材断面の硬度変化 (R_B)

ては，外側表面の位置を一致させ(外部よりの腐蝕減少を同一とみなす)て画いたものであるが，明らかに釜材の厚さが減少するにつれて，内側表面附近の硬度が変化しないのに，外側部分では急激な軟化を生じている。さらに腐蝕の大きい熔融端附近(約10 mm厚)では，内外ともに$R_B=40\sim50$に降下しているのが見られた。

3) 顕微鏡観察

上記試片について，各種エッチ試薬を用いた場合の組織を示せば写真26～写真29(試片A)，写真30～写真36(試片B)のごとくである。

a) 試片Aについて

先の普通鋳鉄ほど明らかではないが，内側，中央，外側の各部にわけてその特色をあげれば次の通りである。

i) 内側附近—写真26，27，28から明らかなように，黒鉛が相当太く散在しており，セメ

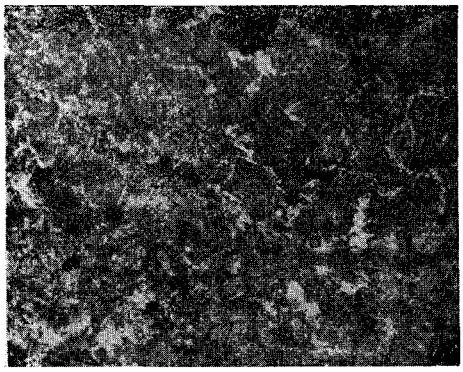


写真 26 内側附近 ×90
(5% HNO_3 アルコール液)

写真 27 左拡大 ×300

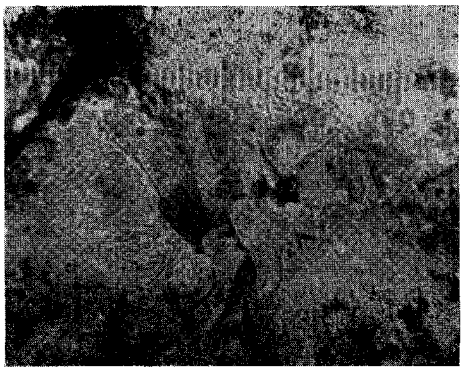


写真 28 内側附近 ×90
(ピクリン酸ソーダ煮沸)

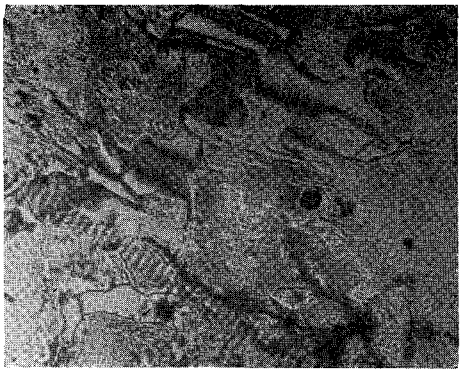


写真 29 中央附近 ×300
(赤血塩アルカリ液)

写真 30 内側表面 ×90
(5% HNO_3 アルコール液)

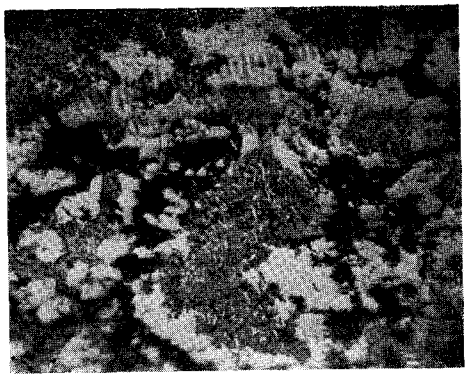


写真 31 左 拡 大 ×300

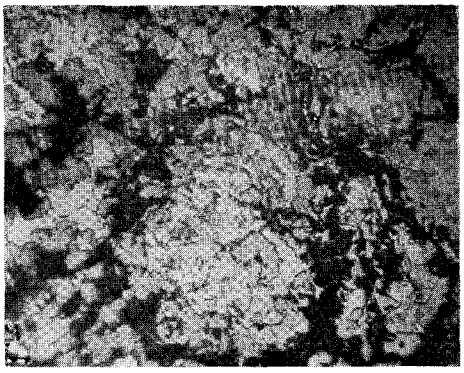


写真 32 写真31と同一場所 ×300
(ピクリン酸ソーダ煮沸)

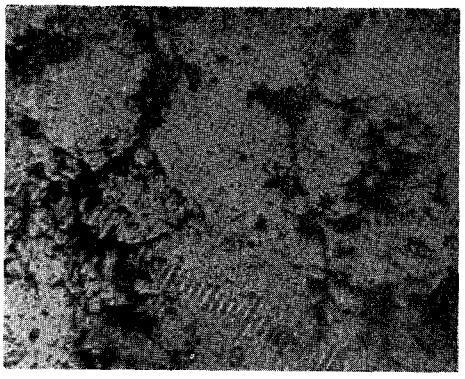


写真 33 写真32と同一場所 ×300
(赤血塩アルカリ液)

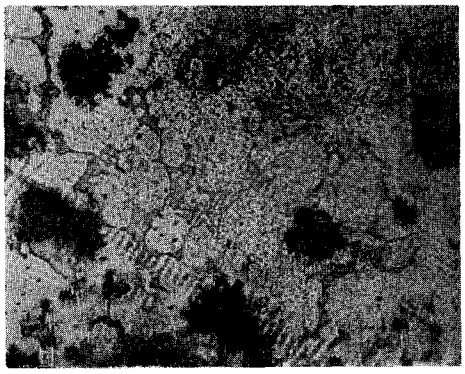


写真 34 内側附近 (中央寄り) ×90
(赤血塩アルカリ液)

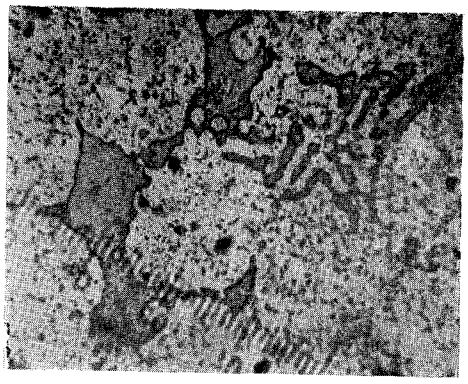


写真 35 左 拡 大 ×300

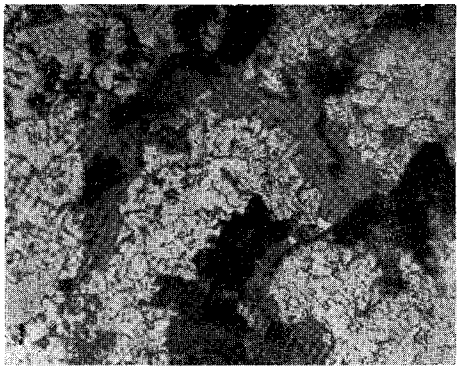


写真 36 中央附近 ×300
(赤血塩アルカリ液)

ンタイトと硫化物が混在している。主体はパーライトである。

ii) 中央附近—写真29に見られるように，細長い黒鉛と太い黒鉛が混在しており，さらにフエライト粒子も見えている。

iii) 外側附近—写真には示していないが，大分セメンタイトが減少している。

b) 試片Bについて

全般的に云い得ることは，相当に腐蝕が進行しているとともに，加熱の強いためもあつて，相当に組織が変化して来ている (写真30～写真36を参照)。

i) 内側附近—写真30～写真33に見られる通り，パーライトが少なくなり，黒鉛の微細粒子が存在すると同時に，大きい黒鉛片に細かいひげ状の黒鉛が連続的についているのが目立つている。特に太い黒鉛の周囲には5% HNO_3 アルコール液でも腐蝕されない部分が見られ(写真31参照)，これはピクリン酸ソーダによる腐蝕では他の部分よりも着色しているが，赤血塩アルカリ溶液では現われていない。これは多分硫化物であつて，黒鉛と鉄の間隙を通つて材料内に侵入した硫黄により生じた硫化鉄であろうと考えられる。

ii) 中央附近—写真34，写真35からわかるように，比較的大きなSteaditeらしい粒子が散在すると同時に，また写真36のように黒鉛の周囲に各種のエッチによつても色の変化しない部分(常に灰色を示す)があり，これは酸化物と思われる。

iii) 外側附近—写真には示していないが，ここでは全く黒鉛とフエライトのみである。もちろんii)でのべた酸化物も混在する。

III. 総合考察

これまで，普通鋳鉄および特殊鋳鉄に関して，その硬度分布と顕微鏡的観察を行なつたが，これらの結果を総合するに，硫黄による腐蝕の進行とともに，次の三種の変化が起ると考えられる。

a) 最初釜材の内外ともにセメンタイト＋パーライトの組織であつたものが，内側では地鉄の腐蝕されるにしたがつて，初析セメタイトが分解され，黒鉛を生成するため，パーライトも粗粒となり，これによつて内側の炭素濃度が黒鉛をも含めて高くなり，一方，硬度は黒鉛量増加のため幾分減少する。

b) 外側部分では，最初は鋳造時に生成した原組織のままで当分続く。

c) 腐蝕(および加熱)が相当進行すると，外側でもセメンタイトの分解により黒鉛の形成が行なわれ，これと同時に脱炭も起り，結局，フエライト＋黒鉛の組織となつて軟かくなる。

以上の組織変化から，最初ある程度の腐蝕によつて黒鉛を生成するため，全般的に硬度が降下するが，内側においては炭素の濃化（および硫化物の混入をも含む）により硬度保持（あるいは硬度増加）が見られるため，外側での組織維持から中央部のみの軟化が見られ，さらに腐蝕が進行すれば，外側でのセメンタイトの分解（黒鉛生成）が著しくなり，さらに脱炭をも生じて先の第5図Bの曲線のごとくなるものと考えられる。

したがつて，かかる最終状態から見れば，大きな黒鉛片のあるフエライト組織となり，黒鉛の大小，形状により機械的強度がなくなり，一方さらに黒鉛の間隙を通つて，内側より硫化物，外側より酸化物が生成して行き，さらに亀裂の拡大，ひいては破損の恐れが急激に増大することになる。

先の現場調査の結果にもある通り，特殊鋳鉄釜では破損までに扁平に変形するのであるが，これは材料の軟化が特に大であるためと思われるが，一方普通鋳鉄釜ではかかる状態にならない前に機械的強度の劣化により亀裂破損に到るものと考えられる。

以上の考察から判断すると，たとえ最初は白鋳鉄製であつても，長期使用により鼠鋳鉄に変化し，さらにこれが黒鉛の粗大化によつて，かえつて黒鉛が悪影響を与えることが考えられるが，どちらかと言えば，白鋳鉄の方がその分解，変化までに時間を要するであろう。そのため，短時間での腐蝕試験結果では，鼠鋳鉄にくらべて良好な結果を与えるものと考えられる。

したがつて鋳鉄のセメンタイト分解を阻止するために，他の合金元素を添加することは，より効果的であると考えられるが，かかる作用を有する元素はCrを始めとして[3]他に多くあり，これは耐熱特殊鋼の見地からも相当研究されているが，熔解鋳造の際に鋳鉄の黒鉛化を妨げる傾向のあるものが一応良好とも思われる[7]。特に，硫黄が存在する場合には有効であることは現場的にも知られており[8]（もちろんこれはSi％にも左右される），アルミニウムも約0.2％以上ではその効果が大である[7]。しかして，この元素はまた耐硫化性においてもすぐれていることから，さらに材質改善の見地からも特に注目すべきことであろうと思われる。しかしまた白銑の黒鉛化については，AlがSiと同程度の作用をすることも報告されており[9]，この点では鋳鉄の長期使用においては，悪影響を与える結果ともなる。さらに，材料の強化および炭化物安定化のための添加元素が硫化物生成の際に，かえつてスケールの厚さを増大する結果になることも

7) 三島・三島：“合金学”(上). 共立出版社 (昭和29年) p. 131.

8) 北海道硫黄株式会社幌別鉱業所において釜材スクラップの再成品使用の場合が比較的命数が良いことを報告している。

9) 菊田：“鋳物本質論”. 工業図書株式会社 (昭和17年) p. 136 によれば 0.25％ Al 含有鋳鉄までの研究結果である。

あり得るため，これらについては今後さらに研究を要する重要な問題であると考えられる。

IV. 要　　約

現場使用の二，三の鋳鉄釜について，その腐蝕の進行状況および材質の変化を調査；研究した結果，次の事実が判明した。すなわち

1) 最初白鋳鉄の釜材であつても，長期の使用中に鼠鋳鉄に変化し，さらに黒鉛を粗大にし，これが腐蝕雰囲気の侵入を助け，機械的強度の劣化とともに早期破損の原因となる。

2) 釜材内側附近は，腐蝕の進行とともに一時硬度が上昇するが，さらに長期間の使用では，内側でも黒鉛化を生ずる。

3) したがつて，鋳鉄の黒鉛化を妨ぐ合金元素の添加が望ましいが，さらに合金元素が耐硫化性を具備したものであることが望ましい。

本研究を行なうにあたり，試料および現場の諸条件調査をこころよく御援助下さつた北海道硫黄株式会社幌別鉱業所に対し厚く感謝の意を表するとともに，本研究費の一部を北海道科学研究助成金によつたことを附記して謝意を表する次第である。

(昭和33年4月30日受理)

直列コンデンサ系統の過補償における一解析

三　浦　五　郎

An Analysis of Over-Compensated Series Capacitor Systems

Goro Miura

Abstract

Analyses for under compensation have been reached by the present writer on several kinds of transients.

This paper makes the complexity of over-compensated problems remarkably simple by applying Van der Pol's solutions. The writer obtains general expressions of rush currents and charges in the system, frequencies of higher harmonics, quantitative characteristics of pole-saliency, and sufficient conditions of stable and unstable regions.

I. 緒　　言

単一送電線路に直列コンデンサを附して，凸極同期発電機と他の同期機または母線間を連系するときの，いろいろな故障における突流解析，異常電圧の求出はいままで多く行なわれてきている。すでに筆者によつても3相同時故障[1]と，不足補償における線間故障[2]について最近公表したところである。しかるに，いわゆる過補償における不平衡短絡となると，解析はいちぢるしく複雑となり，定性的にはもとより簡明な凸極効果の把握が行ない難い。本論文はこの場合の一試案として，周波数変調に対する Van der Pol の解[3]を応用すれば，故障電流（または電荷）の解をベッセル級数で表示できることを示し，あわせて系統の不安領域境界を知ることを明らかにしたものである。

II. 基本式の変換

同期機の回転子回路と電機子回路につき，下に示す基本式が成立する。便宜上，ここでは制動捲線を有しない機械の場合を示すが，以下の算法は制動捲線を有する場合に進展させるこ

1) 三浦：電学誌, **73**, 1345 (1953)；三浦：電学誌, **74**, 930 (1954)；三浦：送電線直蓄委, 219 (1955) 等.
2) 三浦：室工大研報, **2**, 173 (1956)；三浦：連大, 357 (1956)；三浦：電学誌, **77**, 404 (1957) 等.
3) B. Van der Pol: P. I. E. E., **18**, 1194 (1930).

ととする。

$$\left.\begin{aligned} & x_{afd}\left[T'_{d0}\frac{d}{dt}+1\right]I_{fd}=\frac{2}{\sqrt{3}}T'_{d0}(x_d-x'_d)\frac{d}{dt}i\sin\theta \\ & \sqrt{3}\,e\cos\theta=-\sqrt{3}\,x_{afd}\frac{d}{dt}I_{fd}\sin\theta \\ & \qquad +2\left[r+\frac{d}{dt}(A'-B'\cos 2\theta)\right]i+2x_c\int i\,dt \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ただし

$$A'=\frac{1}{2}\left(x_d+x_q\right)+x_l+x_t$$

$$B'=\frac{1}{2}(x_d-x_q)$$

$$\theta=\theta_0+t$$

上式に用いた記号はすべて慣用記号であるので，説明は省略する。時間に関しては単位法を採用した。

さて制動捲線を含めて回転子回路の抵抗を零とおく（時定数は無限大）方法と，同抵抗を無限大とおく（時定数は零）方法の両極端の解析から，この過渡現象を知ることとする。筆者が前に行なつた不平衡故障解析のように，この両者をあわせ考察することは，本問題のごとき過補償 $(x_c>x_d+x_l)$ については到底不可能であるからである。かかる観点より全回転子回路を消去するときは，結局次式のごとき方程式に帰一する。

$$\frac{r}{A}i+\frac{d}{dt}(1+a\cos 2\theta)i+\alpha\int i\,dt=\frac{\sqrt{3}}{2A}e\sin\theta \qquad (2)$$

ただし

$$A=\frac{1}{2}(x''_d+x''_q)+x_l+x_t$$

$$a=\frac{x''_q-x''_d}{x''_q+x''_d+2x_l+2x_t}$$

$$\alpha=\frac{x_c}{A}\ \cdots\cdots\ \text{系統全体の補償度（過）}$$

上式は直列コンデンサ補償送電線路と凸極同期発電機の直列回路が，線間短絡故障を起すときの近似方程式となる。初め，両辺を一度微分して i のかわりに電荷 $q=\int i\,dt$ を用い，その結果に定数変化法によつて $q=u(t)\,y(t)$ とおくときは，y に関しその一次導関数を欠く2階常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\frac{\alpha}{1+a\cos 2\theta}-\frac{dP}{dt}-P^2\right]y=\frac{\sqrt{3}\,e}{2A(1+a\cos 2\theta)}\cdot\frac{\cos\theta}{u(t)} \qquad (3)$$

ただし

$$P = \frac{r-2aA\sin 2\theta}{2A(1+a\cos 2\theta)}$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{1+a\cos 2\theta}}\,\mathrm{Exp}\left\{\frac{-r}{2A\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot\tan\theta\right]\right\}$$

$u(t)$ は電線路抵抗 r にもとづく電荷減衰率を示す。そしてかりに $a \doteqdot 0$ とみなせば

$$u(t) = \mathrm{Exp}\left\{\frac{-r\theta}{2\sqrt{(x_d''+x_l+x_t)(x_q''+x_l+x_t)}}\right\}$$

であつて，一相あたりの逆相リアクタンスはコンデンサに無関係となる。一方(3)式は，Hill の方程式の一般形に帰着する。いま近似解を求めるため，これを Mathieu の方程式に変換する。すなわち凸極性を示す a の値は，一般に大凡 0.3 附近以下の大きさであるから，$a^2 \ll 1$ として(3)式の y の係数を簡略化するときは

$$\left[\frac{a}{1+a\cos 2\theta} - \frac{dP}{dt} - P^2\right] \doteqdot p+16\,q\cos 2\theta \tag{4}$$

ただし

$$p = a - \left(\frac{r}{2A}\right)^2$$

$$q = \frac{a}{8}\left[1-\frac{a}{2}+\left(\frac{r}{2A}\right)^2\right]$$

かくして次式のごとき近似方程式が得られた。なお $\theta = x$。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p+16\,q\cos 2x)\,y = \frac{\sqrt{3}\,e}{2A(1+a\cos 2\theta)}\cdot\frac{\cos x}{u(x-\theta_0)} \tag{5}$$

III. 系統の不安定領域

(5)式の斉次方程式をとると

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p+16\,q\cos 2x)\,y = 0 \tag{6}$$

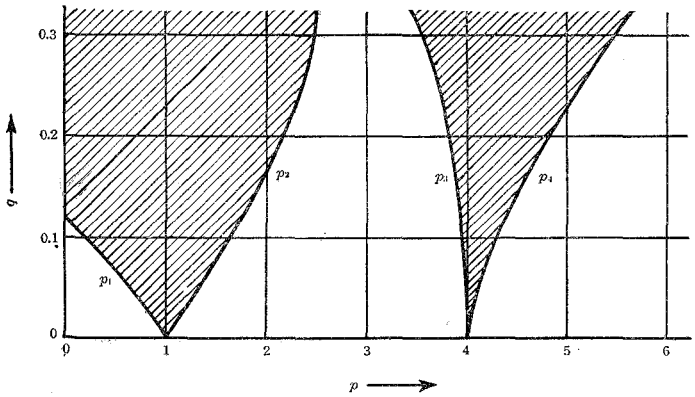
この一般解は Mathieu 関数であつて

$$y = C_1\,\varepsilon^{\mu x}\,\phi(x) + C_2\,\varepsilon^{-\mu x}\,\phi(-x)$$

$\phi(x)$, $\phi(-x)$ は π 又は 2π を周期とする偶関数であるが，いまの場合 q の値は $|q| \doteqdot \frac{1}{25}\left|1-\frac{a}{2}\right|$ で，全系統に対する補償度 a が 100～300% の過補償範囲においては $|q| \doteqdot 0.02$ が成立するごとき小値である。故に $q^2 \ll 1$ によつて特性数 p を展開するときは[4]

4) C. Hayashi: Forced Oscillations in Non-Linear Systems.

$$p_1 = 1-8q-8q^2+\cdots\cdots$$
$$p_2 = 1+8q-8q^2-\cdots\cdots$$
$$p_3 = 4+\frac{80}{3}q^2-\cdots\cdots\cdots$$
$$p_4 = 4-\frac{16}{3}q^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$



Mathieu 方程式の不安定領域

これから周知の図に示すごとき，領域曲線が画かれる。図で斜線を施こした部分は不安定である。現在の場合は p_2 と p_3 との中間に存在する解を求めているわけで，これ以外は不安定領域であり

$$p \leq p_2, \quad p \geq p_3$$

あるいは，安定のための十分条件は $p_2<p<p_3$ で与えられ，これより上記補償範囲ではほぼ

$$\sqrt{1+a}\left[1+\left(\frac{r}{2A}\right)^2\right] < a < 4+\left(\frac{r}{2A}\right)^2 \tag{7}$$

において安定である。

IV. Van der Pol 解の応用

斉次方程式(6)において，$16q=r$ とおけば

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(p+r\cos 2x)\,y = 0 \tag{8}$$

を得る。上式は Mathieu の方程式であるが，工学的近似解を求めるため，Van der Pol の方法を応用することとする。前章で述べたように，過補償域においては大凡 $p>1$, $|q|<0.02$ である故

$$\left(\frac{\gamma}{p}\right)^2 \ll 1$$

いま(8)式の特解の一つを

$$y = \mathrm{Exp}\{\int \kappa\, dt\} \tag{9}$$

と仮定するときは

$$\frac{dy}{dx} = \kappa y, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y\left(\frac{d\kappa}{dx} + \kappa^2\right)$$

したがつて(8)式は次のように表わされる。

$$\frac{d\kappa}{dx} + \kappa^2 + p + \gamma \cos 2x = 0$$

本式の近似解は

$$\kappa \doteqdot \pm j\sqrt{p + \gamma \cos 2x}$$

である。ただし，そのためには上記したごとき条件が成立しければならない。

かくして

$$\begin{aligned} y &= c_1 \varepsilon^{\int \kappa_1 dt} + c_2 \varepsilon^{\int \kappa_2 dt} \\ &= C_1 \cos\left[\int \sqrt{p + \gamma \cos 2x}\, dx\right] + C_2 \sin\left[\int \sqrt{p + \gamma \cos 2x}\, dx\right] \end{aligned}$$

を得る。C_1，C_2 等は初期条件により定まる積分定数である。 $p^2 \gg \gamma^2$ の近似によつて展開すれば，上式は

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos[px + m \sin 2x] + C_2 \sin[px + m \sin 2x] \\ &= C_1 \cos px \cdot \cos(m \sin 2x) - C_1 \sin px \cdot \sin(m \sin 2x) \\ &\quad + C_2 \sin px \cdot \cos(m \sin 2x) + C_2 \cos px \cdot \sin(m \sin 2x) \end{aligned} \tag{10}$$

ただし

$$m = \frac{\gamma}{4} = 4q$$

いま

$$\cos(m \sin \varphi) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos 2\varphi + 2J_4(m) \cos 4\varphi + \cdots\cdots$$

$$\sin(m \sin \varphi) = 2J_1(m) \sin \varphi + 2J_3(m) \sin 3\varphi + 2J_5(m) \sin 5\varphi + \cdots\cdots$$

なるフリーエ展開を利用して y を級数展開するときは，結局次に示すごとき解を得ることができる。

$$\begin{aligned} y = C_1 \{ & J_0(m) \cos px - J_1(m)[\cos(p-2)x - \cos(p+2)x] \\ & + J_2(m)[\cos(p-4)x + \cos(p+4)x] \\ & - J_3(m)[\cos(p-6)x - \cos(p+6)x] \\ & + - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \} \end{aligned}$$

$$+ C_2 \{J_0(m)\sin px + J_1(m)[\sin(p+2)x - \sin(p-2)x] + J_2(m)[\sin(p+4)x + \sin(p-4)x] + J_3(m)[\sin(p+6)x - \sin(p-6)x] + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\} \tag{11}$$

前言したとおり γ は小値であり，大約 $m \doteqdot 0.08$ である。近似的に $m^2 \ll 1$ とおけるときは

$$J_0(m) = 1,\quad J_1(m) = \frac{m}{2},\quad J_2(m) = J_3(m) = \cdots\cdots = 0$$

が成立し，p なる周波数のほかに $p \pm 2$ の 2 種の高調波出現をみるに止まる。基本周波数 p については II 章に示した。

なお (11) 式を，$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$ の関係より，次式のごとく簡略して記すことができる。すなわち $\theta = x$，$q = u(t)y(t)$ を置換して

$$q = K \cdot u(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cdot \cos[(p+2n)\theta - \xi] \tag{12}$$

ただし

$$K = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\quad \xi = \tan^{-1}\frac{C_2}{C_1}$$

で初期条件からきまる積分定数ででる。したがつて電流 i は q を微分して得られ，近似的に次式で与えられる。

$$i = -K \cdot u(t) \sum_{-\infty}^{\infty} (p+2n) J_n(m) \cdot \sin[(p+2n)\theta - \xi] \tag{13}$$

V. 定常電流の解

つぎに q または i の一般解を求める。基本式 (3) 式に $q = u(t)y(t)$ の置換を行なえば

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2P\frac{dq}{dt} + \frac{a}{1 + a\cos 2\theta} q = \frac{\sqrt{3}\, e\cos\theta}{2A(1 + a\cos 2\theta)} \tag{14}$$

となるが，この右辺項 (これを $f(t)$ とする) を零とした斉次方程式の特解を q_1，q_2 とすると，(14) 式の一般解は次式で示されることは微分方程式の理論[5] の教えるところである。

$$q = C_1 q_1 + C_2 q_2 + q_1 \int \frac{1}{W} f(t)\, q_2 dt - q_2 \int \frac{1}{W} q_1 dt \tag{15}$$

ただし

$$W = q_2 \frac{dq_1}{dt} - q_1 \frac{dq_2}{dt}$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}\, e\cos\theta}{2A(1 + a\cos 2\theta)} \cdots\cdots \text{印加起電力}$$

5) A. R. Forsyth: Differential Equations.

しかるに特解 q_1, q_2 については(10)式によつて既出である。すなわち

$$q_1 = C_1 \cdot u(t) \cdot \cos[px + m \sin 2x]$$

$$q_2 = C_2 \cdot u(t) \cdot \sin[px + m \sin 2x]$$

これよりロンスキー定数 W は

$$W = -C_1 C_2 [u(t)]^2 [p + 2m \cos 2\theta]$$

のごとくなり，これらと(15)式より一般解 q を計算することができる。ただ途中の運算は相当に複雑であるが，$u(t)$ の指数項は小量であることを利用して，積分および微分の際は $u(t)$ を常数視するなどの近似を適宜に行なうときは次式を得る。

$$\begin{aligned} q \text{ の定常成会} = q_s &= q_1 \int \frac{1}{W} f(t)\, q_2\, dt - q_2 \int \frac{1}{W} f(t)\, q_1\, dt \\ &= \frac{\sqrt{3}\, e}{2A[p + (2m + ap)\cos 2\theta]} \Big\{ -\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) \cdot \cos(p + 2n)\theta \int \sum_{-\infty}^{\infty} [J_n(m) \\ &\quad + J_{n+1}(m)] \sin(p + 2n + 1)\theta\, dt + \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(m) \cdot \sin(p + 2n)\theta \int \sum_{-\infty}^{\infty} [J_n(m) \\ &\quad + J_{n+1}(m)] \cos(p + 2n + 1)\theta\, dt \Big\} \\ &= \frac{\sqrt{3}\, e}{4A[p + (2m + ap)\cos 2\theta]} \sum_l \sum_n J_l(m) [J_n(m) \\ &\quad + J_{n+1}(m)] \cdot \frac{\cos[2(n - l) + 1]\theta}{p + 2n + 1} \end{aligned} \tag{16}$$

$J_l(m)$, $J_n(m)$ は l 次および n 次の第1種ベッセル関数であり，l, n は $-\infty$ より $+\infty$ に至る整数全部をとる。

上式より直ちに，定常電流は基本波のほかに，無限個の奇数調波を含むことが明らかとなつた。また，その基本波，第3高調波等に対する振幅値が得られる。たとえば基本周波数は $n=l$ および $n=l-1$ にて

$$q_{s1} = \frac{\sqrt{3}\, e \cos\theta}{4A[p + (2m + ap)\cos 2\theta]} \sum_l \left\{ \frac{J_l(J_l + J_{l+1})}{a + 2l + 1} + \frac{J_l(J_{l-1} + J_l)}{a + 2l - 1} \right\} \tag{17}$$

のごとくであり，第3調波では $n=l+1$ および $n=l-2$，第5調波では $n=l+2$，$l-3$ 等である。しかし厳密にいえば，(17)式はさらに無限個の奇数調波に分解され，また基本周波についても他の q_{s3}, q_{s5} …… 等からも僅少ではあるが導出されるので，正確にはこれらの和をとらねばならない。

VI. 結　　言

かくして全電荷の解は，特解(12)式と定常解(16)式との和であり，電流値はこれを微分し

て求まる。以下，得られた結果を要約すれば次のとおりである。

（イ） 直列コンデンサの補償が100% 以上のときは，基礎方程式は Mathieu の微分方程式に帰一することを確かめ，近似的の一般解式を得た。

（ロ） 電機子回路にもとづく過渡電流の周波数は $p\pm 2n\,(n=0\sim\infty)$ の無限調波からなり，また定常電流の周波数は 1, 3, 5, …… の無限奇数調波である。

（ハ） 回転子回路にもとづく解析は未解決である。しかし突流の最大値を求めるのには支障ない。

（ニ） 補償度が100～400% におよぶときに，必要な安定領域に納まるための十分条件を得た。

（ホ） 本論文は Van der Pol の解を応用したものであるが，近年 Pipe 氏が B.W.K.[6] 法を用いて一部の問題を解いたのと結果的に一致することを知つた。

最後に本研究は北海道科学研究補助金の一部によつてなされたものであることを記し，御援助を頂いた北大，浅見義弘教授に謝意を表する。また有益な御指導と御助言を頂いた北大，小串孝治教授と早大，埴野一郎教授に深謝する。

(昭和33年5月，電気四学会連大講演)
昭和33年4月22日

6) L. A. Pipes: T.A.I.E.E., **73**, Part I. 93 (1954).

キナルジンの空気接触酸化

小松藤男

Air Catalytic and Non-catalytic Oxidation of Quinaldine

Fujio Komatsu

Abstract

Quinaldinic acid was synthesized from quinaldine, one of the high temperature tar base, for determination of microquantities of copper, and quinoline aldehyde was obtained as by-product. The synthesis was carried out by non-catalytic and catalytic air oxidation at 350~600°C, under the presence of vanadium pentoxide, mixtures of vanadium pentoxide and molybdenum trioxide, and calcium and cadmium metavanadate with pumice stone as carrier. It determined the amounts of reaction temperature, space velocity, mole ratio of their mixtures, in relation to yields of the product and by-product. Consequently, each maximum yield was 6% for no catalyst at 450°C, 60% for vanadium pentoxide using steam at 410°C, 37% for their mixtures using steam at 400~410°C, 20% for $Cd(VO_3)_2$ at 400°C and 11% for $Ca(VO_3)_2$ at 405°C.

Furthermore utilizing Nernst's approximation equation, calculated the equilibrium constant K_P and the author showed the selective partial oxidation of this reaction thermodynamically to be possible.

[1] 序　　論

本実験は高沸点タール塩基の利用の一端として行なわれたもので，α-picoline[1]の空気接触酸化の場合と同様に，キナルジンの空気接触酸化においては，適当な条件の下に，キナルジン酸およびキノリンアルデヒド又はキノリンが得られるであろうとの推察の下に，銅の微量定量に用いられるキナルジン酸の収量の増大を目的として行なわれたものである。

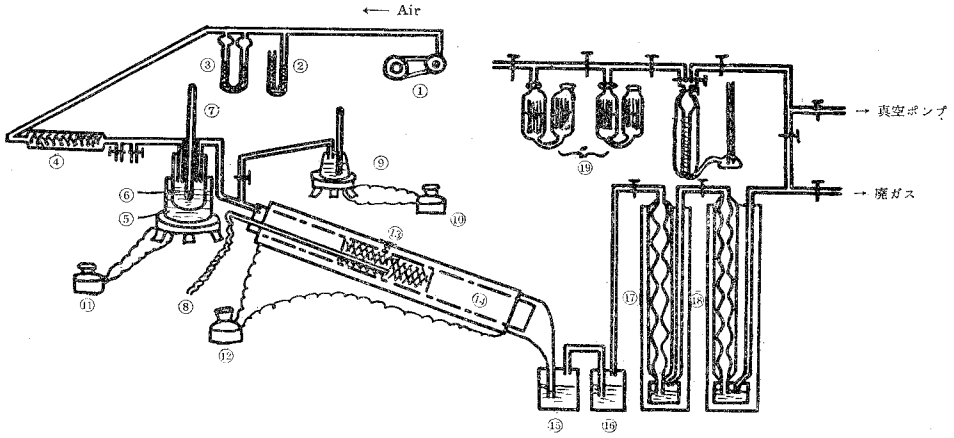
1) Kiprianov and Shostak: J. Applied Chem. (U.S.S.R.) **11**, 471 (1938).
Maxted: J. Soc. Chem. Ind., **47**, 101 T (1938).
Maxted and Dunsby: J. Chem. Soc., **48**, 1439 (1928).
Maxted and Hassid: J. Soc. Chem. Ind., **50**, 399 (1931).
Milas and Walsh: J. Am. Chem. Soc. **58**, 1389 (1935).
Neumann Z. Electro Chem. **41**, 589 (1935).
小松藤男: 室工大研報, **1**, 338 (1952).
Wilhelm Mathes, Walter Sauermilch und Theo Klein: Chem. Ber. **84**, 452 (1951).

1952年，石黒氏ら[2]によれば，キナルジンの空気酸化にV_2O_5，MoO_3，WO_3を触媒とし，450～480°Cの反応温度において，キナルドインと少量のキノリンアルデヒドが生成されるが，キノリン-2-カルボン酸は生成されないことを報告しているし，また1954年には，Wilhelm Mathes, Walter Sauermilch[3]がアルデヒドの良好収量条件としては，担体としてのSilica gelにその10%（重量）のMoO_3を触媒とし，Al製反応管により，空間速度400，理論空気量7.5倍，410°Cの反応温度で水蒸気を用い，40～50%のアルデヒドを得ているが，カルボン酸の生成にふれていないし，又その物理化学的データや，無触媒酸化におけるアルデヒドおよびカルボン酸の収率にもふれていない。従つて，本実験では，無触媒の場合，V_2O_5触媒で軽石を担体とする場合，V_2O_5とMoO_3との混合触媒の場合，およびCd，Caのメタバナデート塩触媒の場合に，カルボン酸とアルデヒドとの生成量の関係を反応温度，空間速度，理論空気量比を変えて求めた。やや良好な結果を得たので，それについて報告すると共に，キナルジンの気相酸化によるキノリアルデヒド，キノリン-2-カルボン酸，キノリン等の生成の可能性をNernstの近似式[4]を用いて平衡恒数を計算し示した。その結果についても報告する。

[2] 実 験 の 部

(1) 装　　置

実験装置は第1図に示される。すなわち試料溜に試料を恒温に保ち，これに直接乾燥空気



① Blower
② Manometer
③ Flowmeter
④ 乾燥管 (CaCl)
⑤ 加熱浴（恒温）（グリセリン）
⑥ Sample
⑦ 水銀温度計
⑧ Thermocouple
⑨ 水（水蒸気発生）（恒温）
⑩⑪⑫ Volt stat
⑬ 反応炉
⑭ 反応管
⑮⑯ 吸収瓶（硫酸溶液）
⑰⑱ 水冷却装置
⑲ ガス分析装置 (CO_2, CO)

第1図　実 験 装 置

2) Wilhelm Mathes und Walter Sauermilch: Chem. Ber. **87**, 1179 (1954).
石黒武雄・内海　勇: 薬誌. **72**, 861～865 (1952).
3) Wilhelm Mathes und Walter Sauermilch: Chem. Ber. **87**, 1179 (1954).
4) 小泉正夫: 化学平衡原論. 160頁.; 清浦・佐藤・永廻共著: 工業化学計算 上巻. 146頁.

を通して空気と試料蒸気とを，または更にこれに水蒸気を通して，反応管（直径 2.5 cm，長さ 100 cm，磁製管）にて反応させる。生成物および未反応物の大部分は吸収瓶（30% 硫酸）に捕集され，更に氷冷却吸収瓶で捕集される。また一方気体はガス分析装置において適宜分析される。

(2) 実験試料および触媒

（イ）実験試料

試料キナルジンは特級合成品のもの，および高沸点タール塩基溜分より，精製分離[5]した溜分すなわち b.p. 247.0～247.6°C のものを用いた。

（ロ）触　　媒

使用した触媒は V_2O_5，$MoO_3+V_2O_5$ およびメタバナデート塩である。

1. V_2O_5 はバナジン酸アンモンを水に熔解し軽石に附着させ，灼熱して 400°C 附近の温度でアンモニアおよび水分とを完全に除去して作つた。MoO_3 も同様，モリブデン酸アンモンを水に溶解，軽石に附着し，アンモニアおよび水分を除去させるため，約 400°C に灼熱させたものを用いた。

2. $Cd(VO_3)_2 \cdot H_2O$[6]

20 g のメタバナジン酸アンモンを沸騰水 500 cc に溶解した溶液に，20 g の $Cd(NO_3)_2$ を 500 c.c. の温水に溶解した溶液を加え，生ずる黄白色のバナジン酸カドミウムの沈澱を約 20 ℓ の蒸溜水で洗滌濾過し，100°C に乾燥し，10～20 mesh にして用いた。

3. $Ca(VO_3)_2$[7]

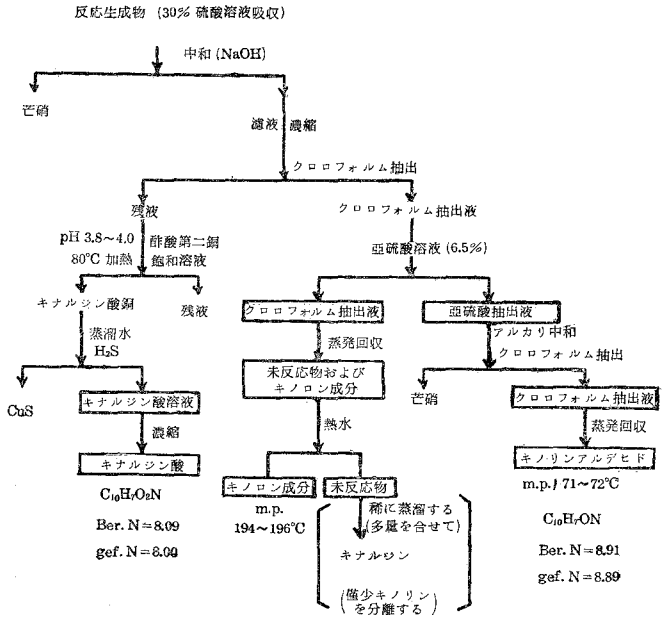
12 g の $CaCl_2$ 無水物を 500 c.c. の蒸溜水に溶解し，20 g のメタバナジン酸アンモンを蒸溜水 500 c.c. に溶解した溶液にこれを加え，生じた白色沈澱物 $Ca(VO_3)_2$ を蒸溜水 20 ℓ で濾過洗滌し，100°C に乾燥して 10～20 mesh にして用いた。

(3) 分　析　法

30% 硫酸に吸収された反応生成物および未反応物の分析は第 2 図に示される。得られるものの大部分は未反応キナルジンおよびキナルジン酸，キノリンアルデヒドおよび CO_2，CO，H_2O であるが，稀にキノロン成分に相当するもの m.p. 194～196°C のもの若干並びに，キノリン溜分のものが僅かながら得られている。キノリンの場合は未反応物の中に稀に入つてくる傾向があり，蒸溜でキナルジンと分離する。

---

5) 小松藤男：室工大研報．2 (1957) 投稿中.
W. A. Van Dorp and S. Hoogewerff: Rec. d. Trav. Chim. d. Pays-Bas. **3**, 344 (1885).
6) J. J. Berzelins: Acad. Handl. Stockholm 1 (1831).
7) A. Scheuer: Zeit anorg. Chem. **16**, 304 (1898).
Comprehensive Treatise on Inorganic and Theoretical Chemistry (J. W. Mellor) IX. 767.

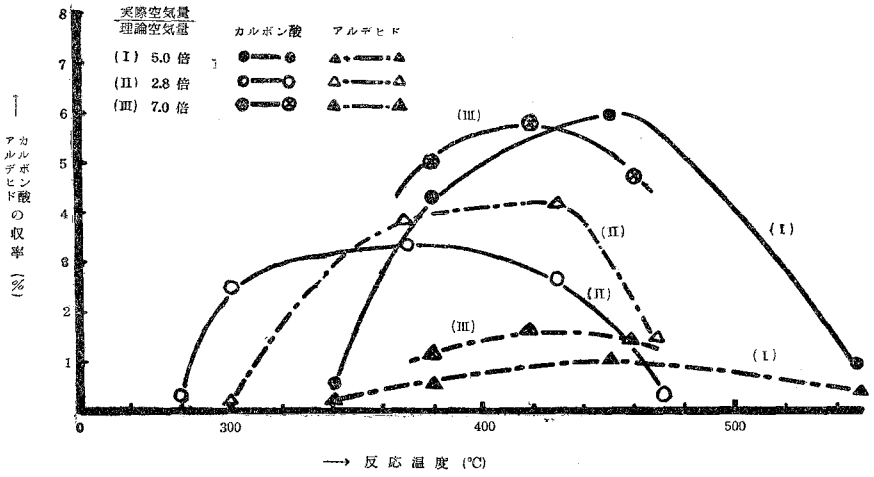


第 2 図 分 析 法

[3] 実 験 結 果

(イ) 無触媒の場合

無触媒の場合において，キナルジン酸を得るために必要な理論空気量に対して色々と空気量を変えて，すなわち，理論空気量比を変えて，反応温度と収率との関係を示せば，第3図の如くなる。カルボン酸の収率は最高6%，アルデヒドは約4%であつた。また理論空気量比小



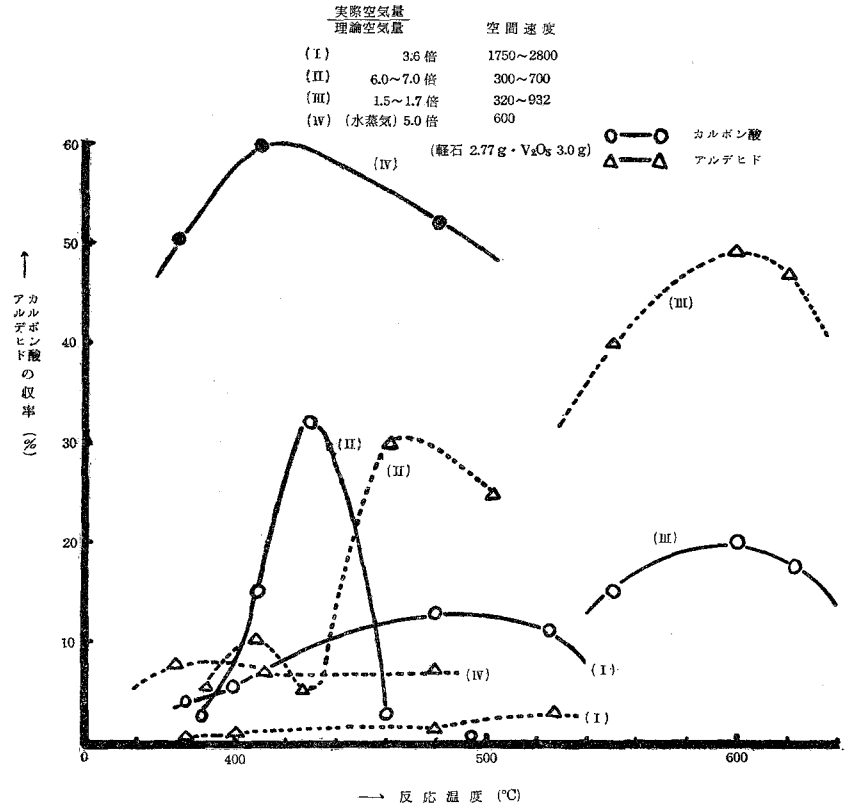
第 3 図 無触媒における反応温度と収率

のとき，すなわち2.8附近では，反応温度370℃のとき，カルボン酸の収率は最高であり，この場合アルデヒドの生成は割合に容易であり，420℃でアルデヒドの最高収率を示す。理論空気量比増大と共に，すなわち約5.0附近のとき，カルボン酸の最高収率を示す反応温度は高温に移動し，約450℃附近である。しかし理論空気量比7.0附近では，カルボン酸の最高収率を示す温度が420℃となり低下する。従つて理論空気量比が7.0以上では最高収率はあまり変化せず，かつ生成物が捕集されず逃散する可能性があり，また捕集するに更に装置を必要とするためあまり効果的ではない。またアルデヒドは空気量増大と共にあまり生成しないことが分つた。

（ロ）V_2O_5 触媒

軽石10 mesh程度のもの2.74 gにV_2O_5 3.0 g附着させたものを用いた。軽石はあまり粒度の小のものでは，タール状のものが触媒に附着し活性化が低下するので，10 mesh附近のものを用いたわけである。

実際空気量/理論空気量が1.0～7.0倍附近，空間速度320～2500附近までのものについて行

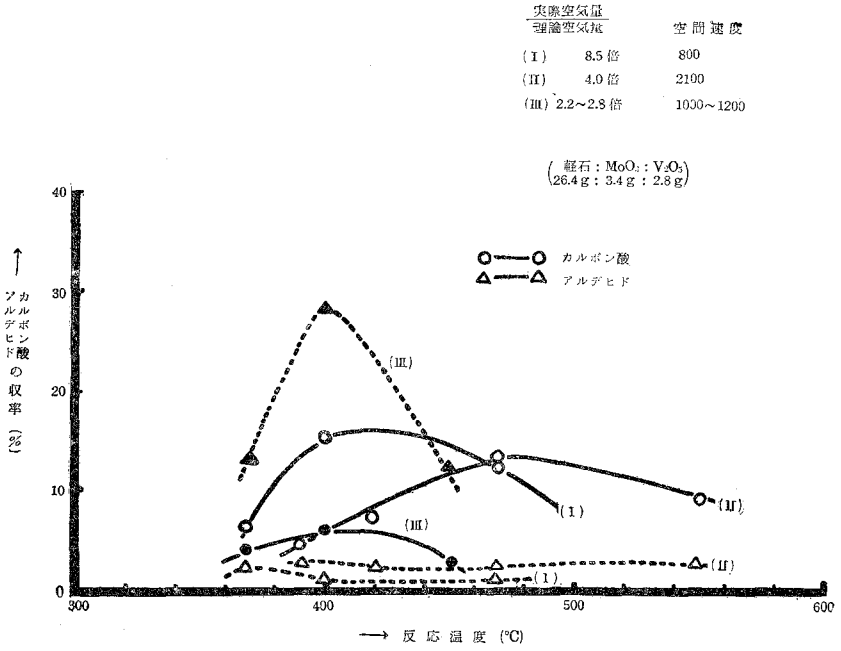


第4図　V_2O_5 触媒における収率と反応温度

なつた結果は第4図の如くである。空気量比1.7倍，空間速度320の条件の場合の如く，空気量の少ない場合に高温600°C附近で約20%のカルボル酸の最高収率を，約58%のアルデヒドの収率を示し(III)，遂次空気量増大と共に，反応温度が低温部430°Cに移り，7倍位でカルボン酸の最大収率32%，アルデヒドはカルボン酸収率最大のときに最小収率を示し，また増大する傾向を示し(II)，カルボン酸の良好条件の領域が狭く，排ガスの組成が約14.2%のCO_2，15.5%のCOおよびN_2その他であり，カルボン酸，アルデヒドの分解が激しいことを示し，従つて，この激しい発熱反応を水蒸気を通し除熱稀釈させてやると，(IV)の如く，カルボン酸の収率最大60%程度で，アルデヒドの収率は7～8%附近のものが得られ，よい結果を示している。この場合は空気量比5倍，水蒸気(水に換算) 0.1ℓ低温410°C附近で行なわれ，CO_2約9.0%，CO 23.0%である。従つて水蒸気により，—COOHの分解が阻止されているのがほぼ分るし，またR—COHの分解R—H+COの反応が進行されているのが分つた。

(ハ) 混合触媒 ($MoO_3/V_2O_5 \doteqdot \frac{4}{3}$)

実際空気量/理論空気量が2.2～8.5倍，空間速度800～1800の範囲で，混合触媒としては，坦体軽石：MoO_3：V_2O_5=26.4：3.4：2.8 (g比)のものを用い，カルボン酸およびアルデヒドの収率と反応温度との関係を第5図に示す。第5図で分る如く，空気量小なる場合(III)では，アルデヒドの生成の方がカルボン酸の生成より大で400°C附近がいずれも最高収率を示し，ガス組



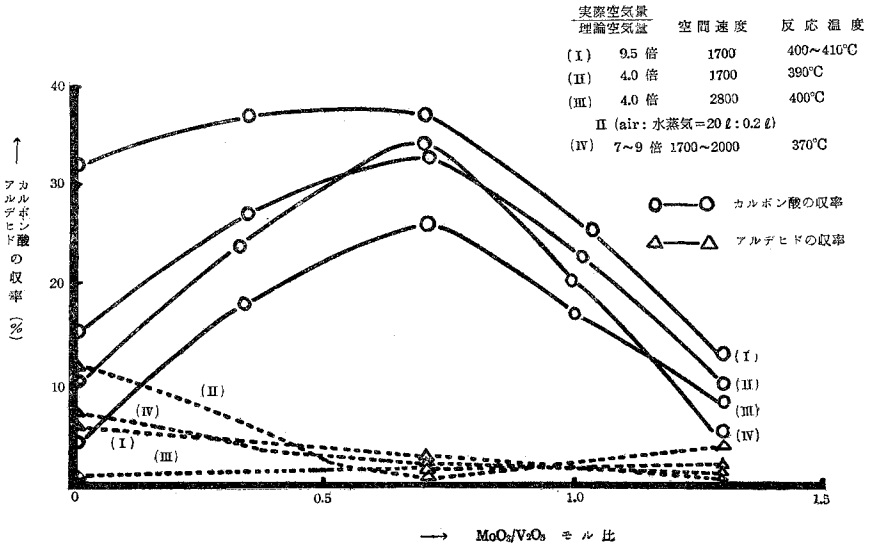
第5図 混合触媒収率と反応温度 ($MoO_3/V_2O_5 \doteqdot \frac{4}{3}$)

成は CO_2 10.0%，CO 18.3% を示している。しかし空気量がやや増大するにつれて，(II) の如く，空気量比 4.0 では，470°C 附近でカルボン酸の収率が最大となり（約 13%），(III) よりも急激に増大し，アルデヒドの生成は逆に小となり，ガス分析の結果も (III) に比較し，CO_2 8.9%，CO 23.5% の如く，—COOH の分解は阻止され，—COH の分解が増大している。また空気量比 8.0 の如く大にし，空間速度を大にすれば，カルボン酸の良好収率（約 15%）は低温部 400～410°C 附近に移動するが，アルデヒドの収率は (II) よりも僅少となる。ガス組成も CO_2 5.4%，CO 22.1% 程度に止まる。従つて，混合触媒によつて空気量を 4～8 倍にすれば，反応温度が低下し，カルボン酸の収率が上昇されてくることが分つた。

(ニ) MoO_3/V_2O_5 比と収率

空気量比は (ハ) の結果より，4～9.5 程度で，空間速度 1700～2800，反応温度 390～410°C 附近の範囲で $MoO_3:V_2O_5$ のモル比を変えて行なつた結果，そのカルボン酸およびアルデヒドの収率と MoO_3/V_2O_5 のモル比との関係を第 6 図に示す。

(I) (II) (III) (IV) はいずれも水蒸気を空気：水＝20：0.2 の割合で添加した場合でいずれも，$MoO_3/V_2O_5 \doteqdot \frac{2}{3}$ 附近でカルボン酸の最大収率を示している。但し (I) は空気量が相当大なる場合で，MoO_3/V_2O_5 が $0 \sim \frac{2}{3}$ までの収率は急激に増大していないが，他の (II)，(III)，(IV) では，そのモル比の影響は大であることが分つた。またカルボン酸の収率最大のとき，アルデヒドは対照的に最小収率を示している。従つて $MoO_3:V_2O_5 \doteqdot 2:3$ で，水蒸気添加の場合に，カルボン酸の分解を阻止し，アルデヒドの分解の増大していることも，この図よりガス分析 CO_2 7.5%，CO 25.5% の結果からも分つた。



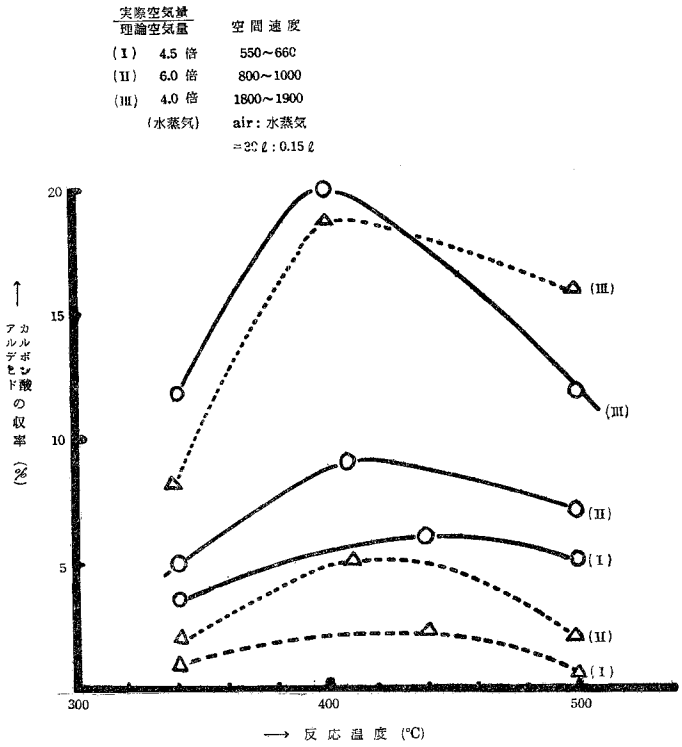
第 6 図　MoO_3/V_2O_5 比と収率

(ホ) $Cd(VO_3)_2$ 触 媒

空気量比 4.0～6.0 および水蒸気添加の場合，空間速度 550～1900 の範囲の場合において $Cd(VO_3)_2$ 触媒を用いた場合の反応温度と収率との関係を第 7 図に示す。坦体は用いず，粒度は 10 mesh のものを用いた。この粒度は前記坦体を用いた場合と同様タール状のものが附着し，活性化を妨げるため，細粒度のものは用いなかつた。その結果 (I) (II) (III) いずれも，カルボン酸の最高収率は反応温度 400～420°C であること，また (III) は水蒸気を特に添加した場合で，カルボン酸およびアルデヒドの生成が (I) (II) より比較して非常に大である。またガス分析の結果

	CO_2	CO	(平均値)
(I)	13.3%	21.4%	
(II)	10.2%	22.7%	
(III)	8.5%	20.0%	

(III) は (I) に比較しカルボン酸の分解阻止の結果があらわれている。



第 7 図 $Cd(VO_3)_2$ 触媒反応温度と収率

(ヘ) $Ca(VO_3)_2$ 触 媒

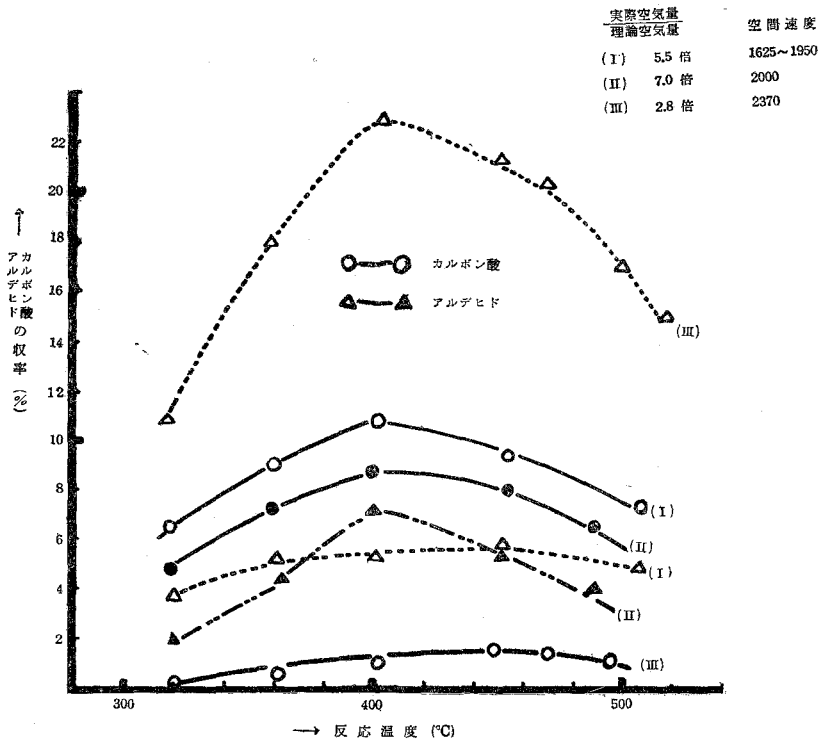
坦体を用いず，10 mesh 程度の粒度にして用いた。$Ca(VO_3)_2$ 触媒の場合，空気量比 2.8～7.0 空間速度 1980～2370 の領域で，カルボン酸，アルデヒドの収率と反応温度との関係について

は第8図で示される。

空気量比小 (2.8 倍) の場合 (III) には，カルボン酸の収量悪く，最高 1% 附近で反応温度は 400～410°C であり，またアルデヒドは最高 23% を示す。空気増大と共と，漸次，カルボン酸の収率が増大し，アルデヒドが減少し，その収率の関係が (III) の場合と (II)(I) の場合と反対になつてくるが，その良好な収率を与える反応温度は 400°C 附近であることが分る。しかし，V_2O_5 単元触媒，V_2O_5 および MoO_3 の混合触媒に比較し，カルボン酸の収率は大分落ちるのはガス分析結果からも

	CO_2	CO
(III)	30.0%	2.5%

CO_2 が非常に増大し，−RCOOH の分解を促進していることが分る。すなわち $Ca(VO_3)_2$ は V_2O_5+CaO によつて，V_2O_5 は $R-CH_3 \xrightarrow{O_2} R-COOH$ の作用を促進し，CaO は $R-COOH \rightarrow R-H+CO_2$ の作用を促進している様に推察される。



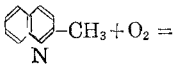
第 8 図　$Ca(VO_3)_2$ 触媒反応温度と収率

[4]　反応機構（熱力学的考察）

無触媒および V_2O_5，$V_2O_5+MoO_3$，メタバナデート塩触媒によるキナルジンの空気接触酸

化は，種々の条件を変え，選択的酸化によつて，キナルジン酸およびキノリン-2-アルデヒドが得られたので，これらの反応の起きる可能性を，Nernst の近似式によつて平衡恒数を計算し，示した。

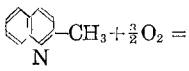
キノリン-2-アルデヒドの得られる場合

(I) 

$\Delta H^0_{298} = -96100$ cal/mol

+96.1 kcal/mol

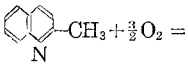
キナルジン酸の得られる場合

(II) 

$\Delta H^0_{298} = -165900$ cal/mol

+165.9 kcal/mol

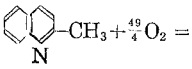
キノリンの得られる場合

(III) 

$\Delta H^0_{298} = -154300$ cal/mol

+154.3 kcal/mol

完全酸化の場合

(IV) 

$\Delta H^0_{298} = -1277100$ cal/mol

+1277.1 kcal/mol

(I)(II)(III)(IV) の平衡恒数は Nernst の近似式すなわち

$$\log K_P = -\frac{\Delta H^0_{298}}{4.573\,T} + 1.75 \sum n_j \cdot \log T + \sum n_j C_j$$

[K_P: 平衡恒数　ΔH^0_{298}: 熱含量　$\sum n_j$: 生成系と原系との mol 数の差
T: 絶対温度　C_j: 常用化学恒数]

を用いて平衡恒数と温度との関係を示せば

(I) $\log K_P = \dfrac{96100}{4.573\,T} + 0.73$,　$K_P = \dfrac{P_{QA} \cdot P_{H_2O}}{P_{QD} \cdot P_{O_2}}$

(II) $\log K_P = \dfrac{165900}{4.573\,T} - 0.875 \log T - 0.67$　$K_P = \dfrac{P_{QC} \cdot P_{H_2O}}{P_{QD} \cdot (P_{O_2})^{3/2}}$

(III) $\log K_P = \dfrac{154300}{4.573\,T} + 0.875 \log T + 2.54$　$K_P = \dfrac{P_{QL} \cdot P_{CO_2} \cdot P_{H_2O}}{P_{QD} \cdot (P_{O_2})^{3/2}}$

(IV) $\log K_P = \dfrac{1277100}{4.573\,T} + 3.94 \log T + 15.2$　$K_P = \dfrac{(P_{CO_2})^{10} (P_{N_2})^{1/2} (P_{H_2O})^{9/2}}{P_{QD} \cdot (P_{O_2})^{49/4}}$

となる。P は蒸気圧を示し，添字はその物質を指し，QD: キナルジン，QL: キノリン，QA: キノリンアルデヒド，QC: キナルジン酸を意味する。

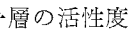
平衡恒数を工業的または研究的に用いられる温度範囲で求めると，第1表となる。

第 1 表

$\log K_P$	$T°$						
	300	400	500	600	700	800	900
(I)	70.7	53.7	42.6	35.7	30.7	27.8	24.0
(II)	118.1	88.2	69.9	57.8	48.8	42.0	39.3
(III)	116.6	89.0	72.3	61.3	53.3	47.2	43.5
(IV)	957.9	725.4	585.8	492.1	426.4	376.6	336.8

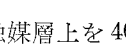
この表で分る如く，$\log K_P$ は 300～900 °K 程度の温度では(＋)で十分大であり，この反応が熱力学的に可能であることが分る。しかし低温では平衡恒数は大となるが，一方反応速度が小となるので，この点については，更に一層の活性度を増す様な触媒を用いて出来るだけ低温で行ないうる様にすべきと推察される。

また V_2O_5 触媒作用としては，V_2O_5 触媒層上を 400°C 附近で空気なしで，キナルジンを通しても，アルデヒドおよびカルボン酸が僅かながら出来る点を考えても，次の平衡が存在するものと考えられる。



$$V_2O_5 \rightleftarrows V_2O_4 + \tfrac{1}{2}O_2$$

またメタバナデート塩についても，たとえば Ca 塩を例にとると



$$Ca(VO_3)_2 \longrightarrow CaO\cdot V_2O_5 \rightleftarrows CaO\cdot V_2O_4 + \tfrac{1}{2}O_2$$

であると推察される。

[5] 結　　論

(1) 無触媒では，カルボン酸の生成良好条件は 420～450°C，理論空気量の 5～7 倍，アルデヒドの良好収率条件は，420°C 附近，理論空気量 2.8 倍程度である。

(2) V_2O_5 触 媒

(イ) カルボン酸は 410°C 附近，水蒸気を用い，理論空気量の 5 倍程度，空間速度 600 の場合が良好収率を与える。

(ロ) 420°C 以上の高温では，理論空気量の 7～8 倍であつても，アルデヒドが増大する傾向がある。

(3) MoO_3 と V_2O_5 との混合触媒

(イ) 400°C 附近，理論空気量の 2 倍程度では，アルデヒド生成が大である。

(ロ) 400°C 附近，理論空気量 8 倍附近では，カルボン酸の生成が大である。

(4) $MoO_3/V_2O_5 \fallingdotseq \frac{2}{3}$ モル比，空気：水＝20：0.2，410～400°C の時，カルボン酸は良好な収

率を示す。

(5) $Cd(VO_3)_2$ 触媒では 410°C 附近，空間速度 1800 理論空気量比 4 倍のとき，カルボン酸の収率が良好である。

(6) $Ca(VO_3)_2$ では，(イ) 空気量小では，アルデヒド生成が 400°C 附近で最高であり，カルボン酸は小となる。(ロ) 空気量大では，逆の関係となり，(ハ) 極端に空気量大であれば，カルボン酸の分解を伴なう。

(7) 熱力学的にキナルジンの酸化によつて，キノリン，キナルデヒド，キナルジン酸生成の可能なることが分る。

最後に色々と分析に御援助戴いた東工大有機化学教室，松本基太郎氏，実験の一部を担当した金津普二君に感謝の意を表し，最後に本研究につき終始御指導戴いた室工大教授佐藤久次氏に深甚なる感謝の意を表す。

(昭和 32 年 4 月日本化学会十年々会講演)
(昭和 33 年 4 月 30 日受理)

一　覧　表

一 覽

	キナルジン滴下速度 (g/hr)	時間 (hr)	触媒種類 (モル比)	担体容積 (c.c.)	水(水蒸気)滴下速度 (c.c./hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 c.c./(hr)(c.c.)	−COOH生成に対する使用空気量/理論空気量
1	3.4	1	$MoO_3:V_2O_5$ 3:2	80	—	370	50	625	12.50
2	6.2	1	$MoO_3:V_2O_5$ 3:2	112	—	400	67.5	575	8.85
3	4.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 3:2	105.7	—	400	40	378	7.08
4	11.0	1	$MoO_3:V_2O_5$ 3:2	30.9	—	450	30	969	2.32
5	11.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 3:2	31.0	—	410	40	1290	2.76
6	7.4	1	V_2O_5 4.14g, 軽石 4.78g	138	—	460	65	472	7.47
7	5.3	1	V_2O_5 4.14g, 軽石 4.78g	138	—	425	40	289	6.42
8	7.8	1	V_2O_5 2.36g, 軽石 2.08g	59.0	—	410	55	932	5.99
9	11.1	1	V_2O_5 2.36g, 軽石 2.08g	59.0	—	600	20	340	1.52
10	4.6	1	V_2O_5 2.05g, 軽石 1.74g	49.8	100	410	30	602	5.50
24	5.1	1	V_2O_5 0.46g, 軽石 0.49g	14.3	—	480	25	1750	4.16
25	10.0	1	V_2O_5 0.46g, 軽石 0.49g	14.3	—	370	40	2800	3.50
26	10.4	1	V_2O_5 0.46g, 軽石 0.49g	14.3	—	400	40	2800	3.28
41	4.6	1	V_2O_5 1.35g, 軽石 1.59g	45.4	100	380	27.8	612	5.00
42	4.6	1	V_2O_5 1.35g, 軽石 1.59g	45.4	98	480	27.8	612	5.00
43	11.1	1	V_2O_5 2.30g, 軽石 2.00g	58.8	—	550	20	340	1.52
44	11.0	1	V_2O_5 2.30g, 軽石 2.00g	58.8	—	620	20	340	1.52
45	5.1	1	V_2O_5 0.37g, 軽石 0.43g	12.3	—	525	21.6	1756	3.60
46	7.8	1	V_2O_5 2.31g, 軽石 2.08g	59.0	—	390	55	932	5.99
59	4.6	1	V_2O_5 0.37g, 軽石 0.43g	12.3	200	370	20	1620	9.48
15	5.3	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	15.4	208	390	25	1620	4.00
16	1.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 2:3	15.4	174	370	20	1620	9.48
17	8.4	1	$MoO_3:V_2O_5$ 3:4	13.8	184	380	25	1815	2.53

表 No. 1.

−COH 生成に対する使用空気量/理論空気量	未反応物 (g)	−COOH (キナルジン酸) (g)	−COOH 収率(理論) (%)	−COH キノリンアルデヒド (g)	−COH 収率(理論) (%)	(30 分後) CO_2 (%)	(30 分後) CO (%)	備考
18.70	0	0.206	4.80	0.024	0.64	15	6.5	軽石 19.36 (g) MoO_3 2.52 (g) V_2O_5 2.09 (g)
13.25	0	0.338	4.20	0.015	0.24	2.5	15	軽石 27.60 (g) MoO_3 3.46 (g) V_2O_5 2.86 (g)
10.62	0.050	0.890	15.00	0.005	0.95	5.4	22.1	軽石 26.4 (g) MoO_3 3.46 (g) V_2O_5 2.86 (g)
3.47	0.080	0.252	1.90	1.551	12.90	7.5	16	軽石 5.32 (g) MoO_3 0.70 (g) V_2O_5 0.577 (g)
4.32	0.396	0.874	6.10	3.723	28.90	8.5	15	軽石 5.32 (g) MoO_3 0.70 (g) V_2O_5 0.577 (g)
11.20	0.041	0.209	2.30	4.119	31.80	8.05	20.0	
9.60	0.035	2.100	32.80	0.294	5.05	10	20	
9.00	0.962	1.350	14.30	0.947	11.20	14.2	15.5	
2.30	1.236	2.710	20.20	6.300	52.20	15.4	11.6	
8.35	0.035	3.290	59.30	0.385	7.60	9.0	23.0	
6.25	0.050	0.720	11.70	0.090	1.76	6.7	20.0	
5.10	0.020	0.480	3.97	0.010	0.09	7.05	18.50	
4.90	0.010	0.540	4.64	0.020	0.17	9.0	13.5	
7.72	trace	2.780	50.00	0.379	7.50	11.0	17.5	
7.72	trace	2.920	52.50	0.374	7.40	14.0	10.0	
2.30	trace	2.090	15.50	4.870	40.00	14.7	10.0	
2.32	trace	2.180	18.00	5.680	47.00	10.0	12.5	
5.40	trace	0.680	11.00	0.140	2.50	12.5	10.0	
8.94	0	0.230	2.50	0.420	5.10	7.5	12.5	
14.15	trace	0.550	10.00	0.302	6.00	7.5	15.0	
6.05	0.070	0.354	5.40	0.233	4.00	7.0	19.5	軽石 3.32 (g) MoO_3 1.52 (g) V_2O_5 1.40 (g)
14.20	0.023	0.748	34.40	0.002	0.10	6.5	21.5	軽石 4.75 (g) MoO_3 1.07 (g) V_2O_5 2.05 (g)
3.80	0.104	0.192	1.90	0.042	0.46	8.0	20.0	軽石 2.37 (g) MoO_3 1.07 (g) V_2O_5 1.02 (g)

一 覧

	キナルジン滴下速度 (g/hr)	時間 (hr)	触媒種類 (モル比)	担体容積 (c.c.)	水(水蒸気)滴下速度 (c.c./hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 c.c./(hr)(c.c.)	−COOH生成に対する使用空気量/理論空気量
20	21.1	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	14.3	—	400	84	5880	3.40
21	7.9	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	14.3	—	470	30	2100	3.22
22	3.3	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	15.9	—	370	30	1880	7.72
23	2.4	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	12.3	—	370	25	2030	8.85
47	11.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	31.0	—	375	40	1290	2.76
48	7.9	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	14.2	—	410	30	2100	3.22
49	7.9	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	14.2	—	470	30	2100	3.22
50	7.9	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	14.2	—	550	30	2100	3.22
51	11.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	31.0	—	400	40	1290	2.76
52	11.0	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	30.8	—	450	30	969	2.32
53	1.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 2:3	12.3	200	400	20	1620	9.48
54	1.8	1	$MoO_3:V_2O_5$ 2:3	12.3	200	370	20	1620	9.48
55	5.3	1	$MoO_3:V_2O_5$ 2:3	8.9	250	400	25	2800	3.28
56	5.3	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	15.4	250	390	25	1620	4.00
57	7.9	1	$MoO_3:V_2O_5$ 4:3	14.3	300	400	30	2100	3.22
12	8.1	1	無触媒		—	370	25	—	2.62
13	8.1	1	無触媒		—	420	25	—	2.62
14	9.9	1	無触媒		—	470	25	—	2.15
27	3.2	1	無触媒		—	450	20	—	5.32
28	3.5	1	無触媒		—	380	20	—	4.85
29	6.6	1	無触媒		—	300	25	—	3.22
30	4.5	1	無触媒		—	530	25	—	4.72
37	3.5	1	無触媒		—	380	28.8	—	7.00

表 No. 2.

−COH 生成に対する使用空気量/理論空気量	未反応物 (g)	−COOH (キナルジン酸) (g)	−COOH 牧率(理論) (%)	−COH キノリンアルデヒド (g)	−COH 牧率(理論) (%)	(30 分後) CO_2 (%)	(30 分後) CO (%)	備考
4.98	0.050	1.420	5.58	0.140	0.59	6.1	20.3	軽石 2.37 (g) MoO_3 1.07 (g) V_2O_5 1.02 (g)
4.85	0.010	1.240	13.00	0.020	0.23	6.6	22.5	
11.55	trace	0.240	6.00	0.150	4.26	6.0	24.0	
13.25	trace	0.320	11.00	0.160	6.18	7.5	16.0	
4.12	0	0.640	4.50	1.615	12.50	7.0	11.5	
4.81	0.010	0.700	7.50	0.216	2.50	9.0	19.5	
4.81	0.020	1.240	13.00	0.217	2.50	6.5	20.0	
4.81	0.010	0.860	9.00	0.226	2.60	9.0	21.5	
4.12	0.030	0.855	6.00	3.640	28.00	8.0	18.0	
3.46	0.020	0.331	2.50	1.510	12.50	7.5	17.0	
14.15	0.010	0.817	37.50	0.049	2.50	6.5	20.0	軽石 4.75 (g) MoO_3 1.07 (g) V_2O_5 2.05 (g)
14.15	trace	0.739	34.00	0.039	2.00	7.0	25.5	
4.64	trace	1.666	26.00	0.116	2.00	8.0	26.5	
5.65	trace	0.641	10.00	0.232	4.00	8.5	17.5	軽石 2.37 (g) MoO_3 1.07 (g) V_2O_5 1.022 (g)
4.81	trace	0.76	8.00	0.867	1.00	10.0	18.4	
3.95	0.158	0.298	3.30	0.319	3.80	8.0	20.0	
3.95	2.319	0.272	2.76	0.537	4.17	8.5	21.0	
3.21	1.718	0	0	0.192	1.77	7.0	19.5	
7.95	0.010	0.23	5.95	0.04	1.21	7.1	27.9	
7.26	0.010	0.17	4.02	0.02	0.53	6.0	24.5	
4.85	0.020	0.20	2.50	0.03	0.41	5.4	18.1	
7.10	trace	0.03	0.56	0.01	0.21	5.4	21.6	
10.80	trace	0.217	5.00	0.040	1.20	8.5	19.0	

一 覧

	キナルジン滴下速度 (g/hr)	時間 (hr)	触媒種類 (モル比)	担体容積 (c.c.)	水(水蒸気)滴下速度 (c.c./hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 c.c./(hr)(c.c.)	−COOH生成に対する使用空気量/理論空気量
38	8.1	1	無触媒		—	420	68.5	—	7.00
39	8.0	1	無触媒		—	460	67.8	—	7.00
40	3.5	1	無触媒		—	340	21.2	—	5.00
11	6.4	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.9 g	16.0	115	400	30	1875	3.98
34	5.2	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.5 g	45.5	—	340	25	550	4.82
35	6.1	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.5 g	45.5	—	500	30	660	4.18
36	4.1	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.5 g	37.8	—	410	30	795	6.21
60	6.4	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.9 g	16.0	115	340	30	1875	3.98
61	6.4	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.9 g	16.0	115	500	30	1875	3.98
62	4.1	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.5 g	37.8	—	340	30	795	6.21
63	4.1	1	$Cd(V_3O)_2$ 3.5 g	37.8	—	500	30	795	6.21
64	5.2	1	$Cd(VO_3)_2$ 3.5 g	45.5	—	440	25	550	4.82
65	11.0	1	$Ca(VO_3)_2$ 7.2 g	15.4	—	320	35	2370	2.61
66	11.0	1	$Ca(VO_3)_2$ 7.2 g	15.4	—	520	35	2370	2.61
67	5.0	1	$Ca(VO_3)_2$ 5.0 g	15.4	—	320	25	1625	5.50
68	5.0	1	$Ca(V_3O)_2$ 5.0 g	13.7	—	320	27.4	2000	7.00
69	5.0	1	$Ca(VO_3)_2$ 5.0 g	13.7	—	400	27.4	2000	7.00
70	5.0	1	$Ca(VO_3)_2$ 5.0 g	13.7	—	490	27.4	2000	7.00
19	11.0	1	$Ca(V_3O)_2$ 7.2 g	15.4	—	400	35	2370	2.61
31	5.0	1	$Ca(VO_3)_2$ 5.6 g	15.4	—	300	25	1625	4.25
32	4.2	1	$Ca(VO_3)_2$ 5.6 g	15.4	—	400	30	1950	6.08
33	4.4	1	$Ca(VO_3)_2$ 6.4 g	15.4	—	510	30	1950	5.80
18	5.9	1	$Cu(VO_3)_2$ 7.9 g	15.4	—	430	35	2370	5.05

表 No. 3.

−COH 生成に対する使用空気量/理論空気量	未反応物 (g)	−COOH (キナルジン酸) (g)	−COOH 牧率(理論) (%)	−COH キノリンアルデヒド (g)	−COH 牧率(理論) (%)	(30 分後) CO_2 (%)	CO (%)	備考
10.80	trace	0.568	5.80	0.143	1.60	9.0	16.5	
10.80	trace	0.446	4.60	0.114	1.30	3.5	10.0	
7.72	trace	0.020	0.60	0.057	0.15	10.0	14.2	
6.00	0.1089	2.170	28.00	1.343	19.70	8.5	23.0	
6.13	0.010	0.24	3.82	0.050	0.88	8.0	18.2	
6.27	trace	0.36	4.90	0.020	0.30	10.3	15.6	
9.30	trace	0.41	8.28	0.220	4.91	7.4	18.2	
5.64	trace	0.926	12.00	0.562	8.00	8.0	19.5	
5.64	0.010	0.930	12.00	1.120	16.00	7.7	20.0	
8.80	0.010	0.298	5.00	0.090	2.00	7.0	17.5	
8.80	trace	0.347	7.00	0.090	2.00	7.0	18.0	
6.80	trace	0.378	6.00	0.119	2.10	7.5	14.5	
3.69	0.010	trace	—	1.330	11.00	2.9	5.0	
3.69	trace	trace	—	1.800	15.00	12.5	15.2	
7.80	trace	0.394	6.50	0.209	3.80	10.0	18.5	
9.90	trace	0.30	5.0	0.109	2.0	10.5	19.0	
9.90	trace	0.53	8.8	0.385	7.0	7.0	17.5	
9.90	trace	0.39	6.5	0.219	4.0	10.0	15.0	
4.05	0.5012	0.055	0.41	2.804	23.20	30.0	2.5	
6.37	trace	0.290	4.80	0.150	2.76	10.3	18.6	
9.10	trace	0.540	10.70	0.260	5.41	8.5	16.2	
8.70	trace	0.390	7.32	0.240	5.02	7.4	18.6	
7.18	0.1670	0.061	0.87	0.010	0.15	—	—	

イソキノリンの空気酸化

小松藤男

On the Air Vapor Phase Oxidation of Isoquinoline

Fujio Komatsu

Abstract

In relation to the air catalytic vapor phase oxidation of Quinoline, to utilize the high temperature tar bases, the air vapor phase oxidation of isoquinoline without or with catalysts was carried out. The main- and by-products were cinchomeronic acid as the materials of isonicotinic acid, and phthalic acid or pyridine. In general, in non catalytic oxidation, maximum yield of cinchomeronic acid was 34%, and in catalytic oxidation, vanadium pentoxide and molybdenum trioxide with pumice stone as carrier were not so catalytic. Mixtures of vanadium pentoxide and molybdenum trioxide with pumice stone as carrier were effective to produce pyridine, maximum yield of pyridine was 48% in optimum conditions which space velocity was 42000 c.c/c.c hr and air theoretical flow velocity, 9 at 400°C, and so catalytic that decarboxylation of cinchomeronic acid had happened. Mixtures of vanadium pentoxide and tin dioxide catalyst with pumice stone were more effective to produce cinchomeronic acid than other catalysts had carried out, maximum yield, 47% at 400°C, by air theoretical flow velocity, 6, space velocity, 21000~28000, and for reaction time 1~2 hr.

Furthermore, calculated the equilibrium constant, using the Nernst's approximate equation and free energy, to produce those from isoquinoline by oxidation, it was showed for this reaction to be possible thermo-dynamically.

I. 序　論

最近低沸点タール塩基類の利用研究が盛んになり，特にそれらのピリジン塩基類酸化[1]による医薬品中間体の合成が注目されるに至つている。しかしながら，高沸点タール塩基類の利

1) Francis E. Cislak and Wm. R. Wheeler: U.S., 2,396,457, Mar. 12 (1946); Max B. Mueller: U.S., 2,436,660, Feb. 24 (1948); Max B. Mueller: U.S., 2,449,906, Sept. 21 (1948); Wilhelm Mathes: Chem. Ber. **84**, 452 (1951); 小松藤男: 室工大研報, 第1巻, 第3号, 337 (1952); Max B. Mueller: U.S., 2,586,555, Feb. 19 (1952); Wilhelm Mathes, Walter Sauermilch: Chem. Ber. **86**, 585 (1953); E. Nelson: Brit. 717,061, Oct. 20 (1954); Dietrich Jerchel, Ernst Bauer and Hermann: Chem. Ber. **88**, 156-63 (1955); Erik B. Bengtsson: Acta Chem. Scand. **9**, 8326, (1955); Gene Nowlin: U.S., 2,749,350, June 5 (1956).

用研究については殆んど少なく，特にこれらの酸化利用の研究は，若干の液相酸化[2]を除いて気相酸化[3]に至つては，その例は余り見受けられない。従つて本実験では，高沸点タール塩基類の利用の一端として，先に発表したキノリンの空気酸化[4]によるピリジンまたはニコチン酸（ビィタミンB合成中間体）の生成との関連性の下に，すでに高沸点タール塩基類溜分より精製分離[5]した異性体のイソキノリンの空気酸化によつて，主としてイソニコチン酸の原料またはフェノール－シンコメロナイン染料[6]の原料としてのシンコメロン酸またはピリジンも生成されるであろうとの考察の下に，350～550°Cの反応温度範囲で，無触媒並びに，触媒酸化について行なわれたものである。従来シンコメロン酸の合成[7]は種々あるが，いずれも液相反応が主で，工業的規模で行なわれていない現状にある。イソキノリンの液相酸化[8]については若干行なわれているが，種々の条件が詳らかでなく，また気相酸化については，殆んど行なわれていない。今回行なわれた触媒酸化では，$Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 混合触媒を軽石に附着させたものを用いた場合が，無触媒酸化よりもかなりシンコメロン酸の収率を増大し，また $MoO_3+V_2O_5$ 混合触媒を軽石に附着させたものでは，ピリジンをかなり生成することを見出したので，種々の触媒を用いた場合および無触媒酸化における理論空気量比，反応温度，或いは滴下速度，反応時間などの収率におよぼす影響を述べると共に，この気相酸化では，シンコメロン酸，フタール酸，ピリジンの生成が可能であることを，Nernst's の近似式[9]，並びに遊離エネルギー[10]よ

2) Stix and Bulgalsch: Ber. **65**, B 11 (1932); Wood Ward, Badgett and Kaufman: I.E.C., **36**, 544 (1944); Francis E. Cislak and Wm. R. Wheeler (to Reily Tar & Chem. Corp.): U.S., 2,396,457, Mar. 12 (1946); Max B. Mueller: U.S., 2,436,660, Feb. 24 (1948); Max B. Mueller: U.S., 2,448, 906, Sept. 21 (1948); Elderfield: Heterocyclic Compounds, 397–616 (1950); Edwin Plazek and Helena Kozdrojowna: Roczniki Chem., **25**, 509–13 (1951); Max B. Mueller: U.S., 2,586,555, Feb. 19 (1952); Teruo Hirakata, Seiju Kubota, Tadashi Akita: Tokushima Univ. **3**, 5–6 (1954).
3) 小松藤男： コルータール誌, 第6巻, 第1号, 6 (1954).
4) 小松藤男： コールタール誌, 第6巻, 第1号, 6 (1954).
5) Karl H. Engel: U.S., 2,456,776, Dec. 21 (1948); Wm. Shaunan: Brit. P. 701,976, Jan. 6 (1954); 小松藤男：室工大研報, 第2巻, 第3号, 669–677 (1957).
6) A. Solid, F. Gialdi and R. Ponci: Farm. Sci. et tec. (Pavia) **7**, 200–8 (1952).
7) Jamuna D. Tewari: J. Chem. Soc. 1642 (1929); Mayer: Monat. **13**, 350; Ahrens: Ber. **29**, 2997, Oechsner de Coninck: A. Ch. [5], **27**, 491; Hoogewerff, Van Dorf: Rec. **4**, 285 (Rec. trav. chim.); Weidel V. Schmidt: Ber. **12**, 1152; Hoogewerff, V.D.: Rec. trav. chim. **2**, 23; O.E., De C.: Bt. [2], **42**, 104; **43**, 106; Camps: Arch. pharm. **240**, 359; Robert S. Aries: U.S., 2,702,802, Feb. 22 (1955).
8) Max B. Mueller: U.S., 2,449,906, Sept. 21 (1948); Max B. Mueller: U.S., 2,513,099, June 27, (1950); Max B. Mueller: U.S., 2,586,555, Feb. 19 (1952); Schmidt and Role: Text book of Organic chemistry, D. Van Nostrand Comp. 715 (1947); Albert F. Lindenstruth and Celvin A. Van der Werf: (Univ. of Kansas, Lawrence), J. Am. Chem. Soc. **71**, 3020 (1949).
9) Glasstone: Text book of Physical Chemistry, 851 (1940).
10) 永廻登・佐藤一雄・清浦雷作： 工業化学計算上巻, 135 (1955); Kun L,i: J. Phys. Chem., **61**, 782, (1957).

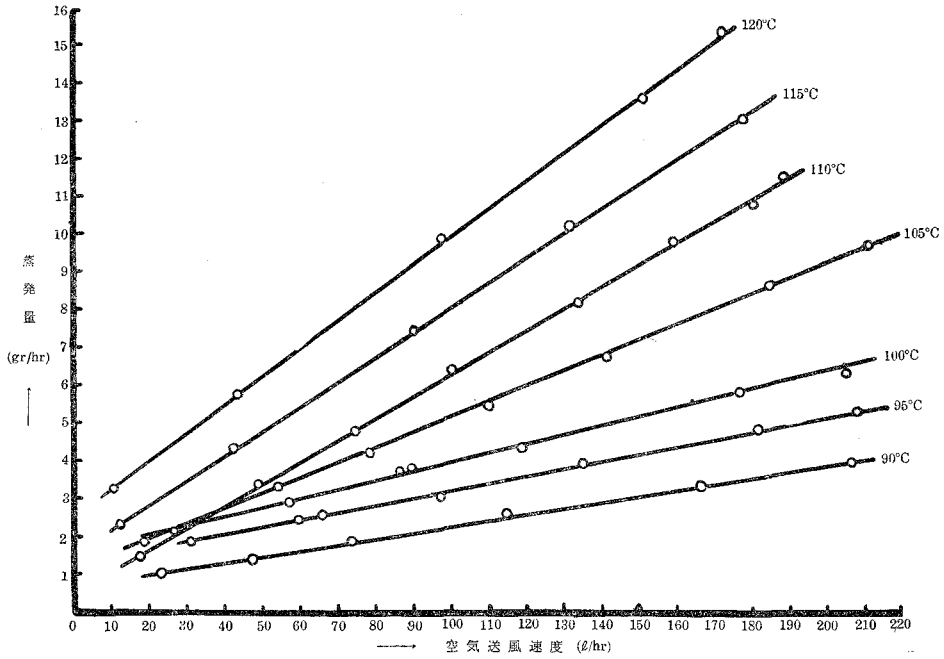
り求めた平衡恒数 K_P から，熱力学的に可能であることを述べる。

II. 実 験 の 部

1. 実験装置

(イ) 予 備 実 験

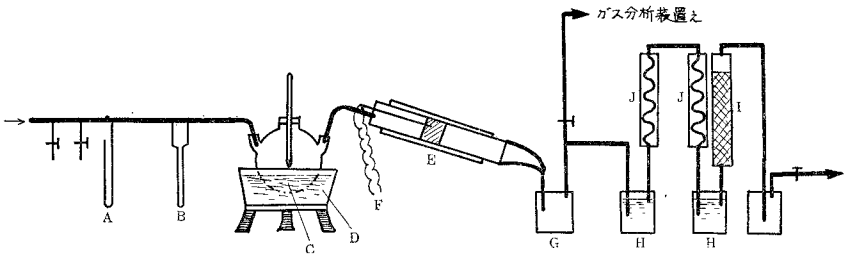
酸化実験を行なうにあたつて，イソキノリンと空気量との適当量の比を予め求めるために実験装置第1図(ロ)を用いて，各浴槽温度における空気量(ℓ/hr)とイソキノリンの蒸発量(gr/hr)との関係を実験的に求めたのが第1図(イ)であつて，これによつてイソキノリンと空気量との混合比を調整した。



第1図 (イ) 各温度における空気送風速度と蒸発量との関係

(ロ) 実 験 装 置

本実験の装置は第1図(ロ)に示される様に，先ず，試料を入れた三口コルベンはグリセリン浴によつて予熱され，左端からコルベン中に入つてくる空気と共に，反応管へ送られる。反応管を出た生成ガスは捕集瓶に入り，一部はオルザッツ方式により，ガス分析され，残部は15% 硫酸溶液を入れた吸収瓶へ送り，吸収溶解させる。更に捕集を完全にするために，活性炭を入れた吸収管に送り込む。最後に廃ガスとして捨てられる。なお反応管は径 2.5 cm，長さ 1 m の磁製管を使用した。



A 気圧計　D グリセリン浴　G 補集瓶　J 冷却管
B フローメータ　E 反応管　H 吸収瓶 (H_2SO_4 溶液)
C 試料　F 熱電対　I 吸収管 (活性炭)

第1図 (ロ) 実験装置

2. 実験試料

(イ) 本実験に用いたイソキノリンは，富士製鉄室蘭製作所において生産されたもので，沸点240～241°C 溜分のものを蒸溜および精製分離[5] したものと，特級合成品との二通りのものを用いた。

(ロ) 触媒製法

(i) $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$

メタバナジン酸アンモン，塩化第二錫をそれぞれ 1/20 モルづつとり，200 cc の蒸溜水に溶解させたものを 5～10 mesh の軽石 100 cc (23.8 g) に附着させ，蒸発乾涸した後 450°C で空気を送つて，2 時間灼熱して製造する。

(ii) $Sn(VO_3)_4+SnO_2$

メタバナジン酸アンモン，塩化第二錫をそれぞれ 1/200 モル，1/400 モルづつとり，200 cc の蒸溜水に溶解させ，5～10 mesh の軽石 10 cc (2.4 g) に附着させ，後は (i) の場合と同様な方法で製造する。

(iii) $MoO_3+V_2O_5$

メタバナジン酸アンモン，ヘプタモリブデン酸アンモンをそれぞれ 10 g づつとり，500 cc の蒸溜水に溶解し，10～20 mesh の軽石 18 g を加え，蒸発乾涸し，450°C で灼熱して NH_3, H_2O を除去して製造する。

(iv) MoO_3

ヘプタモリブデン酸アンモンを 20 g とり，500 cc の蒸溜水に溶解し，10～20 mesh の軽石 18 g を加え，蒸発乾涸した後，450°C で灼熱して製する。

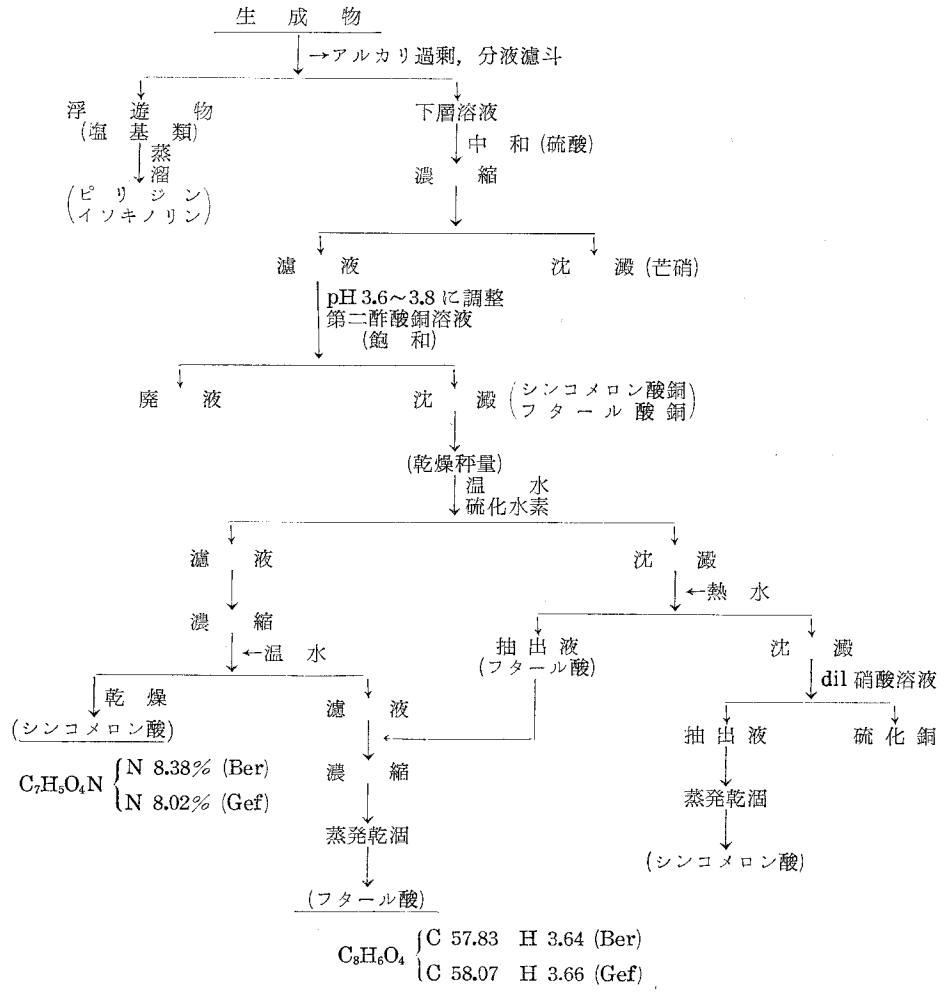
(v) V_2O_5

メタバナジン酸アンモンを20 g とり，後は(iv)と全く同様な方法で製する。

3. 分析方法

分析方法は第1表に示されているように，先ず生成物は苛性ソーダにより，アルカリ過剰にして，浮遊物の塩基類を除去した後，硫酸で中和し，芒硝を除去した後，その濾液をpH 3.6～3.8に調整[11]してから，60～70°Cに温め，同様に60～70°Cに温められた酢酸銅飽和溶液をそれに加える。その結果生じた沈澱は，シンコメロン酸銅とフタール酸銅であり，これを乾燥

第 1 表



11) Max B. Mueller: U.S., 2,513,099, June 27 (1950).

秤量した後，温水を加えて溶解させ，硫化水素を通して硫化銅を沈澱させて濾別する。その濾液は一度濃縮された後，温水を加えて濾過し，シンコメロン酸を沈澱物として除いた後，濾液を濃縮，蒸発乾涸してフタール酸とする。一方沈澱させた硫化銅の中にもフタール酸，シンコメロン酸が附着されているので，先ず沈澱に熱湯を加えてフタール酸を抽出し，その後，4％程度の硝酸溶液を加えて，シンコメロン酸を抽出し，それぞれ蒸発乾涸して製品とする。

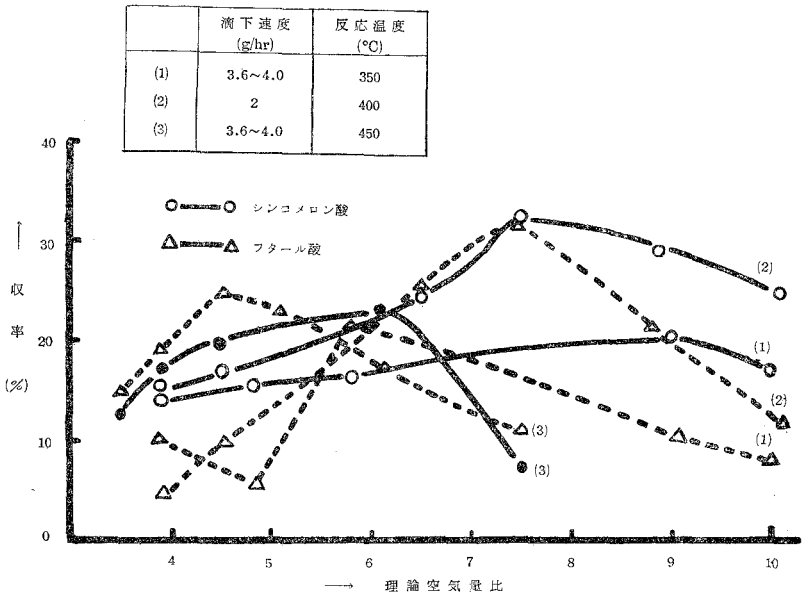
シンコメロン酸を抽出する際の硝酸の濃度を10％程度にすると，沈澱物と激しく反応して，銅イオンがかなり抽出液中に溶け込むので，4％程度では銅イオンが微量で分析に殆んど影響がないことが分つた。また，フタール酸，シンコメロン酸の元素分析結果も計算値と殆んど変らない。

III. 実 験 結 果

本実験では大別して，無触媒および触媒酸化に分れる。

1. 無触媒酸化

理論空気量比とシンコメロン酸およびフタール酸の収率との関係を示したので第2図である。350℃，400℃，450℃につき滴下速度，2～4 g/hr までにつき行なつたもので，他の条件では収率が非常に悪いので省略した。



第 2 図 無触媒酸化シンコメロン酸・フタール酸の収率と理論空気量比

[一覧表 No. 1]

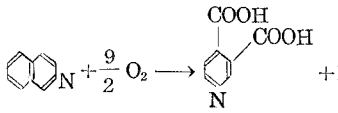
無　触　媒

実験番号	滴下速度 (g/hr)	反応時間 (hr)	反応温度 (℃)	使用空気量 (ℓ/hr)	シンコメロン酸生成に対する使用空気量／理論空気量	フタール酸生成に対する使用空気量／理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)	シンコメロン酸生成量 (g/hr)	フタール酸生成量 (g/hr)
1	3.6	1	350	140.5	10.0	7.24	17.5	8.0	0.820	0.372
2	3.6	1	350	126.2	9.0	6.51	20.5	10.5	0.960	0.487
*3	3.6	1	350	81.4	5.8	4.20	16.5	22.0	0.774	1.220
4	3.8	1	350	71.0	4.8	3.47	15.5	5.5	0.766	0.271
5	4.0	1	350	60.7	3.9	2.82	14.0	10.0	0.726	0.515
6	2.0	1	400	79.5	10.2	7.37	25.0	12.5	0.650	0.322
7	2.0	1	400	69.5	8.9	6.43	29.0	21.5	0.705	0.555
8	2.0	1	400	59.2	7.6	5.50	32.5	31.5	0.845	0.812
*9	2.0	1	400	50.7	6.5	4.70	24.5	25.5	0.637	0.677
10	2.0	1	400	35.0	4.5	3.26	17.0	10.0	0.442	0.258
11	2.0	1	400	30.4	3.9	2.82	15.5	5.0	0.420	0.129
*12	3.6	1	450	106.8	7.6	5.50	7.5	11.0	0.350	0.510
*13	4.0	1	450	95.2	6.1	4.52	22.0	17.5	1.142	0.905
14	3.6	1	450	63.0	4.5	3.26	20.0	24.5	1.040	1.155
15	3.8	1	450	57.7	3.9	2.82	17.5	18.5	0.865	0.905
16	4.0	1	450	54.5	3.5	2.53	12.5	15.0	0.650	0.775
17	1.0	1	400	29.6	7.6	5.50	32.5	31.0	0.423	0.400
18	3.0	1	400	89.0	7.6	5.50	31.8	30.0	1.240	1.160
*19	4.2	1	400	124.8	7.6	5.50	31.5	29.5	1.740	1.595
20	5.9	1	400	174.8	7.6	5.50	31.2	29.5	2.390	2.240
21	1.5	1	350	27.5	4.7	3.40	14.5	9.5	0.283	0.184
22	2.6	1	350	47.2	4.7	3.40	14.0	9.5	0.473	0.350
23	3.0	1	350	55.0	4.7	3.40	13.5	9.0	0.527	0.347
24	5.0	1	350	91.5	4.7	3.40	13.0	9.0	0.845	0.580
25	5.9	1	350	107.0	4.7	3.40	13.0	8.8	0.998	0.670
26	1.0	1	450	23.8	6.1	4.42	18.0	16.0	0.234	0.206
27	2.0	1	450	47.6	6.1	4.42	18.5	16.5	0.480	0.425
28	3.0	1	450	71.5	6.1	4.42	20.0	17.0	0.780	0.656
29	4.25	1	450	110.0	6.1	4.42	22.0	18.0	1.220	0.986
*30	5.0	1	450	119.0	6.1	4.42	22.0	18.5	1.430	0.190
31	5.85	1	450	139.0	6.1	4.42	22.0	58.5	1.670	1.390

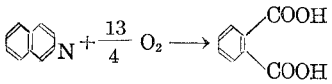
註　* はガス分析を行つた。

	CO_2 (%)	CO (%)	O_2 (%)		CO_2 (%)	CO (%)	O_2 (%)
*3	7.5	3.6	15.9	*13	5.0	1.0	13.0
*9	5.6	0	16.4	*19	10.0	2.0	8.0
*12	8.0	1.2	11.0	*30	5.0	1.0	13.0

この図で分るように，400°C では理論空気量比 4.5 の場合が最高の収率を示し，(滴下速度 2 g/hr)，350°C では理論空気量比 9，(滴下速度 3.6 ～4.0 g/hr) のとき，良好な収率を，450°C では理論空気量比 6.2 (滴下速度 3.6～4.0 g/hr) のとき，良好収率を示す。従つて最適な反応温度理論空気量比はそれぞれ 400°C，7.5 であり，最高収率 34% である。フタール酸の収率は反応式で示される如く，シンコメロン酸の生成と比較すれば，空気量は少なくてよい計算になるが，その結果はこの図には大体あらわれている。すなわち，400°C の場合には判然としないが，350°C では，シンコメロン酸，フタール酸の最高収率を示し，理論空気量比はそれぞれ 9，5.7 又 450°C では，それぞれ 6.2，4.5 である。更に低温で収率を上げるには空気量がかなり必要となり，高温では空気量は比較的少量でよい結果となるが，実際には，適当な温度と空気量との相乗量が望まれることになる。

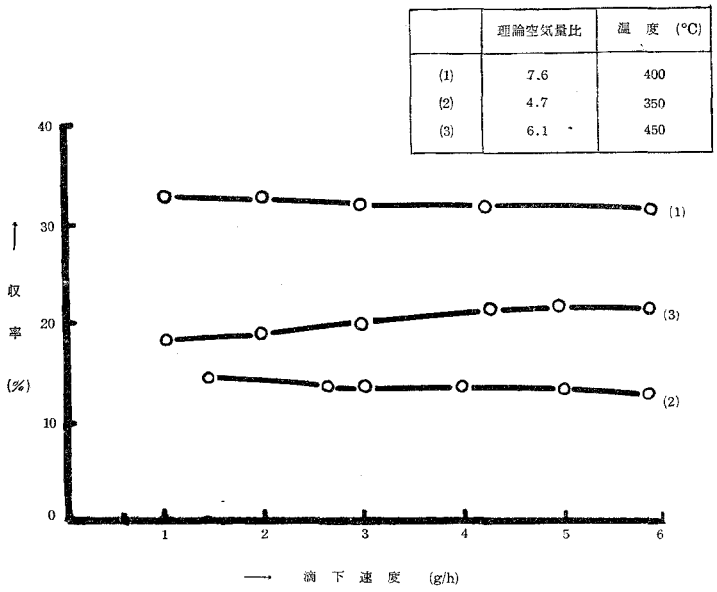


$$N + \frac{9}{2}O_2 \longrightarrow \quad + H_2O + 2CO_2 \qquad (1)$$



$$N + \frac{13}{4}O_2 \longrightarrow \quad + \frac{1}{2}H_2O + CO_2 + \frac{1}{2}N_2 \qquad (2)$$

次にシンコメロン酸の収率におよぼす滴下速度の影響を示したのが第 3 図である。



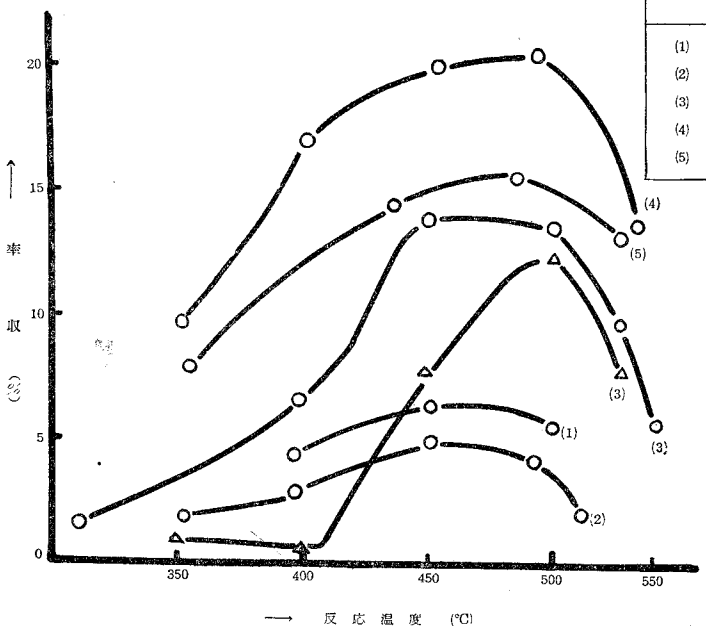
第 3 図 無 触 媒 酸 化
シンコメロン酸の収率におよぼす滴下速度の影響

理論空気量比および温度一定にした場合，この実験装置において，試料の滴下速度が収率におよぼすかどうかは，他の種々の反応実験より大切なことである。その結果は350°C, 400°C 450°C のそれぞれの温度において，かなり収率に対して影響あることを示す。(1)(2)は350°C, 400°C で2 g hr 以下の滴下速度では，収率は一定であるが，それ以上増大すれば，収率は減少する．すなわち，この装置では滴下速度が2 g/hr 以上では，カルボン酸の生成が不完全であることを示し，また(3)では，450°C で，反応温度高く，従つて，(1), (2)よりも滴下速度大で，4～6 g/hr では，収率は一定であるが，滴下速度が1～3 g/hr のように小では，生成されたカルボン酸が分解してしまう結果，収率が減少すると考えられる。従つて滴下速度の収率におよぼす影響として，比較的低温では滴下速度が小，比較的高温では滴下速度が大である方がよいように思われる。本実験では，シンコメロン酸の最高収率を示す条件では，400°C, 理論空気量比7.6で，従つて滴下速度は2 g/hr である。

2. 触 媒 酸 化

(イ) MoO_3 触媒/軽石における収率と反応温度

触媒には，10～20 mesh の軽石に MoO_3 を附着させたもので，大体1.48 g MoO_3/5 cc 坦体の濃度附近のものが用いられた。シンコメロン酸の収率と反応温度との関係を色々の条件につ



	滴下速度 g/hr	空間速度 cc/hr·cc	理論空気量比
(1)	2.65～3.25	33000	1.42
(2)	2.7～4.2	43300～45300	1.42
(3)	0.7～0.75	33200～36600	6.14～6.54
(4)	0.35	33000	13.15
(5)	0.35	33000	15.0

○——○ シンコメロン酸

△——△ フタール酸

第 4 図　MoO 触媒/軽石における収率と反応温度

[一覧表 No. 2]

MoO_3/軽石 (0.6 g/5 cc) (10～20 mesh)

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒坦体 (c.c)	反応時間 (hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (c.c/hr. c.c)	シンコメロン酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	フタール酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)
32	2.65	0.46	1	400	14.7	33000	1.42	1.02	4.2	3.0
33	2.65	0.46	1	450	14.7	33000	1.42	1.02	6.4	4.8
34	3.25	0.54	1	500	18.0	33000	1.42	1.02	5.5	3.8
35	2.70	0.34	1	350	15.0	43300	1.42	1.02	2.0	1.4
36	2.70	0.34	1	400	15.0	43300	1.42	1.02	3.0	2.0
37	2.70	0.34	1	450	15.0	43300	1.42	1.02	5.0	3.5
38	4.20	0.51	1	480	23.2	45300	1.42	1.02	4.0	3.0
39	2.70	0.34	1	520	15.0	45300	1.42	1.02	2.0	1.5
40	0.70	0.50	1	550	16.7	33200	6.54	4.42	5.6	4.0
41	0.75	0.54	1	525	17.9	33200	6.54	4.42	9.7	7.8
*42	0.75	0.52	1	500	19.2	36600	6.54	4.42	13.7	12.0
*43	0.70	0.536	1	450	17.8	33200	6.54	4.42	13.9	7.9
*44	0.70	0.53	1	400	17.8	33200	6.54	4.42	6.6	0.7
45	0.70	0.536	1	310	17.8	36600	6.54	4.42	1.5	0.6
46	0.35	0.54	1	530	18.0	33000	13.15	9.49	13.0	8.0
47	0.35	0.54	1	485	18.0	33000	13.15	9.49	15.5	10.0
48	0.35	0.54	1	440	18.0	33000	13.15	9.49	14.5	9.0
49	0.35	0.54	1	350	18.0	33000	13.15	9.49	8.0	6.0
50	0.35	0.618	1	540	20.4	33000	15.00	10.80	13.5	8.0
51	0.35	0.618	1	490	20.4	33000	15.00	10.80	20.5	12.5
52	0.35	0.618	1	450	20.4	33000	15.00	10.80	20.0	12.0
53	0.35	0.618	1	400	20.4	33000	15.00	10.80	17.0	11.0
54	0.35	0.618	1	350	20.4	33000	15.00	10.80	9.7	7.0

註 * はガス分析を行つた。

	CO_2 (%)	CO (%)	O (%)
*42	6.4	0	14.8
*43	8.0	0	10.8
*44	8.3	13.2	12.9

いて示したものが第4図である。

この実験では，滴下速度 0.35～4.2 g/hr，空間速度 33000～43300 程度，理論空気量比 1.42～15.0 の範囲で行なつたものであるが，理論空気量比 13.0 程度で，反応温度が 500°C 附近が良好収率を示している。また良好な反応温度は 450～500°C である。しかし，滴下速度，理論空気量比および反応温度の組合せによつては，更に収率は上げられると思われるが，無触媒酸化

に比較し，余りよくない結果を示し，シンコメロン酸の最高収率は21%前後であり，フタール酸もそれに附随して少ない。

(ロ) V_2O_5/軽石における収率と反応温度

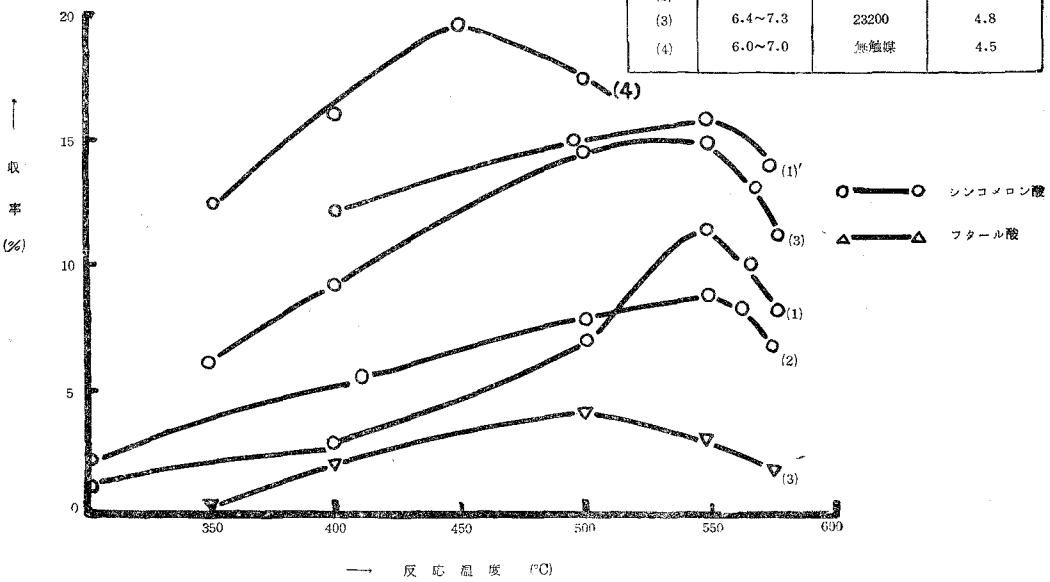
触媒の濃度は1.3 g/3 cc軽石で10～20 meshの軽石を用いた。軽石の大きさはこれ以下になると，タール状のものが附着し触媒の活性に影響があるので，この程度に止めた。

本実験では，滴下速度1.25～7.3 g/hr，空間速度23200～32800理論空気量比1.5～4.8程度について行なつた。収率と反応温度との関係を示せば第5図となる。

この範囲の条件では，一般にそれぞれ，最高収率を示す反応温度は550℃でかなり高温度であり，無触媒酸化の類似の条件のときと，(4)，触媒酸化(3)の場合と比較すると，無触媒酸化の方が，シンコメロン酸の収率もわずかに良好で，反応温度も100℃低い結果となり，この触媒では余り良い結果を示さない。しかし理論空気量比増大すれば，この結果は変るものと考えられるが，今後の実験に待つ外はない。従つてシンコメロン酸の最高収率は19%程度で余り接触的効果がない。

(10～20 mesh)　(1.3 g/3 cc)

	滴下速度 g/hr	空間速度 cc/hr·cc	理論空気量比
(1)	1.25～1.35	32800	4.0
(1)′	1.25～1.3	23200	4.0
(2)	3.4～4.1	32800	1.5
(3)	6.4～7.3	23200	4.8
(4)	6.0～7.0	無触媒	4.5



第5図　V_2O_5/軽石における収率と反応温度

[一覧表 No. 3]

V_2O_5/軽石 (1.3 g/3 cc)

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒担体 (cc)	反応時間 (hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr. cc)	シンコメロン酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	フタール酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)
55	1.25	0.595	1	575	19.5	32800	4.0	2.88	8.0	5.6
56	1.25	0.595	1	565	19.5	32800	4.0	2.88	10.0	6.2
57	1.25	0.595	1	550	19.5	32800	4.0	2.88	11.4	7.5
58	1.25	0.595	1	500	19.5	32800	4.0	2.88	7.0	4.0
59	1.35	0.647	1	400	21.2	32800	4.0	2.88	3.0	2.0
60	1.35	0.647	1	300	21.2	32800	4.0	2.88	1.0	0.5
61	3.40	0.592	1	575	19.4	32800	1.5	1.08	6.6	2.0
62	3.40	0.592	1	565	19.4	32800	1.5	1.03	8.0	4.0
63	3.40	0.592	1	550	19.4	32800	1.5	1.08	8.8	4.2
64	3.40	0.592	1	500	19.4	32800	1.5	1.03	7.9	3.0
65	3.40	0.592	1	410	19.4	32300	1.5	1.08	5.5	1.5
66	4.10	0.732	1	300	24.0	32890	1.5	1.08	2.0	1.0
67	6.40	5.170	1	580	120.0	23200	4.8	3.45	11.0	1.8
68	6.40	5.170	1	570	120.0	23200	4.8	3.45	13.0	2.1
69	6.40	5.170	1	550	120.0	23200	4.8	3.45	14.0	3.0
70	6.40	5.170	1	500	120.0	23200	4.8	3.45	13.5	4.0
71	6.40	5.170	1	400	120.0	23200	4.8	3.45	9.0	2.0
72	7.30	5.87	1	350	136.5	23200	4.8	3.45	6.0	0.2
78	1.25	0.842	1	575	19.5	23200	4.0	2.88	14.0	2.8
79	1.25	0.842	1	550	19.5	23200	4.0	2.88	16.0	3.0
80	1.25	0.842	1	500	19.5	23200	4.0	2.88	15.0	4.5
81	1.30	0.842	1	400	19.5	23200	4.0	2.88	12.0	3.2

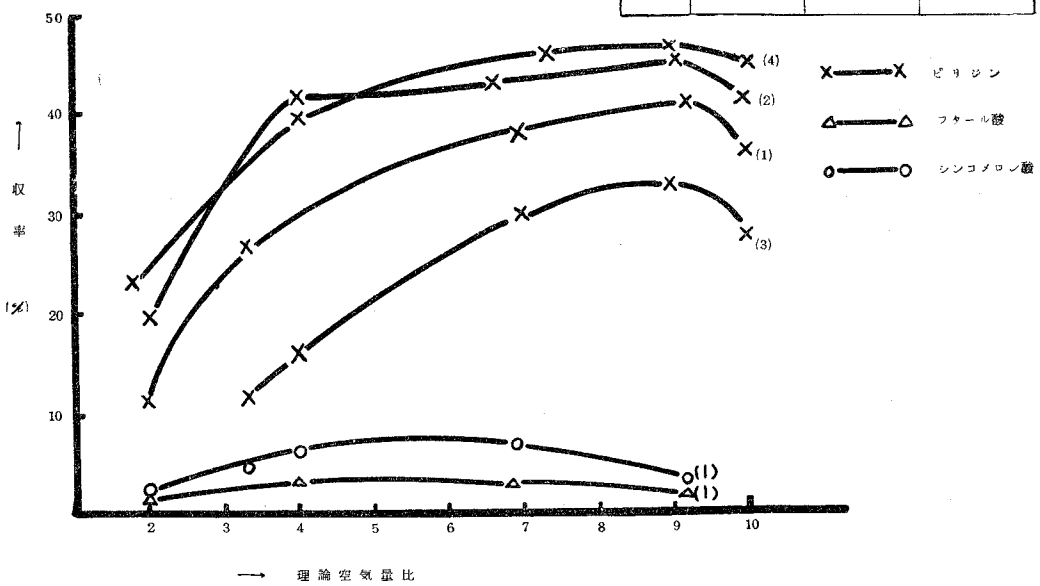
(ハ) 1. $MoO_3+V_2O_5$ 触媒/軽石における収率と理論空気量比

触媒には 10～20 mesh の軽石を担体とし，触媒濃度 1.3 g/3.2 cc のものが主体として用いられた。行なつた条件は流速 3.8～11.1 g/hr，反応温度 350～450°C，空間速度 38000～42000 である。理論空気量比と収率との関係を第 6 図に示す。

この実験ではシンコメロン酸の脱カルボン酸化の反応が甚だしく，完全分解がそれ程起きていない結果を示し，(イ)，(ロ) に比較し，かなり興味ある結果である。すなわち反応温度がそれぞれ 350°C，400°C，450°C では，理論空気量量比 9 のときにピリジンの生成収率がそれぞれ最高を示し，それらの中最も良好な収率は 47.0% であり，またそのときのシンコメロン酸およびフタール酸はそれぞれ 5～7% 以下に止まつている。(例 1)

(10～20 mesh) (1.34 g/3.2 cc)

	流　速 g/ℓ	反応温度 °C	空間速度 cc/hr·cc
(1)	3.8	350	42000
(2)	8.9	400	38000
(3)	11.1	450	42000
(4)	3.8	400	42000



第 6 図　MoO_3+V_2O_5 触媒/軽石における収率と理論空気量比

[一覧表　No. 4]

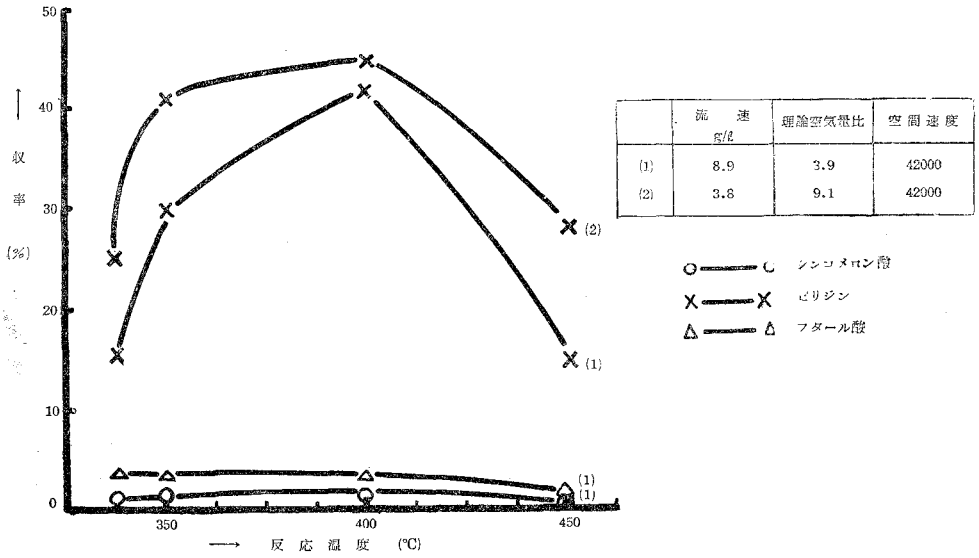
MoO_3+V_2O_5/軽石 (10～20 mesh) (1.34 g/3.2 cc)

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒担体 (cc)	反応時間 (hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr. cc)	シンコメロン酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)	ピリジン理論収率 (%)
82	3.8	3.52	1	350	148.0	42000	10.0	1.0	—	36.0
83	3.8	3.24	1	350	136.0	42000	9.2	1.6	1.0	41.0
84	3.8	2.45	1	350	103.5	42000	7.0	2.8	1.2	37.5
85	3.8	1.14	1	350	48.8	42000	3.3	5.5	1.5	26.0
86	3.8	0.705	1	350	29.6	42000	2.0	1.0	0.5	12.0
87	8.9	9.07	1	400	346.0	38000	10.0	0.5	—	41.5
88	8.9	8.10	1	400	308.0	38000	8.9	0.5	—	45.0
89	8.9	6.12	1	400	232.0	38000	6.7	1.0	—	42.5
90	8.9	3.63	1	400	138.5	38000	4.0	1.0	—	42.0
91	8.9	1.82	1	400	69.4	38000	2.0	3.0	1.0	20.0
92	11.1	10.25	1	450	430.0	42000	10.0	4.5	3.0	27.5

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒坦体 (cc)	反応時間 (hr)	反応温度 (℃)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr. cc)	シンコメロン酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)	ピリジン理論収率 (%)
93	11.1	9.27	1	450	389.0	42000	9.0	5.0	4.0	32.5
94	11.1	7.22	1	450	303.0	42000	7.0	5.5	5.0	29.0
95	11.1	4.12	1	450	173.0	42000	4.0	4.0	3.0	16.0
96	11.1	3.12	1	450	131.0	42000	3.3	2.0	2.5	12.5
97	3.8	3.52	1	400	148.0	42000	10.0	—	—	45.0
98	3.8	3.14	1	400	132.0	42000	8.9	—	—	47.0
99	3.8	2.53	1	400	106.5	42000	7.2	1.5	0.7	46.0
100	3.8	1.40	1	400	59.2	42000	4.0	1.0	0.5	39.0
101	3.8	0.70	1	400	29.6	42000	2.0	0.5	—	20.0

(ハ) 2. $MoO_3+V_2O_5$ 触媒/軽石における収率と反応温度

ピリジン生成を主体とするならば，反応温度 400°C，理論空気量比 9 (流速 3.8 g/hr，空間速度 42000 cc/hr. cc) のときがよい結果となり，反応温度と収率との関係を示せば第 7 図となる。



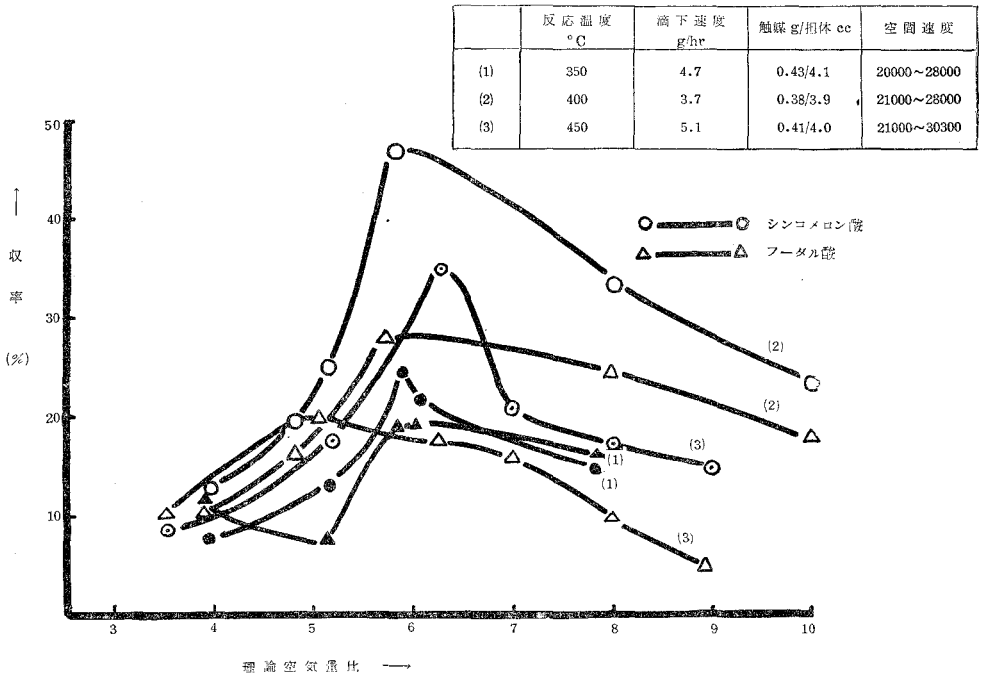
第 7 図 $MoO_3+V_2O_5$ 触媒/軽石における収率と反応温度との関係

(ニ) 1. $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$/軽石における理論空気量比と収率

触媒には坦体として 5～10 mesh のもの，および 0.43～0.38g/hr/3.9～4.1 cc 濃度を主として用いた。行なわれた条件範囲は，350～450°C，滴下速度 3.7～5.1 g/hr，空間速度 20000～

30300 c.c/hr. c.c である。理論空気量比と収率との関係を第8図に示す。

第8図において分るように，350°C，400°C，450°C における収率の最高を示す理論空気量比は，一般に6附近である。また最適な反応温度は 400°C である。従つて最高収率を示す条件として，反応温度 400°C，理論空気量比 5.8（空間速度 21000～28000，滴下速度 3.7 g/hr）で，その場合の収率はシンコメロン酸 47%，フタール酸 27%，約試料の 2/3 が利用価値のあるものえ転化していることになる。従つてこの触媒では，かなり効果的接触作用すなわちカルボン酸化であることが分る。



第 8 図　$Sn(VO_3)_4+3SnO_2$/軽石における理論空気量比と収率

[一覧表　No. 5]

$Sn(VO_3)_4+3SnO_2$/軽石　(5～10 mesh)

$Sn(VO_3)_4 : SnO_2=1:3$ (モル)/軽石　(5～10 mesh)

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒濃度 (g/cc)	触媒担体 (cc)	反応時間 (hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hrcc)	シンコメロン酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	フタール酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)
102	4.7	0.43/4.1	8.25	1	350	165.0	20000	9.0	6.48	7.0	10.0
103	4.7	0.43/4.1	5.10	1	350	143.0	28000	7.8	5.51	15.0	16.5
104	4.7	0.43/4.1	4.36	1	350	112.0	28000	6.1	4.40	22.0	19.5
105	4.7	0.43/4.1	3.79	1	350	106.5	28000	5.8	4.18	25.0	19.0
106	4.7	0.43/4.1	3.35	1	350	93.6	28000	5.1	3.67	13.0	7.5

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒濃度 (g/cc)	触媒坦体 (cc)	反応時間 (hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hrcc)	シンコメロン酸の生成に對する使用空氣量/理論空氣量	フタール酸の生成に對する使用空氣量/理論空氣量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)
107	4.7	0.43/4.1	3.68	1	350	73.5	20000	4.0	2.88	7.0	12.0
108	3.7	0.38/3.9	6.88	1	400	144.5	21000	10.0	7.20	23.0	18.0
109	3.7	0.38/3.9	4.12	1	400	115.3	28000	8.0	5.76	34.0	25.0
110	3.7	0.38/3.9	2.94	1	400	82.4	28000	5.7	4.11	47.0	28.0
111	3.7	0.38/3.9	2.62	1	400	73.7	28000	5.1	3.68	25.0	20.0
112	3.7	0.38/3.9	2.54	1	400	71.0	28000	4.9	3.52	20.0	16.0
113	3.7	0.38/3.9	2.75	1	400	57.9	21000	4.0	2.88	12.0	10.0
114	5.1	0.41/4.0	8.51	1	450	179.0	21000	9.0	6.48	15.0	5.0
115	5.1	0.41/4.0	5.25	1	450	159.0	30300	8.0	5.76	17.5	10.0
116	5.1	0.41/4.0	4.59	1	450	139.2	30300	7.0	4.03	21.0	16.0
117	5.1	0.41/4.0	4.09	1	450	124.3	30300	6.25	4.50	35.0	18.0
118	5.1	0.41/4.0	3.44	1	450	104.3	30300	5.2	3.74	17.0	20.0
119	5.1	0.41/4.0	3.29	1	450	69.5	21000	3.5	2.52	8.5	10.0
120	4.1	1.37/4.0	3.69	1	400	94.5	25600	5.9	4.25	29.0	17.0
*121	4.1	1.37/4.0	3.69	1	400	94.5	25600	5.9	4.25	30.0	17.0
*122	4.1	1.37/4.0	3.69	1	400	94.5	25600	5.9	4.25	44.5	17.5
*123	4.1	1.37/4.0	3.69	1	400	94.5	25600	5.9	4.25	45.0	22.5
*124	4.2	1.37/4.0	3.70	1	400	97.0	26200	5.9	4.25	30.0	27.5

註 * はガス分析を行つた。

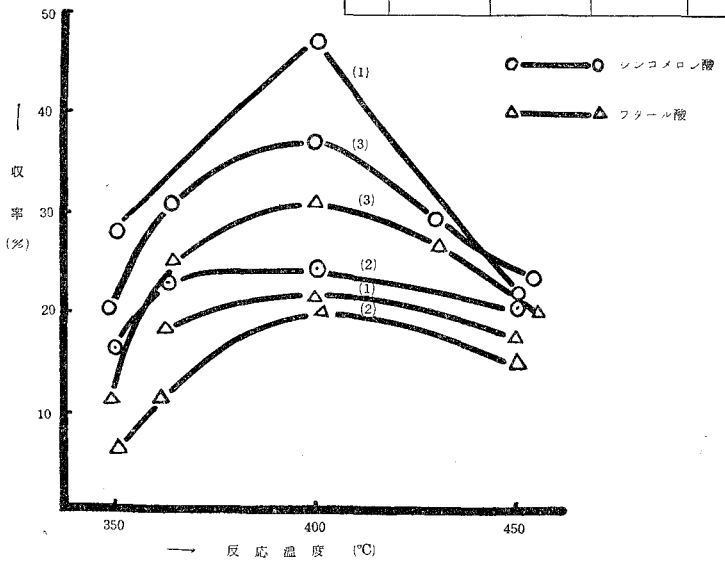
	CO_2 (%)	CO (%)	O_2 (%)
*121	7.8	1.2	13.2
*122	7.1	3.2	12.3
*123	8.0	3.0	13.0
*124	7.6	2.8	11.5

(二) 2. $Sn(VO_3)_4+SnO_2$ 触媒，無触媒における収率と反応温度

第9図は $Sn(VO_3)_4:SnO_2$ のモル比変化，無触媒の場合との収率並びに反応温度との関係を示す。

理論空気量比 5.45～6.17 程度，滴下速度 3.1～5.2 g/hr で条件を類似させた場合を比較すると，いずれも反応温度 400°C の場合が収率を最高にし，400°C においては $Sn(VO_3)_4:SnO_2$ モル比が 1:3; 1:1，無触媒の順に収率が減少するのが分る。従つてかなり $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒/軽石がカルボン酸化に効果的であることが分つた。

	触媒量g/担体cc	$Sn(VO_3)_4$:SnO_2	理論空気量比	空間速度 cc/hr·cc	滴下速度 (g/hr)	担体 (mesh)
(1)	1.37/4	1:3	5.98	20300	3.1	5～10
(2)	non	——	6.17	——	3.1	
(3)	0.279/3.3	1:1	5.45	33300	5.2	5～10



第 9 図 $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒および無触媒における収率と反応温度との関係

[一覧表 No. 6]

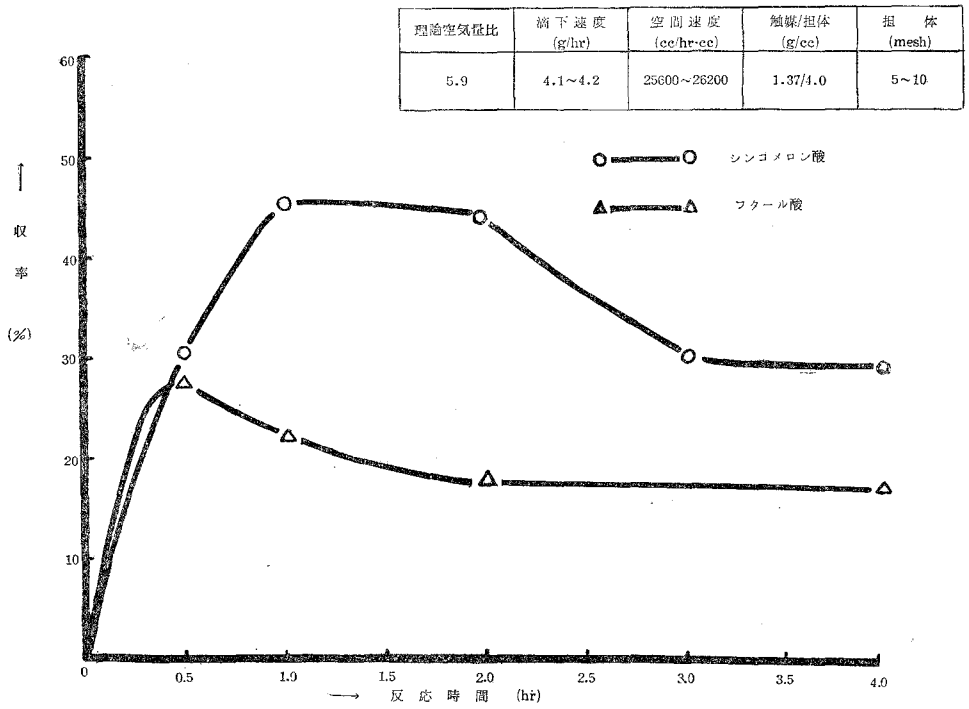
$Sn(VO_3)_4 : SnO_2 = 1 : 1$ (モル)/軽石 (5～10 mesh)

実験番号	滴下速度 (g/hr)	触媒濃度 (g/cc)	触媒坦体 (cc)	反応時間 (hr)	反応温度 (°C)	使用空気量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hrcc)	シンコメロン酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	フタール酸の生成に対する使用空気量/理論空気量	シンコメロン酸理論収率 (%)	フタール酸理論収率 (%)
125	5.2	0.279/3.2	3.2	1	455	110.2	33300	5.45	3.92	21.0	20.5
126	5.2	0.279/3.2	3.2	1	425	110.2	33300	5.45	3.92	29.5	27.0
127	5.2	0.279/3.2	3.2	1	400	110.2	33300	5.45	3.92	37.0	30.1
128	5.2	0.279/3.2	3.2	1	360	110.2	33300	5.45	3.92	31.0	25.0
129	5.2	0.279/3.2	3.2	1	350	110.2	33300	5.45	3.92	20.0	11.0

(二) 3. $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒/軽石における反応時間と収率との関係

(二) 1. において最高収率を上げた場合の条件を用いて行なつたのが第 10 図である。

シンコメロン酸の生成は 1 hr までは急激に上昇し，(約 45% 収率)，1～2 hr まではほぼ一定となり，やがて急激に減少し (約 30% 収率)，3 hr 以後，僅かながら減少する。(29%)。フタール酸は 0.5 hr までは急激に増大し (28%)，それ以後減少し 1 hr では 22%，2 hr 後やや一定となり 17% となる。従つて反応時間は最高収率を維持するには 1～2 hr 程度であるが，連続



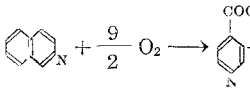
第10図 $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒における反応時間と収率との関係

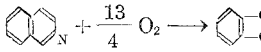
的に行なおうとすれば，3 hr 以上で 30% 近辺の収率で行なわれることになる。

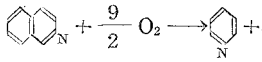
IV. 熱力学的考察

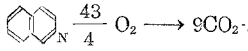
キノリンの空気酸化によつてピリジンまたはニコチン酸の生成することについての熱力学的考察に関連し，その異性体であるイソキノリンの空気酸化によるピリジンまたシンコメロン酸およびフタール酸の生成可能なることを平衡恒数と温度との関係より示すと， Nernst の近似式によつて，第2表に示されるように，ピリジンの生成反応式 *(3) から，ピリジンの生成平衡恒数を求めると， 400～1000 °K の範囲では $\log K_P$ は (+) であるし， また遊離エネルギーより求めた式によつて， シンコメロン酸の生成反応式 *(1)， フタール酸の生成反応式*(2) からそれぞれの生成の平衡恒数を求めると，400～1000 °K の範囲では $\log K_P$ は (+) であることが分つた。従つてイソキノリンより，実験室並びに工業的規模の温度では，空気酸化によつてピリジン，シンコメロン酸，フタール酸を生成することの可能なことは熱力学的にもまた可能であることが分る。

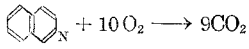
第 2 表 平衡恒数と温度との関係

°(1)  $+\frac{9}{2}O_2 \longrightarrow$ $+H_2O+2CO_2+447{,}992$ cal/mol

°(2)  $+\frac{13}{4}O_2 \longrightarrow$ $+\frac{1}{2}H_2O+CO_2+\frac{1}{2}N_2+345{,}060$ cal/mol

*(3)  $+\frac{9}{2}O_2 \longrightarrow$ $+4CO_2+H_2O+464{,}300$ cal/mol

*(4)  $\frac{43}{4}O_2 \longrightarrow 9CO_2+\frac{1}{2}N_2+\frac{7}{2}H_2O+1122{,}300$ cal/mol

*(5)  $+10O_2 \longrightarrow 9CO_2+NH_3+2H_2O+1033{,}250$ cal/mol

	$\log K$	T (°K)						
		400	500	600	700	800	900	1000
°(1)	$\log K_1$	236.4	187.4	154.8	131.4	113.8	100.2	89.2
°(2)	$\log K_2$	179.0	141.6	115.8	98.5	84.8	74.1	65.7
*(3)	$\log K_3$	257.2	208.0	174.0	150.0	132.0	120.0	101.0
*(4)	$\log K_4$	628.0	506.0	424.0	366.0	322.0	288.0	245.0
*(5)	$\log K_5$	577.0	464.0	389.0	335.0	295.0	264.0	239.0

* Nernst's equation

$$\left(\log K_P = \frac{Q_P}{4.575\,T} + 1.75 \log T \sum n_j + \sum n_j C_j\right)$$

$$\circ \left(\begin{array}{l} \left(\log K_{PT} = -\frac{\Delta G_T}{4.575\,T}\right), \quad \left(\Delta G^\circ_T = \Delta H^\circ_T - T(\Delta S^\circ_T)\right) \\ \left(\Delta S^\circ_T - \Delta S^\circ_{298} = \int_{298}^{T} \frac{\Delta C^\circ_P}{T}\,dT\right), \quad \left(\Delta H^\circ_T = \Delta H^\circ_{298} + \int_{298}^{T} \Delta C^\circ_P\,dT\right) \end{array}\right)$$

$\sum n_j$: 生成系と原系とのモル数の差

Q_P: 反 応 熱

C_j: j 番目の物質の暫定化学恒数

T: 絶対温度 (°K)

ΔG_T: T°K における遊離エネルギー変化

ΔH_T: T°K における熱含量の変化

ΔS_T: T°K におけるエントロピー増大

ΔC°_P: 恒圧 P における熱容量の差

また触媒作用としては，キナルジンの酸化，キノリンの酸化[7] 同様に，V_2O_5 では

$$V_2O_5 \rightleftarrows V_2O_4 + O \qquad (1)$$

の平衡が存在するものと考えられ，また $Sn(VO_3)_4$ では

$$Sn(VO_3)_4 \longrightarrow SnO_2 + 2V_2O_5 \rightleftarrows SnO_2 + 2V_2O_4 + 2O$$
$$\downarrow\uparrow$$
$$SnO + 2V_2O_4 + 3O \qquad (2)$$

いずれも発生機の酸素が酸化作用にあずかり，その酸素の欠乏を空気によつて補充されて平衡が成立するものと考えられる。すなわち，340°C でアルコールの SnO_2 による酸化作用[12]のように，SnO_2 がイソキノリンの熱分解によつて生ずる水素により還元されて SnO となり，SnO が空気により酸化されて SnO_2 となる反応が繰返されると考えられ，400°C 附近を中心にして，平衡が存在するものと思われる。従つて収率のよい $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ も上記の (1), (2) の組合せによつて説明されると考えられる。

V. 結　　論

1) 無触媒酸化では反応温度 400°C，理論空気量比 7.6，滴下速度 2 g/hr のとき，シンコメロン酸の収率が最高を示し，フタール酸も同様最高収率を示した。

2) 無触媒酸化では滴下速度がかなり収率に影響をおよぼす。

3) V_2O_5，MoO_3，単元触媒/軽石では，シンコメロン酸の収率はそれぞれ 500～550°C，450～500°C において良好である。触媒濃度によつて異なるが，無触媒酸化に比較し，余り効果的でなく V_2O_5 は完全燃焼の傾向が強い。

4) $V_2O_5+MoO_3$ 混合触媒/軽石では，反応温度 400°C，理論空気量比 9，空間速度 42000，滴下速度 3.8 g hr のとき，ピリジンの最高収率を示し，シンコメロン酸，フタール酸の収率は僅少で，脱カルボン酸の傾向が強いが，完全燃焼化は行なわれていないことを示す。

5) $Sn(VO_3)_4$ と SnO_2 との混合触媒では，反応温度 400°C 附近がよく，また 400°C では $Sn(VO_3)_4:SnO_2$ モル比が 1:3>1:1> 無触媒の順に収率が低下する。また $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ の場合には，400°C，空間速度 20300，滴下速度 3.1 g/hr のときは，最高収率 (46%) を示し，反応時間は 1～2 hr が一般によい。

6) 熱力学的に 400～1000 °K の範囲では，ピリジン，シンコメロン酸，フタール酸の生成可能なることが分る。

終りに当り，本実験において援助された早馬諒，佐藤博司，米沢健次工学士に感謝の意を表わし，また元素分析については，東工大有機化学教室並びに永廻研究室の皆様に謝意を表わし，最後に色々と御指導をいただいた佐藤久次教授に感謝の意を表わす。

(日本化学会第十一年会発表，東大)
(昭和 32 年 4 月 30 日受理)

12) Mailhe: Chem. Ztg., **33**, 30 (1909).
T. W. Mellor: Compre. Treat. Inorg. & Theor. Chem; VII, 401 (1927).

桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (III)

中 村 作 太 郎

Fundamental Studies on the Deflection Theory of Beam (III)

Sakutaro Nakamura

Abstract

The author with his former research[1] induced in general a differential equation on the assumption that the axile forces act on any height of the beam, at the same time under consideration of the height and changes of deflection curves of the beam as well as the effect of microhorizontal displacements at the supporting points.

He solved also those equations by means of the exhaustive theory of transcendental function concerned with the beam, and calculated minutely the deflection angles φ_1, φ_2 and the axile force X.

In this thesis, the author calculated the deflection of beam with the assumption that the axile force X will effect the central axis, $\pm\frac{1}{4}h$ line from the central axis, the bottom line and the surface line of the beam, in which the both ends were not presupposed to have the effects of the moments as in the former research.

Next he found the deflection of beam exceedingly less, when the concentrated loads W_1 and W_2 are on both ends and a concentrated load P is at any point of the beam, than when the P only is at any point of the beam; and he clarified after repeated calculation, the main causal forces of the diminution of deflection are the bending moments caused by the inertia of the concentrated loads W_1 and W_2 acted at the supported ends.

I. 緒　　論

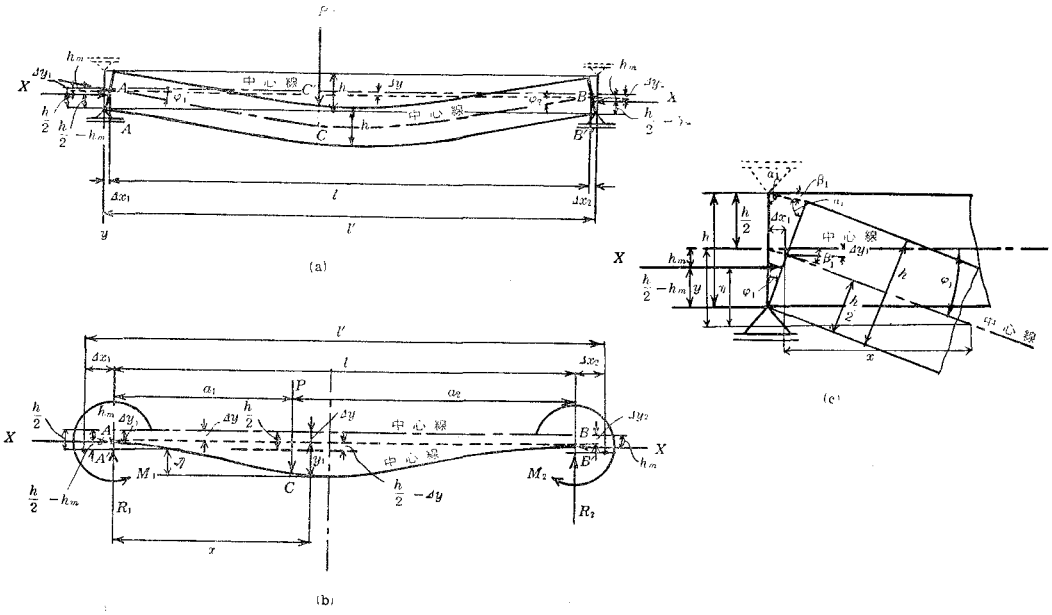
両端が単純支持或いは，鉸の状態で支えられている梁において，(1)，軸力が梁の任意の高さに作用する。(2)，梁の高さの影響をも考慮する。(3)，撓曲線の位置の変化と支点の水平微小変位をも考慮するという三つの影響を梁の基本微分方程式に入れ，超越函数による厳密理論によつてこれを解いた本理論並びに合成理論については，既に桁梁の撓み理論に関する基礎的研究(II)において述べたところであり，軸力 X の作用位置を種々変えた場合の軸力 X と撓角 φ_1,

1) Sakutaro Nakamura: Fundamental Studies on the Deflection Theory of Beam (II), Memoirs of the Muroran University of Engineering Vol. 2, No. 3, 1957.

φ_2 の厳密計算も行なつて見たのであるが，本文においては，更に，これらの値の実数項を用いて任意の点の撓みを広範囲に渡つて計算し，また，三角級数の理論[2]による撓み計算値をも広く求め，それらの値の各々と物理実験値とを比較論究し，梁の撓み理論を充分に吟味，究明せんとする。次に，両支点上に集中荷重が載る場合の撓みの減少率が極めて大きい事（既に発表せる如く，両支点上の集中荷重 $W=1.0$ kg，任意点の集中荷重 $P=0.20$ kg，支間 $l=40$ cm の小型模型梁の実験撓度は，集中荷重のない場合に比べ，約 20～45% の減少を見る。）に鑑み，その原因を種々探究せる結果，両支点上に載る集中荷重のため，梁の撓み曲線が変曲点を有する反曲線となるため少しく支点の仮移動を生じ撓みを減少させる主なる原因は，この支点の仮移動にともなう集中荷重 W_1，W_2 の慣性力による負の曲げモーメント（或いは，反力の仮移動による負の曲げモーメントとも考えられる）$-W_1\Delta x_1$，$-W_2\Delta x_2$ による事が明らかとなつた。そこで，これら支点の仮移動量 Δx_1，Δx_2 支点における集中荷重 W_1，W_2 による負の曲げモーメントなどに関する一連の計算を試み，撓み減少率に関する数値的の証明を得た。

II. 各種理論による撓み計算式

1. 本理論による撓み計算式



第 1 図　著者の軸力を考慮せる厳密撓み理論による梁

2) 中村作太郎：桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (I)，室蘭工業大学研究報告，第 2 巻，第 2 号，1956.

$$y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{R_1}{X}x-\frac{M_1}{X}\pm h_m\cdots\cdots 0\leqq x\leqq a_1 \tag{1}$$

$$y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\cos\mathrm{h}\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{R_2(l-x)}{X}-\frac{M_2}{X}\pm h_m\cdots\cdots a_1\leqq x\leqq l \tag{2}$$

ここに

$$\left.\begin{array}{l}\xi=\sqrt{\dfrac{X}{\mu KI}}\quad \text{或いは}\quad X=\mu\xi^2KI\\ \mu:\ \text{支点に水平微小変位を生ずるときの梁の材料によつて一定せる軸力に関する係数}\end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{両端における曲げモーメント}\\ \quad M_1=0,\qquad M_2=0\\ \text{反力}\\ \quad R_1=P(1-\varepsilon)l=\dfrac{P(l-a_1)}{l},\quad R_2=P\cdot\varepsilon\cdot l=\dfrac{Pa_1}{l}\end{array}\right\} \tag{4}$$

とすれば

$0\leqq x\leqq a_1$ において

$$y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2}\left\{-\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi+\frac{\varphi_1}{\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2}\left\{\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{R_1}{X}x\pm h_m \tag{5}$$

$a_1\leqq x\leqq l$ において

$$y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{R_2}{X\xi}+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\left\{-\frac{R_2}{X\xi}-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1\right.$$

$$-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_2(l-x)}{X}\pm h_m \qquad (6)$$

これらをもつと簡単に表わせば

$$\left.\begin{aligned}
&0\leqq x\leqq a_1 \text{ において}\\
&\quad y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2}A+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2}B+\frac{R_1}{X}x\pm h_m\\
&a_1\leqq x\leqq l \text{ において}\\
&\quad y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}C+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}D+\frac{R_2(l-x)}{X}\pm h_m
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

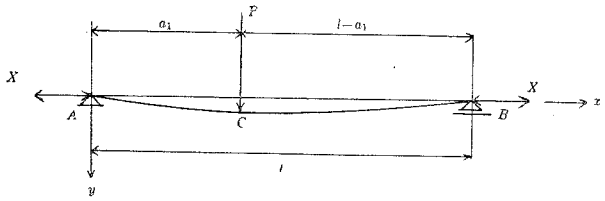
ここに

$$\left.\begin{aligned}
A&=\Big\{-\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\\
B&=\Big\{\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\\
C&=\Big\{\frac{R_2}{X\xi}+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\\
D&=\Big\{-\frac{R_2}{X\xi}-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

2. 合成理論による撓み計算式

合成理論による撓み計算式は，本理論による撓み計算式 (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) 式をそのまま用いる。

3. 三角級数の理論による撓み計算式



第 2 図　三角級数の理論による軸力ある梁

撓みは

$$y=\frac{2Pl^3}{EI\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2\pm a)}\sin\frac{n\pi a_1}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

ここに

$$a=\frac{Xl^2}{EI\pi^2} \qquad (9)$$

X: 本理論，合成理論によつて求めた計算値。但し，X が軸張力のときは，$+a$，軸圧力のときは，$-a$ を採用する。

a_1: 集中荷重の左支点より測つた距離

III. 撓み計算値の比較

上述の理論公式を用い，両端にモーメントの働かない場合について，研究第1報，第2報と同様，3種の材料，鋼鉄，白樫，孟宗竹の支間 $l=40$ cm の矩形断面小形模型梁に，単一集中荷重 $P=0.20$ kg が載る場合の任意の点の撓みを厳密に計算し，それらの計算値を互に比較すると共に，先に行なつた物理実験値とも比べて見る。

梁の寸法及び必要な諸数値は，第1表，第2表の如くである。

第1表 梁に関する諸数値 (1)

種別	b (cm)	h (cm)	l (cm)	P (kg)	A (cm^2)	h_m (cm)
鋼鉄梁	1.600	0.450	40.00	0.200	0.720000	0～±0.2250
白樫梁	1.567	0.439	40.00	0.200	0.691864	0～±0.2195
孟宗竹梁	1.340	0.438	40.00	0.200	0.586701	0～±0.2190

第2表 梁に関する諸数値 (2)

種別	E (kg/cm^2)	G (kg/cm^2)	k	I_z (cm^4)	r_z (cm)
鋼鉄梁	2,100,000	830,000	1.50	0.012150	0.1299038
白樫梁	135,000	97,000	1.50	0.011125	0.1268062
孟宗竹梁	150,000	77,000	1.50	0.009380	0.1264425

註 b…梁断面の幅 (cm), l…支間 (cm), h…梁断面の高さ (cm), P…集中荷重 (kg), A…断面積 (cm^2), E…弾性率 (kg/cm^2) G…剪断弾性係数 (kg/cm^2), ε…a_1/l, k…剪断弾性補正係数, I_z…z 軸に関する慣性能率 (cm^4), r_z…z 軸に関する環動半径 (cm), h_m…梁の中心線より軸力の作用線までの距離 (cm) (中心線より下方の場合は (+), 上方の場合は (−) とする。)

第3表～第27表は，本理論，合成理論，三角級数の理論公式などによる撓み計算値と物理実験値との比較を詳細に挙げたものである。但し，本理論：撓み，軸力，反力，モーメント等総て，著者の理論公式による他，撓角，φ_1，φ_2 も，著者の誘導せる厳密なる新理論公式を採用する場合 (本文の (1)～(8) 式並に桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (II) における (60)～(69) 式参照)。

合成理論：撓み，軸力，反力，モーメント等総て著者の理論公式によるが，撓角，φ_1，φ_2 だけ従来の厳密理論公式を用いる場合 (本文の (1)～(8) 式並びに桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (II) における (60)～(65) 式，(72)～(74) 式参照)。

三角級数による理論：軸力が作用する場合に対しても，撓みを求める式は，既に知られている如く，三角級数により表示せられる理論公式に依るが，その式に含まれる軸力 X は著

第3表 撓み比較表

$h_m = 0$ (軸張力)　　$a_1 = 0.1\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.001348	0.001340	0.001305	0.02312	0.02225	0.02750	0.02472	0.02373	0.02883
	合成理論	0.001349	0.001342		0.02348	0.02263		0.02508	0.02414	
0.2 l	本理論	0.002382	0.002347	0.002611	0.04025	0.03892	0.04865	0.04275	0.04149	0.04995
	合成理論	0.002384	0.002351		0.04094	0.03962		0.04371	0.04227	
0.3 l	本理論	0.002959	0.002923	0.002624	0.04972	0.04835	0.06175	0.05310	0.05155	0.05913
	合成理論	0.002963	0.002927		0.05065	0.04930		0.05412	0.05260	
0.4 l	本理論	0.003182	0.003148	0.003960	0.05295	0.05196	0.06863	0.05662	0.05540	0.06595
	合成理論	0.003186	0.003152		0.05423	0.05306		0.05796	0.05660	
0.5 l	本理論	0.003121	0.003091	0.002653	0.05192	0.05096	0.06955	0.05541	0.05433	0.06955
	合成理論	0.003125	0.003096		0.05302	0.05209		0.05669	0.05557	
0.6 l	本理論	0.002802	0.002776	0.001320	0.04630	0.04570	0.06730	0.04940	0.04871	0.06070
	合成理論	0.002803	0.002780		0.04743	0.04675		0.05072	0.04988	
0.7 l	本理論	0.002264	0.002249	0.000751	0.03743	0.03698	0.04965	0.03992	0.03942	0.03941
	合成理論	0.002269	0.002253		0.03830	0.03786		0.04096	0.04040	
0.8 l	本理論	0.001593	0.001583	0.000361	0.02690	0.02602	0.03550	0.02876	0.02774	0.02760
	合成理論	0.001597	0.001586		0.02691	0.02554		0.02877	0.02724	
0.9 l	本理論	0.0007952	0.0008229	0.000110	0.01342	0.01352	0.01834	0.01431	0.01441	0.01573
	合成理論	0.0007957	0.0008389		0.01398	0.01410		0.01495	0.01504	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第 4 表　撓 み 比 較 表

$h_m = 0$ (軸張力)　　$a_1 = 0.2\,l$　　(単位： cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.002420	0.002363	0.002611	0.03910	0.03896	0.04718	0.04322	0.04152	0.04850
	合成理論	0.002422	0.002367		0.03989	0.03958		0.04386	0.04221	
0.2 l	本理論	0.004355	0.004262	0.005220	0.07892	0.07016	0.09325	0.07721	0.07477	0.09200
	合成理論	0.004357	0.004268		0.08037	0.07133		0.07854	0.07608	
0.3 l	本理論	0.005582	0.005477	0.005250	0.10471	0.08999	0.11830	0.09820	0.09591	0.10780
	合成理論	0.005586	0.005485		0.10689	0.09158		0.10029	0.09767	
0.4 l	本理論	0.006106	0.006033	0.006605	0.10806	0.09897	0.12800	0.10732	0.10546	0.12670
	合成理論	0.006106	0.006022		0.10919	0.10044		0.10899	0.10712	
0.5 l	本理論	0.006011	0.005937	0.005305	0.10650	0.09722	0.12990	0.10463	0.10359	0.12470
	合成理論	0.006013	0.005947		0.10852	0.09883		0.10687	0.10570	
0.6 l	本理論	0.005381	0.005338	0.003960	0.10300	0.08642	0.12410	0.09253	0.09208	0.11740
	合成理論	0.005391	0.005347		0.10638	0.08903		0.09536	0.09495	
0.7 l	本理論	0.004364	0.004341	0.002624	0.07850	0.07087	0.09855	0.07540	0.07551	0.09590
	合成理論	0.004374	0.004349		0.08519	0.07612		0.07710	0.07717	
0.8 l	本理論	0.003082	0.003070	0.001305	0.05625	0.05009	0.06700	0.05312	0.05337	0.06438
	合成理論	0.003090	0.003076		0.05760	0.05116		0.05436	0.05457	
0.9 l	本理論	0.001606	0.001599	0.000650	0.02462	0.02609	0.03538	0.02783	0.02779	0.03408
	合成理論	0.001609	0.001602		0.02528	0.02665		0.02829	0.02842	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第5表 撓 み 比 較 表

$h_m = 0$ (軸張力)　　$a_1 = 0.3\,l$　　(単位： cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003011	0.002938	0.002611	0.04923	0.04805	0.06030	0.05330	0.05119	0.06025
	合成理論	0.003012	0.002942		0.05055	0.04929		0.05390	0.05250	
0.2 l	本理論	0.005624	0.005492	0.005220	0.09403	0.08977	0.11630	0.09862	0.09565	0.10910
	合成理論	0.005627	0.005500		0.09419	0.09152		0.10068	0.09748	
0.3 l	本理論	0.007333	0.006560	0.006560	0.12310	0.11977	0.16160	0.13190	0.12762	0.14850
	合成理論	0.007494	0.007345		0.12485	0.12139		0.13353	0.12929	
0.4 l	本理論	0.008423	0.008265	0.009240	0.13821	0.13482	0.17830	0.14760	0.14364	0.17880
	合成理論	0.008426	0.008279		0.13997	0.13639		0.14935	0.14526	
0.5 l	本理論	0.008391	0.008274	0.007960	0.13672	0.13475	0.18240	0.14360	0.14356	0.17070
	合成理論	0.008396	0.008288		0.13885	0.13669		0.14818	0.14557	
0.6 l	本理論	0.007580	0.007501	0.006605	0.12230	0.12197	0.16630	0.13051	0.12993	0.15710
	合成理論	0.007585	0.007514		0.12466	0.12425		0.13302	0.13231	
0.7 l	本理論	0.006187	0.006142	0.005250	0.09875	0.09974	0.13400	0.10632	0.10625	0.11570
	合成理論	0.006192	0.006153		0.10150	0.10252		0.10811	0.10834	
0.8 l	本理論	0.004379	0.004356	0.003915	0.07040	0.07068	0.09190	0.07522	0.07529	0.08938
	合成理論	0.004381	0.004364		0.07156	0.07187		0.07633	0.07653	
0.9 l	本理論	0.002664	0.002263	0.001305	0.03672	0.03672	0.04850	0.03910	0.03911	0.04717
	合成理論	0.002667	0.002268		0.03710	0.03715		0.03956	0.03956	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第 6 表　撓 み 比 較 表

$h_m = 0$ (軸張力)　　$a_1 = 0.4\,l$　　(単位： cm)

x	種　別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003196	0.003144	0.002611	0.05230	0.05076	0.06550	0.05420	0.05407	0.06420
	合成理論	0.003198	0.003150		0.05258	0.05106		0.05566	0.05458	
0.2 l	本理論	0.006115	0.006007	0.006530	0.09950	0.09702	0.12880	0.10570	0.10336	0.12230
	合成理論	0.006119	0.006018		0.10068	0.09801		0.10666	0.10434	
0.3 l	本理論	0.008414	0.008260	0.007870	0.13720	0.13344	0.17480	0.14550	0.14215	0.15380
	合成理論	0.008418	0.008276		0.13862	0.13479		0.14684	0.14351	
0.4 l	本理論	0.009660	0.009503	0.009240	0.15702	0.15339	0.21250	0.16620	0.16340	0.20340
	合成理論	0.009662	0.009522		0.15855	0.15497		0.16799	0.16502	
0.5 l	本理論	0.009498	0.009841	0.010620	0.16172	0.15876	0.21530	0.17172	0.16912	0.20340
	合成理論	0.009503	0.009861		0.16353	0.16041		0.17331	0.17084	
0.6 l	本理論	0.009152	0.009074	0.009240	0.14801	0.14619	0.19800	0.15660	0.15572	0.18880
	合成理論	0.009177	0.009092		0.14940	0.14775		0.15828	0.15738	
0.7 l	本理論	0.007521	0.007496	0.007870	0.12101	0.12061	0.16160	0.12840	0.12848	0.14320
	合成理論	0.007529	0.007649		0.12224	0.12193		0.12964	0.12990	
0.8 l	本理論	0.005332	0.005333	0.006530	0.08550	0.08572	0.11430	0.09062	0.09131	0.10780
	合成理論	0.005360	0.005344		0.08645	0.08668		0.09159	0.09235	
0.9 l	本理論	0.002780	0.002772	0.002611	0.04453	0.04454	0.05895	0.04703	0.04744	0.05635
	合成理論	0.002783	0.002640		0.04475	0.04482		0.04746	0.04799	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第7表 撓 み 比 較 表

$h_m = 0$ (軸張力)　　$a_1 = 0.5\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003047	0.003049	0.002611	0.04870	0.04881	0.06550	0.05099	0.05168	0.06288
	合成理論	0.003049	0.003056		0.04837	0.04859		0.05107	0.05176	
0.2 l	本理論	0.005947	0.005889	0.006530	0.09450	0.09436	0.12750	0.09992	0.09993	0.11440
	合成理論	0.005951	0.005903		0.09420	0.09394		0.10029	0.10008	
0.3 l	本理論	0.008372	0.008269	0.007870	0.13450	0.13265	0.17600	0.14183	0.14049	0.15770
	合成理論	0.008379	0.008288		0.13409	0.13207		0.14229	0.14070	
0.4 l	本理論	0.009992	0.009871	0.009240	0.16154	0.15848	0.21390	0.17092	0.16786	0.20460
	合成理論	0.010034	0.009894		0.16082	0.15779		0.17120	0.16811	
0.5 l	本理論	0.010452	0.010406	0.010620	0.17080	0.16708	0.23350	0.18050	0.17698	0.21650
	合成理論	0.010581	0.010430		0.16977	0.16636		0.18062	0.17724	
0.6 l	本理論	0.009992	0.009871	0.009240	0.16154	0.15848	0.21390	0.17092	0.16786	0.20460
	合成理論	0.010034	0.009894		0.16082	0.15779		0.17120	0.16811	
0.7 l	本理論	0.008372	0.008269	0.007870	0.13450	0.13265	0.17600	0.14183	0.14049	0.15770
	合成理論	0.008379	0.008288		0.13409	0.13207		0.14229	0.14070	
0.8 l	本理論	0.005947	0.005889	0.006530	0.09450	0.09436	0.12750	0.09992	0.09993	0.11440
	合成理論	0.005951	0.005903		0.09420	0.09394		0.10029	0.10008	
0.9 l	本理論	0.003047	0.003049	0.002611	0.04870	0.04881	0.06550	0.05099	0.05168	0.06288
	合成理論	0.003049	0.003056		0.04837	0.04859		0.05107	0.05176	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第 8 表　撓 み 比 較 表

$h_m = h/4$ (軸圧力)　　$a_1 = 0.1\,l$　　(単位： cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.001376	0.001344	0.001305	0.02502	0.02341	0.02750	0.02687	0.02498	0.02883
	合成理論	0.001372	0.001343		0.02503	0.02361		0.02706	0.02519	
0.2 l	本理論	0.002402	0.002355	0.002611	0.04321	0.04108	0.04865	0.04683	0.04384	0.04995
	合成理論	0.002400	0.002352		0.04363	0.04146		0.04717	0.04423	
0.3 l	本理論	0.002984	0.002932	0.002624	0.05332	0.05128	0.06175	0.05775	0.05472	0.05913
	合成理論	0.002983	0.002930		0.05399	0.05179		0.05841	0.05525	
0.4 l	本理論	0.003209	0.003158	0.003960	0.05725	0.05533	0.06863	0.06203	0.05905	0.06595
	合成理論	0.003208	0.003155		0.05779	0.05592		0.06255	0.05966	
0.5 l	本理論	0.003154	0.003102	0.002653	0.05573	0.05444	0.06955	0.06062	0.05809	0.06955
	合成理論	0.003147	0.003099		0.05652	0.05505		0.06118	0.05873	
0.6 l	本理論	0.002825	0.002786	0.001320	0.04998	0.04895	0.06730	0.05410	0.05224	0.06070
	合成理論	0.002822	0.002783		0.05055	0.04952		0.05474	0.05284	
0.7 l	本理論	0.002288	0.002257	0.000751	0.04042	0.03971	0.04965	0.04363	0.04238	0.03941
	合成理論	0.002285	0.002255		0.04082	0.04019		0.04421	0.04288	
0.8 l	本理論	0.001609	0.001589	0.000361	0.02835	0.02799	0.03550	0.03080	0.02986	0.02760
	合成理論	0.001608	0.001588		0.02869	0.02833		0.03105	0.03023	
0.9 l	本理論	0.0008014	0.0008261	0.000110	0.01470	0.01455	0.01834	0.01595	0.01552	0.01573
	合成理論	0.0008011	0.0008251		0.01489	0.01473		0.01614	0.01571	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第9表 撓み比較表

$h_n = h/4$ (軸圧力)　　$a_1 = 0.2\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.002440	0.002372	0.002611	0.04341	0.04161	0.04718	0.04723	0.04444	0.04850
	合成理論	0.002438	0.002370		0.04443	0.04228		0.04785	0.04514	
0.2 l	本理論	0.004395	0.004278	0.005220	0.07710	0.07515	0.09325	0.08452	0.08026	0.09200
	合成理論	0.004381	0.004274		0.07853	0.07641		0.03577	0.03158	
0.3 l	本理論	0.005625	0.005498	0.005250	0.10541	0.09677	0.11830	0.10735	0.10336	0.10780
	合成理論	0.005612	0.005494		0.10750	0.09848		0.10935	0.10516	
0.4 l	本理論	0.006149	0.006036	0.006605	0.10902	0.10646	0.12800	0.11762	0.11370	0.12670
	合成理論	0.006147	0.006032		0.11096	0.10799		0.11905	0.11532	
0.5 l	本理論	0.006051	0.005962	0.005305	0.10724	0.10534	0.12990	0.11573	0.11251	0.12470
	合成理論	0.006045	0.005957		0.10974	0.10738		0.11670	0.11467	
0.6 l	本理論	0.005425	0.005361	0.003960	0.10470	0.09487	0.12410	0.10115	0.10134	0.11740
	合成理論	0.005421	0.005357		0.10689	0.09635		0.10414	0.10289	
0.7 l	本理論	0.004403	0.004361	0.002624	0.09170	0.07726	0.09855	0.03170	0.08253	0.09590
	合成理論	0.004399	0.004356		0.08384	0.07888		0.08423	0.08453	
0.8 l	本理論	0.003109	0.003085	0.001305	0.06120	0.05470	0.06700	0.05816	0.05843	0.06438
	合成理論	0.003107	0.003082		0.06344	0.05586		0.05936	0.05964	
0.9 l	本理論	0.001619	0.001607	0.000650	0.02671	0.02849	0.03538	0.02861	0.03044	0.03408
	合成理論	0.001619	0.001605		0.02845	0.02910		0.03090	0.03103	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第10表　撓 み 比 較 表

$h_m = h/4$ (軸圧力)　　$a_1 = 0.3\,l$　　(単位： cm)

x	種　別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003045	0.002951	0.002611	0.05521	0.05220	0.06030	0.05882	0.05577	0.06025
	合成理論	0.003034	0.002949		0.05638	0.05346		0.06046	0.05727	
0.2 l	本理論	0.005671	0.005516	0.005220	0.10293	0.09770	0.11630	0.10952	0.10431	0.10910
	合成理論	0.005660	0.005512		0.10510	0.10001		0.11263	0.10716	
0.3 l	本理論	0.007549	0.007367	0.006560	0.13560	0.13051	0.16160	0.14551	0.13944	0.14850
	合成理論	0.007544	0.007361		0.13903	0.13375		0.14966	0.14332	
0.4 l	本理論	0.008479	0.008304	0.009240	0.15243	0.14731	0.17830	0.16302	0.15739	0.17880
	合成理論	0.008477	0.008298		0.15621	0.15108		0.16742	0.16191	
0.5 l	本理論	0.008458	0.008314	0.007960	0.15032	0.14773	0.18240	0.16100	0.15784	0.17070
	合成理論	0.008453	0.008308		0.15488	0.15165		0.16605	0.16255	
0.6 l	本理論	0.007640	0.007539	0.006605	0.13570	0.13417	0.16630	0.14481	0.14337	0.15710
	合成理論	0.007635	0.007533		0.13913	0.13786		0.14920	0.14780	
0.7 l	本理論	0.006239	0.006174	0.005250	0.10992	0.11002	0.13400	0.11772	0.11756	0.11570
	合成理論	0.006231	0.006168		0.11304	0.11313		0.12123	0.12114	
0.8 l	本理論	0.004430	0.004379	0.003915	0.07774	0.07816	0.09190	0.08283	0.08345	0.08938
	合成理論	0.004411	0.004375		0.07982	0.08034		0.08552	0.08615	
0.9 l	本理論	0.002691	0.002276	0.001305	0.04026	0.04060	0.04850	0.04304	0.04338	0.04717
	合成理論	0.002688	0.002274		0.04143	0.04177		0.04438	0.04480	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第11表 撓 み 比 較 表

$h_m = h/4$ (軸圧力) $a_1 = 0.4\,l$ (単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003235	0.003162	0.002611	0.05872	0.05674	0.06550	0.06275	0.06063	0.06420
	合成理論	0.003233	0.003159		0.06138	0.05928		0.06568	0.06350	
0.2 l	本理論	0.006191	0.006042	0.006530	0.11263	0.10838	0.12880	0.12006	0.11582	0.12230
	合成理論	0.006187	0.006037		0.11765	0.11321		0.12583	0.12127	
0.3 l	本理論	0.008514	0.003309	0.007870	0.15510	0.14902	0.17480	0.16551	0.15925	0.15380
	合成理論	0.003511	0.008302		0.16177	0.15565		0.17330	0.16674	
0.4 l	本理論	0.009771	0.009560	0.009240	0.16880	0.16394	0.21250	0.18920	0.18339	0.20340
	合成理論	0.009769	0.009552		0.18496	0.17936		0.19846	0.19216	
0.5 l	本理論	0.009632	0.009901	0.010620	0.18120	0.17654	0.21530	0.19380	0.13868	0.20340
	合成理論	0.009611	0.009892		0.19089	0.18594		0.20430	0.19921	
0.6 l	本理論	0.009288	0.009130	0.009240	0.16702	0.16420	0.19800	0.17801	0.17549	0.18880
	合成理論	0.009282	0.009122		0.17432	0.17188		0.18680	0.18416	
0.7 l	本理論	0.007616	0.007543	0.007870	0.13604	0.13584	0.16160	0.14593	0.14519	0.14320
	合成理論	0.007613	0.007537		0.14271	0.14234		0.15294	0.15215	
0.8 l	本理論	0.005434	0.005367	0.006530	0.09660	0.09673	0.11430	0.10305	0.10339	0.10780
	合成理論	0.005419	0.005362		0.10128	0.10144		0.10809	0.10870	
0.9 l	本理論	0.002815	0.002790	0.002611	0.05002	0.05031	0.05895	0.05320	0.05377	0.05635
	合成理論	0.002813	0.002787		0.05230	0.05277		0.05599	0.05656	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第12表　撓　み　比　較　表

$h_m = h/4$　(軸圧力)　　$a_1 = 0.5\,l$　　(単位：　cm)

x	種　　別	鋼　鉄　梁			白　樫　梁			孟　宗　竹　梁		
		著者の理論値	三角級数の理論値	実験値	著者の理論値	三角級数の理論値	実験値	著者の理論値	三角級数の理論値	実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003078	0.003071	0.002611	0.05524	0.05563	0.06550	0.05825	0.05936	0.06288
	合成理論	0.003071	0.003068		0.05950	0.06003		0.06304	0.06425	
0.2 l	本理論	0.005991	0.005932	0.006530	0.10741	0.10736	0.12750	0.11473	0.11456	0.11440
	合成理論	0.005989	0.005927		0.11586	0.11573		0.12383	0.12386	
0.3 l	本理論	0.008442	0.008329	0.007870	0.15290	0.15058	0.17600	0.16270	0.16068	0.15770
	合成理論	0.008440	0.008321		0.16496	0.16211		0.17560	0.17350	
0.4 l	本理論	0.010120	0.009941	0.009240	0.18401	0.17958	0.21390	0.21802	0.19163	0.20460
	合成理論	0.010099	0.009933		0.19791	0.19316		0.21112	0.20672	
0.5 l	本理論	0.010660	0.010480	0.010620	0.19423	0.18928	0.23350	0.20903	0.20362	0.21650
	合成理論	0.010657	0.010470		0.20889	0.20356		0.22330	0.21785	
0.6 l	本理論	0.010120	0.009941	0.009240	0.18401	0.17958	0.21390	0.21802	0.19163	0.20460
	合成理論	0.010099	0.009933		0.19791	0.19316		0.21112	0.20672	
0.7 l	本理論	0.008442	0.008329	0.007870	0.15290	0.15058	0.17600	0.16270	0.16068	0.15770
	合成理論	0.008440	0.008321		0.16496	0.16211		0.17560	0.17350	
0.8 l	本理論	0.005991	0.005932	0.006530	0.10741	0.10736	0.12750	0.11473	0.11456	0.11440
	合成理論	0.005989	0.005927		0.11586	0.11573		0.12383	0.12386	
0.9 l	本理論	0.003078	0.003071	0.002611	0.05524	0.05563	0.06550	0.05825	0.05936	0.06288
	合成理論	0.003071	0.003068		0.05950	0.06003		0.06304	0.06425	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第13表 撓 み 比 較 表

$h_m = h/4$ (軸圧力) $a_1 = 0.1\,l$ (単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.001375	0.001344	0.001305	0.02495	0.02341	0.02750	0.02702	0.02497	0.02883
	合成理論	0.001370	0.001343		0.02490	0.02339		0.02700	0.02495	
0.2 l	本理論	0.002410	0.002355	0.002611	0.04346	0.04110	0.04865	0.04640	0.04385	0.04995
	合成理論	0.002398	0.002352		0.04342	0.04106		0.04632	0.04381	
0.3 l	本理論	0.002985	0.002932	0.002624	0.05375	0.05130	0.06175	0.05779	0.05473	0.05913
	合成理論	0.002982	0.002929		0.05372	0.05126		0.05776	0.05469	
0.4 l	本理論	0.003209	0.003158	0.003960	0.05775	0.05536	0.06863	0.06188	0.05906	0.06595
	合成理論	0.003207	0.003154		0.05771	0.05530		0.06182	0.05900	
0.5 l	本理論	0.003149	0.003102	0.002653	0.05600	0.05446	0.06955	0.06059	0.05811	0.06955
	合成理論	0.003146	0.003098		0.05600	0.05439		0.06050	0.05803	
0.6 l	本理論	0.002829	0.002786	0.001320	0.05041	0.04897	0.06730	0.05417	0.05225	0.06070
	合成理論	0.002822	0.002782		0.05031	0.04892		0.05410	0.05220	
0.7 l	本理論	0.002290	0.002257	0.000751	0.04062	0.03973	0.04965	0.04370	0.04239	0.03941
	合成理論	0.002285	0.002254		0.04052	0.03970		0.04365	0.04235	
0.8 l	本理論	0.001615	0.001589	0.000361	0.02850	0.02800	0.03550	0.03078	0.02987	0.02760
	合成理論	0.001608	0.001587		0.02843	0.02797		0.03070	0.02984	
0.9 l	本理論	0.0008014	0.0008261	0.000110	0.01471	0.01455	0.01834	0.01596	0.01553	0.01573
	合成理論	0.0008011	0.0008249		0.01467	0.01453		0.01592	0.01550	
1.0 l	本論理	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第14表　撓　み　比　較　表

$h_m = h/2$ (軸圧力)　　$a_1 = 0.2\,l$　　(単位： cm)

x	種　別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.002441	0.002372	0.002611	0.04370	0.04161	0.04718	0.04701	0.04444	0.04850
	合成理論	0.002437	0.002370		0.04400	0.04193		0.04745	0.04476	
0.2 l	本理論	0.004385	0.004278	0.005220	0.07693	0.07516	0.09325	0.08443	0.08028	0.09200
	合成理論	0.004380	0.004274		0.07770	0.07577		0.08505	0.08089	
0.3 l	本理論	0.005612	0.005498	0.005250	0.10493	0.09661	0.11830	0.10723	0.10319	0.10780
	合成理論	0.005611	0.005493		0.10630	0.09761		0.10832	0.10422	
0.4 l	本理論	0.006153	0.006036	0.006605	0.10950	0.10679	0.12800	0.11412	0.11407	0.12670
	合成理論	0.006145	0.006030		0.11020	0.10742		0.11460	0.11469	
0.5 l	本理論	0.006049	0.005962	0.005305	0.10772	0.10590	0.12990	0.11520	0.11313	0.12470
	合成理論	0.006044	0.005956		0.10830	0.10632		0.11550	0.11352	
0.6 l	本理論	0.005432	0.005361	0.003960	0.10573	0.09520	0.12410	0.09123	0.10171	0.11740
	合成理論	0.005420	0.005355		0.10620	0.09580		0.09182	0.10229	
0.7 l	本理論	0.004410	0.004361	0.002624	0.09150	0.07709	0.09855	0.07971	0.08236	0.09590
	合成理論	0.004399	0.004356		0.09283	0.07806		0.08052	0.08335	
0.8 l	本理論	0.003103	0.003085	0.001305	0.06125	0.05470	0.06700	0.05754	0.05844	0.06438
	合成理論	0.003106	0.003081		0.06210	0.05526		0.05815	0.05901	
0.9 l	本理論	0.001624	0.001607	0.000650	0.02670	0.02850	0.03538	0.02975	0.03044	0.03408
	合成理論	0.001618	0.001605		0.02705	0.02878		0.03006	0.03073	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第15表 撓み比較表

$h_m = h/2$ (軸圧力)　　$a_1 = 0.3\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003030	0.002951	0.002611	0.05502	0.05221	0.06030	0.05892	0.05577	0.06025
	合成理論	0.003021	0.002948		0.05612	0.05324		0.06015	0.05702	
0.2 l	本理論	0.005649	0.005516	0.005220	0.10251	0.09765	0.11630	0.10951	0.10431	0.10910
	合成理論	0.005646	0.005512		0.10460	0.09959		0.11210	0.10668	
0.3 l	本理論	0.007548	0.007367	0.006560	0.13542	0.13053	0.16160	0.14510	0.13944	0.14850
	合成理論	0.007542	0.007361		0.13825	0.13318		0.14880	0.14266	
0.4 l	本理論	0.008469	0.008304	0.009240	0.15234	0.14733	0.17830	0.16271	0.15740	0.17880
	合成理論	0.008463	0.008297		0.15540	0.15041		0.16650	0.16115	
0.5 l	本理論	0.008454	0.008314	0.007960	0.15102	0.14775	0.18240	0.16110	0.15785	0.17070
	合成理論	0.008449	0.008307		0.15425	0.15096		0.16532	0.16176	
0.6 l	本理論	0.007637	0.007539	0.006605	0.13610	0.13498	0.16630	0.14552	0.14421	0.15710
	合成理論	0.007632	0.007532		0.13840	0.13721		0.14840	0.14705	
0.7 l	本理論	0.006235	0.006174	0.005250	0.12311	0.11003	0.13400	0.11763	0.11757	0.11570
	合成理論	0.006229	0.006168		0.11260	0.11258		0.12070	0.12067	
0.8 l	本理論	0.004408	0.004379	0.003915	0.07780	0.07811	0.09190	0.08290	0.08346	0.08938
	合成理論	0.004402	0.004375		0.07952	0.07994		0.08510	0.08569	
0.9 l	本理論	0.002692	0.002276	0.001305	0.04025	0.04060	0.04850	0.04293	0.04339	0.04717
	合成理論	0.002684	0.002273		0.04125	0.04156		0.04420	0.04456	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第16表　撓 み 比 較 表

$h_m = h/2$ (軸圧力)　　$a_1 = 0.4\,l$　　(単位： cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003241	0.003162	0.002611	0.05862	0.05675	0.06550	0.06713	0.06065	0.06420
	合成理論	0.003232	0.003159		0.06062	0.05860		0.06490	0.06274	
0.2 l	本理論	0.006189	0.006042	0.006530	0.11170	0.10840	0.12380	0.12010	0.11585	0.12230
	合成理論	0.006185	0.006032		0.11543	0.11191		0.12432	0.11983	
0.3 l	本理論	0.008518	0.008309	0.007870	0.15520	0.14905	0.17480	0.16552	0.15923	0.15380
	合成理論	0.008510	0.008304		0.16002	0.15387		0.17140	0.16476	
0.4 l	本理論	0.009767	0.009560	0.009240	0.17670	0.17164	0.21250	0.19004	0.18342	0.20140
	合成理論	0.009764	0.009549		0.18290	0.17729		0.19623	0.18984	
0.5 l	本理論	0.009614	0.009901	0.010620	0.18293	0.17785	0.21530	0.19571	0.19006	0.20340
	合成理論	0.009609	0.009890		0.18880	0.18377		0.20190	0.19678	
0.6 l	本理論	0.009232	0.009130	0.009240	0.16710	0.16422	0.19800	0.17810	0.17549	0.18880
	合成理論	0.009274	0.009120		0.17230	0.16982		0.18453	0.18187	
0.7 l	本理論	0.007611	0.007543	0.007870	0.13562	0.13550	0.16160	0.14535	0.14480	0.14320
	合成理論	0.007605	0.007531		0.14075	0.14060		0.15120	0.15058	
0.8 l	本理論	0.005432	0.005367	0.006530	0.09693	0.09674	0.11430	0.10291	0.10338	0.10780
	合成理論	0.005419	0.005364		0.10020	0.10017		0.10675	0.10729	
0.9 l	本理論	0.002816	0.002790	0.002611	0.04993	0.05031	0.05895	0.05322	0.05376	0.05635
	合成理論	0.002810	0.002786		0.05165	0.05211		0.05520	0.05582	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第17表 撓 み 比 較 表

$h_m = h/2$ (軸圧力) $a_1 = 0.5\,l$ (単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003092	0.003070	0.002611	0.05520	0.05565	0.06550	0.05852	0.05988	0.06288
	合成理論	0.003070	0.003068		0.05862	0.05914		0.06195	0.06328	
0.2 l	本理論	0.005989	0.005929	0.006530	0.10745	0.10739	0.12750	0.11540	0.11553	0.11440
	合成理論	0.005986	0.005925		0.11430	0.11407		0.12190	0.12204	
0.3 l	本理論	0.008440	0.008325	0.007870	0.15352	0.15061	0.17600	0.16381	0.16201	0.15770
	合成理論	0.008436	0.008319		0.16273	0.15983		0.17300	0.17100	
0.4 l	本理論	0.010140	0.009937	0.009240	0.18410	0.17962	0.21390	0.19820	0.19320	0.20460
	合成理論	0.010090	0.009930		0.19520	0.19047		0.20812	0.20377	
0.5 l	本理論	0.010670	0.010475	0.010620	0.19382	0.18932	0.23350	0.20823	0.20363	0.21650
	合成理論	0.010640	0.010468		0.20550	0.20072		0.21960	0.21473	
0.6 l	本理論	0.010140	0.009937	0.009240	0.18410	0.17962	0.21390	0.19820	0.19320	0.20460
	合成理論	0.010090	0.009930		0.19520	0.19047		0.20812	0.20377	
0.7 l	本理論	0.008440	0.008325	0.007870	0.15352	0.15061	0.17600	0.16381	0.16201	0.15770
	合成理論	0.008436	0.008319		0.16273	0.15983		0.17300	0.17100	
0.8 l	本理論	0.005989	0.005929	0.006530	0.10745	0.10739	0.12750	0.11540	0.11553	0.11440
	合成理論	0.005986	0.005925		0.11430	0.11407		0.12190	0.12204	
0.9 l	本理論	0.003092	0.003070	0.002611	0.05520	0.05565	0.06550	0.05852	0.05988	0.06288
	合成理論	0.003070	0.003068		0.05862	0.05914		0.06195	0.06328	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第18表　撓 み 比 較 表

$h_m = -h/4$ (軸張力)　　$a_1 = 0.1\,l$　　(単位： cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.001346	0.001340	0.001305	0.02315	0.02226	0.02750	0.02482	0.02373	0.02883
	合成理論	0.001349	0.001342		0.02290	0.02212		0.02460	0.02359	
0.2 l	本理論	0.002377	0.002348	0.002611	0.03962	0.03892	0.04865	0.04230	0.04150	0.04995
	合成理論	0.002381	0.002350		0.03942	0.03866		0.04260	0.04124	
0.3 l	本理論	0.002953	0.002923	0.002624	0.04940	0.04836	0.06175	0.05301	0.05156	0.05913
	合成理論	0.002960	0.002926		0.04920	0.04800		0.05272	0.05121	
0.4 l	本理論	0.003180	0.003148	0.003960	0.05302	0.05197	0.06863	0.05660	0.05541	0.06595
	合成理論	0.003183	0.003151		0.05271	0.05156		0.05625	0.05500	
0.5 l	本理論	0.003119	0.003091	0.002653	0.05175	0.05096	0.06955	0.05562	0.05434	0.06955
	合成理論	0.003121	0.003095		0.05143	0.05054		0.05506	0.05391	
0.6 l	本理論	0.002795	0.002776	0.001320	0.04625	0.04570	0.06730	0.04953	0.04872	0.06070
	合成理論	0.002800	0.002779		0.04582	0.04531		0.04911	0.04833	
0.7 l	本理論	0.002260	0.002249	0.000751	0.03740	0.03699	0.04965	0.04010	0.03943	0.03941
	合成理論	0.002265	0.002251		0.03710	0.03665		0.03973	0.03910	
0.8 l	本理論	0.001592	0.001583	0.000361	0.02723	0.02602	0.03550	0.02901	0.02774	0.02760
	合成理論	0.001594	0.001585		0.02690	0.02578		0.02876	0.02751	
0.9 l	本理論	0.007910	0.0008230	0.000110	0.01345	0.01352	0.01834	0.01430	0.01442	0.01573
	合成理論	0.000793	0.0008239		0.01329	0.01340		0.01418	0.01429	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第19表 撓 み 比 較 表

$h_m = -h/4$ (軸張力)　　$a_1 = 0.2\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.002419	0.002363	0.002611	0.03920	0.03896	0.04718	0.04325	0.04153	0.04850
	合成理論	0.002421	0.002368		0.03891	0.03876		0.04310	0.04133	
0.2 l	本理論	0.004351	0.004262	0.005220	0.07890	0.07017	0.09325	0.07742	0.07478	0.09200
	合成理論	0.004355	0.004266		0.07840	0.06978		0.07682	0.07440	
0.3 l	本理論	0.005580	0.005477	0.005250	0.09495	0.09000	0.11830	0.09840	0.09591	0.10780
	合成理論	0.005584	0.005482		0.09415	0.08948		0.09790	0.09540	
0.4 l	本理論	0.006095	0.006012	0.006605	0.10780	0.09862	0.12800	0.10690	0.10509	0.12670
	合成理論	0.006105	0.006019		0.10680	0.09802		0.10612	0.10450	
0.5 l	本理論	0.006007	0.005937	0.005305	0.10621	0.09723	0.12990	0.10482	0.10360	0.12470
	合成理論	0.006011	0.005944		0.10551	0.09660		0.10403	0.10299	
0.6 l	本理論	0.005381	0.005338	0.003960	0.10432	0.08728	0.12410	0.09341	0.09298	0.11740
	合成理論	0.005387	0.005344		0.09340	0.08669		0.09275	0.09242	
0.7 l	本理論	0.004352	0.004341	0.002624	0.07862	0.07088	0.09855	0.07543	0.07551	0.09590
	合成理論	0.004371	0.004346		0.07802	0.07039		0.07495	0.07504	
0.8 l	本理論	0.003082	0.003070	0.001305	0.05623	0.05010	0.06700	0.05330	0.05338	0.06438
	合成理論	0.003086	0.003074		0.05573	0.04975		0.05350	0.05353	
0.9 l	本理論	0.001607	0.001599	0.000650	0.02460	0.02609	0.03538	0.02772	0.02780	0.03403
	合成理論	0.001609	0.001603		0.02435	0.02590		0.02829	0.02843	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第20表 撓 み 比 較 表

$h_m = -h/4$ (軸張力)　　$a_1 = 0.3\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003003	0.002933	0.002611	0.04910	0.04805	0.06030	0.05260	0.05121	0.06025
	合成理論	0.003010	0.002941		0.04872	0.04758		0.05195	0.05061	
0.2 l	本理論	0.005618	0.005492	0.005220	0.09250	0.08978	0.11630	0.09362	0.09569	0.10910
	合成理論	0.005625	0.005497		0.09150	0.08889		0.09812	0.09515	
0.3 l	本理論	0.007488	0.007333	0.006560	0.12351	0.11978	0.16160	0.13204	0.12767	0.14850
	合成理論	0.007491	0.007340		0.12211	0.11857		0.13052	0.12611	
0.4 l	本理論	0.003420	0.003265	0.009240	0.13804	0.13483	0.17830	0.14801	0.14370	0.17880
	合成理論	0.003423	0.003274		0.13630	0.13343		0.14600	0.14189	
0.5 l	本理論	0.008389	0.008274	0.007960	0.13672	0.13475	0.18240	0.14652	0.14362	0.17070
	合成理論	0.008393	0.008232		0.13542	0.13330		0.14450	0.14174	
0.6 l	本理論	0.007579	0.007501	0.006605	0.12230	0.12197	0.16630	0.13035	0.12999	0.15710
	合成理論	0.007582	0.007509		0.12105	0.12061		0.12910	0.12822	
0.7 l	本理論	0.006185	0.006142	0.005250	0.09903	0.09974	0.13400	0.10630	0.10629	0.11570
	合成理論	0.006190	0.006149		0.09775	0.09859		0.10480	0.10481	
0.8 l	本理論	0.004372	0.004356	0.003915	0.07052	0.07069	0.09190	0.07525	0.07532	0.03938
	合成理論	0.004379	0.004361		0.06971	0.06985		0.07475	0.07485	
0.9 l	本理論	0.002661	0.002263	0.001305	0.03671	0.03672	0.04850	0.03910	0.03913	0.04717
	合成理論	0.002665	0.002266		0.03632	0.03629		0.03855	0.03857	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第21表 撓 み 比 較 表

$h_m = -h/4$ (軸張力)　　$a_1 = 0.4\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003192	0.003144	0.002611	0.05231	0.05076	0.06550	0.05520	0.05408	0.06420
	合成理論	0.003196	0.003147		0.05110	0.04961		0.05380	0.05277	
0.2 l	本理論	0.006057	0.006007	0.006530	0.09954	0.09703	0.12880	0.10591	0.10338	0.12230
	合成理論	0.006110	0.006059		0.09740	0.09484		0.10305	0.10039	
0.3 l	本理論	0.008409	0.008260	0.007870	0.13751	0.13345	0.17480	0.14552	0.14219	0.15380
	合成理論	0.008416	0.008270		0.13405	0.13044		0.14202	0.13876	
0.4 l	本理論	0.009654	0.009503	0.009240	0.15703	0.15340	0.21250	0.16630	0.16344	0.20340
	合成理論	0.009659	0.009514		0.15330	0.14988		0.16220	0.15944	
0.5 l	本理論	0.009489	0.009841	0.010620	0.17880	0.17533	0.21530	0.17203	0.16916	0.20340
	合成理論	0.009491	0.009853		0.15821	0.15509		0.16770	0.16498	
0.6 l	本理論	0.009170	0.009110	0.009240	0.14804	0.14620	0.19800	0.15670	0.15576	0.18880
	合成理論	0.009173	0.009085		0.14443	0.14272		0.15270	0.15181	
0.7 l	本理論	0.007525	0.007496	0.007870	0.12120	0.12063	0.16160	0.12853	0.12851	0.14320
	合成理論	0.007526	0.007485		0.11810	0.11769		0.12520	0.12517	
0.8 l	本理論	0.005337	0.005333	0.006530	0.08563	0.08573	0.11430	0.09061	0.09134	0.10780
	合成理論	0.005341	0.005339		0.08350	0.08361		0.08822	0.08892	
0.9 l	本理論	0.002776	0.002772	0.002611	0.04441	0.04454	0.05895	0.04690	0.04745	0.05635
	合成理論	0.002780	0.002775		0.04325	0.04343		0.04570	0.04619	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第22表　撓　み　比　較　表

$h_m = -h/4$　(軸張力)　　$a_1 = 0.5\,l$　　(単位：　cm)

x	種　　別	鋼　鉄　梁			白　樫　梁			孟　宗　竹　梁		
		著者の理論値	三角級数の理論値	実験値	著者の理論値	三角級数の理論値	実験値	著者の理論値	三角級数の理論値	実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003046	0.003050	0.002611	0.04860	0.04882	0.06550	0.05090	0.05170	0.06238
	合成理論	0.003049	0.003053		0.04622	0.04641		0.04870	0.04940	
0.2 l	本理論	0.005938	0.005892	0.006530	0.09471	0.09437	0.12750	0.09910	0.09996	0.11440
	合成理論	0.005941	0.005897		0.09020	0.08979		0.09477	0.09558	
0.3 l	本理論	0.008376	0.008274	0.007870	0.13482	0.13266	0.17600	0.14231	0.14053	0.15770
	合成理論	0.008379	0.008280		0.12820	0.12634		0.13610	0.13449	
0.4 l	本理論	0.010010	0.009877	0.009240	0.16140	0.15849	0.21390	0.17100	0.16791	0.20460
	合成理論	0.010030	0.009884		0.15402	0.15105		0.16370	0.16079	
0.5 l	本理論	0.010550	0.010412	0.010620	0.17105	0.16710	0.23350	0.18040	0.17703	0.21650
	合成理論	0.010580	0.010420		0.16270	0.15927		0.17290	0.16955	
0.6 l	本理論	0.010010	0.009877	0.009240	0.16140	0.15849	0.21390	0.17100	0.16791	0.20460
	合成理論	0.010030	0.009884		0.15402	0.15105		0.16370	0.16079	
0.7 l	本理論	0.008376	0.008274	0.007870	0.13482	0.13266	0.17600	0.14231	0.14053	0.15770
	合成理論	0.008379	0.008280		0.12820	0.12634		0.13610	0.13449	
0.8 l	本理論	0.005938	0.005892	0.006530	0.09471	0.09437	0.12750	0.09910	0.09996	0.11440
	合成理論	0.005941	0.005897		0.09020	0.08979		0.09477	0.09558	
0.9 l	本理論	0.003046	0.003050	0.002611	0.04860	0.04882	0.06550	0.05090	0.05170	0.06288
	合成理論	0.003049	0.003053		0.04622	0.04641		0.04870	0.04940	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第23表 撓 み 比 較 表

$h_m = -h/2$ (軸張力)　　$a_1 = 0.1\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.001350	0.001340	0.001305	0.02305	0.02226	0.02750	0.02475	0.02374	0.02883
	合成理論	0.001352	0.001342		5.02325	0.02244		0.02497	0.02393	
0.2 l	本理論	0.002379	0.002348	0.002611	0.03970	0.03892	0.04865	0.04302	0.04151	0.04995
	合成理論	0.002383	0.002351		0.04010	0.03927		0.04340	0.04187	
0.3 l	本理論	0.002962	0.002923	0.002624	0.04952	0.04836	0.06175	0.05311	0.05157	0.05913
	合成理論	0.002969	0.002927		0.05002	0.04883		0.05361	0.05209	
0.4 l	本理論	0.003186	0.003148	0.003960	0.05311	0.05197	0.06863	0.05670	0.05542	0.06595
	合成理論	0.003189	0.003152		0.05362	0.05251		0.05732	0.05603	
0.5 l	本理論	0.003120	0.003091	0.002653	0.05170	0.05096	0.06955	0.05552	0.05435	0.06955
	合成理論	0.003124	0.003096		0.05242	0.05152		0.05622	0.05498	
0.6 l	本理論	0.002813	0.002776	0.001320	0.04631	0.04570	0.06730	0.04950	0.04874	0.06070
	合成理論	0.002820	0.002780		0.04675	0.04623		0.05023	0.04932	
0.7 l	本理論	0.002248	0.002249	0.000751	0.03745	0.03699	0.04965	0.04002	0.03944	0.03941
	合成理論	0.002268	0.002252		0.03792	0.03742		0.04050	0.03992	
0.8 l	本理論	0.001579	0.001583	0.000361	0.02711	0.02602	0.03550	0.03540	0.02775	0.02760
	合成理論	0.001597	0.001586		0.02741	0.02634		0.03710	0.02807	
0.9 l	本理論	0.0007941	0.0008229	0.000110	0.01342	0.01352	0.01834	0.01431	0.01442	0.01573
	合成理論	0.0007950	0.0008242		0.01358	0.01369		0.01449	0.01459	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第24表　撓 み 比 較 表

$h_m = -h/2$ (軸張力)　　$a_1 = 0.2\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.002417	0.002364	0.002611	0.03905	0.03897	0.04718	0.04340	0.04153	0.04850
	合成理論	0.002422	0.002367		0.03970	0.03940		0.04382	0.04202	
0.2 l	本理論	0.004353	0.004262	0.005220	0.07902	0.07017	0.09325	0.07732	0.07478	0.09200
	合成理論	0.004357	0.004268		0.07990	0.07099		0.07822	0.07571	
0.3 l	本理論	0.005583	0.005477	0.005250	0.09490	0.09001	0.11830	0.09843	0.09592	0.10780
	合成理論	0.005586	0.005484		0.09640	0.09112		0.09980	0.09717	
0.4 l	本理論	0.006101	0.006012	0.006605	0.10704	0.09851	0.12800	0.10702	0.10510	0.12670
	合成理論	0.006108	0.006021		0.10902	0.09991		0.10840	0.10655	
0.5 l	本理論	0.006010	0.005937	0.005305	0.10631	0.09711	0.12990	0.10472	0.10360	0.12470
	合成理論	0.006015	0.005946		0.10800	0.09856		0.10630	0.10510	
0.6 l	本理論	0.005382	0.005338	0.003960	0.10403	0.08717	0.12410	0.09350	0.09299	0.11740
	合成理論	0.005390	0.005346		0.09590	0.08852		0.09475	0.09439	
0.7 l	本理論	0.004371	0.004341	0.002624	0.07875	0.07088	0.09855	0.07553	0.07552	0.09590
	合成理論	0.004375	0.004348		0.08002	0.07193		0.07660	0.07670	
0.8 l	本理論	0.003084	0.003070	0.001305	0.05640	0.05010	0.06700	0.05342	0.05338	0.06438
	合成理論	0.003089	0.003076		0.05730	0.05085		0.05420	0.05423	
0.9 l	本理論	0.001603	0.001599	0.000650	0.02451	0.02609	0.03538	0.02802	0.02780	0.03408
	合成理論	0.001609	0.001602		0.02510	0.02648		0.02842	0.02824	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第25表 撓 み 比 較 表

$h_m = -h/2$ (軸張力)　　$a_1 = 0.3\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
$0.1\,l$	本理論	0.003025	0.002938	0.002611	0.04920	0.04805	0.06030	0.05251	0.05122	0.06025
	合成理論	0.003030	0.002942		0.04960	0.04846		0.05302	0.05160	
$0.2\,l$	本理論	0.005627	0.005492	0.005220	0.09251	0.08978	0.11630	0.09860	0.09570	0.10910
	合成理論	0.005631	0.005500		0.09330	0.09056		0.09940	0.09643	
$0.3\,l$	本理論	0.007490	0.007333	0.006560	0.12343	0.11978	0.16160	0.13220	0.12767	0.14850
	合成理論	0.007494	0.007344		0.12440	0.12084		0.13321	0.12867	
$0.4\,l$	本理論	0.008421	0.008265	0.009240	0.13804	0.13483	0.17830	0.14802	0.14371	0.17880
	合成理論	0.008426	0.008278		0.13960	0.13607		0.14902	0.14486	
$0.5\,l$	本理論	0.008394	0.008274	0.007960	0.13702	0.13476	0.18240	0.14640	0.14363	0.17070
	合成理論	0.008397	0.008287		0.13810	0.13604		0.14760	0.14482	
$0.6\,l$	本理論	0.007582	0.007501	0.006605	0.12263	0.12197	0.16630	0.13102	0.13000	0.15710
	合成理論	0.007585	0.007513		0.12392	0.12318		0.13220	0.13112	
$0.7\,l$	本理論	0.006205	0.006142	0.005250	0.09890	0.09974	0.13400	0.10635	0.10630	0.11570
	合成理論	0.006210	0.006152		0.09980	0.10076		0.10732	0.10725	
$0.8\,l$	本理論	0.004378	0.004356	0.003915	0.07061	0.07068	0.09190	0.07525	0.07533	0.08938
	合成理論	0.004382	0.004363		0.07125	0.07142		0.07592	0.07601	
$0.9\,l$	本理論	0.002661	0.002263	0.001305	0.03672	0.03672	0.04850	0.03911	0.03913	0.04717
	合成理論	0.002667	0.002267		0.03711	0.03710		0.03945	0.03949	
$1.0\,l$	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第26表　撓 み 比 較 表

$h_m = -h/2$ (軸張力)　　$a_1 = 0.4\,l$　　(単位： cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003194	0.003144	0.002611	0.05240	0.05077	0.06550	0.05521	0.05402	0.06420
	合成理論	0.003199	0.003149		0.05227	0.05073		0.05510	0.05401	
0.2 l	本理論	0.006105	0.006007	0.006530	0.09934	0.09704	0.12880	0.10567	0.10339	0.12230
	合成理論	0.006110	0.006017		0.09952	0.09697		0.10562	0.10324	
0.3 l	本理論	0.008415	0.008260	0.007870	0.13751	0.13346	0.17480	0.14550	0.14219	0.15380
	合成理論	0.008418	0.008274		0.13730	0.13337		0.14543	0.14199	
0.4 l	本理論	0.009657	0.009503	0.009240	0.15702	0.15342	0.21250	0.16632	0.16345	0.20340
	合成理論	0.009662	0.009520		0.15692	0.15331		0.16620	0.16321	
0.5 l	本理論	0.009490	0.009841	0.010620	0.16200	0.15879	0.21530	0.17115	0.16917	0.20340
	合成理論	0.009493	0.009858		0.16180	0.15867		0.17102	0.16892	
0.6 l	本理論	0.009172	0.009074	0.009240	0.14802	0.14622	0.19800	0.15692	0.15577	0.18880
	合成理論	0.009176	0.009090		0.14792	0.14610		0.15651	0.15554	
0.7 l	本理論	0.007530	0.007496	0.007870	0.12114	0.12041	0.16160	0.12846	0.12852	0.14320
	合成理論	0.007533	0.007510		0.12113	0.12055		0.12830	0.12832	
0.8 l	本理論	0.005342	0.005333	0.006530	0.08590	0.08598	0.11430	0.09063	0.09134	0.10780
	合成理論	0.005346	0.005342		0.08562	0.08568		0.09050	0.09120	
0.9 l	本理論	0.002785	0.002772	0.002611	0.04450	0.04455	0.05895	0.04703	0.04753	0.05635
	合成理論	0.002788	0.002777		0.04440	0.04451		0.04695	0.04738	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

第27表 撓 み 比 較 表

$h_m = -h/2$ (軸張力)　　$a_1 = 0.5\,l$　　(単位: cm)

x	種別	鋼鉄梁 著者の理論値	鋼鉄梁 三角級数の理論値	鋼鉄梁 実験値	白樫梁 著者の理論値	白樫梁 三角級数の理論値	白樫梁 実験値	孟宗竹梁 著者の理論値	孟宗竹梁 三角級数の理論値	孟宗竹梁 実験値
0	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	
0.1 l	本理論	0.003049	0.003050	0.002611	0.04875	0.04882	0.06550	0.05090	0.05170	0.06288
	合成理論	0.003052	0.003054		0.04730	0.04754		0.04980	0.05063	
0.2 l	本理論	0.005941	0.005892	0.006530	0.09480	0.09439	0.12750	0.09910	0.09997	0.11440
	合成理論	0.005946	0.005900		0.09240	0.09195		0.09701	0.09792	
0.3 l	本理論	0.008379	0.008274	0.007870	0.13481	0.13268	0.17600	0.14250	0.14054	0.15770
	合成理論	0.008383	0.008285		0.13121	0.12931		0.13970	0.13772	
0.4 l	本理論	0.010010	0.009877	0.009240	0.16150	0.15852	0.21390	0.17101	0.16792	0.20460
	合成理論	0.010050	0.009889		0.15762	0.15455		0.16752	0.16459	
0.5 l	本理論	0.010530	0.010412	0.010620	0.17062	0.16712	0.23350	0.18052	0.17705	0.21650
	合成理論	0.010600	0.010425		0.16640	0.16295		0.17680	0.17354	
0.6 l	本理論	0.010010	0.009877	0.009240	0.16150	0.15852	0.21390	0.17101	0.16792	0.20460
	合成理論	0.010050	0.009889		0.15762	0.15455		0.16752	0.16459	
0.7 l	本理論	0.008379	0.008274	0.007870	0.13481	0.13268	0.17600	0.14250	0.14054	0.15770
	合成理論	0.008383	0.008285		0.13121	0.12931		0.13970	0.13772	
0.8 l	本理論	0.005941	0.005892	0.006530	0.09480	0.09439	0.12750	0.09910	0.09997	0.11440
	合成理論	0.005946	0.005900		0.09240	0.09195		0.09701	0.09792	
0.9 l	本理論	0.003049	0.003050	0.002611	0.04875	0.04882	0.06550	0.05090	0.05170	0.06288
	合成理論	0.003052	0.003054		0.04730	0.04754		0.04980	0.05063	
1.0 l	本理論	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	合成理論	0	0		0	0		0	0	

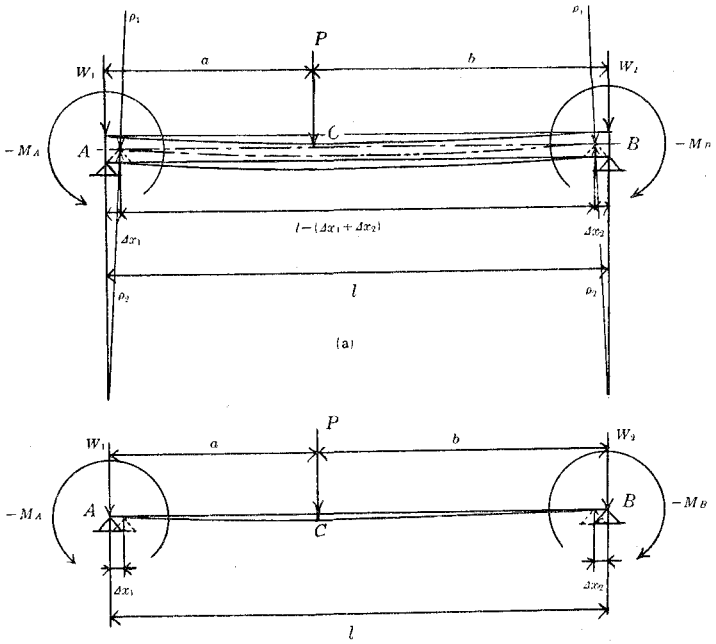
者の提案せる本理論，合成理論公式を用いて求めるものとする。(本文の(9)式並びに，桁梁の撓み理論に関する基礎的研究(I)における(28)〜(32)式参照)。

上記の如き撓み y の計算，並びに，既に発表せる“桁梁の撓み理論に関する基礎的研究”(II)における軸力 X と，撓角，φ_1，φ_2 の計算に用いた軸力係数[3] μ は，著者の提案せる本理論合成理論の式を用いて撓み実験値より逆算的に求めた値の平均値により決定せるもので，次の如き値をとつた。

第28表　係　数　μ

種　　別	鋼　鉄　梁	白　樫　梁	孟 宗 竹 梁
本　理　論	± 0.016413	± 0.31265	± 0.32361
合 成 理 論	± 0.028470	± 0.28513	± 0.49237

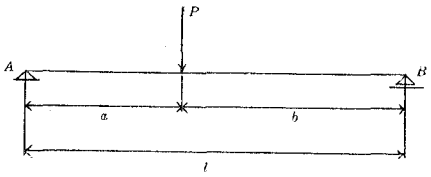
IV. 両支点上に集中荷重 W_1，W_2 があり，任意の点に単一集中荷重 P が載る場合の撓みその他



第 3 図　両支点上と中間点に集中荷重のある梁

3)　本研究報告(3)式参照。
中村作太郎：桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (II)，室蘭工業大学研究報告，第2巻，第3号，1957における(10)式参照。

第3図の如く，両端において単純に支持された梁の両支点上に集中荷重 W_1, W_2 があり，更に，任意の点に単一集中荷重 P が載る場合の撓みは，任意の点に載る集中荷重 P のみによる単純梁の(+)の撓みと，両支点上に載る集中荷重 W_1, W_2 の慣性力のため生ずる両端における負の曲げモーメントによる(−)の撓みとの合成によつて求める事が出来る。



第4図 単一集中荷重のみを受ける梁

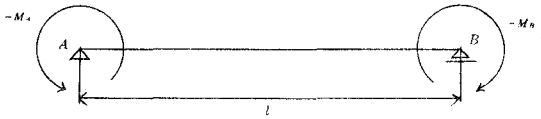
1. 任意点に載る集中荷重 P のみによる撓み公式 (第4図参照)

単純梁の任意の点における撓みは，既知の如く次式によつて求める事が出来る。

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{Pbx}{6lEJ}\left(l_2-b_2-x_2\right) \cdots\cdots 0 \leqq x \leqq a \\ y_1 &= \frac{Pa(l-x)}{6lEJ}\left\{b(l+a)-(l-x)^2\right\} \cdots\cdots a \leqq x \leqq l \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ここに
y_1: 任意の点の撓み (cm)
P: 集中荷重 (kg)
l: 支　間 (cm)
E: 弾性係数 (kg/cm²)
J: 断面の慣性能率 (cm⁴)
a: 左支点より荷重点までの距離 (cm)
b: 右支点より荷重点までの距離 (cm)
(11)

2. 両支点に負の曲げモーメント，$-M_A$, $-M_B$ のみが作用する場合の撓み公式 (第5図参照)



第5図 両端に曲げモーメントを受ける梁

慣性能率一定なる単純梁 AB の支点 A, B に負の曲げモーメント，$-M_A=-W_1\cdot\Delta x_1$, $-M_B=-W_2\cdot\Delta x_2$ が作用する時，任意の点の撓みは，次式によつて求める事が出来る。

$$y_2=-\left\{\frac{M_A}{6lEJ}x(l-x)(2l-x)+\frac{M_B}{6lEJ}x(l-x)(l+x)\right\} \tag{12}$$

ここに
y_2: 任意の点の撓み (cm)
M_A: 左支点 A に与えた曲げモーメントの絶対値 (kg-cm)
M_B: 右支点 B に与えた曲げモーメントの絶対値 (kg-cm)
l: 支　間 (cm)
E: 弾性係数 (kg/cm²)
J: 断面の慣性能率 (cm⁴)
(13)

3. 両支点上に集中荷重 W_1, W_2, 任意の点に単一集中荷重 P が載る場合の撓み公式 (第3図参照)

(10) と (12) 式を合成して次の如き撓み公式が得られる。

$$y = y_1+y_2 = \frac{1}{6lEJ}\left\{Pbx(l^2-b^2-x^2)-M_A\cdot x(l-x)(2l-x)-M_Bx(l-x)(l+x)\right\}$$
$$= \frac{1}{6lEJ}\left\{Pbx(l^2-b^2-x^2)-W_1\cdot \Delta x_1\cdot x(l-x)(2l-x)\right.$$
$$\left.-W_2\cdot \Delta x_2\cdot x(l-x)(l+x)\right\} \cdots\cdots 0 \leqq x \leqq a \tag{14}$$

$$y = y_1+y_2 = \frac{1}{6lEJ}\left[Pa(l-x)\{b(l+a)-(l-x)^2\}\right.$$
$$\left.-M_A\cdot x(l-x)(2l-x)-M_Bx(l-x)(l+x)\right]$$
$$= \frac{1}{6lEJ}\left[Pa(l-x)\{b(l+a)-(l-x)^2\}-W_1\cdot \Delta x_1\cdot x(l-x)(2l-x)\right.$$
$$\left.-W_2\cdot \Delta x_2\cdot x(l-x)(l+x)\right] \cdots\cdots a \leqq x \leqq l \tag{15}$$

ここに

$$\left.\begin{array}{ll} y: & \text{任意の点の撓み (cm)} \\ l: & \text{支　　間 (cm)} \\ E: & \text{弾性係数 (kg/cm}^2\text{)} \\ J: & \text{断面の慣性能率 (cm}^4\text{)} \\ W_1: & \text{左支点 } A \text{ 上に載る集中荷重 (kg)} \\ W_2: & \text{右支点 } B \text{ 上に載る集中荷重 (kg)} \\ \Delta x_1: & \text{左支点の仮移動量 (cm)} \\ \Delta x_2: & \text{右支点の仮移動量 (cm)} \\ M_A,\ M_B: & W_1,\ W_2 \text{ の慣性力による左, 右支点における曲げモーメントの絶対値 (kg-cm)} \end{array}\right\} \tag{16}$$

4. 両支点上に載る集中荷重 W_1, W_2 の慣性力のため生ずる負の曲げモメーントによる (−) の撓み (y_2) と支点の水平仮移動量 (Δx_1, Δx_2) の計算

上述の計算式を用い，第1表，第2表に掲載せる如き，3種の材料，鋼鉄，白樫，孟宗竹の支間 $l=40$ cm の矩形断面小形模型梁において，両支点上にそれぞれ集中荷重 $W_1=W_2=1.0$ kg が載り，更に任意の点に単一集中荷重 $P=0.20$ kg が載つた場合の荷重点の実験撓み値より単一集中荷重 $P=0.20$ kg のみが梁に載つたときの荷重点の実験撓み値を引き，$-M_1=-W_1\cdot \Delta x_1$, $-M_2=-W_2\cdot \Delta x_2$ により生ずる (−) の撓み値を求めんとする。なお梁における計算に必要な諸数値を求めれば第29表の如くである。

第 29 表

種　　別	l (cm)	E (kg/cm^2)	J (cm^4)	$6lEJ$ (kg-cm^3)	$\frac{1}{6lEJ}$ (1/kg-cm^3)
鋼　鉄　梁	40	2,100,000	0.012150	6,123,600	0.000000163302
白　樫　梁	40	135,000	0.011125	360,450	0.000002774310
孟宗竹梁	40	150,000	0.009380	337,680	0.000002961380

第30表　鋼鉄梁の減少撓み　(y_2)

x (cm)	$\frac{x(l-x)(2l-x)}{6lEJ}$	$\frac{x(l-x)(l+x)}{6lEJ}$	y_2 (cm)
0	0	0	0
$0.1l=$ 4.0	0.0017872	0.0010347	$-(0.0017872M_A+0.0010347M_B)$
$0.2l=$ 8.0	0.0030100	0.0020067	$-(0.0030100M_A+0.0020067M_B)$
$0.3l=$ 12.0	0.0037311	0.0028532	$-(0.0037311M_A+0.0028532M_B)$
$0.4l=$ 16.0	0.0040133	0.0035116	$-(0.0040133M_A+0.0035116M_B)$
$0.5l=$ 20.0	0.0039192	0.0039192	$-(0.0039192M_A+0.0039192M_B)$
$0.6l=$ 24.0	0.0035116	0.0040133	$-(0.0035116M_A+0.0040133M_B)$
$0.7l=$ 28.0	0.0028532	0.0037311	$-(0.0028532M_A+0.0037311M_B)$
$0.8l=$ 32.0	0.0020067	0.0030100	$-(0.0020067M_A+0.0030100M_B)$
$0.9l=$ 36.0	0.0010347	0.0017872	$-(0.0010347M_A+0.0017872M_B)$
$1.0l=$ 40.0	0	0	0

第31表　白樫梁の減少撓み　(y_2)

x (cm)	$\frac{x(l-x)(2l-x)}{6lEJ}$	$\frac{x(l-x)(l+x)}{6lEJ}$	y_2 (cm)
0	0	0	0
$0.1l=$ 4.0	0.0303620	0.0175780	$-(0.0303620M_A+0.0175780M_B)$
$0.2l=$ 8.0	0.0511361	0.0340907	$-(0.0511361M_A+0.0340907M_B)$
$0.3l=$ 12.0	0.0633874	0.0484727	$-(0.0633874M_A+0.0484727M_B)$
$0.4l=$ 16.0	0.0681814	0.0596587	$-(0.0681814M_A+0.0596587M_B)$
$0.5l=$ 20.0	0.0665834	0.0665834	$-(0.0665834M_A+0.0665834M_B)$
$0.6l=$ 24.0	0.0596587	0.0681814	$-(0.0596587M_A+0.0681814M_B)$
$0.7l=$ 28.0	0.0484727	0.0633874	$-(0.0484727M_A+0.0633874M_B)$
$0.8l=$ 32.0	0.0340907	0.0511361	$-(0.0340907M_A+0.0511361M_B)$
$0.9l=$ 36.0	0.0175780	0.0303620	$-(0.0175780M_A+0.0303620M_B)$
$1.0l=$ 40.0	0	0	0

第32表 孟宗竹梁の減少撓み (y_2)

x (cm)	$\frac{x(l-x)(2l-x)}{6lEJ}$	$\frac{x(l-x)(l+x)}{6lEJ}$	y_2 (cm)
0	0	0	0
$0.1l=4.0$	0.0324094	0.0187633	$-(0.0324094M_A+0.0187633M_B)$
$0.2l=8.0$	0.0545842	0.0363895	$-(0.0545842M_A+0.0363895M_B)$
$0.3l=12.0$	0.0676617	0.0517413	$-(0.0676617M_A+0.0517413M_B)$
$0.4l=16.0$	0.0727790	0.0636816	$-(0.0727790M_A+0.0636816M_B)$
$0.5l=20.0$	0.0710732	0.0710732	$-(0.0710732M_A+0.0710732M_B)$
$0.6l=24.0$	0.0636816	0.0727790	$-(0.0636816M_A+0.0727790M_B)$
$0.7l=28.0$	0.0517413	0.0676617	$-(0.0517413M_A+0.0676617M_B)$
$0.8l=32.0$	0.0363895	0.0545842	$-(0.0363895M_A+0.0545842M_B)$
$0.9l=36.0$	0.0187633	0.0324094	$-(0.0187633M_A+0.0324094M_B)$
$1.0l=40.0$	0	0	0

更に，両支点上に載る集中荷重を，$W_1=W_2=1.0$ kg，任意の点に載る単一集中荷重を $P=0.20$ kg とし，両端における M_A，M_B 及び Δx_1，Δx_2 の比を固定梁における両端モーメントの比に等しいと仮定して分配すれば次の如くなる（第33表参照）。

また，係数 α を求めれば第34表の如くなる。

上記の α の数値を用い，Δx_1，Δx_2 を計算すれば第35表が得られる。

第33表 Δx_1, Δx_2 及び M_A, M_B の値

荷重の位置	$0.1l=4.0$	$0.2l=8.0$	$0.3l=12.0$	$0.4l=16.0$	$0.5l=20.0$
Δx_1 (cm)	$0.648\,\alpha l$	$1.024\,\alpha l$	$1.176\,\alpha l$	$1.152\,\alpha l$	$1.0\,\alpha l$
Δx_2 (cm)	$0.072\,\alpha l$	$0.256\,\alpha l$	$0.504\,\alpha l$	$0.768\,\alpha l$	$1.0\,\alpha l$
M_A (kg-cm)	$25.92\,\alpha$	$40.96\,\alpha$	$47.04\,\alpha$	$46.08\,\alpha$	$40\,\alpha$
M_B (kg-cm)	$2.88\,\alpha$	$10.24\,\alpha$	$20.16\,\alpha$	$30.72\,\alpha$	$40\,\alpha$

荷重の位置	$0.6l=24.0$	$0.7l=23.0$	$0.8l=32.0$	$0.9l=36.0$
Δx_1 (cm)	$0.768\,\alpha l$	$0.504\,\alpha l$	$0.256\,\alpha l$	$0.072\,\alpha l$
Δx_2 (cm)	$1.152\,\alpha l$	$1.176\,\alpha l$	$1.024\,\alpha l$	$0.648\,\alpha l$
M_A (kg-cm)	$30.72\,\alpha$	$20.16\,\alpha$	$10.24\,\alpha$	$2.88\,\alpha$
M_B (kg-cm)	$46.08\,\alpha$	$47.04\,\alpha$	$40.96\,\alpha$	$25.92\,\alpha$

第34表 係数 α の値

$x=a$	鋼鉄梁		白樫梁		孟宗竹梁	
	α を求むる式	α	α を求むる式	α	α を求むる式	α
$0.1l=4.0$	$-0.049304\alpha=-0.000342$	0.0069366	$-0.837608\alpha=-0.007870$	0.0093958	$-0.894090\alpha=-0.014880$	0.0166430
$0.2l=8.0$	$-0.143839\alpha=-0.000670$	0.0046580	$-2.443624\alpha=-0.033920$	0.0138810	$-2.608397\alpha=-0.057750$	0.0221400
$0.3l=12.0$	$-0.233032\alpha=-0.001500$	0.0064369	$-3.958953\alpha=-0.052200$	0.0131850	$-4.225911\alpha=-0.084650$	0.0200310
$0.4l=16.0$	$-0.292809\alpha=-0.002400$	0.0081965	$-4.974514\alpha=-0.060400$	0.0121420	$-5.309955\alpha=-0.100850$	0.0189930
$0.5l=20.0$	$-0.313536\alpha=-0.003480$	0.0110992	$-5.326672\alpha=-0.062600$	0.0117520	$-5.685856\alpha=-0.089500$	0.0157410
$0.6l=24.0$	$-0.292809\alpha=-0.002400$	0.0081965	$-4.974514\alpha=-0.060400$	0.0121420	$-5.309955\alpha=-0.100850$	0.0189930
$0.7l=28.0$	$-0.233032\alpha=-0.001500$	0.0064369	$-3.958953\alpha=-0.052200$	0.0131850	$-4.225911\alpha=-0.084650$	0.0200310
$0.8l=32.0$	$-0.143839\alpha=-0.004656$	0.0046580	$-2.443624\alpha=-0.033920$	0.0131850	$-2.608397\alpha=-0.057750$	0.0221400
$0.9l=36.0$	$-0.049304\alpha=-0.000342$	0.0069366	$-0.837608\alpha=-0.007870$	0.0093958	$-0.894090\alpha=-0.014880$	0.0166430

第35表 Δx_1, Δx_2 の計算値 (cm)

$x=a$	鋼鉄梁		白樫梁		孟宗竹梁	
	Δx_1	Δx_2	Δx_1	Δx_2	Δx_1	Δx_2
$0.1l=4.0$	$0.004495l=0.179800$	$0.0004994l=0.01998$	$0.006088l=0.24354$	$0.0006765l=0.02706$	$0.010785l=0.43139$	$0.001198l=0.04793$
$0.2l=8.0$	$0.004770l=0.190790$	$0.001192l=0.04770$	$0.014214l=0.56857$	$0.003554l=0.14214$	$0.022671l=0.90685$	$0.005668l=0.22671$
$0.3l=12.0$	$0.007570l=0.302790$	$0.003244l=0.12977$	$0.015506l=0.62022$	$0.006645l=0.26581$	$0.023556l=0.94226$	$0.010096l=0.40382$
$0.4l=16.0$	$0.009442l=0.377690$	$0.006295l=0.25180$	$0.013988l=0.55950$	$0.009325l=0.37300$	$0.021880l=0.87520$	$0.014587l=0.58346$
$0.5l=20.0$	$0.011099l=0.443970$	$0.011099l=0.44397$	$0.011752l=0.47008$	$0.011752l=0.47008$	$0.015741l=0.62964$	$0.015741l=0.62964$
$0.6l=24.0$	$0.006295l=0.251800$	$0.009442l=0.37769$	$0.009325l=0.37300$	$0.013988l=0.55950$	$0.014587l=0.58346$	$0.021880l=0.87520$
$0.7l=28.0$	$0.003244l=0.129770$	$0.007570l=0.30279$	$0.006645l=0.26581$	$0.015506l=0.62022$	$0.010096l=0.40382$	$0.023556l=0.94226$
$0.8l=32.0$	$0.001162l=0.047698$	$0.004770l=0.19079$	$0.003554l=0.14214$	$0.014214l=0.56857$	$0.005668l=0.22671$	$0.022671l=0.90685$
$0.9l=36.0$	$0.0004994l=0.019977$	$0.004495l=0.17980$	$0.0006765l=0.02706$	$0.006088l=0.24354$	$0.001198l=0.04793$	$0.010785l=0.43139$

また，M_A，M_B は，Δx_1，Δx_2 に W_1，W_2 を乗ずれば簡単に求まる。今，仮りに $W_1=W_2=1.0$ kg とすれば，第35表における Δx_1，Δx_2 の数値は単位だけ換え，kg-cm とすれば，そのまま M_A，M_B の表として用いる事が出来る。

V. 結　　論

第3表～第27表における計算の結果，鋼鉄梁においては，$h_m=0$，$\frac{h}{4}$，$\frac{h}{2}$，$-\frac{h}{4}$，$-\frac{h}{2}$ の如何を問わず，$a_1=0.5\,l$ に集中荷重あるときの最大撓みの生ずる点において，撓みの実験値と理論値とは大差なく，軸張力の作用する時は実験値の方が最大で2%程度大きく，軸圧力の作用する時は最大で0.5%程度，理論値の方が大きく，理論値と実験値が非常によく接近して好結果が得られた。集中荷重が梁の端部に近づくに従つて，この差異は，漸次大きくなつて来て，$a_1=0.1\,l$ に集中荷重ある時に最大となり，この場合，理論値の方が実験値よりも大体において大きくなつており，撓みの割合大きいカ所においては，平均10%程度理論値の方が大きかつた。また，$a_1=0.1\,l$，$0.2\,l$，$0.3\,l$，$0.4\,l$，$0.5\,l$ 何れの荷重位置に対しても軸圧力の作用する場合の方が軸張力の作用するときよりも理論値と実験値が相接近している事は理の当然とは云え注目に値する事と思う。次に，白樫梁，孟宗竹梁おいては，鋼鉄梁の場合に比べ理論値と実験値の差異は，幾分大きくなつているが，矢張り，軸圧力の作用する $h_m=\frac{h}{4}$，$\frac{h}{2}$ の場合の方が軸張力の作用する $h_m=0$，$-\frac{h}{4}$，$-\frac{h}{2}$ のときよりも理論値が実験値に遙かに相接近して来ている。殊に，孟宗竹梁においては，鋼鉄梁に相次いで理論値が実験値に近く，軸圧力の作用する $h_m=\frac{h}{4}$，$\frac{h}{2}$ において，$a_1=0.5\,l$ に集中荷重が載る場合は，本理論では，実験値の方が少しく（平均6.0%程度）大きい事もあれば，理論値の方が幾分（平均3.0%程度）大きい事もあり，これは実験値と理論とか相接近している事を意味する。白樫梁においては，多少，この差は大きくなつていて，軸圧力の作用する $h_m=\frac{h}{4}$，$\frac{h}{2}$ において，平均10%程度実験値の方が大きくなつている。白樫梁，孟宗竹梁共，その他の荷重位置について云えば，荷重が端部に近づくに従い，その差が漸次増える傾向にあり，$a_1=0.1\,l$ に集中荷重ある場合，実験値の方が理論値よりも，相当（孟宗竹梁で平均15%，白樫梁で，平均20%程度）大きくなつている。端部に荷重が近づく程差異が大きくなるのは矢張り鋼鉄梁の場合に相似ている。これを要するに，鋼鉄梁，白樫梁，孟宗竹梁の如何によらず，また，荷重の位置の如何にかかわらず，軸圧力の作用する場合の方が軸張力の作用するときよりも，理論値と実験値が相接近しているという事実は両端単純支持の実験の際，軸圧力が作用し，その作用線は，$h_m=\frac{h}{4}$，$\frac{h}{2}$ 附近に存在するものである事を証明するものである。また，本理論と合成理論による撓み計算値を比較して見ると，軸張力が作用する場合は，2，3の例外を除き，大体において，本理論よりも合成理論の方が幾分大きくなつている。これに反し，軸圧力の作用する場合は，鋼鉄梁において

は，本理論の方が合成理論よりも幾分大きい撓み値を示し，白樫梁，孟宗竹梁の場合は，合成理論の方が本理論よりも幾分大きくなつている。更にまた，本理論，合成理論による撓み計算値は，三角級数の理論による撓み計算値（但し，軸力 X は，本理論，合成理論による値を採用する。）と比較して見ると，大差がないので，軸力 X の計算は，本理論，合成理論の解式によつて求め，その結果を，軸力を考慮せる三角級数の理論式に代入する事によつて計算の手数を著しく省く事が出来るから，三角級数による理論式の併用を，厳密撓みの実用計算法として，設計計算などに推奨出来ると思う。次に，両支点上に集中荷重 W_1，W_2 が載り，任意の点に単一集中荷重 P が載る場合は，撓み実験値より逆に計算を行なつた結果，第35表において明らかな如く，撓みの反曲線の変曲点にともなう支点の仮移動量（或いは反力の仮移動量とも考えられる）Δx_1，Δx_2 は，鋼鉄梁において，最大 0.444 cm，白樫梁にて，0.620 cm，孟宗竹梁では 0.942 cm となり，支間 $l=40.0$ cm のそれぞれ，$0.0111\,l$，$0.0155\,l$，$0.0236\,l$ となる。即ち，支点の仮移動に基づく両支点上に載る集中荷重 W_1，W_2 の慣性力による負の曲げモーメント（或いは，反力の仮移動による負の曲げモーメントとも考えられる。）$-M_A$，$-M_B$ によつて撓みが著しく減少させられ，既に，“桁梁の撓み理論に関する基礎的研究”(I) において発表せる如き実験結果（約 20～45% の減少率）を与えたものと解釈する事が出来る。最後に，本篇は“桁梁の撓み理論に関する基礎的研究”(I)，(II) の終結篇なる事を附記する。

(昭和 33 年 4 月 30 日受理)

弾性固定桁の立体的解法と格子鈑桁橋への応用計算

中村作太郎

A Cubic Solution on Girder Elastically Fixed and an Applied Calculation on Lattice Plate Girder Bridge

Sakutaro Nakamura

Abstract

The author induced some formulae for the cubic theory on the ends elastically fixed girder having a concentrated load at any point, and applied the same formulae to the calculation on the lattice plate girder in railway bridge.

I. 緒　　論

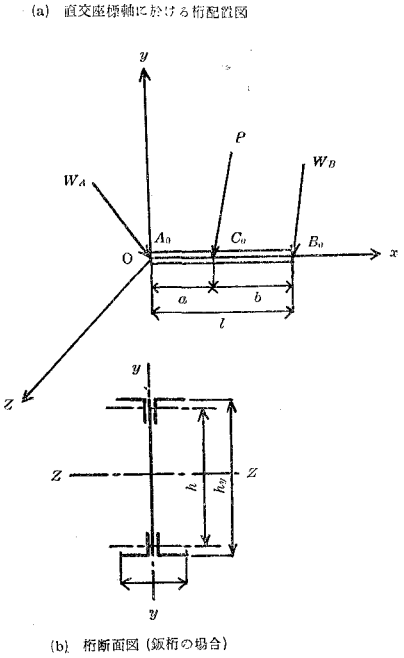
任意の方向を以つて色々な点に作用する同一平面内にない互に釣合の状態にある力群 P_1, P_2, P_3……が一つの物体に作用するものとすれば，その作用点は，直角座標系の座標 x, y, z によつて定められる。M_x, M_y, M_z を以つて，x, y, z 軸に関する P_1, P_2, P_3……等の合力 P の静力学的モーメントを表し，X, Y, Z を以つて P の三軸 x, y, z 方向の分力を表すものとすれば立体的の力の系[1]においては，6個の釣合条件 $\sum M_x=0$, $\sum M_y=0$, $\sum M_z=0$; $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum Z=0$ が必要且つ先分なる条件である。今，一つの桁が両端においてある条件のもとに弾性的に固定支持され，桁の長さを l, 断面積を A, 桁断面二次モーメントを I, 捩り抵抗モーメントを J_d とし，この桁が荷重のために立体的の変位を受け，支点は勿論，桁の上の任意の点もそれぞれ，δ_{xA}, δ_{xB}, δ_{yA}, δ_{yB}, δ_{zA}, δ_{zB}, δ_{mA}, δ_{mB} 等の移動を生じたとする。著者は，この荷重と変位との間の関係について，全体として成立する関係式を求め，更に縦方向の軸力，捩り応力等の影響をも考慮に入れて立体的の一般理論解式を導いた。また，両端支点上に荷重のない場合の解式，両支点上に荷重なく，しかも両端における支点の変位零なる場合の解式などをも求め，桁橋の応力計算を行なうのに便利ならしめた。すなわち，応用例

1) 小野薫外4氏共訳：キルヒホッフ骨組の力学，上巻，下巻，1942.
H. Müller-Breslau: Die Neueren der Festigkeitslehre, 1924.

として，両端の弾性的に固定された格子鈑桁鉄道橋がKS-18荷重を受ける場合について，これらの公式を用い，精密なる計算を試みた。その結果については普通の単純支持による鈑桁鉄道橋並びに二軸両端固定の鈑桁鉄道橋の計算結果と比較し，三軸両端弾性固定による本計算結果が一番，断面の節約が出来，しかも最も実際に近く，優れて居る事を述べんとする。

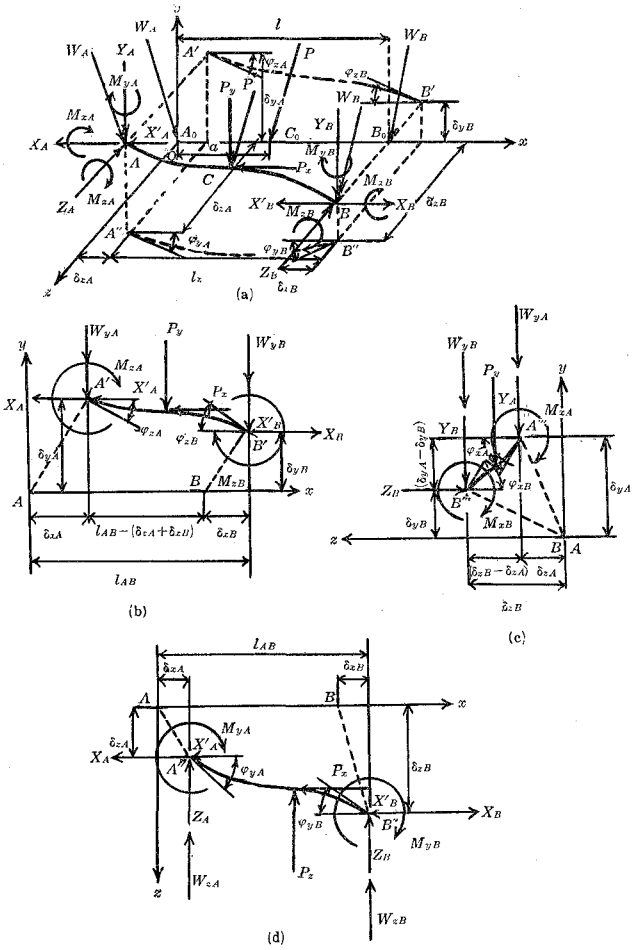
II. 弾性的両端固定桁の立体的理論による一般解式

第1図に示す如く，A_0B_0 なる弾性固定桁が直交座標軸 $oxyz$ の交点 O にその左端 A_0 を置き，x 軸の上に横たわる時，任意の方向の荷重 P，その A_0 端に荷重 W_A，B_0 端に荷重 W_B が載り，任意の立体的変形を受け，A_0 は A に，B_0 は B に変位したものとする。すなわち，第2図において，X_A : A 点における x 軸方向の軸力，X_B : B 点における x 軸方向の軸力，Y_A, Z_A : A 点における y 及び z 軸方向の剪断力を表わし，それぞれの軸の負の方向に向うものを正とする。Y_B, Z_B : B 点における y 及び z 軸方向の剪力を表わし，それぞれの軸の負の方向に向うものを正とする。P_y, P_z : y 及び z 軸方向に作用する任意の集中荷重を表わし，任意の集中荷重 P の y 及び z 軸方向への分力とも考えられる。それぞれの軸の負の方向に向うものを正とする。φ_{xA}, φ_{yA}, φ_{zA} : A 点における x 軸の周りの捩れ角及び y, z 軸の周りの角を表わし，何れもそれぞれの軸の正の方向に向つて反時計方向に廻転する場合を正とする。φ_{xB}, φ_{yB}, φ_{zB} : B 点における x 軸の周りの捩れ角及び y, z 軸の周りの角を表わし，何れもそれぞれの軸の正の方向に向つて反時計方向に廻転する場合を正とする。δ_{xA}, δ_{yA}, δ_{zA} : A 点における部材端変位の x, y 及び z 軸方向の分値を表わし，何れもそれぞれの軸の正の方向へ変位した場合を正とする。M_{xA}, M_{yA}, M_{zA} : A 点における x 軸の周りの捩りモーメント及び y, z 軸の周りの端モーメントを表わし，それぞれの軸の正の方向に向つて反時計廻りのものを正とする。M_{xB}, M_{yB}, M_{zB} : B 点における x 軸の周りの捩りモーメント及び y, z 軸の周りの端モーメントを表わし，それぞれの軸の正の方向に向つて反時計廻りのものを正とする。k_x : x 軸の周りの捩り剛性係数，I_y, I_z : y 及び z 軸に関する桁断面の二次モーメント，Q_{yA}, Q_{yB} : AB 桁を単純桁と考えた時の荷重 P_y, p_y などによる材端剪断力，Q_{zA}, Q_{zB} : AB 桁を単純桁と考えたとき



第1図 桁の配置と断面図

の荷重 P_z, p_z などによる材端剪断力, C_{yA}, C_{yB} : AB 桁を固定桁と考えたときの荷重 P_z, p_z などによる端モーメント, C_{zA}, C_{zn} : AB 桁を固定桁と考えたときの荷重 P_y, p_y などによる端モーメント, W_{yA}, W_{yB} ; W_{zA}, W_{zB} : A, B 端における荷重 W_A, W_B の y 軸及び z 軸方向の分力。とすれば, 次の如き解式[2] が誘導せられる。



第 2 図　桁の立体的変位図

2) 中村作太郎: 弾性的両端固定桁の立体的解法, 土木学会北海道支部研究発表会に於いて一部発表, 1956.

中村作太郎: 任意の荷重を受ける一般桁梁の支点に関する基礎理論について, 第 4 回応用力学連合講演会に於いて一部発表, 1954.

結城朝恭・吉田俊弥: 立体ラーメンに於ける捩りモーメントに就いて. 土木学会誌, 第 38 巻, 第 10 号 1953.

鷹部屋福平: 高級桁梁論, 1929.

A 点において

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{xA} &= \frac{k_x G}{l}\left(\varphi_{xA}-\varphi_{xB}\right) - W_{yA}\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{xA} \\
M_{yA} &= \frac{2EI_y}{l}\left\{2\varphi_{yA}+\varphi_{yB}+3\frac{(\delta_{zA}-\delta_{zB})}{l}\right\}+C_{yA}+W_{zA}\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yA} \\
M_{zA} &= \frac{2EI_z}{l}\left\{2\varphi_{zA}+\varphi_{zB}-3\frac{(\delta_{yA}-\delta_{yB})}{l}\right\}-C_{zA}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zA} \\
Y_A &= -\frac{6EI_z}{l^2}\left\{\varphi_{zA}+\varphi_{zB}-\frac{2}{l}(\delta_{yA}-\delta_{yB})\right\}+Q_{yA}+\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB}) \\
&\quad +\frac{1}{l}\left[W_{yA}\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zA}-W_{yB}\left\{\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zB}+(\delta_{yA}-\delta_{yB})\tan\varphi_{zB}\right\}\right] \\
Z_A &= -\frac{6EI_y}{l^2}\left\{\varphi_{yA}+\varphi_{yB}+\frac{2}{l}(\delta_{zA}-\delta_{zB})+Q_{zA}+\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})\right. \\
&\quad +\frac{1}{l}\left[W_{zA}\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yA}-W_{zB}\left\{\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yB}+(\delta_{zA}-\delta_{zB})\tan\varphi_{yB}\right\}\right] \\
X_A &= \frac{A}{I_y\cdot l}\left(\int_0^a\frac{z}{2}M_{yx}dx+\int_0^l\frac{z}{2}M_{yx}dx\right)+\frac{A}{I_z\cdot l}\left(\int_0^a\frac{y}{2}M_{zx}dx\right. \\
&\quad \left.+\int_0^l\frac{y}{2}M_{zx}dx\right)
\end{aligned}
\right\}\quad(1)
$$

B 点において

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{xB} &= -\frac{k_x G}{l}(\varphi_{xB}-\varphi_{xA})+W_{yB}\left\{\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{xB}+(\delta_{yA}-\delta_{yB})\tan\varphi_{xB}\right\} \\
M_{yB} &= \frac{2EI_y}{l}\left\{\varphi_{yA}+2\varphi_{yB}+3\frac{(\delta_{zA}-\delta_{zB})}{l}\right\}-C_{yB}-W_{zB}\left\{\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yB}\right. \\
&\quad \left.+(\delta_{zA}-\delta_{zB})\tan\varphi_{yB}\right\} \\
M_{zB} &= \frac{2EI_y}{l}\left\{\varphi_{zA}+2\varphi_{zB}-3\frac{(\delta_{yA}-\delta_{yB})}{l}\right.+C_{zB}+W_{yB}\left\{\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zB}\right. \\
&\quad \left.+(\delta_{yA}-\delta_{yB})\tan\varphi_{zB}\right\} \\
Y_B &= \frac{6EI_z}{l^2}\left\{\varphi_{zB}+\varphi_{zA}-\frac{2}{l}(\delta_{yA}-\delta_{yB})\right\}+Q_{yB}-\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB}) \\
&\quad -\frac{1}{l}\left[W_{yA}\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zA}-W_{yB}\left\{\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zB}+(\delta_{yA}-\delta_{yB})\tan\varphi_{zB}\right\}\right] \\
Z_B &= -\frac{6EI_y}{l^2}\left\{\varphi_{yA}+\varphi_{yB}+\frac{2}{l}(\delta_{zA}-\delta_{zB})\right\}+Q_{zB}-\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB}) \\
&\quad -\frac{1}{l}\left[W_{zA}\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yA}-W_{zB}\left\{\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yB}+(\delta_{zA}-\delta_{zB})\tan\varphi_{yB}\right\}\right] \\
X_B &= -\left\{\frac{A}{I_y\cdot l}\left(\int_0^a\frac{z}{2}M_{yx}dx+\int_a^l\frac{z}{2}M_{yx}dx\right)+\frac{A}{I_z\cdot l}\left(\int_0^a\frac{y}{2}M_{zx}dx\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\int_0^l\frac{y}{2}M_{zx}dx\right)\right\}
\end{aligned}
\right\}\quad(2)
$$

M_{yx}, M_{zx}：任意の点における y 軸，z 軸の周りの曲げモーメント。とすれば，次式[3]により表わす事が出来る。

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{yx} &= \frac{R_{yA}}{\gamma}\sinh\gamma x - M_{yA}\cosh\gamma x - \varphi_{yA}\gamma K I_y \sinh\gamma x \cdots\cdots 0 \leqq x \leqq a \\
M_{yx} &= \frac{R_{yB}}{\gamma}\sinh\gamma(l-x) - M_{yB}\cosh\gamma(l-x) - \varphi_{yB}\gamma K I_y \sinh\gamma(l-x) \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots a \leqq x \leqq l \\
M_{zx} &= \frac{R_{zA}}{\gamma}\sinh\gamma x - M_{zA}\cosh\gamma x - \varphi_{zA}\gamma K I_z \sinh\gamma x \cdots\cdots 0 \leqq x \leqq a \\
M_{zx} &= \frac{R_{zB}}{\gamma}\sinh\gamma(l-x) - M_{zB}\cosh\gamma(l-x) - \varphi_{zB}\gamma K I_z \sinh\gamma(l-x) \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots a \leqq x \leqq l \\
\gamma &= \sqrt{\frac{X}{\rho\left(E+\frac{X}{A}\right)I_z}}, \qquad \rho = \text{係数}
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_{yA} &= \frac{P_z ab(l+b)}{6lE} + \frac{l}{6EI_y}\left[-W_{zA}h_z\sin\varphi_{yA} - W_{zB}\left\{\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yB}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (\delta_{zA}-\delta_{zB})\tan\varphi_{yB}\right\}\right] \\
\varphi_{yB} &= -\frac{P_z ab(l+a)}{6lEI_y} + \frac{l}{6EI_y}\left[W_{zB}\left\{h_z\sin\varphi_{yB} + 2(\delta_{zA}-\delta_{zB})\tan\varphi_{yB}\right\}\right. \\
&\qquad \left. + W_{zA}\frac{h_z}{2}\sin\varphi_{yA}\right] \\
\varphi_{zA} &= \frac{P_y ab(l+b)}{6lEI_z} + \frac{l}{6EI_z}\left[-W_{yA}h_y\sin\varphi_{zA} - W_{yB}\left\{\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zB}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (\delta_{yA}-\delta_{yB})\tan\varphi_{zB}\right\}\right] \\
\varphi_{zB} &= -\frac{P_y ab(l+a)}{6lEI_z} + \frac{l}{6EI_z}\left[W_{yB}\left\{h_y\sin\varphi_{zB} + 2(\delta_{yA}-\delta_{yB})\tan\varphi_{zB}\right\}\right. \\
&\qquad \left. + W_{yA}\frac{h_y}{2}\sin\varphi_{zA}\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

次に，φ_{xA}，φ_{xB} は，極めて小さいから，$\sin\varphi_{xA} \fallingdotseq \varphi_{xA}$，$\sin\varphi_{xB} \fallingdotseq \varphi_{xB}$，$\tan\varphi_{xA} \fallingdotseq \varphi_{xA}$，$\tan\varphi_{xB} \fallingdotseq \varphi_{xB}$ とし，縦応力を同時に生ずると考えた場合[4]次の如くなる。

---

3) 中村作太郎：桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (I), (II). 室蘭工業大学研究報告，第2巻，第3号，1956, 1957.
Sakutaro Nakamura: The Theoretical Studies on Elastic Deflection of Beam. Proceeding of the 3rd Japan National Congress for Applied Mechanics, 1953.

4) 池部宗薫外5氏共訳：ブライヒ鉄骨構造上巻，1941.
F. Bleich: Theorie und Brechnung der eisernen Brücken, 1924.

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{xA} &= \frac{P_y\cdot e\cdot l}{(al)GJ_d}\left\{\frac{\sinh ab}{\sinh al}\sinh ax-(ab)\frac{x}{l}\right\}+\frac{M_{xA}}{\dfrac{k_xG}{l}-W_{yA}\dfrac{h_y}{2}} \\
&\quad+\frac{\left(\dfrac{k_xG}{l}\right)^2M_{xA}-M_{xB}\left(\dfrac{k_xG}{l}-W_{yA}\dfrac{h_y}{2}\right)}{\left(\dfrac{k_xG}{l}-W_{yA}\dfrac{h_y}{2}\right)\left(\dfrac{k_xG}{l}-\dfrac{h_y}{2}-\delta_{yA}+\delta_{yB}\right)\left\{\dfrac{k_xG}{l}-W_{yA}\dfrac{h_y}{2}-\left(\dfrac{k_xG}{l}\right)^2\right\}} \\
\varphi_{xB} &= \frac{P_y\cdot e\cdot l}{(al)GJ_d}\left\{\frac{\sinh aa}{\sinh al}\sinh(l-x)-(aa)\frac{l-x}{l}\right\}+ \\
&\quad\frac{M_{xA}\dfrac{k_xG}{l}-M_{xB}\left(\dfrac{k_xG}{l}-W_{yA}\dfrac{h_y}{2}\right)}{\left(\dfrac{k_xG}{l}-\dfrac{h_y}{2}-\delta_{yA}+\delta_{yB}\right)\left\{\left(\dfrac{k_xG}{l}-W_{yA}\dfrac{h_y}{2}\right)-\left(\dfrac{k_xG}{l}\right)^2\right\}}
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

e: 偏心距離すなわち，荷重 P が xz 平面と交る点の x 軸より測つた垂直距離

(3), (4), (5)式より φ_{xA}, φ_{xB}, φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, M_{yx}, M_{zx} などを求め，(1), (2)式に代入し，M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}, M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}, X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B などを求める事が出来る。

$$X_A'+X_B'=P_x,\quad X_A+X_B+X_A'+X_B'=P_x$$
$$\therefore\quad X_A+X_B=0$$

$$\left.\begin{aligned}
X_A+X_B &= 0 \\
Y_A+Y_B &= P_y \\
Z_A+Z_B &= P_z
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

以上の式において

$$\mu_z=\frac{\delta_{zA}-\delta_{zB}}{l},\quad \mu_y=\frac{\delta_{yA}-\delta_{yB}}{l}\quad(7)$$

とし，φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB} は極めて小さい角であると考え，$\sin\varphi_{yB}\fallingdotseq\varphi_{yB}$, $\tan\varphi_{yB}\fallingdotseq\varphi_{yB}$, $\sin\varphi_{yA}\fallingdotseq\varphi_{yA}$, $\sin\varphi_{yB}\fallingdotseq\varphi_{yB}$, $\sin\varphi_{zB}\fallingdotseq\varphi_{zB}$, $\tan\varphi_{zB}\fallingdotseq\varphi_{zB}$, $\sin\varphi_{zA}\fallingdotseq\varphi_{zA}$ とすれば，(4)式より

$$\varphi_{yA}=\frac{\dfrac{P_zab(l+b)}{6lEI_y}\left\{1+\dfrac{\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}\left(\dfrac{h_z}{2}+\mu_zl\right)}{1-\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}(h_z+2\mu_zl)}\right\}}{1+\dfrac{l}{6EI_y}W_{zA}h_z\left\{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}W_{zB}\left(\dfrac{h_z}{2}+\mu_zl\right)V_1}{1-\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}(h_z+2\mu_zl)}\right\}}\quad(8)$$

$$\varphi_{yB}=\frac{1}{1-\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}(h_z+2\mu_z l)}$$

$$\times\left[\frac{\dfrac{h_z}{2}W_{yA}P_z ab(l+a)\left\{1+\dfrac{\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}\left(\dfrac{h_z}{2}+\mu_z l\right)}{1-\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}(h_z+2\mu_z l)}\right\}}{l\left(6EI_y+W_{zA}h_z\left\{l+\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{l}{6EI_y}W_{zB}\left(\dfrac{h_z}{2}+\mu_z l\right)}{1-\dfrac{1}{6EI_y}W_{zB}(h_z+2\mu_z l)}\right\}\right)}-S_1\right] \tag{9}$$

$$\varphi_{zA}=\frac{P_y a\cdot b\left\{\dfrac{\left(\dfrac{h_y}{2}+\mu_y l\right)W_{yB}}{1-\dfrac{l}{6EI_z}W_{yB}(h_y+2\mu_y l)}\cdot\dfrac{(l+a)}{6EI_z}+l+b\right\}}{6EI_z l+W_{yA}h_y l^2\left\{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h_y}{2}+\mu_y l\right)W_{yB}\cdot V_2}{1-\dfrac{l}{6EI_z}W_{yB}(h_y+2\mu_y l)}\right\}} \tag{10}$$

$$\varphi_{zB}=\frac{1}{6EI_z-lW_{yB}(h_y+2\mu_y l)}$$

$$\times\left(\frac{W_{yA}\dfrac{h_y}{2}P_y a\cdot b\left\{\dfrac{\left(\dfrac{h_y}{2}+\mu_y l\right)W_{yB}(l+a)\dfrac{1}{6EI_z}}{1-\dfrac{l}{6EI_z}W_{yB}(h_y+2\mu_y l)}+l+b\right\}}{6EI_z+\dfrac{l^2}{6EI_z}W_{yA}h_y\left\{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h_y}{2}+\mu_y l\right)W_{yB}}{1-\dfrac{l}{6EI_z}W_{yB}(h_y+2\mu_y l)}\right\}}-F\right) \tag{11}$$

(5) 式に，(1), (2) 式の M_{xA}, M_{xB} を代入し

$$\left.\begin{aligned}
H&=\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\\
L&=\left(\frac{k_x}{l}G-\frac{h_y}{2}-\mu_z l\right)\left\{\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)-\left(\frac{k_xG}{l}\right)^2\right\}\\
K&=\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\left(\frac{k_xG}{l}-\frac{h_y}{2}-\mu_y l\right)\left\{\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}-\left(\frac{k_xG}{l}\right)^2\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

とすれば，次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{xA}\left\{H\cdot K-K\frac{k_xG}{l}+W_{yA}\frac{h_y}{2}-\left(\frac{k_xG}{l}\right)^3\cdot H+H\cdot\left(\frac{k_xG}{l}\right)^2W_{yA}\frac{h_y}{2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{k_xG}{l}\right\}+\varphi_{xB}\left\{K\frac{k_xG}{l}+\left(\frac{k_xG}{l}\right)^3-\frac{k_xG}{l}+W_{yB}\left(\frac{h_y}{2}+\mu_y l\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)H\right\}=\frac{P_y e\cdot l}{(al)GJ_d}\left\{\frac{\sinh ab}{\sinh al}\sinh ax-(ab)\frac{x}{l}\right\}H\cdot K
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{xB}\left\{L+\left(\frac{k_xG}{l}\right)^3-\frac{k_xG}{l}\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)+\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\right.\\&\quad\left.\times\left(\frac{h_y}{2}+\mu_y l\right)W_{yB}\right\}-\varphi_{xA}\left\{\left(\frac{k_xG}{l}\right)^2-W_{yA}\frac{h_y}{2}\frac{k_xG}{l}\right.\\&\quad\left.+\frac{k_xG}{l}\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\right\}=\frac{P_ye\cdot l}{(al)GJ_d}\left\{\frac{\sinh aa}{\sinh al}\sinh(l-x)\right.\\&\quad\left.-(aa)\frac{l-x}{l}\right\}\cdot L\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

そこで

$$\left.\begin{aligned}M_1&=H\cdot K-K\frac{k_xG}{l}+W_{yA}\frac{h_y}{2}-\left(\frac{k_xG}{l}\right)^3\cdot H\\&\quad+H\cdot\left(\frac{k_xG}{l}\right)^2W_{yA}\frac{h_y}{2}+\frac{k_xG}{l}\\M_2&=K\cdot\frac{k_xG}{l}+\left(\frac{k_xG}{l}\right)^3-\frac{k_xG}{l}\\&\quad+W_{yB}\left(\frac{h_y}{2}+\mu_y l\right)\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\cdot H\\N_1&=L+\left(\frac{k_xG}{l}\right)^3-\frac{k_xG}{l}\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\\&\quad+\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\left(\frac{h_y}{2}+\mu_y l\right)W_{yB}\\N_2&=\left(\frac{k_xG}{l}\right)^2-W_{yA}\frac{h_y}{2}\frac{k_xG}{l}+\frac{k_xG}{l}\left(\frac{k_xG}{l}-W_{yA}\frac{h_y}{2}\right)\\Q&=\frac{\sinh ab}{\sinh al}\sinh ax-(ab)\frac{x}{l}\\R&=\frac{\sinh aa}{\sinh al}\sinh a(l-x)-(aa)\frac{l-x}{l}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

(13)式より

$$\varphi_{xA}M_1+\varphi_{xB}M_2=\frac{P_y\cdot e\cdot l}{(al)GJ_d}Q\cdot H\cdot K\tag{16}$$

(14)式より

$$\varphi_{xB}N_1-\varphi_{xA}N_2=\frac{P_ye\cdot l}{(al)GJ_d}\cdot R\cdot L\tag{17}$$

(16), (17)式より

$$\varphi_{xA}=\frac{P_y\cdot e\cdot l}{(al)GJ_dM_1}\left(Q\cdot H\cdot K-M_2\frac{Q\cdot H\cdot K\cdot N_2+R\cdot L\cdot M_1}{M_2N_2+M_1N_1}\right)\tag{18}$$

$$\varphi_{xB}=\frac{P_y\cdot e\cdot l}{(al)\cdot GJ_d}\cdot\frac{Q\cdot H\cdot K\cdot N_2+R\cdot L\cdot M_1}{M_2N_2+M_1N_1}\tag{19}$$

ここに

$$
\left.\begin{array}{ll}
al=\dfrac{l}{h}\sqrt{2\dfrac{G}{E}\cdot\dfrac{J_d}{J}} & \\
G: & \text{剪断弾性係数} \\
E: & \text{弾性係数} \\
l: & \text{支間} \\
h: & \text{桁の中心線より上下断面の重心間距離} \\
J_d: & \text{桁断面の全捩り抵抗モーメント} \\
J: & \text{桁縁部の曲げを考える時の中心線より上または下の断面二次モーメント}
\end{array}\right\} \quad (20)
$$

また

$$
\begin{aligned}
Y_A=&-\frac{6EI_z}{l^2}\left[\frac{S_2\left\{\dfrac{W_{yB}t_2(l+a)}{6EI_z(1-2U_4t_2)}+l+b\right\}}{1+U_3h_y\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}V_2}{1-2U_4t_2}\right)}+\frac{1}{2(3EI_z-lW_{yB}t_2)}\right.\\
&\times\left(\frac{\dfrac{h_y}{2l}U_3P_yab\left\{\dfrac{t_2W_{yB}(l+a)}{(1-2U_4t_2)6EI_z}+l+b\right\}}{1+U_3h_yV_2\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}}{1-2U_4t_2}\right)}-F\right)\left.-\frac{2}{l}\left(t_2-\frac{h_y}{2}\right)\right]+Q_{yA}\\
&-\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB})+\frac{W_{yA}}{l}\cdot\frac{h_y}{2}\left(\frac{S_2\left\{\dfrac{W_{yB}(l+a)t_2}{(1-2U_4t_2)6EI_z}+l+b\right\}}{1+U_3h_y\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}V_2}{1-2U_4t_2}\right)}\right)\\
&-\frac{W_{yB}t_2}{l}\cdot\frac{1}{2(3EI_z-lW_{yB}t_2)}\left(\frac{\dfrac{h_y}{2l}U_3\cdot P_y\cdot a\cdot b\left\{\dfrac{W_{yB}(l+a)t_2}{(1-2U_4t_2)6EI_z}+l+b\right\}}{1+U_3h_yl\left\{1-\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}}{1-2U_4t_2}\right\}\dfrac{1}{6EI_z}}-F\right)
\end{aligned}
\quad (21)
$$

$$
\begin{aligned}
Y_B=&\frac{6EI_z}{l^2}\left[\frac{1}{2(3EI_z-lW_{yB}t_2)}\left(\frac{\dfrac{h_y}{2l}U_3\cdot P_y\cdot a\cdot b\left\{\dfrac{t_2W_{yB}(l+a)}{(1-2U_4t_2)6EI_z}+l+b\right\}}{1+U_3h_yl\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}}{1-2U_4t_2}\right)\dfrac{1}{6EI_z}}-F\right)\right.\\
&\left.+\frac{S_2\left\{\dfrac{W_{yB}t_2(l+a)}{6EI_z(1-2U_4t_2)}+l+b\right\}}{1+U_3h_y\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}V_2}{1-2U_4t_2}\right)}-\frac{2}{l}\left(t_2-\frac{h_y}{2}\right)\right]+Q_{yB}-\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB})\\
&-\frac{h_y}{2l}W_{yA}\frac{S_2\left\{\dfrac{W_{yB}t_2(l+a)}{(1-2U_4t_2)6EI_z}+l+b\right\}}{1+U_3h_y\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}V_2}{1-2U_4t_2}\right)}+\frac{W_{yB}t_2}{l}\cdot\frac{1}{2(3EI_z-lW_{yB}t_2)}\\
&\times\left(\frac{\dfrac{h_y}{2l}U_3\cdot P_y\cdot a\cdot b\left\{\dfrac{t_2W_{yB}(l+a)}{(1-2U_4t_2)6EI_z}+l+b\right\}}{1+U_3h_y\dfrac{l}{6EI_z}\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}t_2W_{yB}}{1-2U_4t_2}\right)}-F\right)
\end{aligned}
\quad (22)
$$

$$Z_A = -\frac{6EI_y}{l^2}\left[\frac{S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{1+U_1h_z\left(1+\frac{\frac{1}{2}W_{zB}t_1V_1}{1-2U_2t_1}\right)}+\frac{1}{1-2U_2t_1}\left\{\frac{\frac{h_z}{2}W_{zA}S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{U_1h_zl\left(l+\frac{\frac{l}{2}U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-S_1\right\}+\frac{2}{l}\left(t_1-\frac{h_z}{2}\right)\right]+Q_{zA}-\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})+\frac{1}{l}W_{zA}\frac{h_z}{2}$$

$$\times\frac{S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{1+U_1h_z\left(1+\frac{\frac{1}{2}W_{zB}t_1V_1}{1-2U_2t_1}\right)}-\frac{W_{zB}t_1}{l}\frac{1}{1-2U_2t_1}\left\{\frac{\frac{h_z}{2}W_{zA}\cdot S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{U_1h_zl\left(l+\frac{\frac{l}{2}U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}\right.$$

$$\left.-S_1\right\} \tag{23}$$

$$Z_B = -\frac{6EI_y}{l^2}\left[\frac{S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_3t_1}\right)}{1+U_1h_z\left(1+\frac{\frac{1}{2}W_{zB}t_1V_1}{1-2U_2t_1}\right)}+\frac{1}{1-2U_2t_1}\left\{\frac{\frac{h_z}{2}W_{zA}\cdot S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{U_1h_zl\left(l+\frac{\frac{l}{2}U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-S_1\right\}+\frac{2}{l}\left(t_1-\frac{h_z}{2}\right)\right]+Q_{zB}-\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})-\frac{W_{zA}}{l}\frac{h_z}{2}$$

$$\times\left\{\frac{S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{1+U_1h_z\left(1+\frac{\frac{1}{2}W_{zB}t_1V_1}{1-2U_2t_1}\right)}\right\}+\frac{W_{zB}}{l}t_1\cdot\frac{1}{1-2U_2t_1}$$

$$\times\left\{\frac{\frac{h_z}{2}W_{zA}\cdot S_1\left(1+\frac{U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}{U_1h_zl\left(l+\frac{\frac{l}{2}U_2t_1}{1-2U_2t_1}\right)}-S_1\right\} \tag{24}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
&t_1=\frac{h_z}{2}+\mu_zl,\quad t_2=\frac{h_y}{2}+\mu_yl\\
&U_1=\frac{l}{6EI_y}W_{zA},\quad U_2=\frac{l}{6EI_y}W_{zB},\quad U_3=\frac{l}{6EI_z}W_{yA}\\
&U_4=\frac{l}{6EI_z}W_{yB},\quad V_1=\frac{l}{6EI_y},\quad V_2=\frac{l}{6EI_z}\\
&S_1=\frac{P_zab(l+a)}{6lEI_y},\quad S_2=\frac{P_ya\cdot b}{6lEI_z}\\
&F=\frac{P_yab(l+a)}{l}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

X_A は，(1) 式より

$$
\begin{aligned}
X_A = \frac{A}{I_y \cdot l}\Bigg[& -\frac{\mu_z}{2} x \left\{ \left(\frac{R_{yA}}{\gamma^2} - \varphi_{yA} K I_y \right) \left(\cosh \gamma \cdot a - 1 \right) - \frac{M_{yA}}{\gamma} \sinh \gamma a \right\} \\
& - \frac{\mu_z}{4} \left(\frac{R_{yA}}{\gamma} \sinh \gamma x - M_{yA} \cosh \gamma x - \varphi_{yA} \cdot \gamma \cdot K I_y \sinh \gamma x \right) a^2 \\
& - \frac{\mu_z}{2} x \left[\left(-\frac{R_{yB}}{\gamma^2} + \varphi_{yB} \cdot \gamma \cdot K I_y \right) \left\{ 1 - \cosh \gamma (l-a) \right\} - \frac{M_{yB}}{\gamma} \sinh \gamma (l-a) \right] \\
& - \frac{\mu_z}{4} \left\{ \frac{R_{yB}}{\gamma} \sinh \gamma (l-x) - M_{yB} \cosh \gamma (l-x) - \varphi_{yB} \cdot \gamma \cdot K I_y \sinh \gamma (l-x) \right\} (l^2 - a^2) \Bigg] \\
+ \frac{A}{I_z \cdot l}\Bigg[& -\frac{\mu_y}{2} x \left\{ \left(\frac{R_{zA}}{\gamma^2} - \varphi_{zA} K I_z \right) \left(\cosh \gamma a - 1 \right) - \frac{M_{zA}}{\gamma} \sinh \gamma a \right\} \\
& - \frac{\mu_y}{4} \left(\frac{R_{zA}}{\gamma} \sinh \gamma x - M_{zA} \cosh \gamma x - \varphi_{zA} \gamma K I_z \cdot \sinh \gamma x \right) a^2 - \frac{\mu_y}{2} x \Bigg[\Bigg(-\frac{R_{zB}}{\gamma^2} \\
& + \varphi_{zB} \gamma K I_z \Bigg) \left\{ 1 - \cosh \cdot \gamma (l-a) \right\} - \frac{M_{zB}}{\gamma} \sinh \gamma (l-a) \Bigg] - \frac{\mu_y}{4} \Bigg\{ \frac{R_{zB}}{\gamma} \sinh \gamma (l-x) \\
& - M_{zB} \cosh \gamma (l-x) - \varphi_{zB} \gamma K I_z \sinh \gamma (l-x) \Bigg\} (l^2 - a^2) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

また，X_B は，(6) 式すなわち，$X_B = -X_A$ より求める事が出来る。以上の式は，両端 A, B において，弾性固定的に支持された桁が任意の集中荷重 P 及び，支点 A, B 上に載る集中荷重 W_A, W_B により任意の立体変形を受けたときの軸力，剪断力，捩れ角，撓角，変位，捩りモーメント，曲げモーメントなどを立体的の平衡条件を基として一般的に解いた誘導結果であつて，両端に荷重のない場合，更に，両端に荷重なく，両支点の変位零なる場合の解式は，上述の式より直ちに求める事が出来る。

III. 両支点上に荷重のない場合の解式

上述の解式 (1)〜(26) において，支点上に荷重 W_A, W_B が載らない時は，$W_A=0$, $W_B=0$, すなわち $W_{yA}=0$, $W_{yB}=0$, $W_{zA}=0$, $W_{zB}=0$ とすればよい。

IV. 両支点上に荷重なく，しかも両支点の変位零なる場合の解式

(1) 式より

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{xA} &= \frac{k_x G}{l} (\varphi_{xA} - \varphi_{xB}) \\
M_{yA} &= \frac{2EI_y}{l} (2\varphi_{yA} + \varphi_{yB}) + C_{yA} \\
M_{zA} &= \frac{2EI_z}{l} (2\varphi_{zA} + \varphi_{zB}) - C_{zA} \\
Y_A &= -\frac{6EI_z}{l^2} (\varphi_{zA} + \varphi_{zB}) + Q_{yA} + \frac{1}{l} (C_{zA} - C_{zB})
\end{aligned}
\right\}
\tag{27}
$$

$$\left.\begin{aligned}
Z_A &= -\frac{6EI_y}{l^2}(\varphi_{yA}+\varphi_{yB})+Q_{zA}+\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})\\
X_A &= \frac{A}{I_y l}\left(\int_0^a \frac{z}{2}M_{yx}dx+\int_a^l \frac{z}{2}M_{yx}dx\right)+\frac{A}{I_z l}\left(\int_0^a \frac{y}{2}M_{zx}dx\right.\\
&\quad\left.+\int_a^l \frac{y}{2}M_{zx}dx\right)
\end{aligned}\right\}$$

(2)式より

$$\left.\begin{aligned}
M_{xB} &= \frac{k_x G}{l}(\varphi_{xB}-\varphi_{xA})\\
M_{yB} &= \frac{2EI_y}{l}(\varphi_{yA}+2\varphi_{yB})-C_{yB}\\
M_{zB} &= \frac{2EI_y}{l}(\varphi_{zA}+2\varphi_{zB})+C_{zB}\\
Y_B &= \frac{6EI_z}{l^2}(\varphi_{zB}+\varphi_{zA})+Q_{yB}-\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB})\\
Z_B &= -\frac{6EI_y}{l^2}(\varphi_{yA}+\varphi_{yB})+Q_{zB}-\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})\\
X_B &= -\left\{\frac{A}{I_y l}\left(\int_0^a \frac{z}{2}M_{yx}dx+\int_a^l \frac{z}{2}M_{yx}dx\right)+\frac{A}{I_z l}\left(\int_0^a \frac{y}{2}M_{zx}dx\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\int_a^l \frac{y}{2}M_{zx}dx\right)\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

M_{yx}, M_{zx}, γ, ρ などは(3)式をそのまま用いてよい。

また，(4)式より，φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB} は

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{yA} &= \frac{P_z ab(l+b)}{6lEI_y}\\
\varphi_{yB} &= -\frac{P_z ab(l+a)}{6lEI_y}\\
\varphi_{zA} &= \frac{P_y ab(l+b)}{6lEI_z}\\
\varphi_{zB} &= -\frac{P_y ab(l+a)}{6lEI_z}
\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

φ_{xA}, φ_{xB} は，(5)式より次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{xA} &= \frac{P_y\cdot e}{aGJ_d}\left\{\frac{\sinh ab}{\sinh al}\sinh ax-(ab)\frac{x}{l}\right\}+\frac{M_{xA}}{\frac{k_x G}{l}}\\
&\quad+\frac{\frac{k_x G}{l}M_{xA}-M_{xB}}{\left(\frac{k_x G}{l}\right)\left(1-\frac{k_x G}{l}\right)\left(\frac{k_x G}{l}-\frac{h_y}{2}\right)}
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

$$\varphi_{xB}=\frac{P_y\cdot e}{aGJ_d}\left\{\frac{\sinh aa}{\sinh al}\sinh(l-x)-(aa)\frac{l-x}{l}\right\}+\frac{M_{xA}-M_{xB}}{\left(\frac{k_xG}{l}-\frac{h_y}{2}\right)\left(1-\frac{k_xG}{l}\right)}$$

(27) 式より

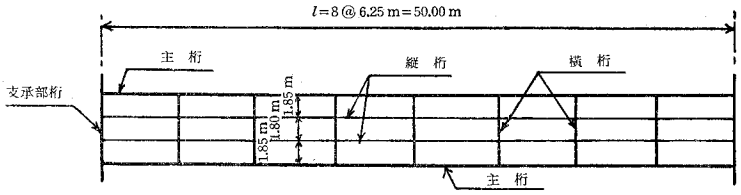
$$\left.\begin{aligned}
M_{xA}&=\frac{k_xG}{l}\left[\frac{P_ye}{aGJ_d}\left\{\frac{\sinh ab}{\sinh al}\sinh ax-ab\frac{x}{l}-\frac{\sinh aa}{\sinh al}\sinh(l-x)\right.\right.\\
&\quad\left.+(aa)\frac{l-x}{l}\right\}+\frac{M_{xA}}{\frac{k_xG}{l}}+\frac{\frac{k_xG}{l}M_{xA}-M_{xB}}{\left(\frac{k_xG}{l}\right)\left(1-\frac{k_xG}{l}\right)\left(\frac{k_xG}{l}-\frac{h_y}{2}\right)}\\
&\quad\left.-\frac{M_{xA}-M_{xB}}{\left(\frac{k_xG}{l}-\frac{h_y}{2}\right)\left(1-\frac{k_xG}{l}\right)}\right]\\
M_{yA}&=\frac{2EI_y}{l}\left(\frac{P_zab(l+b)}{3lEI_y}-\frac{P_zab(l+a)}{6lEI_y}\right)+C_{yA}\\
&=\frac{2P_zab(l+b)}{3l^2}-\frac{P_zab(l+a)}{3l^2}+C_{yA}\\
M_{zA}&=\frac{2EI_z}{l}\left(\frac{P_yab(l+b)}{3lEI_z}-\frac{P_yab(l+a)}{6lEI_z}\right)-C_{zA}\\
&=\frac{2P_yab(l+b)}{3l^2}-\frac{P_yab(l+a)}{3l^2}-C_{zA}\\
Y_A&=-\frac{6EI_z}{l^2}\left\{\frac{P_yab(l+b)}{6lEI_z}-\frac{P_yab(l+a)}{6lEI_z}\right\}+Q_{yA}+\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB})\\
&=-\frac{P_yab(l+b)}{l^3}+\frac{P_yab(l+a)}{l^3}+Q_{yA}+\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB})\\
Z_A&=-\frac{6EI_y}{l^2}\left\{\frac{P_zab(l+b)}{6lEI_y}-\frac{P_zab(l+b)}{6lEI_y}\right\}+Q_{zA}+\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})\\
X_A&=\frac{A}{I_y\cdot l}\left[\int_0^a\frac{z}{2}\left(\frac{R_{yA}}{\gamma}\sinh\gamma x-M_{yA}\cosh\gamma x-\varphi_{yA}\gamma KI_y\sinh\gamma x\right)dx\right.\\
&\quad+\int_a^l\frac{z}{2}\left\{\frac{R_{yB}}{\gamma}\sinh\gamma(l-x)-M_{yB}\cosh\gamma(l-x)\right.\\
&\quad\left.\left.-\varphi_{yB}\gamma KI_y\sinh\gamma(l-x)\right\}dx\right]+\frac{A}{I_z\cdot l}\left[\int_0^a\frac{y}{2}\left(\frac{R_{zA}}{\gamma}\sinh\gamma x\right.\right.\\
&\quad\left.-M_{zA}\cosh\gamma x-\varphi_{zA}\gamma KI_z\sinh\gamma x\right)dx+\int_a^l\frac{y}{2}\left\{\frac{R_{zB}}{\gamma}\sinh\gamma(l-x)\right.\\
&\quad\left.\left.-M_{zB}\cosh\gamma(l-x)-\varphi_{zB}\gamma KI_z\sinh\gamma(l-x)\right\}dx\right]
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

(28)式より

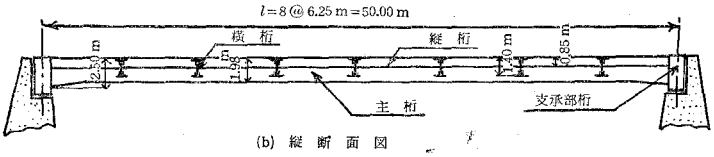
$$
\left.
\begin{aligned}
M_{xB} &= \frac{k_xG}{l}\left[\frac{P_y\cdot e}{aGJ_a}\left\{\frac{\sinh aa}{\sinh al}\sinh(l-x)-(aa)\frac{l-x}{l}\right.\right.\\
&\quad\left.-\frac{\sinh ab}{\sinh al}\sinh ax+(ab)\frac{x}{l}\right\}+\frac{M_{xA}-M_{xB}}{\left(\frac{k_xG}{l}-\frac{h_y}{2}\right)\left(1-\frac{k_xG}{l}\right)}\\
&\quad\left.-\frac{M_{xA}}{\frac{k_xG}{l}}-\frac{\frac{k_xG}{l}M_{xA}-M_{xB}}{\frac{k_xG}{l}\left(1-\frac{k_xG}{l}\right)\left(\frac{k_xG}{l}-\frac{h_y}{2}\right)}\right]\\
M_{yB} &= \frac{2EI_y}{l}\left\{\frac{P_zab(l+b)}{6lEI_y}+\frac{P_zab(l+a)}{3lEI_y}\right\}-C_{yB}\\
M_{zB} &= \frac{2EI_y}{l}\left\{\frac{P_yab(l+b)}{6lEI_z}+\frac{P_yab(l+a)}{3lEI_z}\right\}+C_{zB}\\
Y_B &= \frac{6EI_z}{l^2}\left\{-\frac{P_yab(l+a)}{6lEI_z}+\frac{P_yab(l+b)}{6lEI_z}\right\}+Q_{yB}-\frac{1}{l}(C_{zA}-C_{zB})\\
Z_B &= -\frac{6EI_y}{l^2}\left\{\frac{P_zab(l+b)}{6lEI_y}-\frac{P_zab(l+a)}{6lEI_y}\right\}+Q_{zB}-\frac{1}{l}(C_{yA}-C_{yB})\\
X_B &= -\left[\frac{A}{I_yl}\left[\int_0^a\frac{z}{2}\left(\frac{R_{yA}}{\gamma}\sinh\gamma x-M_{yA}\cosh\gamma x-\varphi_{yA}\gamma KI_y\sinh\gamma x\right)dx\right.\right.\\
&\quad+\int_a^l\frac{z}{2}\left\{\frac{R_{yB}}{\gamma}\sinh\gamma(l-x)-M_{yB}\cosh\gamma(l-x)\right.\\
&\quad\left.\left.-\varphi_{yB}\gamma KI_y\sinh\gamma(l-x)\right\}dx\right]+\frac{A}{I_zl}\left[\int_0^a\frac{y}{2}\left(\frac{R_{zA}}{\gamma}\sinh\gamma x\right.\right.\\
&\quad\left.-M_{zA}\cosh\gamma x-\varphi_{zA}\gamma KI_z\sinh\gamma x\right)dx+\int_a^l\frac{y}{2}\left\{\frac{R_{zB}}{\gamma}\sinh\gamma(l-x)\right.\\
&\quad\left.\left.-M_{zB}\cosh\gamma(l-x)-\varphi_{zB}\gamma KI_z\sinh\gamma(l-x)\right\}dx\right]\Bigg]
\end{aligned}
\right\}\quad(32)
$$

V. 格子鈑桁鉄道橋主桁の計算

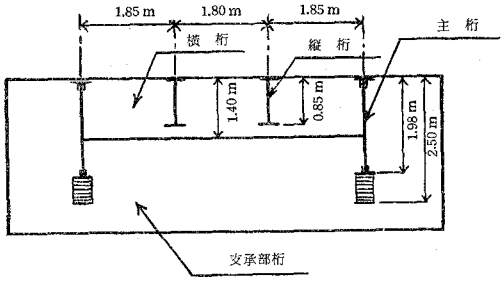
第3図の如き格子鈑桁鉄道橋（KS-18荷重，単線）の主桁を，両端の三軸弾性固定桁として，鋼鉄道橋設計示方書（旧規定並びに新規定）に基づき，上述の解式(27)～(32)並びに(3)式を用い計算する。



(a) 平 面 図



(b) 縦断面図



(c) 横断面図

第3図　格子鈑桁鉄道橋の一般配置図

1. 横荷重 p_z の計算

横荷重は，支持する弦材側において，$w=300+600=900\ \mathrm{kg/m}=0.9\ \mathrm{t/m}$。

第4図において，格点の横荷重 p_0, p_1, p_2 …… p_8 は，次の如くなる。

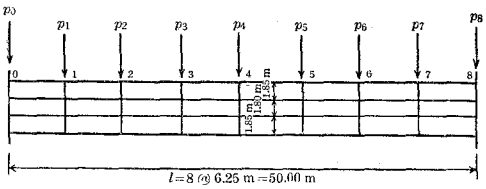
$$p_0 = p_8 = 0.9\times\frac{6.25}{2} = 2.81\ \mathrm{t}$$

$$p_1 = p_7 = 0.9\times 6.25 = 5.63\ \mathrm{t}$$

$$p_2 = p_6 = 0.9\times 6.25 = 5.63\ \mathrm{t}$$

$$p_3 = p_5 = 0.9\times 6.25 = 5.63\ \mathrm{t}$$

$$p_4 = 0.9\times 6.25 = 5.63\ \mathrm{t}$$



第4図　横荷重配置図

2. 主桁断面に関する諸定数

第5図参照，G=剪断弾性係数

$$G = \frac{mE}{2(1+m)} = 787{,}500\ \mathrm{kg/cm^2}$$

但し，$E=2{,}100{,}000\ \mathrm{kg/cm^2}$（鋼材），　$m=3$（鋼材）

I_z = z 軸に関する桁断面の二次モーメント

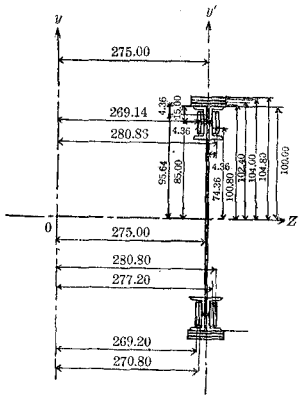
$= 10{,}986{,}482\ \mathrm{cm^4}$

I_y = y 軸に関する桁断面の二次モーメント

$= 126{,}988{,}075\ \mathrm{cm^4}$

A = 断面積 $= 1{,}679.84\ \mathrm{cm^2}$

J_d = 主桁断面の全捩れ抵抗モーメント



第5図　仮定断面図

$$= \frac{1}{3}\sum hb^3 = \frac{1}{3}\times 8{,}064.35 = 2{,}688.12\ \mathrm{cm}^4$$

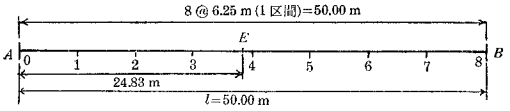
$$\alpha = \frac{1}{h}\sqrt{2\frac{G}{E}\frac{J_d}{J}} \fallingdotseq 0.0001$$

但し，J=桁縁部の曲げを考える時の中心線より上，又は下の断面二次モーメント
=8,986,482cm^4

k_x=フランヂの曲げ抵抗を考慮に入れたx軸の周りの捩り剛性係数=4,150,000 cm^4（仮定）

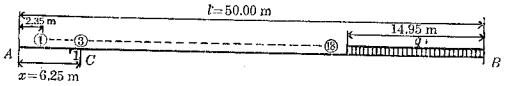
3. 主桁の立体的理論解式による応力計算

支間50 mを4区分し，更に，絶対最大曲げモーメントの生ずる点，$E(x=24.83\ \mathrm{m})$との5つの場合の最大曲げモーメントを生ずる位置に連行荷重K-18を載せた場合につき計算を行なう（第6図参照）。



第6図 主桁区分点の配置

(1) 区分点1 (x=6.25 m) の場合



第7図 区分点1に③が載る場合

(a) 活荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第7図を参照し，(29)，(30)式を用い計算する。

$$\varphi_{yA} = 0.000176,\quad \varphi_{yB} = -0.000176,\quad \varphi_{zA} = 0.000882,\quad \varphi_{zB} = -0.000820$$

$$\varphi_{xA} = 0.000394,\quad \varphi_{xB} = -0.000366$$

(b) 衝撃による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

衝撃係数 $i=0.474$

$$\varphi_{yA} = 0.000176\times 0.474 = 0.0000834,\quad \varphi_{yB} = -0.000176\times 0.474 = -0.0000834$$

$$\varphi_{zA} = 0.000882\times 0.474 = 0.000418,\quad \varphi_{zB} = -0.000820\times 0.474 = -0.000389$$

$$\varphi_{xA} = 0.000394\times 0.474 = 0.000187,\quad \varphi_{xB} = -0.000366\times 0.474 = -0.000174$$

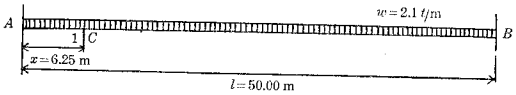
(c) 死荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第8図を参照し，

$$\varphi_{yA} = 0,\qquad \varphi_{yB} = 0,$$

$$\varphi_{zA} = 0.000475,\quad \varphi_{zB} = -0.000475$$

$$\varphi_{xA} = 0.000114,\quad \varphi_{xB} = -0.000114$$



第8図 死荷重満載の場合

(d)　合成 φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 1 表

種　　別	φ_{yA}	φ_{yB}	φ_{zA}	φ_{zB}	φ_{xA}	φ_{xB}
活荷重による φ	0.0001760	−0.0001760	0.000882	−0.000820	0.000394	−0.000366
衝撃による φ	0.0000834	−0.0000834	0.000418	−0.000389	0.000187	−0.000174
死荷重による φ	0	0	0.000475	−0.000475	0.000114	−0.000114
合　　成 φ	0.0002590	−0.0002590	0.001780	−0.001680	0.000695	−0.000654

(e)　A 点における M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}; X_A, Y_A, Z_A

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(31) 式より計算し，

$$M_{xA} = 8.815 \text{ t-m } (-8.815 \text{ t-m}), \quad M_{yA} = 88.50 \text{ t-m } (-88.50 \text{ t-m})$$

$$M_{zA} = 1{,}708.38 \text{ t-m } (-1{,}708.38 \text{ t-m}), \quad X_A = 0, \quad Y_A = 184.02 \text{ t}, \quad Z_A = 22.50 \text{ t}$$

註：括弧内の数値は符号の是正値を示す。

(f)　B 点における M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}; X_B, Y_B, Z_B

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(32) 式より計算すれば

$$M_{xB} = -8.815 \text{ t-m}, \quad M_{yB} = -88.50 \text{ t-m}, \quad M_{zB} = -1{,}693.16 \text{ t-m}$$

$$X_B = 0, \quad Y_B = 178.41 \text{ t}, \quad Z_B = 22.50 \text{ t}$$

(g)　$x=6.25$ m における M_1, Q_1

$$M_1 = -645.10 \text{ t-m}, \quad Q_1 = 137.72 \text{ t}$$

(2)　区分点 2 ($x=12.50$ m) の場合

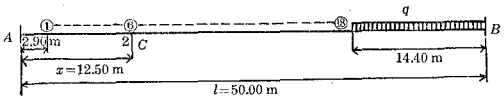
(a)　活荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 9 図を参照し，(29), (30) 式を用い計算する。

$$\varphi_{yA} = 0.000176, \quad \varphi_{yB} = -0.000176$$

$$\varphi_{zA} = 0.000832, \quad \varphi_{zB} = -0.000823$$

$$\varphi_{xA} = 0.000377, \quad \varphi_{xB} = -0.000350$$



第 9 図　区分点 2 に ⑥ が載る場合

(b)　衝撃による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

$i=0.474$ とすれば次の如き結果が得られる。

$\varphi_{yA} = 0.0000834,\quad \varphi_{yB} = -0.0000834,\quad \varphi_{zA} = 0.000394,$

$\varphi_{zB} = -0.000390,\quad \varphi_{xA} = 0.000179,\quad \varphi_{xB} = -0.000166$

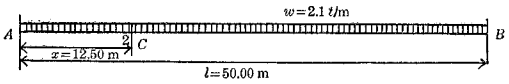
(c) 死荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第10図を参照し，

$\varphi_{yA} = 0,\quad \varphi_{yB} = 0$

$\varphi_{zA} = 0.000475,\quad \varphi_{zB} = -0.000475$

$\varphi_{xA} = 0.000114,\quad \varphi_{xB} = -0.000114$



第10図 死荷重満載の場合

(d) 合成 φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 2 表

種　　別	φ_{yA}	φ_{yB}	φ_{zA}	φ_{zB}	φ_{xA}	φ_{xB}
活荷重による φ	0.0001760	−0.0001760	0.000832	−0.000823	0.000377	−0.000350
衝撃による φ	0.0000834	−0.0000834	0.000394	−0.000390	0.000179	−0.000166
死荷重による φ	0	0	0.000475	−0.000475	0.000114	−0.000114
合　　成 φ	0.0002590	−0.0002590	0.001700	−0.001690	0.000670	−0.000630

(e) A 点における M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}; X_A, Y_A, Z_A

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(31) 式より計算し

$M_{xA} = 8.51$ t-m $(-8.51$ t-m$)$, $M_{yA} = 88.50$ t-m $(-88.50$ t-m$)$,

$M_{zA} = 1{,}738.22$ t-m $(-1{,}738.22$ t-m$)$, $X_A = 0$, $Y_A = 180.23$ t, $Z_A = 22.50$ t

註： 括弧内の数値は符号の是正値を示す。

(f) B 点における M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}; X_B, Y_B, Z_B

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

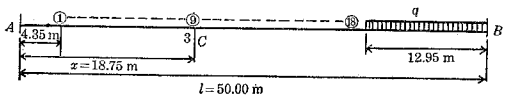
(32) 式より計算すれば

$M_{xB} = -8.51$ t-m, $M_{yB} = -88.50$ t-m, $M_{zB} = -1{,}710.46$ t-m,

$X_B = 0$, $Y_B = 178.70$ t, $Z_B = 22.50$ t

(g) $x=12.50$ m における M_2, Q_2

$M_2 = 24.26$ t-m, $Q_2 = 94.28$ t



第11図 区分点3に⑨が載る場合

(3) 区分点3 ($x=18.75$ m) の場合

(a) 活荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第11図を参照し，(29), (30) 式を用い計算する。

$\varphi_{yA}=0.000176,\quad \varphi_{yB}=-0.000176,\quad \varphi_{zA}=0.000826,\quad \varphi_{zB}=-0.000822,$

$\varphi_{xA}=0.000375,\quad \varphi_{xB}=-0.000372$

(b) 衝撃による $\varphi_{yA},\ \varphi_{yB},\ \varphi_{zA},\ \varphi_{zB},\ \varphi_{xA},\ \varphi_{xB}$

$i=0.474$ とすれば次の如き結果が得られる。

$\varphi_{yA}=0.0000834,\quad \varphi_{yB}=-0.0000834,\quad \varphi_{zA}=0.000392,\quad \varphi_{zB}=-0.000390,$

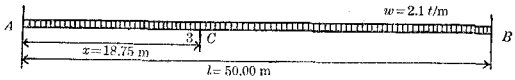
$\varphi_{xA}=0.000178,\quad \varphi_{xB}=-0.000176$

(c) 死荷重による $\varphi_{yA},\ \varphi_{yB},\ \varphi_{zA},\ \varphi_{zB},\ \varphi_{xA},\ \varphi_{xB}$

$\varphi_{yA}=0,\qquad \varphi_{yB}=0$

$\varphi_{zA}=0.000475,\quad \varphi_{zB}=-0.000475$

$\varphi_{xA}=0.000114,\quad \varphi_{xB}=-0.000114$



第12図　死荷重満載の場合

(d) 合成 $\varphi_{yA},\ \varphi_{yB},\ \varphi_{zA},\ \varphi_{zB},\ \varphi_{xA},\ \varphi_{xB}$

第 3 表

種　　別	φ_{yA}	φ_{yB}	φ_{zA}	φ_{zB}	φ_{xA}	φ_{xB}
活荷重による φ	0.0001760	−0.0001760	0.000826	−0.000822	0.000375	−0.000372
衝撃による φ	0.0000834	−0.0000834	0.000392	−0.000390	0.000178	−0.000176
死荷重による φ	0	0	0.000475	−0.000475	0.000114	−0.000114
合　　成 φ	0.0002590	−0.0002590	0.001690	−0.001690	0.000667	−0.000662

(e) A 点における $M_{xA},\ M_{yA},\ M_{zA}$; $X_A,\ Y_A,\ Z_A$

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(31) 式より計算し

$M_{xA}=8.71$ t-m $(-8.71$ t-m$)$, $M_{yA}=88.50$ t-m $(-88.50$ t-m$)$

$M_{zA}=1{,}735.89$ t-m $(-1{,}735.89$ t-m$)$, $X_A=0$, $Y_A=173.93$ t, $Z_A=22.50$ t

註：括弧内の数値は符号の是正値を示す。

(f) B 点における $M_{xB},\ M_{yB},\ M_{zB}$; $X_B,\ Y_B,\ Z_B$

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(32) 式より計算すれば，

$M_{xB}=-8.68$ t-m, $M_{yB}=-88.50$ t-m, $M_{zB}=-1{,}708.70$ t-m,

$X_B=0$, $Y_B=178.48$ t, $Z_B=22.50$ t

(g) $x=18.75$ m における $M_3,\ Q_3$

$M_3=458.17$ t-m, $Q_3=48.32$ t

(4) **区分点 4 ($x=25.00$ m) の場合**

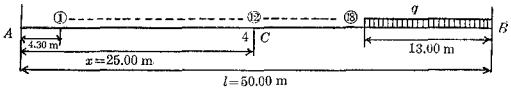
(a) 活荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 13 図を参照し，(29), (30) 式を用い計算する。

$$\varphi_{yA}=0.000176,\quad \varphi_{yB}=-0.000176$$

$$\varphi_{zA}=0.000829,\quad \varphi_{zB}=-0.000822$$

$$\varphi_{xA}=0.000377,\quad \varphi_{xB}=-0.000372$$



第 13 図 区分点 4 に ⑫ が載る場合

(b) 衝撃による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

衝撃係点 $i=0.474$ とし，次の結果を得る。

$$\varphi_{yA}=0.0000834,\quad \varphi_{yB}=-0.0000834,\quad \varphi_{zA}=0.000393,\quad \varphi_{zB}=-0.000390$$

$$\varphi_{xA}=0.000179,\quad \varphi_{xB}=-0.000176$$

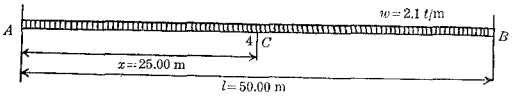
(c) 死荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 14 図を参照し，次の結果を得る。

$$\varphi_{yA}=0,\quad \varphi_{yB}=0$$

$$\varphi_{zA}=0.000475,\quad \varphi_{zB}=-0.000475$$

$$\varphi_{xA}=0.000114,\quad \varphi_{xB}=-0.000114$$



第 14 図 死荷重満載の場合

(d) 合成 φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 4 表

種　　別	φ_{yA}	φ_{yB}	φ_{zA}	φ_{zB}	φ_{xA}	φ_{xB}
活荷重による φ	0.0001760	−0.0001760	0.000829	−0.000822	0.000377	−0.000372
衝撃による φ	0.0000834	−0.0000834	0.000393	−0.000390	0.000179	−0.000176
死荷重による φ	0	0	0.000475	−0.000475	0.000114	−0.000114
合　　成 φ	0.0002590	−0.0002590	0.001700	−0.001690	0.000670	−0.000662

(e) A 点における M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}; X_A, Y_A, Z_A

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(31) 式により計算し，

$$M_{xA}=8.70\text{ t-m }(-8.70\text{ t-m}),\quad M_{yA}=88.50\text{ t-m }(-88.50\text{ t-m}),$$

$$M_{zA}=1{,}737.53\text{ t-m }(-1{,}737.53\text{ t-m}),\quad X_A=0,\quad Y_A=174.57\text{ t},\quad Z_A=22.50\text{ t}$$

註： 括弧内の数値は符号の是正値を示す。

(f) B 点における M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}; X_B, Y_B, Z_B

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(32) 式より計算すれば

$$M_{xB} = -8.70\ \text{t-m},\quad M_{yB} = -88.50\ \text{t-m},\quad M_{zB} = -1{,}708.98\ \text{t-m}$$

$$X_B = 0,\quad Y_B = 179.07\ \text{t},\quad Z_B = 22.50\ \text{t}$$

(g) $x=25.00$ m における M_4, Q_4

$$M_4 = 619.33\ \text{t-m},\quad Q_4 = 7.10\ \text{t}$$

(5) 区分点 E ($x=24.83$ m) の場合

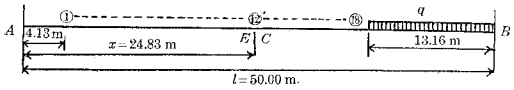
(a) 活荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 15 図を参照し，(29), (30) 式を用い計算する。

$$\varphi_{yA} = 0.000176,\quad \varphi_{yB} = -0.000176$$

$$\varphi_{zA} = 0.000830,\quad \varphi_{zB} = -0.000823$$

$$\varphi_{xA} = 0.000376,\quad \varphi_{xB} = -0.000373$$



第 15 図　区分点 E に ⑫ が載る場合

(b) 衝撃による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

衝撃係数 $i=0.474$ とし次の結果を得る。

$$\varphi_{yA} = 0.0000834,\quad \varphi_{yB} = -0.0000834,\quad \varphi_{zA} = 0.000393,\quad \varphi_{zB} = -0.000390$$

$$\varphi_{xA} = 0.000178,\quad \varphi_{xB} = -0.000177$$

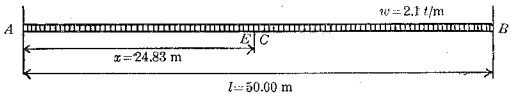
(c) 死荷重による φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 16 図を参照し，次の結果を得る

$$\varphi_{yA} = 0,\quad \varphi_{yB} = 0,$$

$$\varphi_{zA} = 0.000475,\quad \varphi_{zB} = -0.000475$$

$$\varphi_{xA} = 0.000114,\quad \varphi_{xB} = -0.000114$$



第 16 図　死荷重満載の場合

(d) 合成 φ_{yA}, φ_{yB}, φ_{zA}, φ_{zB}, φ_{xA}, φ_{xB}

第 5 表

種　　別	φ_{yA}	φ_{yB}	φ_{zA}	φ_{zB}	φ_{xA}	φ_{xB}
活荷重による φ	0.0001760	−0.0001760	0.000830	−0.000823	0.000376	−0.000373
衝撃による φ	0.0000834	−0.0000834	0.000393	−0.000390	0.000178	−0.000177
死荷重による φ	0	0	0.000475	−0.000475	0.000114	−0.000114
合　　成 φ	0.0002590	−0.0002590	0.001700	−0.001690	0.000668	−0.000664

(e) A 点おける M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}; X_A, Y_A, Z_A

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(31) 式により計算し

$$M_{xA} = 8.70 \text{ t-m } (-8.70 \text{ t-m}),\quad M_{yA} = 88.50 \text{ t-m } (-88.50 \text{ t-m}),$$

$$M_{zA} = 1{,}739.16 \text{ t-m } (-1{,}739.16 \text{ t-m}),\quad X_A = 0,\quad Y_A = 176.37 \text{ t},\quad Z_A = 22.50 \text{ t}$$

註： 括孤内の数値は符号の是正値を示す。

(f) B 点における M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}; X_B, Y_B, Z_B

(但し，X 軸方向の軸力は零と仮定す。)

(32) 式より計算すれば

$$M_{xB} = -8.70 \text{ t-m},\quad M_{yB} = -88.50 \text{ t-m},\quad M_{zB} = -1{,}708.20 \text{ t-m},$$

$$X_B = 0,\quad Y_B = 177.01 \text{ t},\quad Z_B = 22.50 \text{ t}$$

(g) $x=24.83$ m における M_E, Q_E

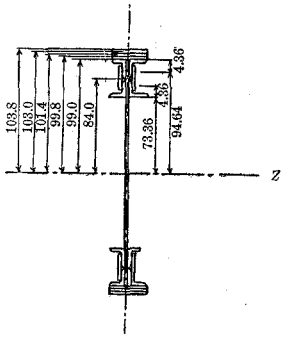
$$M_E = 641.35 \text{ t-m},\quad Q_E = 9.26 \text{ t-m}$$

4. 主桁の断面決定

(1) 中央部の断面

主桁中央部の絶対最大曲げモーメント合成

$M_E=+641.35$ t-m により，主桁中央部断面の経済的高さを求めれば，約 190 cm となるが，今，中央部の高さ（山形背面間距離）$h=198$ cm と決定する。第 17 図を参照し，断面積，z 軸に関する慣性モーメントを求めれば次の如くになる。



第 17 図
主桁中央部の決定断面

断 面 積 A

4-L_s	150×150×19	4×53.38 = 213.52 cm²
4-L_s	150×150×19	4×53.38 = 213.52 cm²
2-pl_s	360×16	2×36×1.6 = 115.20 cm²
2-pl_s	360×16	2×36×1.6 = 115.20 cm²
2-pl_s	360×16	2×36×1.6 = 115.20 cm²
4-pl_s	240×16	4×24×1.6 = 153.60 cm²
1-pl	1,980×30	193×3 = 594.00 cm²
		A = 1,520.24 cm²

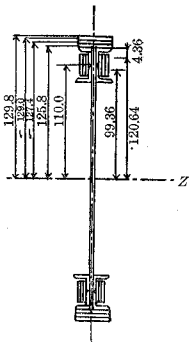
z 軸に関する慣性モーメント　I_z

4-L_s	150×150×19	$213.52\times94.62^2 = 1{,}911{,}631.75\ \mathrm{cm}^4$
		$4\times1{,}098 = 4{,}392.00\ \mathrm{cm}^4$
4-L_s	150×150×19	$213.52\times73.36^2 = 1{,}149{,}098.45\ \mathrm{cm}^4$
		$4\times1{,}098 = 4{,}392.00\ \mathrm{cm}^4$
2-pl_s	360×16	$115.20\times99.8^2 = 1{,}147{,}396.61\ \mathrm{cm}^4$
2-pl_s	360×16	$115.20\times101.4^2 = 1{,}184{,}481.79\ \mathrm{cm}^4$
2-pl_s	360×16	$115.20\times103.0^2 = 1{,}222{,}156.80\ \mathrm{cm}^4$
4-pl_s	240×16	$153.60\times82^2 = 1{,}083{,}801.60\ \mathrm{cm}^4$
1-pl	1,980×30	$\frac{1}{12}\times3\times198^3 = 1{,}940{,}598.00\ \mathrm{cm}^4$
		$I_z = 9{,}648{,}949.00\ \mathrm{cm}^4$

$$\sigma_c = \frac{64{,}135{,}000\times103.8}{9{,}648{,}949.00} = 690\ \mathrm{kg/cm^2} < f_c = 949\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{旧規定})$$
$$< f = 1{,}049\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{新規定})$$

$$\sigma_t = 753\ \mathrm{kg/cm^2} < f_t = 1{,}200\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{旧規定})$$
$$< f_t = 1{,}300\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{新規定})$$

故に，充分安全であるが，中央断面では，特に横振れと，捩り挫屈に備え，以上の断面に決定する。なお仮定断面 1,679.84 cm² より少しく小さかつた。



第 18 図
主桁端部の決定断面

(2) 端部の断面

主桁端部の絶対最大曲げモーメント

$M_{zA} = -1{,}739.16$ t-m により，主桁端部断面の経済的高さを求めれば，約 250 cm となるので，端部主桁の高さ（山形背面間距離）を $h=$ 250 cm と決定する。第 18 図を参照し，断面積，z 軸に関する慣性モーメント I_z を求めれば次の如くなる。

断 面 積　A

4-L_s	150×150×19	$4\times53.38 = 213.52\ \mathrm{cm}^2$
4-L_s	150×150×19	$4\times53.38 = 213.52\ \mathrm{cm}^2$
2-pl_s	360×16	$2\times36\times1.6 = 115.20\ \mathrm{cm}^2$
2-pl_s	360×16	$2\times36\times1.6 = 115.20\ \mathrm{cm}^2$
2-pl_s	360×16	$2\times36\times1.6 = 115.20\ \mathrm{cm}^2$
12-pl_s	240×16	$12\times24\times1.6 = 460.80\ \mathrm{cm}^2$
1-pl	2,500×30	$250\times3 = 750.00\ \mathrm{cm}^2$
		$A = 1{,}983.44\ \mathrm{cm}^2$

z 軸に関する慣性モーメント I_z

4-L_s	150×150×9	$213.52\times120.64^2 = 3{,}107{,}572.13\ \mathrm{cm}^4$
		$4\times1{,}098 = 4{,}392.00\ \mathrm{cm}^4$
4-L_s	150×150×19	$213.52\times99.36^2 = 2{,}107{,}956.90\ \mathrm{cm}^4$
		$4\times1{,}098 = 4{,}392.00\ \mathrm{cm}^4$
2-pl_s	360×16	$115.20\times129^2 = 1{,}917{,}043.20\ \mathrm{cm}^4$
2-pl_s	360×16	$115.20\times127.4^2 = 1{,}869{,}783.55\ \mathrm{cm}^4$
2-pl_s	360×16	$115.20\times125.8^2 = 1{,}823{,}113.73\ \mathrm{cm}^4$
12-pl_s	240×16	$460.80\times110^2 = 5{,}575{,}680.00\ \mathrm{cm}^4$
1-pl	2,500×30	$\frac{1}{12}\times3\times250^3 = 3{,}906{,}250.00\ \mathrm{cm}^4$
		$I_z = 20{,}316{,}183.51\ \mathrm{cm}^4$

$$\sigma_c = \frac{173{,}916{,}000\times129.8}{20{,}316{,}183.51} = 1{,}110\ \mathrm{kg/cm^2} < f_c = 1{,}139\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{新規定})$$

$$\sigma_t = 1{,}210\ \mathrm{kg/cm^2} < f_t = 1{,}300\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{新規定})$$

$$\tau_{\max} = \frac{881{,}500}{4{,}060}\times3 = 651\ \mathrm{kg/cm^2} < f_s = 950\,(\text{純断面当り})\times0.80$$

$$= 760\ \mathrm{kg/cm^2}\,(\text{旧規定，総断面当り換算})$$

$$< f_s = 800\ \mathrm{kg/cm^2}\quad(\text{新規定，総断面当り})$$

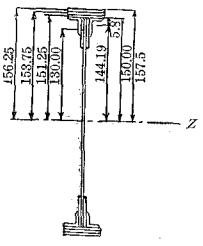
故に，安全

註： $\tau_{\max}$ は端部に於ける捩りモーメント M_{xA}, M_{xB} による最大剪断応力を示す。

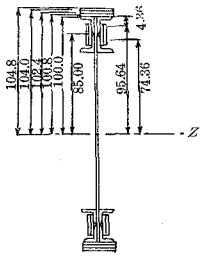
端部においては，支承部桁に充分鋲結せられるので，横振れ，捩り挫屈に対し安全度が高く，許容応力を新規定によつて増大する。

VI. 結　　論

格子鈑桁鉄道橋の主桁について，弾性的両端固定桁の三軸理論による著者の解式により計算せる結果を両端単純支持の鈑桁橋（第19図）及び二軸両端固定の鈑桁橋（第20図）の計算結果と比較して見れば，単純鈑桁橋の桁高3.0 m に対し，両端の三軸弾性固定の鈑桁橋では1.98 m となり，断面は，単純鈑桁橋の2,455 cm² に対し，1,520.24 cm² となり，遙かに小さいもので足りる事が分つた。また，両端の三軸弾性固定桁を二軸両端固定桁と比較すると，二軸の場合は，断面1,679.84 cm² となり，三軸の場合が



第 19 図
単桁としての主桁決定断面



第 20 図
二軸固定桁としての主桁決定断面

幾分（約10%）小さくて済む事が分つた。すなわち，支間中央部の絶対最大曲げモーメント合成 M_E は，二軸の場合 811.44 t-m に対し，三軸の場合は，641.35 t-m となり，大分小さくなつている。然し，端部における z 軸の周りの曲げモーメント M_z は，二軸の場合 −1,571.16 t-m に比し，三軸の場合は，−1,739.16 t-m になり，少しく大きくなる事が分つた。また，三軸応力状態においては，y 軸の周りの曲げモーメント M_{yA}，M_{yB} の他，x 軸の周りの捩りモーメント M_{xA}，M_{xB} なども無視出来ない程度に生ずる事が計算結果より明白であり，本解式は，単純鈑桁橋，二軸両端固定鈑桁橋の理論よりも遙かに実際に近いものと考えられ，格子鈑桁橋の計算に本理論の採用を提唱する次第である。なお最後に，本研究の計算に協力下さつた室蘭工業大学土木工学科昭和31年度卒業生，島田純君の努力に深謝する。

（昭和33年5月土木学会年次学術講演会において発表予定）
（昭和33年4月30日受理）

河川流域における融雪流出量の算定について

境　隆　雄

On the Computation of Snow-melt Runoff in River Basin

Takao Sakai

Abstract

Estimating or predicting snow-melt runoff is one of the fundamental problems for flood control as well as for water utilization.

In this paper, the author has developed a method of computing snow-melt runoff using the degree-hour factor. Through analysis of the daily variation curve of the air temperature, an easy method of determining the degree-hours only from daily maximum and minimum air temperatures was developed.

He applied this method for the Saru River basin of Hokkaido. Analyzing the area-elevation curve of the basin and using the meteorological data, the area of snow-melting zone and the values of degree-hours were computed. Then, through analysis of the hydrograph at the station, the values of degree-hour factor were determined. The runoff computed by this method agrees well with the observed runoff.

I. 緒　　論

積雪寒冷地の河川においては，春先に融雪流出の現象が起る。すなわち冬季間の積雪が融けて流出するために，時としては融雪洪水を起すこともあり，そうでなくても相当長い期間にわたり，比較的に多い流量と高い水位を持続する。河川におけるこのような季節的異常現象は一面においては治水上対処すべき問題である。他面において利水上より見れば，冬季間の広大な河川流域における積雪は，天然の巨大な貯水池ともいうべく，水資源の活用すなわち水力発電，水道あるいは灌漑等のためには，融雪期における豊富な河川流量の持続はむしろ望ましいことである。何れにしても，これらの対策上基本的な問題として，融雪流出量を把握することが要求される。融雪流出については，既に Wilson, Light, Clyde, Linsley 等の諸家[1]により米

1) Linsley and others: Applied Hydrology, p. 126–143, p. 427–432.
Houk: Irrigation Engineering, Vol, I. Chap. 8.

国において研究されたが，わが国でも近年この方面の調査あるいは研究[2]が盛んに行なわれるようになつた。著者はこの問題について若干の考察を試み，特にその実例として，北海道の沙流川流域について融雪流出量の算定を行なつたので，その概要について述べることとしたい。

II. 融雪量の算定についての概説

融雪の原因となるものを，大体重要性の順にあげてみると，次のごとくである。

1) 温かい空気よりの熱伝達

2) 空気中の水蒸気の凝結熱

3) 太陽輻射熱

4) 温かい降雨よりの熱

5) 地面よりの熱伝導

先ず1)については，空気自身の熱伝導率は小さいので，静止している空気からの伝導熱は小さいものであるが，地表面近くの空気の流動による伝達熱は，はるかに大きなものである。この伝達熱は気温の高いほど，また風速の大なるほど大である。

2)の因子は往々にして看過されがちであるが，空気中の水蒸気が雪面に接触して凝結する時に発生する熱が雪に伝えられるもので，大体1)と同程度に大きな要素である。凝結の潜熱は600 cal/gr であり，雪の融解熱はわずかに80 cal/gr に過ぎないから，1 gr の水蒸気が凝結すると，7.5 gr の雪が融けるわけである。この凝結熱の雪に伝えられる大きさは，水蒸気圧の大なるほど，また1)と同じく風速の大なるほど大である。

3)の太陽輻射熱は融雪のための重要な因子の一つであり，ある条件の下では主要な因子となる。これは季節および緯度の函数であると共に，雲量，地被および雪の反射率によつて左右される。清浄な新雪の反射率は90%にも達するが，汚れた古雪では60%位である。積雪が薄い時には，日射は地面まで貫通し，熱の吸収が大であるために．融雪を促進する。太陽輻射の効果は，夜間における積雪面よりの逆輻射によつて，ある程度相殺される。

4)の温い降雨は，一般に融雪上きわめて重要な因子と考えられているが，熱量計算をしてみると，これの効果は案外に小さなものである。降雨の際に融雪が促進されるのは，実は降雨に伴なうところ高い気温，高い湿度および強い風によるのである。更にまた降雨は積雪を叩きその中に貯溜された水分を放出せしめる作用がある。

---

2) 菅谷重二： 大雪山積雪水量及び流出調査，(1949).
石原健二，外： 融雪洪水予報の研究，洪水予報研究論文集（資源調査会資料），(1951).
大坪喜久太郎，鈴木洋二： 石狩川流域の融雪量算定に関する考察，土木学会北海道支部技術資料，第13号，(1957).

5) は以上の諸因子に比べるとはるかに小さく，無視しても差支ない。

以上のような諸因子から理論的に融雪量を算定する研究は，すでに Wilson, Light その他によつて行なわれた。しかしこれらの諸因子の組合せはきわめて複雑であり，しかも自然条件によつて大幅に変動するものであるから，これを実際の河川流域に適用して，融雪流出量を算定することは困難であるといわねばならない。

実際的な方法として，Clyde, Linsley, Horton 等の諸家により，従来米国で用いられているのは，Degree-day factor による方法である。これは短期間の融雪を決定する最も重要な因子として気温をとりあげ，これを以て代表せしめる方法である。Degree-day とは1日の平均気温が融雪の始まる平均気温を超過する度数に1日という時間を乗じた量であつて，融雪の始まる日平均気温は 0°C より少し低いはずであるが，普通には 0°C を用いている。また Degree-day factor とは 1 degree-day によつて起る融雪流出量である。

Clyde は Gooseberry Creek の degree-day factor として，約 0.09 inch/deg. day という値を見出した。また U. S. Weather Bureau の研究によれば，degree-day factor の値は，0.05～0.15 inch/deg. day の間に変化している。

Degree-day factor は融雪の原因となる諸因子を気温を以て代表せしめたもので，簡単でしかも巧妙な実用的方法である。ただこの方法の欠点とするところは，1日の平均気温を以て計算するので，やや粗略なるを免れないことである。より正確を期するには，0°C 以上の積算気温を用いるべきであろう。この意味において著者は，Degree-hour factor による方法を提案するものである。

III. 積算気温の算定法

融雪量を支配する主な要素である 0°C 以上の積算気温は，自記温度計の記録があれば求められるが，軽易な観測所では，毎日の最高および最低気温のみを記録するのが普通であるから，直ちには求められない。著者はこれを次の方法によつて求めた。

毎日の気温変化の状況を調べてみると，その変化は週期的ではあるが，sine curve とは異なり，上昇期は短く，下降期は長くて，むしろ洪水曲線と似ているところがある。これは上昇期が太陽熱の吸収による一種の強制現象であり，下降期は吸収熱の放散による減衰現象であるためと考えられる。

そこで予備研究の結果，気温の変化を次式であらわすことにした。

$$T = C\,te^{-\alpha t^2} \qquad (1)$$

ここに T は最低気温を基準とする気温 (0°C)，t は最低気温時を起点とする時間，C および α は常数である。

この形の式をえらんだのは，上昇時と下降時との時間長が相異なる変化を一つの函数であらわすのに便利であり，また下降時の減衰現象をあらわすのに適しているからである。指数のtを2次の形にしたのは，実際の気温変化に近く，しかも積分可能な形としたわけである。もつともこの函数が実際の気温変化をあらわすのに理想的であるというわけではなく，上昇起点附近には実際には反向曲線が存在するのに，この函数ではそこに反向曲線がなく，厳密にいえばその他にも多少の欠点は存する。しかしこの際は主たる目的が積算気温を求めるのにあるのであるから，そのための近似式としては適当なものと考えた。

さてこの式は当日の最低気温時より翌日の最低気温時までを一区間として適用する。融雪期における最低気温時は北海道では大体午前5時頃，最高気温時は午後1時頃で，その間の時差は8時間である。しかしこの式を用いると，前述のごとく起点附近に実際存在する反向曲線をあらわせないので，その点を考慮し，曲線全体を調整するために，時差を1時間短縮し7時間として，式中の常数を求めることにした。

最高気温時においては，$dT/dt=0$ であるから

$$\frac{dT}{dt} = C\left\{e^{-\alpha t^2} + t(-2\alpha t)e^{-\alpha t^2}\right\}$$

$$= Ce^{-\alpha t^2}(1-2\alpha t^2) = 0$$

$$\therefore \quad 1-2\alpha t^2 = 0$$

$$\alpha = 1/2t^2 \tag{2}$$

$t=7$ とすれば

$$\alpha = 1/98 \tag{2'}$$

最高気温と最低気温との差すなわち日較差を ΔT とすれば

$$C = \frac{\Delta T}{t}e^{\alpha t^2} = \frac{\Delta T}{7}e^{\frac{1}{2t^2}\cdot t^2} = \frac{\Delta T}{7}e^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\Delta T}{7}\times 1.649 = 0.2355\,\Delta T \tag{3}$$

故に次式を得る。

$$T = 0.2355\,\Delta T t e^{-\frac{t^2}{98}} \tag{4}$$

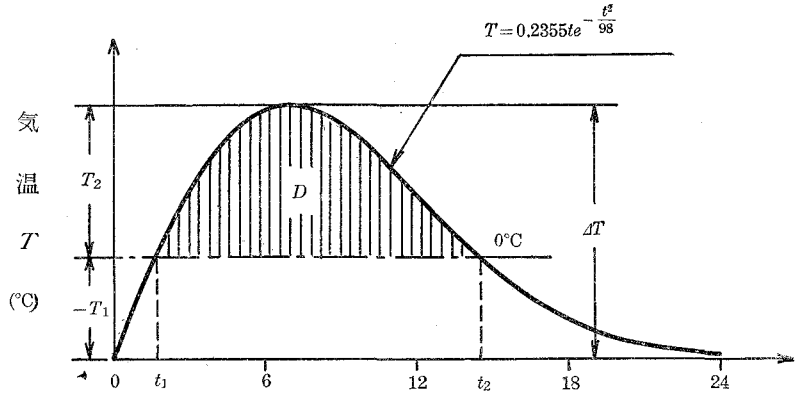
数値計算のために便利な形に書直せば

$$e^{-\frac{t^2}{98}} = 10^{-\frac{0.4343}{98}t^2} = 10^{-0.00443t^2} = 1/10^{0.00443t^2}$$

であるから

$$T = 0.2355\,\Delta T t/10^{0.00443t^2} \tag{5}$$

この式により T の曲線を描けば，図-1となる。



図—1　気温変化曲線と積算気温

今最低気温を T_1，最高気温を T_2 とすれば，日較差 ΔT は

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

である。T_1 および T_2 は観測資料として毎日与えられるものとする。融雪がおこるためには

$$T_2 > 0°\mathrm{C}$$

であるが，しかし T_1 の方はこれと異なり

$$T_1 \lesseqgtr 0°\mathrm{C}$$

であつて，(+) (−) あるいは 0 何れの値をとつても差支ない。

i)　$T_1 < 0°\mathrm{C}$ の場合

この場合には 0°C の位置は図-1 のように T_1 と T_2 との中間にあり，この線が気温曲線を切る時刻，換言すれば気温が 0°C となる時刻 t_1 および t_2 ならびにその間の時間長は，$T_2/\Delta T$ の比によつてきまる。そこで t_1 より t_2 まで T の函数を積分すれば，積算気温が求められる。今

$$\left.\begin{aligned} m &= T_2/\Delta T \\ C &= k\,\Delta T \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

とおけば，時刻 t_1 および t_2 においては

$$\begin{aligned} T &= \Delta T - T_2 \\ &= (1-m)\,\Delta T = k\,\Delta T\,te^{-\alpha t^2} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad te^{-\alpha t^2} - \frac{1-m}{k} = 0 \qquad (7)$$

数値計算に便利な形に書直せば

$$t/10^{0.00443t^2}-\frac{1-m}{0.2355}=0 \qquad (8)$$

この函数方程式を解けば t_1 および t_2 が求められるが，それには m の色々な値に対し，図式的に t の近似値を求め，しかる後に漸近法によつて真正値を求めることができる。

しかる時は，図-1 において，0°C より以上の積算気温 D (Degree hour) は

$$D=\int_{t_1}^{t_2}T\,dt-(\Delta T-T_2)(t_2-t_1)$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}T\,dt-\Delta T(1-m)(t_2-t_1)$$

しかるに

$$\int_{t_1}^{t_2}T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}k\,\Delta T\,te^{-\alpha t^2}dt$$

$$=\left[-\frac{k\Delta T}{2a}e^{-\alpha t^2}+C\right]_{t_1}^{t_2}=-\frac{k\Delta T}{2a}\left[e^{-\alpha t_2^2}-e^{-\alpha t_1^2}\right]$$

であるから

$$D=\Delta T\left\{\frac{k}{2a}(e^{-\alpha t_1^2}-e^{-\alpha t_2^2})-(1-m)(t_2-t_1)\right\} \qquad (9)$$

(9) 式中の常数に数値を入れ，また計算に便利な形に書直せば

$$\frac{k}{2a}=\frac{0.2355}{2\times 1/98}=11.54$$

であるから

$$D=\Delta T\{11.54\,(10^{-0.00443t_1^2}-10^{-0.00443t_2^2})-(1-m)(t_2-t_1)\}$$

$$=\xi\,\Delta T \qquad (10)$$

上式において ξ は結局 m のみの函数であり，任意の m (この場合 1 よりも小さい) に対して計算することができる。すなわちこれを計算すれば，表-1 のごとくなる。

表—1 m に対する ξ の計算 ($a=0.00443$)

m	t_1	t_2	$10^{at_1^2}$	$10^{at_2^2}$	$11.54(1/10^{at_1^2}-1/10^{at_2^2})$	$(1-m)(t_2-t_1)$	ξ
0.1	4.8	9.4	1.264	2.460	4.43	4.14	0.29
0.2	4.0	10.6	1.177	3.140	6.14	5.28	0.86
0.3	3.3	11.5	1.117	3.856	7.34	5.74	1.60
0.4	2.8	12.5	1.083	4.920	8.31	5.82	2.49
0.5	2.2	13.5	1.050	6.40	9.20	5.65	3.55
0.6	1.8	14.5	1.033	8.53	9.82	5.08	4.74
0.7	1.3	15.6	1.017	11.96	10.37	4.29	6.08
0.8	0.9	17.1	1.003	19.73	10.86	3.24	7.62
0.9	0.4	19.3	1.002	44.6	11.26	1.89	9.37
1.0	0	24.0	1.000	355.0	11.50	0	11.50

ii)　$T_1=0°C$ の場合

これはすなわち $m=1$ の場合であつて，この時の D を D_0 とすれば，表-1 にあるように

$$\xi = 11.50$$
$$D_0 = 11.50\,\Delta T \tag{11}$$

iii)　$T_1 > 0°C$ の場合

この場合には $m > 1$ となり，

$$\begin{aligned} D &= D_0+24\,T_1 \\ &= D_0+24\,(T_2-\Delta T) \\ &= D_0+24\,(m-1)\,\Delta T \\ &= \{11.50+24\,(m-1)\}\,\Delta T \\ &= 24\,(m-0.521)\,\Delta T = \xi\,\Delta T \end{aligned} \tag{12}$$

すなわちこの場合には ξ は m の一次式であるから直線変化となる。

以上の (10)～(12) 式における m と ξ との関係曲線を示せば，図-2 のごとくなる。

以上により，任意の日において，最高および最低気温が与えられるならば，図-2 の m-ξ 曲線より ξ の値を求め，これより当日の 0°C 以上の積算気温を直ちに求めることができる。その関係式を一括すれば次のごとくである。

$$\left.\begin{aligned} \Delta T &= T_2-T_1 \\ m &= T_2/\Delta T \\ D &= \xi\,\Delta T \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ここに T_1 および T_2 はそれぞれその日の最低および最高気温 (°C)，D は 0°C 以上の積算気温 (Degree hour) である。

計 算 例：——

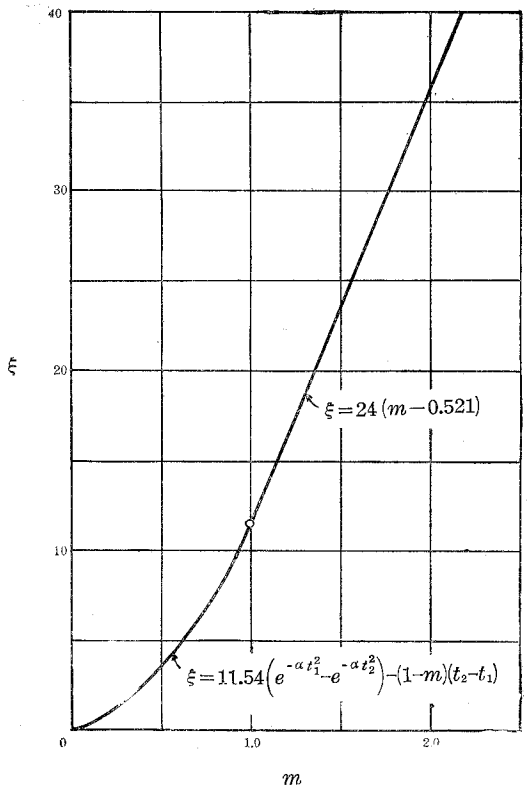
$T_1 = -2°C$　　$T_2 = 7°C$

$\Delta T = 7-(-2) = 7+2 = 9$

$m = 7/9 = 0.778$

図-2 より　　$\xi = 7.1$

$D = 7.1\times 9 = 63.9$　　deg. hr.



図—2　m-ξ 曲　線

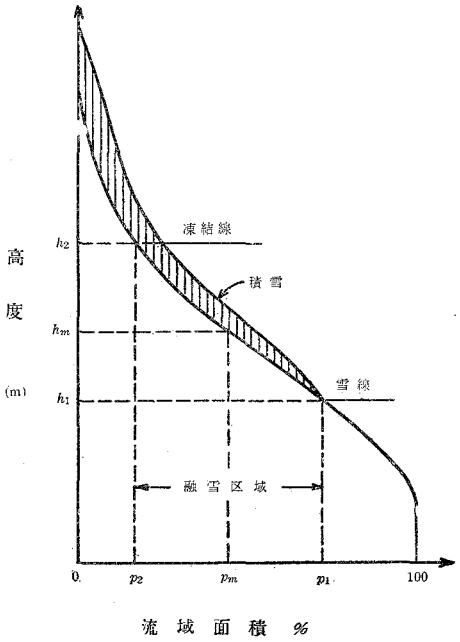
IV. 融雪流出量の算定法

河川流域において，積雪区域の下端すなわち積雪零の地点を連ねる線を雪線とし，日最高気温が0°Cとなる地点を連ねる線を凍結線とすれば，融雪現象はこれら両者にはさまれた地帯において起る。

今図-3において，雪線高度をh_1，凍結線高度をh_2とすれば，その各々に対する流域面積の%p_1およびp_2は，流域の高度面積分布曲線より直ちに見出される。従つて全流域面積をA_0とすれば，融雪区域の面積Aは次式で求められる。

$$A=(p_1-p_2)A_0/100 \qquad (14)$$

しかるに雪線は，融雪期においては月日の進行と共に移動し一定しない。また雪線は必ずしも等高線とは一致せず，一般に北向および森林のある斜面において低く，南向および裸の斜面において高い傾向があるが，流域全体としての平均雪線高を求めることは可能であり，また月日の進行による移動を知ることも可能である。



図—3　融雪区域の面積と高度との関係

次に凍結線標高は，気温の高度による逓減率を知れば，観測所の気温から求めることができる。この逓減率は一般に年平均では100 mについて0.6°Cであるといわれる。ただし季節により異なり，夏に大であり冬に小であるが，融雪期には中間すなわち平均に近いものと考えてよいであろう。実際の気温は高度のみならず，地形や森林などの影響をうけるために，複雑な分布を示す筈であるが，流域全体の平均値として，気温の逓減率を高度100 mにつき0.6°Cと仮定する。そこで観測所の標高をh_0，同所の日最高気温をT_2とすれば，凍結線高度h_2は次式で与えられる。

$$h_2=h_0+\frac{100}{0.6}T_2 \qquad (15)$$

上式は直線関係をあらわすが，予めこれを図にしておけば，任意のT_2に対する凍結線高度を求めるのに便利である。

次に融雪区域の気温は，その区域の中位高度h_mにおける気温で代表される。このh_mは前記p_1とp_2との中点p_mに対する高度で，高度面積分布曲線より直ちに見出される。この中位

高度と観測所との気温差を T' とすれば，h_m と T' との間には次式の関係がある。

$$h_m = h_0 + \frac{100}{0.6} T' \tag{16}$$

上式は前の(15)式と全く同形であるから，前と同じ図を利用して，任意の h_m に対する気温差 T' を求め，従つて h_m における毎日の最高および最低気温を求めることができる。しかる時は(13)式により毎日の Degree hour D を求めることができるから，更にこれを融雪面積 A に乗ずれば，毎日の積算気温面積 (Degree-hour area) DA を得る。この DA はすなわち河川の融雪流出量を左右する主たる要素を数量的に表現したものである。

さて他方においては，河川の流出量を解析しなければならない。

河川の毎日の測水資料は一般に水位の記録であるから，先ずこれを流量に換算することが必要である。そのためには観測地点の流量曲線を作成することが要求される。水位観測は毎日朝夕2回定時に行なうのが普通であるが，水位の変動ある場合には，観測時の流量が当日の平均流量を示すとは限らず，むしろそうでないことが多い。当日の平均流量が何時におこるかは一定せず，その時刻を押えることは困難である。定時観測の資料より当日の平均流量を推定することは，水位の変動が大なるほど，誤差は大となるであろう。結局定時観測の資料だけでは不充分であつて，自記水位計による記録が望ましいのである。これがあれば，平均流量は確実に求められる。

さて融雪期における河川流量には，融雪による流量の外，基底流量が含まれ，更に時として降雨の直接流出による流量が含まれる。従つて融雪流出の関係を求めるには，河川流量から後二者を差引き，正味の融雪流量を考えなければならない。この場合，なるべく降雨の影響を無視し得る日を選ぶならば，解析に便である。

一般に融雪の原因となる事象と，その結果たる河川流出との間には，時間のずれが存在する。その時間のずれの大きさは，流域の特性によつて異なるものとおもわれる。

今融雪の主たる原因として，毎日の Degree-hour area DA をとり，これがある時間おくれて，融雪流出量となるものと考える。実際方法としては，降雨の影響を無視し得る連続数日間を適当に選び，その毎日の平均流量を Q，基底流量を Q_0，融雪による流量を Q_s，融雪による毎日の流出量を V_s とすれば，その数日間の合計量は

$$\begin{aligned} \sum Q_s &= \sum Q - \sum Q_0 \qquad (\mathrm{m^3/sec}) \\ \sum V_s &= \int Q_s\, dt \\ &= 3600 \times 24 \times \sum Q_s \\ &= 0.0864 \times 10^6 \sum Q_s \quad (\mathrm{m^3}) \end{aligned} \tag{17}$$

またこれより前記時間のずれだけさかのぼり，同じ連続日数間における DA の和を $\sum DA$

とすれば，融雪流出率 (Degree-hour factor) f は次式で求められる。

$$f = \sum V_s / \sum DA \tag{18}$$

この f は流域に特有な値であるが，一般に季節により変化することが予想される。この f を用いれば，これと DA との積により，融雪流出量を計算することができる。

すなわち，f の単位を mm/deg. hr とし，DA の単位を deg. hr. km^2 とすれば，融雪流出量 V_s は次式で算出される。

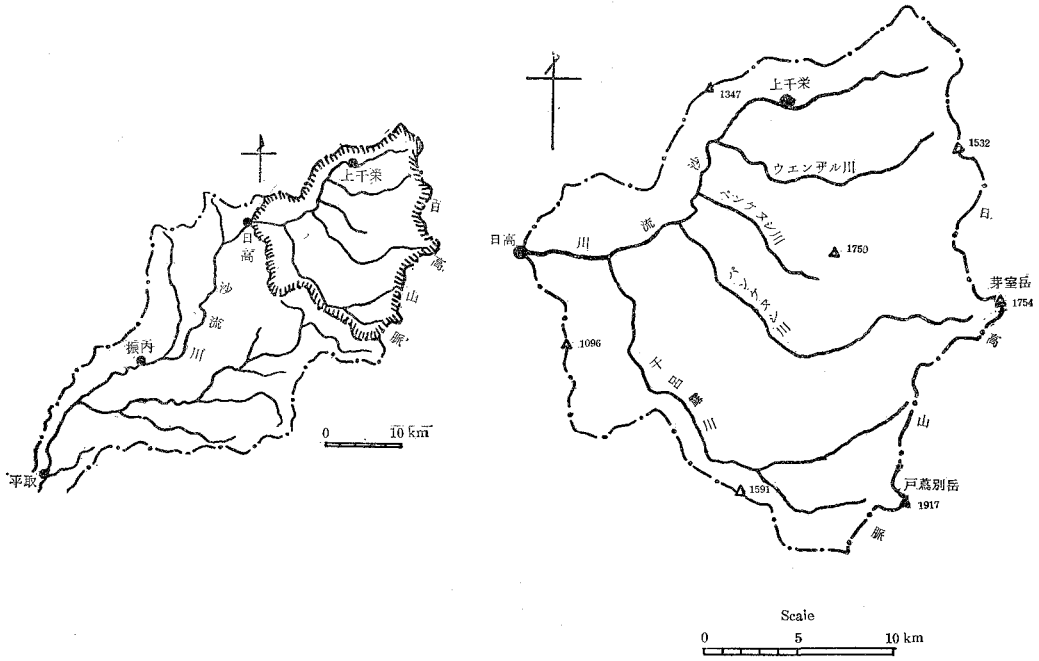
$$V_s = 1000 f DA \quad (\mathrm{m}^3) \tag{19}$$

V. 沙流川流域における融雪流出量の算定

前節までに述べた方法を，北海道日高の沙流川流域に適用してみると，次のごとくである。

沙流川流域は図-4 に示すごとくで，その上流水源地は北海道の脊骨ともいうべき急峻な日高山脈である。今，日高観測所より上流の流域について考察すれば，東方境界線上には，標高 1,300～1,900 m 位の急峻な日高山脈が連なり，北西境界線は 1,000 m 内外で比較的低いが，南方境界線は 1,500～1,900 m で比較的高い。全体的にみて，南東に高く，北西に低い地勢であり，沙流川本川および支川ウエンザル川は概ね西流し，その他の支川は北西に向つて流れている。

この流域面積は 420 km^2 で，その高度面積分布は地形図上から交点法によつて求めること



図—4　沙流川流域図

ができる。すなわち，20万分の1および5万分の1地形図の上に2km間隔の方眼線を引き，交点法により各高度に対する流域面積の%を求めた結果は，図-5に示す通りである。

次に日高観測所（量水標零位高287m）における水位流量曲線は，室蘭開発建設部沙流川改修事業所の流量測定資料（昭31.8～昭32.6）よりこれを作成すれば，図-6に示す通りで，半対数方眼紙に流量を対数目盛として記入すれば直線となる。これを用いて，同所の自記水位記録より，毎日の平均流量を求めることができるが，期間としては，昭和32年4月4，5両日にわたり，本流域の積雪測量を行なつたのと，また後述するように，本流域の融雪は大体6月17日を以て完了したと推定されるので，4月6日より6月17日までをとつた。

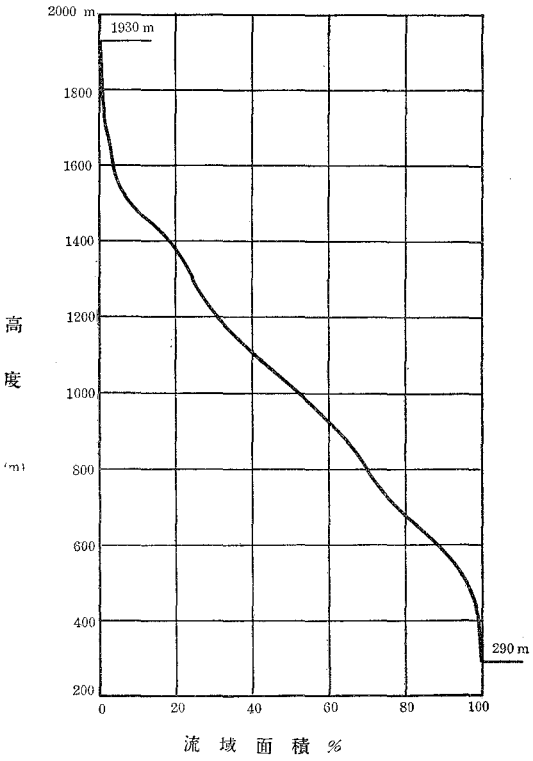


図-5　沙流川日高観測所より上流の高度流域面積分布曲線

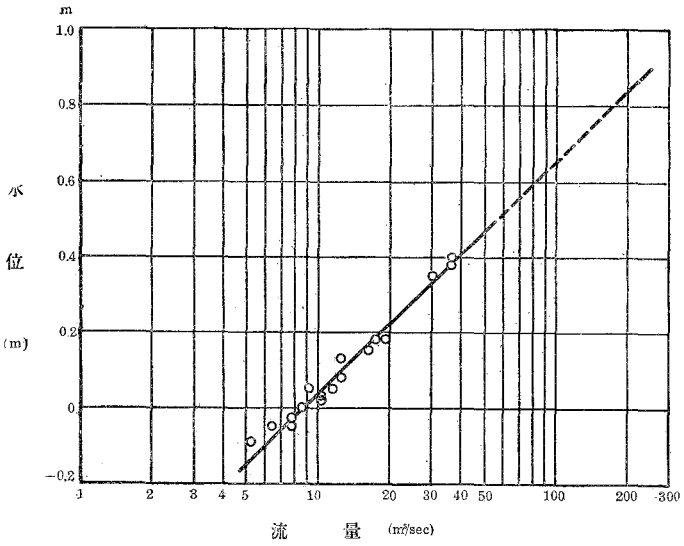


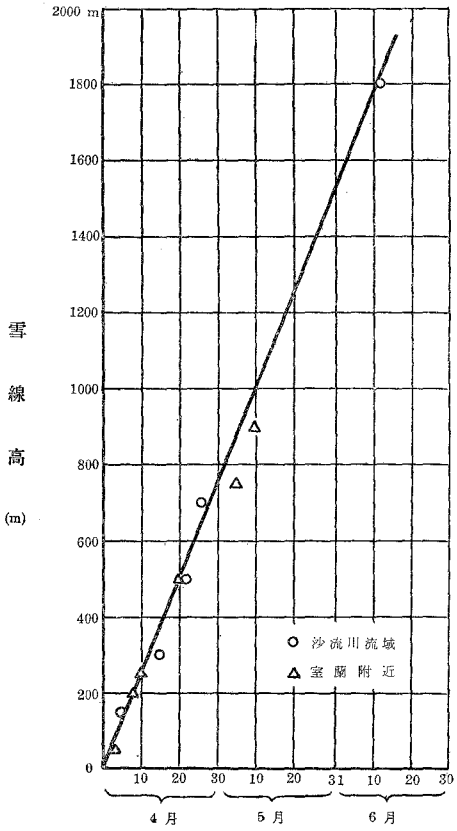
図-6　日高観測所水位流量曲線

一般に水位の変動ある場合に，平均流量は平均水位に対する流量よりも若干大となるのが普通であるが，水位一定なる時は両者の比は1であり，水位の変動大となるに従つて1よりも大となる。

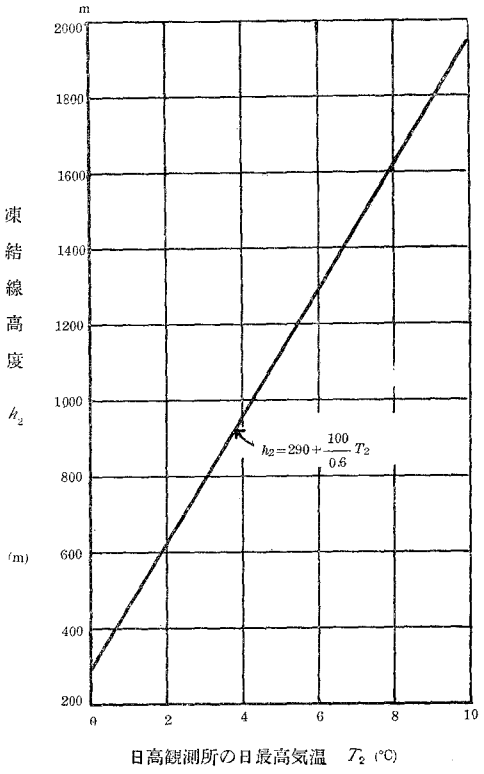
日高観測所の自記水位記録につき，試みに，水位変化小さく，かつまたその変化がほぼ直線的な5月2日について，平均水位に対する流量 Q'_m と平均流量 Q_m とを求め，両者の比をとれば，$Q_m/Q'_m=1.02$ となつた。また水位変化やや大きく，かつまたその変化が曲線的な5月21日について求めてみると，$Q_m/Q'_m=1.11$ となつた。この結果に基づき，毎日の水位変化の状況により，それぞれ適宜修正率を推定して，毎日の平均流量を算出した。

次にこの期間の雨量は日高観測所（標高290 m）の資料を主として用い，これを日高村営の上千栄観測所（標高600 m）および振内営林署観測所（標高87 m）の資料を参考として修正した。

次に雪線高は既述のごとく月日の進行と共に移動するが，本流域において観測調査した結果は，図-7のごとくで，ほぼ直線になつたが，参考のため室蘭附近における観測の結果を入れ



図—7　月日の進行による雪線高の変化



図—8　凍結線高度と観測所気温との関係

てみると，殆んどこの直線上にのることがわかつた。なお，流域内最大高度は1930 mであるから，大体6月17日で流域内の融雪が完了したことになる。4月より6月までの任意の日における雪線高 h_1 は，この図から直ちに求めることができる。

次に凍結線高度 h_2 は，日高観測所の標高 $h_0=290$ m であるから，(15)式より

$$h_2 = 290 + \frac{100}{0.6} T_2 \tag{20}$$

これを図示すれば，図-8のごとくである。これらの関係を用いて，4月6日より6月17日

表—2　融雪区域の面積および中位高度の計算

月日	観測所最高気温 (℃)	観測所最低気温 (℃)	雪線高 h_1 (m)	凍結線高 h_2 (m)	p_1 (%)	p_2 (%)	p_1-p_2 (%)	融雪面積 A (km²)	$p_m=\frac{p_1+p_2}{7}$ (%)	中位高度 h_m (m)
4- 6	10	−2	150		100	0	100	420	50.0	1015
7	9	−1	175	1780	100	1	99	416	50.5	1010
8	5	−4	200	1120	100	38	62	260	69.0	805
9	6	−3	225	1280	100	25	75	315	62.5	895
10	5	−2	250	1120	100	38	62	260	69.0	805
11	5	1	275	1120	100	38	62	260	69.0	805
12	13	6	300		100	0	100	420	50.0	1015
13	5	1	325	1120	100	38	62	260	69.0	805
14	3	1	350	785	100	71	29	122	85.5	625
15	4	1	375	950	99	57	42	176	78.0	690
16	8	2	400	1620	99	3	96	403	51.0	1005
17	12	2	425		99	0	99	416	49.5	1020
18	14	4	450		98	0	98	412	49.0	1025
19	15	7	475		97	0	97	408	48.5	1030
20	8	5	500	1620	96	3	96	403	49.5	1020
21	10	2	525		94	0	94	395	47.0	1040
22	11	4	550		93	0	93	391	46.5	1045
23	16	4	575		90	0	90	378	45.0	1055
24	18	6	600		88	0	88	370	44.0	1065
25	18	4	625		86	0	86	361	43.0	1070
26	8	5	650	1620	83	3	80	336	43.0	1070
27	12	5	675		80	0	80	336	40.0	1100
28	12	6	700		77	0	77	323	38.5	1115
29	18	2	725		75	0	75	315	37.5	1125
30	15	4	750		73	0	73	307	36.5	1135
5- 1	14	6	775		71	0	71	298	35.5	1145
2	12	4	800		69	0	69	290	34.5	1155
3	14	4	825		68	0	68	286	34.0	1160
4	12	4	850		66	0	66	277	33.0	1170
5	10	6	875		64	0	64	269	32.0	1180
6	14	8	900		62	0	62	261	31.0	1190

月日	観測所最高気温 (℃)	観測所最低気温 (℃)	雪線高 h_1 (m)	凍結線高 h_2 (m)	p_1 (%)	p_2 (%)	p_1-p_2 (%)	融雪面積 A (km²)	$p_m=\frac{p_1+p_2}{7}$ (%)	中位高度 h_m (m)
5-7	12	5	925		60	0	60	252	30.0	1200
8	22	8	950		57	0	57	239	28.5	1225
9	20	10	975		54	0	54	227	27.0	1240
10	15	6	1000		52	0	52	218	26.0	1260
11	21	8	1025		49	0	49	206	24.5	1290
12	16	8	1050		46	0	46	193	23.0	1320
13	12	8	1075		43	0	43	181	21.5	1350
14	24	8	1100		40	0	40	168	20.0	1370
15	20	5	1125		38	0	38	160	19.0	1380
16	22	10	1150		35	0	35	147	17.5	1405
17	21	12	1175		32	0	32	134	16.0	1420
18	22	12	1200		30	0	30	126	15.0	1430
19	15	10	1225		28	0	28	118	14.0	1440
20	14	8	1250		26	0	26	109	13.0	1450
21	14	8	1275		25	0	25	105	12.5	1455
22	17	10	1300		24	0	24	101	12.0	1460
23	15	7	1325		23	0	23	96.6	11.5	1465
24	19	10	1350		22	0	22	92.4	11.0	1470
25	27	11	1375		20	0	20	84.0	10.0	1475
26	16	8	1400		18	0	18	75.6	9.0	1485
27	21	10	1425		16	0	16	67.2	8.0	1495
28	25	14	1450		13	0	13	54.6	6.5	1520
29	24	15	1475		10	0	10	42.0	5.0	1550
30	24	15	1500		8	0	8	33.6	4.0	1570
31	24	10	1525		6	0	6	25.2	3.0	1630
6-1	15	10	1550		5	0	5	21.0	2.5	1675
2	15	9	1575		4	0	4	16.8	2.0	1690
3	16	6	1600		3.5	0	3.5	14.7	1.8	1700
4	18	11	1625		3.0	0	3.0	12.6	1.5	1720
5	17	12	1650		2.8	0	2.8	11.8	1.4	1725
6	15	8	1675		2.5	0	2.5	10.5	1.3	1730
7	18	9	1700		1.8	0	1.8	7.6	0.9	1760
8	21	8	1725		1.4	0	1.4	5.9	0.7	1790
9	14	10	1750		1.0	0	1.0	4.2	0.5	1810
10	25	10	1775		0.8	0	0.8	3.4	0.4	1825
11	25	12	1800		0.6	0	0.6	2.5	0.3	1850
12	20	12	1825		0.4	0	0.4	1.7	0.2	1875
13	16	10	1850		0.3	0	0.3	1.3	0.15	1885
14	21	12	1875		0.2	0	0.2	0.8	0.10	1900
15	20	13	1900		0.1	0	0.1	0.4	0.05	1915
16	28	14	1925		0.02	0	0.02	0.1	0.01	1930
17	32	18	1950		0	0	0	0	0	

に至る毎日の日高観測所における最高および最低気温から流域の融雪面積およびその中位高度を求めると，表-2 の通りとなる。

次に融雪区域の中位高度 h_m における毎日の最高および最低気温を (16) 式より求め，以下 (13) 式により D を求め，更にこれを融雪面積 A に乗じて DA を求めると，表-3 のごとくなる。

表—3　積算気温面積 DA の計算

月日	h_m (m)	気温差 T' (°C)	T_2 (°C)	T_1 (°C)	ΔT (°C)	$m = T_2/\Delta T$	ξ	$D = \xi \Delta T$ (deg. hr)	DA (deg. hr. km²)
4- 6	1015	4.4	5.6	−6.4	12	0.465	3.1	37.2	15620
7	1010	4.3	4.7	−5.3	10	0.470	3.2	32.0	13310
8	805	3.1	1.9	−7.1	9	0.210	0.9	8.1	2105
9	895	3.6	5.4	−6.6	9	0.600	4.7	42.3	13320
10	805	3.1	1.9	−5.1	7	0.270	1.4	9.8	2550
11	805	3.1	1.9	−2.1	4	0.475	3.2	12.8	3330
12	1015	4.4	8.6	1.6	7	1.230	17.0	119.0	50000
13	805	3.1	1.9	−2.1	4	0.475	3.2	12.8	3330
14	625	2.0	1.0	−1.0	2	0.500	3.6	7.2	878
15	690	2.4	1.6	−1.4	3	0.535	3.9	11.7	2060
16	1005	4.3	3.7	−2.3	6	0.615	5.0	30.0	12080
17	1020	4.4	7.6	−2.4	10	0.760	6.9	69.0	28700
18	1025	4.4	9.6	−0.4	10	0.960	10.6	106.0	43700
19	1030	4.4	10.6	2.6	8	1.325	19.3	154.4	63000
20	1020	4.4	3.6	0.6	3	1.200	16.3	48.9	19700
21	1040	4.5	5.5	−2.5	8	0.690	5.9	47.2	18650
22	1045	4.5	6.5	−0.5	7	0.930	10.0	70.0	27370
23	1055	4.6	11.4	−0.6	12	0.950	10.4	124.8	47180
24	1065	4.7	13.3	1.3	12	1.110	14.2	170.4	63030
25	1070	4.7	13.3	−0.7	14	0.950	10.4	145.6	52500
26	1070	4.7	3.3	0.3	3	1.100	13.9	41.7	14000
27	1100	4.9	7.1	0.1	7	10.15	11.9	83.3	28000
28	1115	5.0	7.0	1.0	6	1.165	15.5	93.0	30030
29	1125	5.0	13.0	−3.0	16	0.815	7.8	124.8	39300
30	1135	5.1	9.9	−1.1	11	0.900	9.4	103.4	31740
5- 1	1145	5.1	8.9	0.9	8	1.110	14.2	113.6	33840
2	1155	5.2	6.8	−1.2	8	0.850	8.4	67.2	19480
3	1160	5.2	8.8	−1.2	10	0.880	9.0	90.0	25740
4	1170	5.3	6.7	−1.3	8	0.880	8.3	66.4	18390
5	1180	5.3	4.7	0.7	4	1.175	15.7	62.8	16900
6	1190	5.4	8.6	2.6	6	1.430	21.8	130.7	34100

月日	h_m (m)	気温差 T' (°C)	T_2 (°C)	T_1 (°C)	ΔT (°C)	$m = T_2/\Delta T$	ξ	$D = \xi\Delta T$ (deg. hr)	DA (deg, hr. km²)
5- 7	1200	5.5	6.5	−0.5	7	0.930	10.0	70.7	17640
8	1225	5.6	16.4	2.4	14	1.170	15.6	218.4	52200
9	1240	5.7	14.3	4.3	10	1.430	21.8	218.0	49500
10	1260	5.8	9.2	0.2	9	1.020	12.0	108.0	23540
11	1290	6.0	15.0	2.0	13	1.155	15.2	197.6	40700
12	1320	6.2	9.8	1.8	8	1.225	16.9	135.2	26080
13	1350	6.4	5.6	1.6	4	1.400	21.1	84.4	15270
14	1370	6.5	17.5	1.5	16	1.095	13.8	220.8	37100
15	1380	6.6	13.4	−1.6	15	0.895	9.2	138.0	22100
16	1405	6.7	15.3	3.3	12	1.275	13.1	157.2	23100
17	1420	6.8	14.2	5.2	9	1.580	25.4	228.6	30620
18	1430	6.8	15.2	5.2	10	1.520	24.0	240.0	30240
19	1440	6.9	8.1	3.1	5	1.620	26.3	131.5	15520
20	1450	7.0	7.0	1.0	6	1.165	15.5	93.0	10140
21	1455	7.0	7.0	1.0	6	1.165	15.5	93.0	9770
22	1460	7.0	10.0	3.0	7	1.430	21.8	152.6	15410
23	1465	7.1	7.9	−0.1	8	0.990	11.3	90.4	8730
24	1470	7.1	11.9	2.9	9	1.320	19.2	172.8	15970
25	1475	7.1	19.9	3.9	16	1.245	17.4	278.4	23400
26	1485	7.2	8.8	0.8	8	1.100	13.9	111.2	8400
27	1495	7.3	13.7	2.7	11	1.245	17.4	191.4	12860
28	1520	7.4	17.6	6.6	11	1.600	26.0	286.0	15620
29	1550	7.6	16.4	7.4	9	1.825	31.2	280.8	11800
30	1570	7.7	16.3	7.3	9	1.810	30.9	278.1	9340
31	1630	8.1	15.9	1.9	14	1.135	14.8	207.2	5220
6- 1	1675	8.3	6.7	1.7	5	1.340	19.7	98.5	2070
2	1690	8.4	6.6	0.6	6	1.100	13.9	83.4	1400
3	1700	8.5	7.5	−2.5	10	0.750	6.8	68.0	1000
4	1720	8.6	9.4	2.4	7	1.345	19.8	138.6	1746
5	1725	8.6	8.4	3.4	5	1.680	27.8	139.0	1640
6	1730	8.7	6.3	1.3	7	0.900	9.4	65.8	714
7	1760	8.8	9.2	0.2	9	1.020	12.0	108.0	821
8	1790	9.0	12.0	−1.0	13	0.925	9.9	128.7	759
9	1810	9.1	4.9	0.9	4	1.225	16.9	67.6	284
10	1825	9.2	15.8	0.8	15	1.055	12.8	192.0	653
11	1850	9.4	15.6	2.6	13	1.200	16.3	211.9	530
12	1875	9.5	10.5	2.5	8	1.310	19.0	152.0	258
13	1885	9.6	6.4	0.4	6	1.065	13.1	78.6	102
14	1900	9.7	11.3	2.3	9	1.255	17.7	159.3	127
15	1915	9.8	10.2	3.2	7	1.455	22.4	156.8	63
16	1930	9.9	18.1	4.1	14	1.295	13.6	190.4	19
17									0

以上のごとくして求めた毎日の平均流量，雨量，気温および DA を図示すれば，図-10 のごとくである。

この結果について考察してみると，先ず Hydrograph には所々に Peak があるが，これらは何れも殆んど当日の降雨に対応しているので，降雨の直接流出によるものと断定して差支えないであろう。本流域の水源より観測地点までの洪水到達時間は約 4 時間と推定されるので，上のことは充分首肯されることである。

しかるに，降雨の影響の殆んどない日において，DA と流出量とを比較してみると，両者の Peak は同日には対応せず，流出量の Peak は 2 日おくれて起ることが見出された。このように融雪による流出が若干おくれるのは何故であろうか。

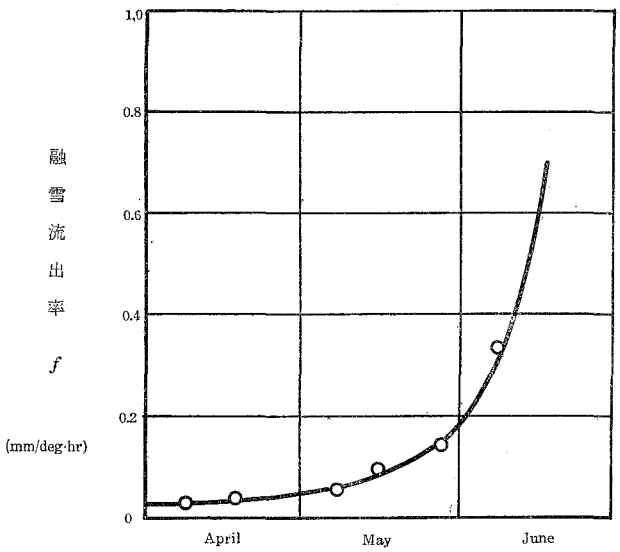
多くの調査によれば，積雪は多量の水分を保留し，急にそれを放出することが知られている。古雪の場合には重量 5% 程度の水分を保有し得るといわれている。これは積雪の毛管作用によるが，積雪中に形成されるいくつもの氷板が，融雪水分の下降を妨げおくらせる作用のあることも見逃せない。積雪の下底と地面との間には，雪水の層が形成されるが，積雪自身やその他の抵抗により，普通の表面流出のような急速な流出は阻まれる。結局地面の特性，融雪の割合その他の要素により，かなりの水分がある期間貯溜されることになるのであつて，融雪流出が中間地下流出 (Subsurface runoff) あるいはある程度地下水流出の性質を帯びているともいえるであろう。

さて流出量の解析にあたり，地下水流出による基底流としては，図-10 に示すごとく，本融雪期間の初期においては，冬期間の渇水流量をとり，$Q_0=6\ m^3/sec$ とし，中期においては 10 m^3/sec，後期においては 30 m^3/sec と漸次増加せしめ，終りは融雪完了期における流量をとり，20 m^3/sec とした。

この期間中において，降雨の影響を無視し得る連続 4～5 日間を所々にえらび，基底流を差引いた正味の融雪流出量 $\sum V_s$ を (17) より求め，またこれより 2 日さかのぼり，同じ連続日数間における DA の和を求め，(18) 式により f を求めれば，図-9 を得る。これを見ると，5 月より 6 月に向い急増しているが，これは主として太陽輻射熱の増加によるものとおもわれる。

この係数 f を用い，これを DA に乗じ，(19) 式により融雪流出量を求めることができる。ただし前述のごとく，融雪流出の Peak は本流域では 2 日おくれて起るから，それだけずらして計算することが必要である。またこの流出は 1 日間に全部起るわけではなく，数日間にわたるものであり，更にそれ以後は Base flow となつて長く尾を引くものと考えられるが，今は計算の便宜上これを 3 日間に分布せしめ，中心の日において 50%，その前後の日においてそれぞれ 25% の割合で流出するものと仮定した。

なお日流出量 V_s は次式により流量 Q_s に換算される。



図—9 融雪流出率と月日との関係

$$Q_s = V_s/3600\times24 = V_s/0.0864\times10^6\ (\mathrm{m^3/sec})$$

次に降雨については，次の三つに分けて考えることができる。

1) 雪線以下の無雪地帯における降雨

2) 雪線と凍結線との間の融雪地帯における降雨

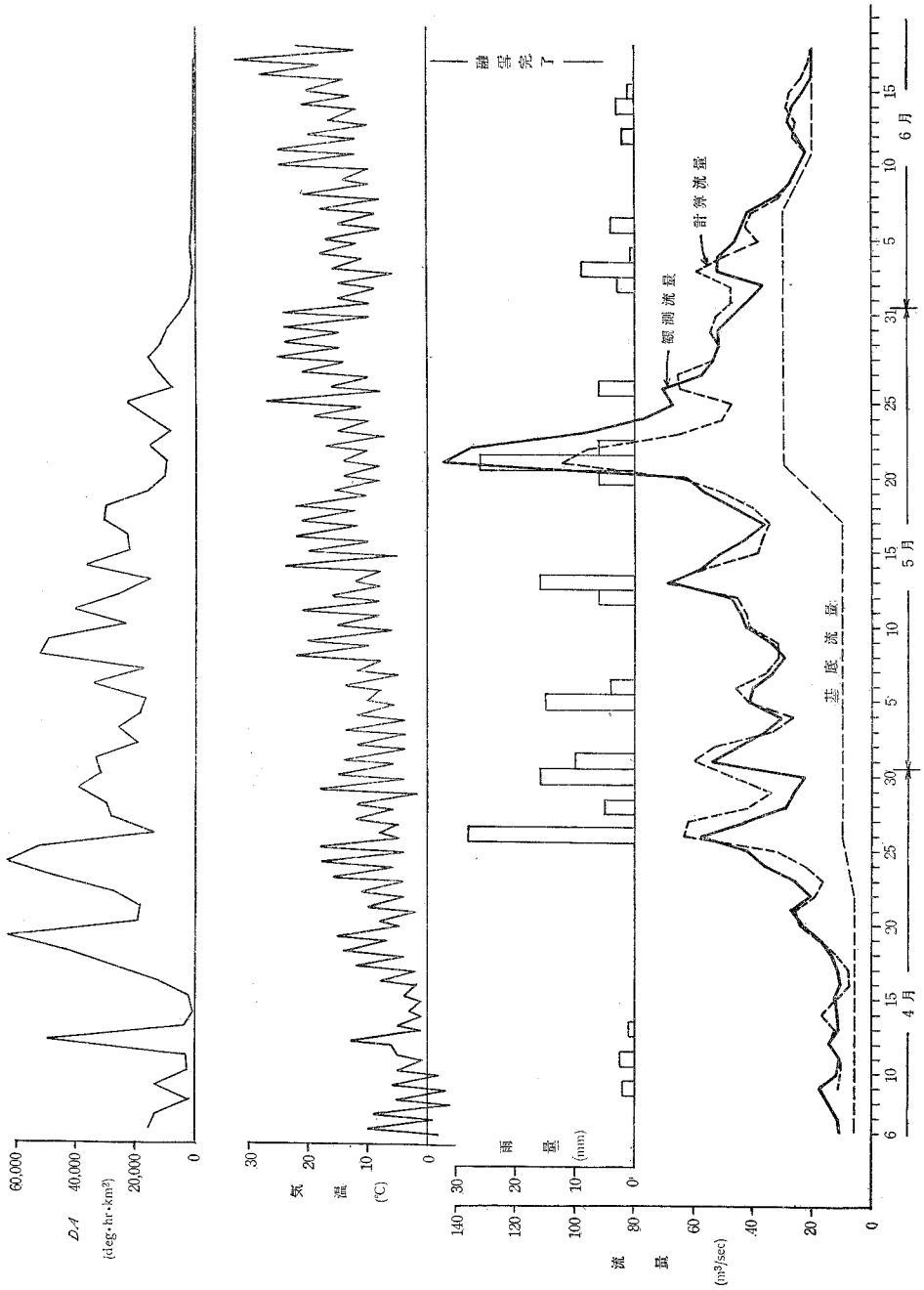
3) 凍結線以上における降雪

以上のうち，2) の降雨と 3) の降雪との境界線は，厳密にいえば必ずしも凍結線とは一致しないであろうが，近似的には凍結線と考えて差支えないであろう。3) の降雪は積雪となつて止まるから，直ちに流出することはないと見なすことができる。

先ず雪線以下の降雨流出については，Unit graph の考え方を応用する。雪線は既述のごとく，月日の進行と共に高所へ移動するが，融雪期の中心である 5 月初め頃には 800 m 前後でこれ以下の区域の出水の遅れ t_g は約 3 時間と推定される。そこで流出時間 $T=10\,t_g=30$ hr と仮定して近似的な Unit graph を作り，1 日雨量に対して合成してみた結果から，直接流出として 3 日目までの分をとり，各日の流出量配分を次のごとく仮定した。

日	1	2	3
流 出 量 (%)	50	40	10

有効雨量としては，融雪によつて土地が湿潤になつていることと，流域の大部分が急峻な山地であることから，流出率を 0.85 と仮定して計算する。しかる時は雪線以下の流域面積 A_1 は



図—10　沙流川日高観測所における毎日の流量雨量および気温ならびに流域の DA

$$A_1 = \frac{100-p_1}{100} A_0 = \frac{100-p_1}{100} \times 420 \quad (\mathrm{km}^2)$$

雨量 R (mm) は次式により流量 Q_r (m^3/sec) に換算される。

$$Q_r = \frac{0.85 \times R \times 10^{-3} \times A_1 \times 10^6}{0.0864 \times 10^6} = 0.00983\, RA_1 \tag{21}$$

更にこれを前述のごとく3日間に配分する。

次に雪線以上の融雪地帯における降雨について考察すれば，積雪上に降つた雨は，積雪中に水分としてかなりの時間保留され，ある程度融雪流出と同様の傾向をもつので，直接流出は比較的少ないと考えられる。故に流出率を0.5と仮定して計算する。これの流出日数および毎日の流出量%を推定することは困難であるが，無雪地の流出よりは遅れの大なるべきことからここでは次の如く仮定した。

日	1	2	3	4
流出量 (%)	30	40	20	10

そこで融雪区域の面積を A_2 (km^2) とすれば，雨量 R (mm) は次式により流量 Q'_r (m^3/sec) に換算される。

$$Q'_r = \frac{0.5 \times R \times 10^{-3} \times A_2 \times 10^6}{0.0866 \times 10^6} = 0.0058\, RA_2 \tag{22}$$

更にこれを前述のごとく4日間に配分する。

以上のごとく計算して得た毎日の融雪流量を Q_s，雪線以下の無雪地帯の降雨による流量を Q_r，雪線以上の融雪地帯の降雨による流量を Q'_r，基底流量を Q_0 とすれば，合計流量 Q は次式によつて求められる。

$$Q = Q_s + Q_r + Q'_r + Q_0 \tag{23}$$

このように計算した毎日の合計流量 Q を，図-10に記入すれば，破線のごとくなる。実際の観測流量と計算流量とを比較すれば，大体において一致していることがみとめられる。ただし降雨の附近においては，誤差が比較的大きいようであるが，これは雨量観測所の位置が偏しているのと，日雨量をとつたので，資料不充分なためとおもわれる。降雨の影響が微少で，融雪が主体をなしている日においては，大体よく一致しているので，少なくとも融雪流出に関する限り，この方法の適合性を証明しているようにおもわれる。

VI. 結 び

以上により次の結論を得る。

1) 河川流域の融雪流出量の算定法としては，融雪流出率 (Degree-hour factor) による方

法が実用的である。

2) 最高および最低気温のみによつて，任意の日の Degree hour を容易に求め得る。

3) 沙流川流域の融雪流出率は図-9 のごとくであり，これによる毎日の計算流量は，実際の観測流量とよく一致する。

4) 適当な気象予報が得られるならば，融雪流出の予報も可能である。

終りに，本研究につき水文資料の提供など御協力を賜わつた室蘭開発建設部，室蘭地方気象台，日高村，振内営林署その他の関係各位に深き謝意を表する次第である。

(昭和 33 年 4 月 30 日受理)

On one Method for Solving Three-Dimensional Stress Problems by Means of Finite Fourier Transforms

Sumio Nomachi*

Abstract

The purpose of this paper is to present the general solutions of the three-dimensional stress problems concerning a rectangular parallelepiped acted by any forces on its boundaries. The six components of the stress and the three components of the displacement are by virtue of the finite Fourier transforms written in the form of the tripple trigonometrical series with respect to x, y, and z.

Introduction

By means of the three functions approach, J. C. Maxwell[1] had first asserted and H. Neuber[2] had lately extended, or by means of Galerkin's vector which Galerkin[3] derived from the idea of Love's strain function[4], the general solutions were found out of the three-dimensional stress problems. It is, however, too difficult to determine these solutions to satisfy the boundary conditions. By that reason, the three-dimensional stress problem so far treated may mostly be connected with elastic medium wich is infinite, semiinfinite, or bodies with axially symmetrical stress. Only a few investigators[5], the author thinks, have been dealing with the three-dimensional stress problems in regard to the finite bodies which have six side planes.

The procedure herein proposed is a kind of operator calculus in which Green's formulas, relating to the equations of equilibrium of forces, are

* 能町純雄

1) Edinburch Roy. Soc. Trans. Vol. 26 (1870). Reprinted in Maxwell's Scientific Papers.

2) H. Neuber: Kerbspannungslehre, Julius Springer, S. 19 (1937).

3) B. Galerkin: Contribution á la solution générale du probléme de la theórie de l'elasticité dans le cas de trois dimensions, Compte Rendus, 190 (1930).

4) A. E. H. Love: The Mathematical theory of elasticity, P. 262, ed. 4.

5) K. Hata: Note on one Method for Solving Three-Dimensional Stress problem, Hokkaido Univ. Kogakubu Kenkyuhokoku 11 (1954). According to Prof. T. Sato's book in which he translates "ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ" of БЕЗУХОВ into Japanese, the similar problem was treated in 1951 by ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ М. М..

used in finding out the components of the stress and the components of the displacement in the finite Fourier transforms.

Equations of Equilibrium of Forces and Green's Formulas

The stresses acting on six sides of a cubic element of an elastic medium are expresses by three normal stresses σ_x, σ_y, and σ_z; and three shearing stresses τ_{yz}, τ_{zx}, and τ_{xy}. From the equilibrium condition applied to a cubical element of the body, the equations of equilibrium of forces take the well-known foorms

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=X, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=Y, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=Z, \tag{3}$$

where X, Y, Z denote the components of the body force per unit volume in x, y, z directions respectively.

The stresses are related to the displacements u, v, and w

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= (2\mu+\lambda)\frac{\partial \mu}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z},\\
\sigma_y &= \lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(2\mu+\lambda)\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z},\\
\sigma_z &= \lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+(2\mu+\lambda)\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
\tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
\tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

where u, v, w, are the components of displacement in x, y, z directions respectively; and μ, λ are Lame's constants.

If we multiply the left side of Eq. (1) by L_1 that is a function differentiable two times with respect to x, y, and z; and integrate by parts, then with the following abbreviations

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int f(x,y,z)\,dV,\\
&\int_0^b\int_0^c f(x,y,z)\,dy\,dz=\int f(x,y,z)\,dA_x,\\
&\int_0^c\int_0^a f(x,y,z)\,dz\,dx=\int f(x,y,z)\,dA_y,\\
&\int_0^a\int_0^b f(x,y,z)\,dx\,dy=\int f(x,y,z)\,dA_z,
\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

we find that

$$\int[\sigma_x L_1]_0^a\,dA_x+\int[\tau_{xy}L_1]_0^b\,dA_y+\int[\tau_{zx}L_1]_0^c\,dA_z$$
$$-\int\left\{\frac{\partial L_1}{\partial x}\sigma_x+\frac{\partial L_1}{\partial y}\tau_{xy}+\frac{\partial L_1}{\partial z}\tau_{zx}\right\}dV=\int XL_1\,dV$$

Putting hereinto the relations (4) and again integrating by parts, we finally have

$$\left.\begin{aligned}
&\int[\sigma_x L_1]_0^a\,dA_x+\int[\tau_{xy}L_1]_0^b\,dA_y+\int[\tau_{zx}L_1]_0^c\,dA_z-\int\Big[(2\mu+\lambda)\,u\,\frac{\partial L_1}{\partial x}\\
&\quad+\mu v\,\frac{\partial L_1}{\partial y}+\mu w\,\frac{\partial L_1}{\partial z}\Big]_0^a dA_x-\int\Big[\mu u\,\frac{\partial L_1}{\partial y}+\lambda v\,\frac{\partial L_1}{\partial x}\Big]_0^b dA_y\\
&\quad-\int\Big[\mu u\,\frac{\partial L_1}{\partial z}+\lambda w\,\frac{\partial L_1}{\partial x}\Big]_0^c dA_z+\int\left\{\mu v\cdot\Delta L_1+(\mu+\lambda)\,u\,\frac{\partial^2 L_1}{\partial x^2}\right\}dV\\
&\quad+(\mu+\lambda)\int\left\{v\,\frac{\partial^2 L_1}{\partial x\partial y}+w\,\frac{\partial^2 L_1}{\partial z\partial x}\right\}dV=\int XL_1\,dV,
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

where

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Similary, Eqs. (2) and (3), yield the following Green's formulas:

$$\left.\begin{aligned}
&\int[\tau_{xy}L_2]_0^a\,dA_x+\int[\sigma_y L_2]_0^b\,dA_y+\int[\tau_{yz}L_2]_0^c\,dA_z-\int\Big[\mu u\,\frac{\partial L_2}{\partial x}\\
&\quad+(2\mu+\lambda)\,v\,\frac{\partial L_2}{\partial y}+\mu w\,\frac{\partial L_2}{\partial z}\Big]_0^b dA_y-\int\Big[\mu v\,\frac{\partial L_2}{\partial x}+\lambda u\,\frac{\partial L_2}{\partial y}\Big]_0^a dA_x\\
&\quad-\int\Big[\mu v\,\frac{\partial L_2}{\partial z}+\lambda w\,\frac{\partial L_2}{\partial y}\Big]_0^c dA_z+\int\left\{\mu v\cdot\Delta L_2+(\mu+\lambda)\,v\,\frac{\partial^2 L_2}{\partial y^2}\right\}dV\\
&\quad+(\mu+\lambda)\int\left\{w\,\frac{\partial^2 L_2}{\partial y\partial z}+u\,\frac{\partial^2 L_2}{\partial x\partial y}\right\}dV=\int YL_2\,dV,
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int[\tau_{zx}L_3]_0^a\,dA_x+\int[\tau_{yz}L_3]_0^b\,dA_y+\int[\sigma_z L_3]_0^c\,dA_z-\int\Big[\mu u\,\frac{\partial L_3}{\partial x}\\
&\quad+v\,\frac{\partial L_3}{\partial y}+(2\mu+\lambda)\,w\,\frac{\partial L_3}{\partial z}\Big]_0^c dA_z-\int\Big[\mu w\,\frac{\partial L_3}{\partial x}+\lambda u\,\frac{\partial L_3}{\partial z}\Big]_0^a dA_x
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

$$-\int\left[\mu w\frac{\partial L_3}{\partial y}+\lambda v\frac{\partial L_3}{\partial z}\right]_0^b dA_y+\int\left\{\mu w\cdot\Delta L_3+(\mu+\lambda)\,w\frac{\partial^2 L_3}{\partial z^2}\right\}dV$$
$$+(\mu+\lambda)\int\left\{u\frac{\partial^2 L_3}{\partial z\partial x}+v\frac{\partial^2 L_3}{\partial y\partial z}\right\}dV=\int ZL_3\,dV.$$

where L_2 and L_3 are each a function which can be differentiated two times with respect to x, y, and z.

Nwe Simbolic Notations

If $f(x)$ satisfies Drichlet's conditions in the interval $(0, a)$ and if for that range its finite sine and cosine transform are defined to be

$$S_m[f(x)]=\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx\,, \tag{10}$$

$$C_m[f(x)]=\int_0^a f(x)\cos\frac{m\pi}{a}x\,dx\,, \tag{11}$$

then, at each point of $(0, a)$ at which $f(x)$ is continious,

$$f(x)=\frac{2}{a}\sum_m S_m[f(x)]\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\,, \tag{12}$$

$$f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx+\frac{2}{a}\sum_m C_m[f(x)]\cdot\cos\frac{m\pi}{a}x\,, \tag{13}$$

which can be extended to functions of three variables. Suppose, for instance, that $f(x, y, z)$ is a function of the three independent variables, x, y, and z, and satisfies Drichilet's conditions in the spacial domain $(0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c)$; then the finite tripple Fourier transform of $f(x, y, z)$ with regard to $\sin m\pi x/a$, $\sin n\pi y/b$, and $\sin r\pi z/c$, may be written in

$$S_mS_nS_r[f(x, y, z)]=\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x, y, z)\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\,dx\,dy\,dz\,, \tag{14}$$

where

$$m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,$$

then, at eachp oint of that space at which $f(x, y, z)$ is continious.

$$f(x, y, z)=\frac{8}{abc}\sum_m\sum_n\sum_r S_mS_nS_r[f(x, y, z)]\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{r\pi}{c}z\,. \tag{15}$$

In a similar way, the finite tripple Fourier transforms with respect to $\sin m\pi x/a\cos n\pi y/b\cos r\pi z/c$ and $\cos m\pi x/a\sin n\pi y/b\cos r\pi z/c$, are related with $f(x, y, z)$ by the two inversion formulas:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) = \frac{2}{abc}\sum_m \sin\frac{m\pi}{a}x\Big\{\int S_m[f(x,y,z)]\,dA_x \\ +2\sum_n\int_0^c S_mC_n[f(x,y,z)]\,dz\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y+2\sum_r\int_0^b S_mC_r[f(x,y,z)]\,dy \\ \times\cos\frac{r\pi c}{z}+4\sum_n\sum_r S_mC_nC_r[f(x,y,z)]\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\Big\}, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) = \frac{2}{abc}\sum_n \sin\frac{n\pi}{b}y\Big\{\int S_n[f(x,y,z)]\,dA_y \\ +2\sum_m\int_0^c C_mS_n[f(x,y,z)]\,dz\times\cos\frac{m\pi}{a}x+2\sum_r\int_0^a S_nC_r[f(x,y,z)]\,dx \\ \times\cos\frac{r\pi}{c}z+4\sum_m\sum_r C_mS_nC_r[f(,x,y,z)]\cdot\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Solutions of Rectangular Parallelopiped

If we locate the rectangular Cartesian coordinate as snown in Fig. 1.

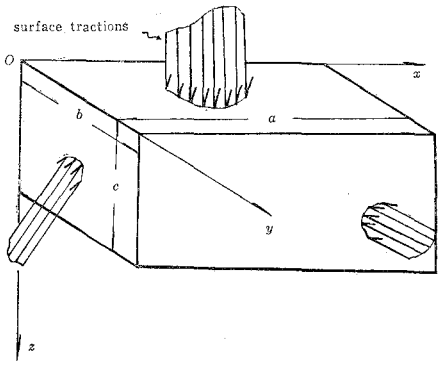


Fig. 1.

and let

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z, \\ L_2 &= \sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z, \\ L_3 &= \sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

then, with the notations

$$M=\frac{m\pi}{a},\quad N=\frac{n\pi}{b},\quad R=\frac{r\pi}{c}.$$

Eq. (7) becomes

for $n \neq m = r = 0$,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^c S_n\left[(\sigma_x)_{x=a}\right]dz-\int_0^c S_n\left[(\sigma_x)_{x=0}\right]dz+\int_0^a S_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]dx\\&-\int_0^a S_n\left[(\tau_{zx})_{z=0}\right]dx-\mu N\left\{\int_0^c C_n\left[v_{x=a}\right]dz-\int_0^c C_n\left[v_{x=0}\right]dz\right\}\\&-\mu N\left\{(-1)^n\int(u_{y=b})\,dA_y-\int(u_{y=0})\,dA_y\right\}-\mu N^2\int S_n[u]\,dA_y=\int S_n[X]\,dA_y\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

for $m,\ n \neq 0,\ r = 0$,

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^m\int_0^c S_n\left[(\sigma_x)_{x=a}\right]dz-\int_0^c S_n\left[(\sigma_x)_{x=0}\right]dz+C_mS_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]\\&-C_mS_n\left[(\tau_{zx})_{z=0}\right]-\mu N\left\{(-1)^m\int_0^c C_n\left[v_{x=a}\right]dz-\int_0^c C_n\left[v_{x=0}\right]dz\right\}\\&-\mu N\left\{(-1)^n\int_0^c C_m\left[u_{y=b}\right]dz-\int_0^c C_m\left[u_{y=0}\right]dz\right\}-\left\{M^2(2\mu+\lambda)+N^2\mu\right\}\\&\times\int_0^c C_mS_n[u]\,dz-MN(\mu+\lambda)\int_0^c S_mC_n[v]\,dz=\int_0^c C_mS_n[X]\,dz\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

for $n,\ r \neq 0,\ m = 0$,

$$\left.\begin{aligned}&S_nC_r\left[(\sigma_x)_{x=a}\right]-S_nC_r\left[(\sigma_x)_{x=0}\right]+(-1)^r\int_0^a S_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]dx\\&-\int_0^a S_n\left[(\tau_{zx})_{z=0}\right]dx-\mu N\left\{C_nC_r\left[v_{x=a}\right]-C_nC_r\left[v_{x=0}\right]\right\}\\&-\mu N\left\{(-1)^n\int_0^a C_r\left[u_{y=b}\right]dx-\int_0^a C_r\left[u_{y=0}\right]dx\right\}+\mu R\left\{S_nS_r\left[w_{x=a}\right]\right.\\&\left.-S_nS_r\left[w_{x=0}\right]\right\}-\mu(N^2+R^2)\int_0^a S_nC_r[u]\,dx=\int_0^a S_nC_r[X]\,dx\,,\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

for $m,\ n,\ r \neq 0$,

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^mS_nC_r\left[(\sigma_x)_{x=a}\right]-S_nC_r\left[(\sigma_x)_{x=0}\right]+(-1)^rC_mS_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]\\&-C_mS_n\left[(\tau_{zx})_{z=0}\right]-\mu N\left\{(-1)^mC_nC_r\left[v_{x=a}\right]-C_nC_r\left[v_{x=0}\right]\right\}\\&-\mu N\left\{(-1)^nC_mC_r\left[u_{y=b}\right]-C_mC_r\left[u_{y=0}\right]\right\}+\mu R\left\{(-1)^mS_nS_r\left[w_{x=a}\right]\right.\\&\left.-S_nS_r\left[w_{x=0}\right]\right\}+\lambda M\left\{(-1)^rS_mS_n\left[w_{z=c}\right]-S_mS_n\left[w_{z=0}\right]\right\}\\&-\left\{(2\mu+\lambda)M^2+\mu N^2+\mu R^2\right\}C_mS_nC_r[v]-(\mu+\lambda)MN\cdot S_mC_nC_r[v]\\&+(\mu+\lambda)MR\cdot S_mS_nS_r[w]=C_mS_nC_r[X]\,.\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

Proceeding as before, we write Eq. (8) as follows:

for $m \neq n = r = 0$,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^c S_m\left[(\sigma_y)_{y=b}\right]dz-\int_0^c S_m\left[(\sigma_y)_{y=0}\right]dz+\int_0^b S_m\left[(\tau_{yz})_{z=c}\right]dy\\&-\int_0^b S_m\left[(\tau_{yz})_{z=0}\right]dy-\mu M\left\{\int_0^c C_m\left[u_{y=b}\right]dz-\int_0^c C_m\left[u_{y=0}\right]dz\right\}\\&-\mu M\left\{(-1)^m\int(v_{x=a})\,dA_x-\int(v_{x=0})\,dA_x\right\}-\mu\int S_m[v]\,dA_x=\int S_m[Y]\,dA_x\,,\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

for $m,\ n \neq 0,\ r=0,$

$$\left.\begin{aligned}&(-1)_n\int_0^c S_m\left[(\sigma_y)_{y=b}\right]dz-\int_0^c S_m\left[(\sigma_y)_{y=0}\right]dz+S_mC_n\left[(\tau_{yz})_{z=c}\right]\\&-S_mC_n\left[(\tau_{yz})_{z=0}\right]-\mu M\left\{(-1)^n\int_0^c C_m\left[u_{y=b}\right]dz-\int_0^c C_m\left[u_{y=0}\right]dz\right\}\\&-\mu M\left\{(-1)^m\int_0^c C_n\left[v_{x=a}\right]dz-\int_0^c C_n\left[v_{x=0}\right]dz\right\}-\left\{\mu M^2+(2\mu+\lambda)N^2\right\}\\&\times\int_0^c S_mC_n\left[v\right]dz-(\mu+\lambda)MN\int_0^c C_mS_n\left[u\right]dz=\int_0^c S_mC_n\left[Y\right]dz\,,\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

for $m,\ r \neq 0,\ n=0,$

$$\left.\begin{aligned}&S_mC_r\left[(\sigma_y)_{y=b}\right]-S_mC_r\left[(\sigma_y)_{y=0}\right]+(-1)^r\int_0^b S_m\left[(\tau_{yz})_{z=c}\right]dy\\&-\int_0^b S_m\left[(\tau_{yz})_{z=0}\right]dy-\mu M\left\{C_mC_r\left[u_{y=b}\right]-C_mC_r\left[u_{y=0}\right]\right\}\\&-\mu M\left\{(-1)^n\int_0^b C_r\left[v_{x=a}\right]dy-\int_0^b C_r\left[v_{x=0}\right]dy\right\}+\mu R\left\{S_mS_r\left[w_{x=a}\right]\right.\\&\left.-S_mS_n\left[w_{x=0}\right]\right\}-\mu\left(M^2+R^2\right)\int_0^b S_mC_r\left[v\right]dy=\int_0^b S_mC_r\left[Y\right]dy\,,\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

for $m,\ n,\ r \neq 0,$

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^nS_mC_r\left[(\sigma_y)_{y=b}\right]-S_mC_r\left[(\sigma_y)_{y=0}\right]+(-1)^rS_mC_n\left[(\tau_{yz})_{z=c}\right]\\&-S_mC_n\left[(\tau_{yz})_{z=0}\right]-\mu M\left\{(-1)^nC_mC_r\left[u_{y=b}\right]-C_mC_r\left[u_{y=0}\right]\right\}\\&-\mu M\left\{(-1)^mC_nC_r\left[v_{x=a}\right]-C_nC_r\left[v_{x=0}\right]\right\}+\mu R\left\{(-1)^nS_mS_r\left[w_{y=b}\right]\right.\\&\left.-S_mS_r\left[w_{y=0}\right]\right\}+\lambda N\left\{(-1)^rS_mS_n\left[w_{z=c}\right]-S_mS_n\left[w_{z=0}\right]\right\}\\&-\left\{\mu M^2+(2\mu+\lambda)N^2+\mu R^2\right\}\cdot S_mC_nC_r\left[v\right]-(\mu+\lambda)MN\cdot C_mS_nC_r\left[u\right]\\&+(\mu+\lambda)NR\cdot S_mS_nS_r\left[w\right]=S_mC_nC_r\left[Y\right].\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

Similary, Eq. (9) yields

$$\left.\begin{aligned}&-(2\mu+\lambda)R\left\{(-1)_rS_mS_n\left[w_{z=c}\right]-S_mS_n\left[w_{z=0}\right]\right\}-\mu M\left\{(-1)^nS_nS_r\left[w_{x=a}\right]\right.\\&\left.-S_nS_r\left[w_{x=0}\right]\right\}-\mu N\left\{(-1)^nS_mS_r\left[w_{y=b}\right]-S_mS_r\left[w_{y=0}\right]\right\}\\&-\left\{\mu M^2+\mu N^2+(2\mu+\lambda)R^2\right\}\cdot S_mS_nS_r\left[w\right]+(\mu+\lambda)RM\cdot C_mS_nC_r\left[u\right]\\&+(\mu+\lambda)NR\cdot S_mC_nC_r\left[v\right]=S_mS_nS_r\left[z\right].\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Each of the three equations (22), (26) and (27) include the finite Fourier transforms of u, v, and w, Hence, the finite Fourier transforms of u, v, and w:

$$C_mS_nC_r\left[u\right],\quad S_mC_nC_r\left[u\right],\quad S_mS_nS_r\left[w\right]$$

can, with solving Eqs. (22), (26) and (27) simultaneously, be expressed by

the double finite Fourier transforms connecting with the stresses and the displacements on the six side planes.

These double finite Fourier transforms are the boundary values to be determined as satisfying the given boundary conditions, and apparently the numbers of the double finite Fourier transforms are same as those of the boundary conditions.

To avoid the complexities of further evaluations, let us introduce the following notaions:

$$\left.\begin{matrix}\pi A'_{0n}\\ \pi A_{n0}\end{matrix}\right\}=\int_0^c S_n\left[(\sigma_x)_{x=a}\right]dz\mp\int_0^c S_n\left[(\sigma_x)_{x=0}\right]dz\,, \tag{28}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi B'_{m0}\\ \pi B_{m0}\end{matrix}\right\}=\int_0^c S_m\left[(\sigma_y)_{y=b}\right]dz\mp\int_0^c S_m\left[(\sigma_y)_{y=0}\right]dz\,, \tag{29}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi A'_{nr}\\ \pi A_{nr}\end{matrix}\right\}=S_nC_r\left[(\sigma_x)_{x=a}\right]\mp S_nC_r\left[(\sigma_x)_{x=0}\right]\,, \tag{30}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi B'_{mr}\\ \pi B_{mr}\end{matrix}\right\}=S_mC_r\left[(\sigma_y)_{y=b}\right]\mp S_mC_r\left[(\sigma_y)_{y=0}\right]\,, \tag{31}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi D'_{0n}\\ \pi D_{0n}\end{matrix}\right\}=\int_0^a S_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]dx\mp\int_0^a S_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]dx\,, \tag{32}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi F'_{m0}\\ \pi F_{m0}\end{matrix}\right\}=\int_0^b S_m\left[(\tau_{yz})_{z=c}\right]dy\mp\int_0^b S_m\left[(\tau_{yz})_{z=0}\right]dy\,, \tag{33}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi D'_{mn}\\ \pi D_{mn}\end{matrix}\right\}=C_mS_n\left[(\tau_{zx})_{z=c}\right]\mp C_mS_n\left[(\tau_{zx})_{z=0}\right]\,, \tag{34}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi F'_{mn}\\ \pi F_{mn}\end{matrix}\right\}=S_mC_n\left[(\tau_{yz})_{z=c}\right]\mp S_mC_n\left[(\tau_{yz})_{z=0}\right]\,, \tag{35}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{00}\\ H_{00}\end{matrix}\right\}=\int(v_{x=a})\,dA_x\mp\int(v_{x=0})\,dA_x\,, \tag{36}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{00}\\ J_{00}\end{matrix}\right\}=\int(u_{y=b})\,dA_y\mp\int(u_{y=0})\,dA_y\,, \tag{37}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{m0}\\ H_{m0}\end{matrix}\right\}=\int_0^c C_m\left[u_{y=b}\right]dz\mp\int_0^c C_m\left[u_{y=0}\right]dz\,, \tag{38}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{n0}\\ J_{n0}\end{matrix}\right\}=\int_0^c C_n\left[v_{x=a}\right]dz\mp\int_0^c C_n\left[v_{x=0}\right]dz\,, \tag{39}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{0r}\\ H_{0r}\end{matrix}\right\}=\int_0^a C_r\left[u_{y=b}\right]dx\mp\int_0^a C_r\left[u_{y=0}\right]dx\,, \tag{40}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{0r}\\ J_{0r}\end{matrix}\right\}=\int_0^b C_r\left[v_{x=a}\right]dy\mp\int_0^b C_r\left[v_{x=0}\right]dy\,, \tag{41}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{mr}\\ H_{mr}\end{matrix}\right\}=C_mC_r\left[u_{y=b}\right]\mp C_mC_r\left[u_{y=0}\right]\,, \tag{42}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{nr}\\ J_{nr}\end{matrix}\right\}=C_nC_r\left[v_{x=a}\right]\mp C_nC_r\left[v_{x=0}\right]\,, \tag{43}$$

$$\left.\begin{matrix} E'_{nr} \\ E_{nr} \end{matrix}\right\} = S_n S_r [w_{x=a}] \mp S_n S_r [w_{x=0}] , \tag{44}$$

$$\left.\begin{matrix} G'_{mr} \\ G_{mr} \end{matrix}\right\} = S_m S_r [w_{y=b}] \mp S_m S_r [w_{y=0}] , \tag{45}$$

$$\left.\begin{matrix} K'_{mn} \\ K_{mn} \end{matrix}\right\} = S_m S_n [w_{z=c}] \mp S_m S_n [w_{z=c}] . \tag{46}$$

Now, for Eqs. (19) and (23), we have

$$\begin{aligned} & A_{n0} + D_{n0} - \mu N J_{n0} - \mu N \left\{ (1+(-1)^n) H_{00} + (1-(-1)^n) H'_{00} \right\} \\ & \quad - \mu N^2 \int S_n [u] \, dA_y - \mu N^2 \int S_n [u] \, dA_y = \int S_n [X] \, dA_y , \\ & B_{m0} + F_{m0} - \mu M H_{m0} - \mu M \left\{ (1+(-1)^m) J_{00} + (1-(-1)^m) J'_{00} \right\} \\ & \quad - \mu M^2 \int S_m [v] \, dA_x - \mu M^2 \int S_m [v] \, dA_x = \int S_n [Y] \, dA_x , \end{aligned} \tag{47}$$

for Eqs. (21) and (25),

$$\begin{aligned} & A_{nr} + D_{0n} - \mu N J_{nr} - \mu N \left\{ (1+(-1)^n) H_{0r} + (1-(-1)^n) H'_{0r} \right\} \\ & \quad + \mu R E_{nr} - \int_0^a S_n C_r [X] \, dx = \mu (N^2 + R^2) \int_0^a S_n C_r [u] \, dx , \\ & B_{mr} + F_{m0} - \mu M H_{mr} - \mu M \left\{ (1+(-1)^n) J_{0r} + (1-(-1)^n) J'_{0r} \right\} \\ & \quad + \mu R G_{mr} - \int_0^b S_m C_r [Y] \, dy = \mu (M^2 + R^2) \int_0^b S_m C_r [v] \, dy , \end{aligned} \tag{48}$$

for Eqs. (20) and (24),

$$\left.\begin{aligned} & (1+(-1)^m) A_{n0} + (1-(-1)^m) A'_{0n} + D_{mn} - \mu N \left\{ (1+(-1)^m) J_{n0} \right. \\ & \quad \left. + (1-(-1)^m) J'_{n0} \right\} - \mu N \left\{ (1+(-1)^n) H_{m0} + (1-(-1)^n) H'_{mc} \right\} \\ & \quad - \int_0^c C_m S_n [X] \, dx = \left\{ (2\mu + \lambda) M^2 + \mu N^2 \right\} \int_0^c C_m S_n [u] \, dz \\ & \quad + MN (\mu + \lambda) \int_0^c S_m C_n [v] \, dz , \\ & (1+(-1)^n) B_{m0} + (1-(-1)^n) B'_{m0} + F_{mn} - \mu M \left\{ (1+(-1)^n) H_{m0} \right. \\ & \quad \left. + (1-(-1)^n) H'_{m0} \right\} - \mu M \left\{ (1+(-1)^m) J_{n0} + (1-(-1)^m) J'_{n0} \right\} \\ & \quad - \int_0^c S_m C_n [Y] \, dz = \left\{ (2\mu + \lambda) N^2 + \mu M^2 \right\} \int_0^c S_m C_n [v] \, dz \\ & \quad + MN (\mu + \lambda) \int_0^c C_m S_n [u] \, dz , \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

from which

$$\left.\begin{aligned}\int_0^c C_m S_n[u]\,dz &= \frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{M^2+N^2}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{M^2}{(M^2+N^2)^2}\right\}\left\{(1+(-1)^m)A_{n0}\right.\\ &\left.+(1-(-1)^m)A'_{n0}-\int_0^c C_m S_n[X]\,dz\right\}-\frac{1}{\mu}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{MN}{(M^2+N^2)^2}\\ &\times\left\{(1+(-1)^n)B_{m0}+(1-(-1)^n)B'_{m0}-\int_0^c S_m C_n[Y]\,dz\right\},\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^c S_m C_n[v]\,dz &= \frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{M^2+N^2}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{N^2}{(M^2+N^2)}\right\}\left\{(1+(-1)^n)B_{m0}\right.\\ &\left.+(1-(-1)^n)B'_{m0}-\int_0^c S_m C_n[Y]\,dz\right\}-\frac{1}{\mu}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{MN}{(M^2+N^2)^2}\\ &\times\left\{(1+(-1)^m)A_{n0}+(1-(-1)^m)A'_{n0}-\int_0^c C_m S_n[X]\,dz\right\},\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

for Eqs. (22), (26) and (27), we have

$$\left.\begin{aligned}&(1+(-1)^m)A_{nr}+(1-(-1)^m)A'_{nr}+(1+(-1)^r)D_{mn}+(1-(-1)^r)D'_{mn}\\ &-\mu N\{(1+(-1)^m)J_{nr}+(1-(-1)^m)J'_{nr}\}+\mu R\{(1+(-1)^m)E_{nr}\\ &+(1-(-1)^m)E'_{nr}\}-\mu N\{(1+(-1)^n)H_{mr}+(1-(-1)^n)H'_{mr}\}\\ &+\lambda M\{(1+(-1)^r)K_{mn}+(1-(-1)^r)K'_{mn}\}-C_m S_n C_r[X]\\ &=\{(2\mu+\lambda)M^2+\mu N^2+\mu R^2\}\times C_m S_n C_r[u]+(\mu+\lambda)MN\cdot S_m C_n C_r[v]\\ &-(\mu+\lambda)MR\cdot S_m S_n S_r[w],\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

$$\left.\begin{aligned}&(1+(-1)^n)B_{nr}+(1-(-1)^n)B'_{nr}+(1+(-1)^r)F_{mn}-(1-(-1)^r)F'_{mn}\\ &-\mu M\{(1+(-1)^n)H_{mr}+(1-(-1)^n)H'_{mr}\}+\mu R\{(1+(-1)^n)G_{mr}\\ &+(1-(-1)^n)G'_{mr}\}-\mu M\{(1+(-1)^m)J_{nr}+(1-(-1)^m)J'_{nr}\}\\ &+\lambda N\{(1+(-1)^r)K_{mn}+(1-(-1)^r)K'_{mn}\}-S_m C_n C_r[Y]\\ &=\{(2\mu+\lambda)N^2+\mu M^2+\mu R^2\}\times S_m C_n C_r[v]+(\mu+\lambda)MN\times C_m S_n C_r[u]\\ &-(\mu+\lambda)NR\cdot S_m S_n S_r[w],\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

$$\left.\begin{aligned}&-(2\mu+\lambda)R\{(1+(-1)^r)K_{mn}-(1-(-1)^r)K'_{mn}\}-\mu M\{(1+(-1)^m)E_{nr}\\ &+(1-(-1)^m)E'_{nr}\}-\mu M\{(1+(-1)^n)G_{mr}+(1-(-1)^n)G'_{mr}\}\\ &-S_m S_n S_r[Z]=\{(2\mu+\lambda)R^2+\mu M^2+\mu N^2\}\times S_m S_n S_r[w]\\ &-(\mu+\lambda)R\cdot M\times C_m S_n C_r[u]-(\mu+\lambda)NR\times S_m C_n C_r[v],\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

from which we find that

$$\left.\begin{aligned}C_m S_n C_r[u] &= \left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{M}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{MR^2}{T^2}\right\}\left\{(1+(-1)^r)K_{mn}\right.\\ &\left.+(1-(-1)^r)K'_{mn}\right\}+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{MNR}{T^2}\left\{(1+(-1)^n)G_{mr}+(1-(-1)^n)G'_{mr}\right\}\\ &-\left\{\frac{R}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{M^2R}{T^2}\right\}\left\{(1+(-1)^m)E_{nr}+(1-(-1)^m)E'_{nr}\right\}\end{aligned}\right|$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{MN}{T^2}\times\Big\{(1+(-1)^n)B_{mr}+(1-(-1)^n)B'_{mr}+(1+(-1)^r)F_{mn}\\
&+(1-(-1)^r)F'_{mn}-S_mC_nC_r[Y]\Big\}+\Big\{\frac{1}{\mu T}-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{M^2}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^m)\\
&\times A_{nr}+(1-(-1)^m)A'_{nr}+(1+(-1)^r)D_{mn}+(1-(-1)^r)D'_{mn}-C_mS_nC_r[X]\Big\}\\
&-\Big\{\frac{N}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{M^2N}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^n)H_{mr}+(1-(-1)^n)H'_{mr}\\
&+(1+(-1)^m)J_{nr}+(1-(-1)^m)J'_{nr}\Big\}+\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{MR}{T^2}S_mS_nS_c[Z],
\end{aligned}\right\}\quad(55)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
S_mC_nC_r[v]=&\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{N}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{NR^2}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^r)K_{mn}\\
&+(1-(-1)^r)K'_{mn}\Big\}+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{MNR}{T^2}\Big\{(1+(-1)^n)E_{nr}+(1-(-1)^m)E'_{nr}\Big\}\\
&-\Big\{\frac{R}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{N^2R}{T^2}\Big\}\times\Big\{(1+(-1)^n)G_{mr}+(1-(-1)^n)G'_{mr}\Big\}\\
&-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{MN}{T^2}\Big\{(1+(-1)^m)A_{nr}+(1-(-1)^m)A'_{nr}+(1+(-1)^r)D_{mn}\\
&+(1-(-1)^r)D'_{mn}-C_mS_nC_r[X]\Big\}+\Big\{\frac{1}{\mu T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{N^2}{T^2}\Big\}\\
&\times\Big\{(1+(-1)^n)B_{mr}+(1-(-1)^n)B'_{mr}+(1+(-1)^r)F_{mn}+(1+(-1)^r)F'_{mn}\\
&-S_mC_nC_r[Y]\Big\}-\Big\{\frac{M}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{MN^2}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^n)H_{mr}\\
&+(1-(-1)^n)H'_{mr}+(1+(-1)^m)J_{nr}+(1-(-1)^m)J'_{nr}\Big\}\\
&+\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{NR}{T^2}S_mS_nS_c[Z],
\end{aligned}\right\}\quad(56)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
S_mS_nS_r[w]=&-\Big\{\frac{R}{T}+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{R(M^2+N^2)}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^r)K_{mn}\\
&+(1-(-1)^r)K'_{mn}\Big\}+\Big\{\frac{M}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{MR^2}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^m)E_{nr}\\
&+(1-(-1)^m)E'_{nr}\Big\}+\Big\{\frac{N}{T}-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{NR^2}{T^2}\Big\}\Big\{(1+(-1)^n)G_{mr}\\
&+(1-(-1)^n)G'_{mr}\Big\}+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{RM}{T^2}\Big[(1+(-1)^m)A_{nr}+(1-(-1)^m)A'_{nr}\\
&+(1+(-1)^r)D_{mn}+(1-(-1)^r)D'_{mn}-2\mu N\Big\{(1+(-1)^m)J_{nr}\\
&+(1-(-1)^m)J'_{nr}\Big\}-C_mS_nC_r[X]\Big]+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{NR}{T^2}\Big[(1+(-1)^n)B_{mr}
\end{aligned}\right\}\quad(57)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+(1-(-1)^n)B'_{mr}+(1+(-1)^r)F_{mn}+(1-(-1)^r)F'_{mn}-2\mu M\\
&\times\left\{(1+(-1)^n)H_{mr}+(1-(-1)^n)H'_{mr}\right\}-S_mC_nC_r[Y]\Big]\\
&-\left\{\frac{1}{T}-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{R^2}{T^2}\right\}\times S_mS^nS_r[Z]
\end{aligned}\right\}
$$

where

$$T=M^2+N^2+R^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{r\pi}{c}\right)^2.$$

With the aid of the following formulas:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_m\frac{(1-(-1)^m)}{(1+(-1)^m)}\frac{M}{T}\sin Mx=\frac{a}{2}\begin{cases}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi),\\ Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi),\end{cases}\\
&\sum_m\frac{(1-(-1)^m)}{(1+(-1)^m)}\frac{M}{T^2}\sin Mx=\frac{a^3}{4\pi^2\alpha_{nr}^2}\begin{cases}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi),\\ P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi),\end{cases}\\
&\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{ch\pi\alpha_{nr}(1-\xi)\pm ch\pi\alpha_{nr}\xi}{ch\pi\alpha_{nr}\pm 1},\\
&\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{\pi\alpha_{nr}\{\xi sh\pi\alpha_{nr}(1-\xi)\pm(1-\xi)sh\pi\alpha_{nr}\}}{ch\pi\alpha_{nr}\pm 1},
\end{aligned}\right\}\quad(58)
$$

$$M=\frac{m\pi}{a},\quad T=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{r\pi}{c}\right)^2,\quad \alpha_{nr}^2=\frac{a^2}{b^2}n^2+\frac{a^2}{c^2}r^2,\quad \xi=\frac{x}{a},$$

$$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{1}{T}\cos Mx=\frac{a^2}{2\pi\alpha_{nr}}\begin{cases}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi),\\ \phi^{(2)}(\pi_{nr}\xi)-\dfrac{2}{\pi\alpha_{nr}},\end{cases}\\
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{M^2}{T^2}\cos Mx=\frac{a^2}{4\pi\alpha_{nr}}\begin{cases}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi),\\ \phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi),\end{cases}\\
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{1}{T^2}\cos Mx=\frac{a^4}{4\pi^3\alpha_{nr}^3}\begin{cases}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi),\\ \phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\dfrac{2}{\pi\alpha_{nr}},\end{cases}\\
&\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ \phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{sh\pi\alpha_{nr}(1-\xi)\mp sh\pi\alpha_{nr}\xi}{ch\pi\alpha_{nr}\pm 1},\\
&\left.\begin{matrix}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ \Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{\pi\alpha_{nr}\{\xi ch\pi\alpha_{nr}(1-\xi)\mp(1-\xi)ch\pi\alpha_{nr}\xi\}}{ch\pi\alpha_{nr}\pm 1},
\end{aligned}\right\}\quad(59)
$$

$$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{N}{T}\sin Ny=\frac{b}{2}\begin{cases}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta),\\ Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta),\end{cases}\\
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{N}{T^2}\sin Ny=\frac{b^3}{4\pi^2\beta_{mr}}\begin{cases}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta),\\ P^{(2)}(\beta_{mr}\eta),\end{cases}
\end{aligned}\right\}\quad(60)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{ch\pi\beta_{mr}(1-\eta)\pm ch\pi\beta_{mr}\eta}{ch\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\beta_{mr}\{\eta sh\pi\beta_{mr}(1-\eta)\pm(1-\eta)sh\pi\beta_{mr}\eta\}}{ch\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\beta_{mr}^2 = \frac{b^2}{a^2}m^2+\frac{b^2}{c^2}r^2,\quad \eta=\frac{y}{b},\quad N=\frac{n\pi}{b}\,,\\
&n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,\\
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{1}{T}\cos Ny = \frac{a^2}{2\pi\beta_{mr}}\left\{\begin{matrix}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\,,\\ \phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\dfrac{2}{\pi\beta_{mr}}\,,\end{matrix}\right.\\
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{N^2}{T^2}\cos Ny = \frac{a^2}{4\pi\beta_{mr}}\left\{\begin{matrix}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\,,\\ \phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\,,\end{matrix}\right.\\
&\sum_n\frac{(1-(-1)^n)}{(1+(-1)^n)}\frac{1}{T^2}\cos Ny = \frac{a^4}{4\pi^3\beta_{mr}^3}\left\{\begin{matrix}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\,,\\ \phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\dfrac{2}{\pi\beta_{mr}}\,,\end{matrix}\right.\\
&\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ \phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{sh\pi\beta_{mr}(1-\eta)\mp sh\tau\beta_{mr}\eta}{ch\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ \Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\beta_{mr}\{(1-\eta)ch\pi\beta_{m}\eta\mp\eta ch\pi\beta_{mr}(1-\eta)}{ch\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}\quad(61)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_r\frac{(1-(-1)^r)}{(1+(-1)^r)}\frac{R}{T}\sin Rz = \frac{c}{2}\left\{\begin{matrix}Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\\ Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\end{matrix}\right.\\
&\sum_r\frac{(1-(-1)^r)}{(1+(-1)^r)}\frac{R}{T^2}\sin Rz = \frac{c^3}{4\pi^2\gamma_{mn}^2}\left\{\begin{matrix}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\\ P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\end{matrix}\right.\\
&\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{ch\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\mp ch\pi\gamma_{mn}\zeta}{ch\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\gamma_{mn}\{(1-\zeta)sh\pi\gamma_{mn}\zeta\pm\zeta sh\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\}}{ch\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,.\\
&\gamma_{mn}^2 = \frac{c^2}{a^2}m^2+\frac{c^2}{b^2}n^2\,,\quad \zeta=\frac{z}{c}\,,\quad R=\frac{r\pi}{c}\,,\\
&r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}\quad(62)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_r\frac{(1-(-1)^r)}{(1+(-1)^r)}\frac{1}{T}\cos Rz = \frac{c^2}{2\pi\gamma_{mn}}\left\{\begin{matrix}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\\ \phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\dfrac{2}{\pi\gamma_{mn}}\,,\end{matrix}\right.\\
&\sum_r\frac{(1-(-1)^r)}{(1+(-1)^r)}\frac{R^2}{T^2}\cos Rz = \frac{c^2}{4\pi\gamma_{mn}}\left\{\begin{matrix}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\\ \phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\,,\end{matrix}\right.\\
&\sum_r\frac{(1-(-1)^r)}{(1+(-1)^r)}\frac{1}{T^2}\cos Rz = \frac{c^3}{4\pi^3\gamma_{mn}^3}\left\{\begin{matrix}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ \phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\dfrac{2}{\pi\gamma_{mn}}\,,\end{matrix}\right.
\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ \phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{sh\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\mp sh\pi\gamma_{mn}\zeta}{ch\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ \Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\gamma_{mn}\{\zeta ch\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\mp(1-\zeta)ch\pi\gamma_{mn}\zeta\}}{ch\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\qquad r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}$$

the inversion theorem stated by Eqs. (17), (16) and (15), yield the components of the displacement without the body forces X, Y, and Z, as follows:

$$\left.\begin{aligned}
u = {}& \sum_m\sum_n \frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\Bigg[K_{mn}\left\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&+K'_{mn}\left\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{2}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\Bigg]\times\cos\frac{m\pi}{a}x\\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_n\frac{b^3mr}{2ca\beta^2_{mr}}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\left\{G_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+G'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\times\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{ra^2}{2ca_{nr}}\Bigg[E_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right.\\
&\left.+\frac{\pi+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+E'_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\cdot\\
&\sin\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{b}{2}\Bigg[H_{mr}\left\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{1}{\beta^2_{mr}}\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right.\\
&\left.\times P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}+H'_{mr}\left\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{1}{\beta^2_{mr}}\left(\frac{mb}{a}\right)^2\cdot P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\Bigg]\cdot\\
&\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a^2n}{2b\alpha_{nr}}\Bigg[J_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\\
&\left.\Psi_{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+J'_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\\
&\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{b^3m}{4a\beta^2_{mr}}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\left\{B_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+B'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^4mn}{4ab(\gamma_{mn})^3}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Bigg[F_{mn}\left\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right.\\
&\left.+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+F'_{mn}\left\{\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\Bigg]\cdot\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_n\sum_r\frac{a^2}{4a_{nr}}\Bigg[A_{nr}\left\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\\
&+A'_{nr}\left\{\frac{3\mu+\lambda}{u(2\mu+\lambda)}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m\sum_n\frac{c^2}{4\gamma_{mn}\mu}\Bigg[D_{mn}\left\{\left(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma^2_{mn}}\right)\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\\
&\left.\times\frac{c^2m^2}{a^2\gamma^2_{mn}}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+D'_{mn}\left\{\left(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma^2_{mn}}\right)\cdot\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.
\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

$$\times \frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\frac{a^2}{8\mu}\sum_n\frac{b}{an}\Big[A_{n0}\Big\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(d_{n0}\xi)\Big\}+A'_{n0}\Big\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\times\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\Psi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y+\frac{b}{4}\sum_m\Big[H_{m0}\Big\{Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}$$

$$+H'_{m0}\Big\{Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x+\frac{a}{4}\sum_n\Big[J_{n0}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}+J'_{n0}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\Psi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\frac{ab}{8m}\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{m0}\times P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+B'_{m0}$$

$$\times P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\frac{bc}{4n}\Big\{D_{0n}\phi^{(1)}(\gamma_{0n}\zeta)+D'_{0n}\phi^{(2)}(\gamma_{0n}\zeta)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$-\frac{b}{4}\sum_r\Big\{J_{0r}Q^{(1)}(\beta_{0r}\eta)+J'_{0r}Q^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\Big\}\cos\frac{r\pi}{c}z-\frac{b}{8}\Big\{J_{00}(1-2\eta)+J'_{00}\Big\}$$

$$m,\ n\ ,r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,$$

$$v=-\sum_m\sum_n\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\Big[K_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}$$

$$+K'_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$+\sum_n\sum_r\frac{a^3nr}{2cb\alpha_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{E_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+E'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{r\pi}{c}z$$

$$-\sum_n\sum_r\frac{a^3n}{4b\alpha_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Big\{A_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+A'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos$$

$$\times\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{rb^2}{2c\beta_{mr}}\Big[G_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}$$

$$+G'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{r\pi}{c}z$$

$$+\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Big[J_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2\alpha_2^{nr}}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+J'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2\alpha_2^{nr}}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{b^2m}{4a\beta_{mr}}$$

$$\times\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^4mn}{4ab(\gamma_{mn}^3)}$$

$$\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big[D_{mn}\Big\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+D'_{mn}\Big\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\times \cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_r\frac{b^2}{4\beta_{mr}}\Bigg[B_{mr}\Bigg\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}+B'_{mr}\Bigg\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\\
&\times\psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^2}{4\gamma_{mn}\mu}\Bigg[F_{mn}\Bigg\{\Bigg(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Bigg)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n_2}{b^2\gamma_2^{mn}}\psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+F'_{mn}\Bigg\{\Bigg(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Bigg)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_2^{mn}}\psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&-\frac{b^2}{8\mu}\sum_m\frac{a}{bm}\Bigg[B_{m0}\Bigg\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi^{(1)}\beta_{m0}\eta)\Bigg\}+B'_{m0}\\
&\times\Bigg\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x+\frac{a}{4}\sum_n\Bigg[J_{n0}\\
&\times\Bigg\{Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Bigg\}+J'_{n0}\Bigg\{Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Bigg\}\Bigg]\\
&\times\cos\frac{n\pi}{b}y+\frac{b}{4}\sum_m\Bigg[H_{m0}\Bigg\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Bigg\}\\
&+H'_{m0}\Bigg\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_m\frac{ba}{8n}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Bigg\{A_{n0}\times P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+A'_{n0}\times P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Bigg\}\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\frac{ac}{4m}\\
&\times\Bigg\{F_{m0}\phi^{(1)}(\gamma_{m0}\zeta)+F'_{m0}\phi^{(2)}(\gamma_{m0}\zeta)\Bigg\}\sin\frac{m\pi}{a}x-\frac{a}{4}\sum_r\Bigg\{H_{0r}Q^{(1)}(\beta_{0r}\eta)\\
&+H'_{0r}Q^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\Bigg\}\cos\frac{r\pi}{c}z-\frac{a}{8}\Bigg\{H_{00}(1-2\xi)+H'_{00}\Bigg\}\\
&\qquad m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}
\right\}\quad(65)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
w=&-\sum_m\sum_n\frac{c}{2}\Bigg[K_{mn}\Bigg\{Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+K'_{mn}\Bigg\{Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Bigg[E_{nr}\Bigg\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}+E'_{nr}\Bigg\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}\Bigg]\\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{b}{2}\Bigg[G_{mr}\Bigg\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}\\
&\times P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}+G'_{mr}\Bigg\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}\\
&\times x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\frac{a^3r}{4ca_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Bigg\{A_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+A'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}
\end{aligned}
\right|
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\times \sin\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^3m}{4a\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{D_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+D'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\sum_r\frac{a^3nr}{2bca_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\Big\{J_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+J'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m\sum_n\frac{b^3r}{4c\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Big\{B_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+B'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\\
&\times\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^3n}{4b\gamma_{mn}^2}\frac{\eta+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{F_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+F'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\\
&\times\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_r\frac{b^3mr}{2ac\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+H'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z,\\
&\qquad m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}\quad(66)
$$

The dilatation is, therefore, written in the form:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=e=\sum_m\sum_n\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big\{K_{mn}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+K'_{mn}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_n\sum_r\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\frac{ar}{c}\Big\{E_{nr}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+E'_{nr}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\frac{br}{c}\Big\{G_{mr}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+G'_{mr}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{bm}{a}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{mr}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+H'_{mr}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{an}{b}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{nr}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+J'_{nr}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{b}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{mr}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+B'_{mr}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a}{2\mu+\lambda}\Big\{A_{nr}Q^{(1)}(\beta_{nr}\xi)\\
&+A'_{nr}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\frac{1}{2\mu+\lambda}\\
&\times\Big\{F_{mn}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+F'_{mn}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{a}y-\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\\
&\times\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{D_{mn}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+D'_{mn}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_n\frac{a}{4}\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{A_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+A'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_m\frac{b}{4}\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+B'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x
\end{aligned}\right\}\quad(67)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\sum_m \frac{bm}{2a}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\left\{H_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+H'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&-\sum_n \frac{an}{2b}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\left\{J_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+J'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\,.
\end{aligned}
\right|
$$

Then, the relations (4) and (5) yield the component of stresses as follows:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda e\\
&=\sum_m\sum_n\Bigg[K_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}+\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+K'_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}+\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\right)\\
&\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_m\sum_r\frac{br}{c}\Bigg[G_{mr}\Bigg\{\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{b^2m^2}{a^2\beta_2^{mr}}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}\\
&+G'_{mr}\Bigg\{\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&\times\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\frac{ra}{c}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\left\{E_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+E'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{bm}{a}\Bigg[H_{mr}\Bigg\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}+H'_{mr}\Bigg\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{an}{b}\\
&\times\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\left\{J_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+J'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\\
&\times\frac{b}{2}\Bigg[B_{mr}\Bigg\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}+B'_{mr}\\
&\times\Bigg\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_m\sum_n\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\Bigg[F_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{c^2m_2}{a^2\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+F'_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right)\\
&\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Bigg[A_{nr}\Bigg\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}+A'_{nr}\Bigg\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)
\end{aligned}
\right\}\quad(68)
$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\Big[D_{mn}$$
$$\times\Big\{\Big(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}$$
$$-D'_{mn}\Big\{\Big(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}$$
$$\times\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\times\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\frac{a}{4}\Big[A_{n0}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)$$
$$+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}+A'_{n0}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y$$
$$-\sum_m\frac{bm}{2a}\Big[H_{m0}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\times P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}$$
$$+H'_{m0}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x$$
$$-\sum_n\frac{an}{2b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{n0}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+J'_{n0}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y$$
$$-\sum_m\frac{b}{4}\Big[B_{m0}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}$$
$$+B'_{m0}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\,,$$

$$\sigma_y=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda e=\sum_m\sum_n\Big[K_{mn}\Big\{\Big(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}+\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)$$
$$-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+K'_{mn}\Big\{\Big(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}+\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big)$$
$$\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$$
$$-\sum_n\sum_r\frac{ar}{c}\Big[E_{nr}\Big\{\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}$$
$$+E'_{nr}\Big\{\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}\alpha(_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y$$
$$\times\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{rb}{c}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\times\Big\{G_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+G'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}$$
$$\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\frac{an}{b}\Big[J_{nr}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)$$
$$+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+J'_{nr}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)$$
$$+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{am}{b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}$$
$$\times\Big\{H_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+H'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Bigg[A_{nr}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\,Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\,P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+A'_{nr}\\
&\times\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\,Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\,P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}\,y\cos\frac{r\pi}{c}\,z\\
&-\sum_m\sum_r\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\Bigg[D_{mn}\left\{\left(\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\,\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right.\\
&\left.\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+D'_{mn}\left\{\left(\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\,\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right.\\
&\left.-\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\,\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}\,x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\,y-\sum_m\sum_r\frac{b}{2}\\
&\times\Bigg[B_{mr}\left\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}+B'_{mr}\left\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right.\\
&\left.+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}\,x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}\,z-\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2b\gamma_{mn}}\Bigg[F_{mn}\\
&\times\left\{\left(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\,\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&+F'_{mn}\left\{\left(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\,\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\Bigg]\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}\,x\sin\frac{n\pi}{b}\,y-\sum_m\frac{b}{4}\Bigg[B_{m0}\left\{Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\\
&+B'_{m0}\left\{Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}\,x-\sum_n\frac{an}{2b}\Bigg[J_{n0}\\
&\times\left\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}+J'_{n0}\left\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right.\\
&\left.+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}\,y-\sum_m\frac{bm}{2a}\,\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\left\{H_{m0}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right.\\
&\left.+H'_{m0}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}\,x-\sum_n\frac{a}{4}\Bigg[A_{n0}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\,Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\\
&\left.\times P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}+A'_{n0}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\,Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\,P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}\,y\,,
\end{aligned}
\tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z=2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda e=&\sum_m\sum_n\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,\gamma_{mn}\Bigg[K_{mn}\left\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&+K'_{mn}\left\{\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}\,x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}\,y+\sum_n\sum_r\frac{ar}{c}\\
&\times\Bigg[E_{nr}\left\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\,P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+\Bigg[E'_{nr}\\
&\times\left\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\,P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}\,y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}\,z\\
&+\sum_m\sum_r\frac{br}{c}\Bigg[G_{mr}\left\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\times \frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2} P^{(1)}(\beta_{mr}\mu)\Big\} + G'_{mr}\Big\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta) - \frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2} \\
&\times P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z - \sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Big[A_{nr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi) \\
&-\frac{a^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\} + A'_{nr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi) - \frac{a^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \\
&\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z + \sum_m\sum_n\frac{c^2m}{4a\gamma_{mn}}\Big[D_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta) \\
&-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\} + D'_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big] \\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\sum_n\frac{an}{b}\Big[J_{nr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi) + \frac{r^2a^2}{c^2} \\
&\times\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\} + J'_{nr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi) + \frac{r^2a^2}{c^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \\
&\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z - \sum_m\sum_r\frac{b}{2}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta) \\
&+\frac{b^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\} + B'_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta) + \frac{b^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \\
&\times P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z + \sum_m\sum_n\frac{c^2n}{4b\gamma_{mn}}\Big[F_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda} \\
&\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\} - F'_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \\
&\times\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\sum_r\frac{bm}{a}\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda} \\
&\times Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta) + \frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\} + H'_{mr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta) \\
&+\frac{b^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z - \sum_n\frac{a}{4}\frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \\
&\times\Big\{A_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi) + A'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_n\frac{an}{2b}\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{n0}Q(\alpha_{n0}\xi) \\
&+J'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\frac{bm}{2a}\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta) \\
&+H'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x - \sum_m\frac{b}{4}\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta) \\
&+B'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\,,
\end{aligned}
\right\}
\tag{70}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{yz} = \mu\Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = &-\sum_m\sum_n\frac{cn}{b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{K_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta) \\
&+K'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\sum_r\frac{\pi\beta_{mr}}{2}\Big[G_{mr}\Big\{\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)
\end{aligned}
\right|
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+G'_{mr}\Big\{\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\\
&\times\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{an}{2b}\Big[E_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+E'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\\
&\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\sin\frac{r\pi}{b}z-\sum_n\sum_r\mu\frac{br}{2c}\Big[J_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+J'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\\
&\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\mu\frac{b^2mr}{2ac\beta_{mr}}\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\\
&\times\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{a^3rn}{2bc}\frac{1}{\beta_{mr}^2}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{A_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+A'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\\
&\times\frac{c^3mn}{2abr_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{D_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+D'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\\
&\times\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_r\frac{b^2r}{4c\beta_{mr}}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\\
&+B'_{mr}\Big\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\\
&\times\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c}{2}\Big[F_{mn}\Big\{Q^{(1)}(r_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&+F'_{mn}\Big\{Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\times P^{(2)}(r_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&-\sum_n\frac{c}{4}\Big\{F_{m0}Q^{(1)}(\gamma_{m0}\zeta)+F'_{m0}Q^{(2)}(\gamma_{m0}\zeta)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_r\frac{ar}{4c}\\
&\times\Big\{H_{0r}Q^{(1)}(\alpha_{0r}\xi)+H'_{0r}Q^{(2)}(\alpha_{0r}\xi)\Big\}\sin\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}
\right\}\quad(71)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{zx}=\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)=&-\sum_m\sum_n\frac{cm}{a}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{K_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+K'_{mn}\\
&\times P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\cdot\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\sum_r\mu\frac{\alpha_{nr}}{2}\Big[E_{nr}\Big\{\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+E'_{nr}\Big\{\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\\
&\times\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_r\sum_m\mu\frac{bm}{2a}\Big[G_{mr}\Big\{Q^{(1)}(\beta_{mn}\eta)
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+G'_{mr}\Big\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\\
&\times P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{a^2nr}{2b\alpha_{nr}}\Big[J_{nr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\\
&\times\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+J'_{nr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\mu\frac{ar}{2c}\Big[H_{mr}\\
&\times\Big\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{m^2b^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{m^2b^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{b^3rm}{2ac\beta_{mr}^2}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+B'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m\sum_n\frac{c^3mn}{2ab\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{F_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+F'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\sum_r\frac{a^2r}{4c\alpha_{nr}}\Big[A_{nr}\Big\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+A'_{nr}\Big\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c}{2}\Big[D_{mn}\Big\{Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&+D'_{mn}\Big\{Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_n\frac{c}{4}\Big\{D_{0n}Q^{(1)}(\gamma_{0n}\zeta)+D'_{0n}Q^{(2)}(\gamma_{0n}\zeta)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_r\frac{br}{4c}\Big\{J_{0r}Q^{(1)}(\beta_{0r}\eta)\\
&+J'_{0r}Q^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\Big\}\sin\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}
\right\}\quad(72)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\tau_{xy}=\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)=&-\sum_m\sum_n\mu\frac{c^2}{ab}\frac{mn}{\gamma_{mn}}\Big[K_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+K'_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\times\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_r\mu\frac{b^3mr}{2ca\beta_{mr}}\Big[G_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+G'_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{a^3nr}{2cb\alpha_{nr}}\Big[E_{nr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big)\Big\}+E'_{nr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}
\end{aligned}
\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\Big[F_{mn}\Big\{\Big(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Big)\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+F'_{mn}\\
&\times\Big\{\Big(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_n\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\Big[D_{mn}\Big\{\Big(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\\
&\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+D'_{mn}\Big\{\Big(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m_2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\\
&\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\cos\frac{\pi m}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_n\sum_r\frac{a^2n}{2b\alpha_{nr}}\Big[A_{nr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\\
&+A'_{nr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_m\sum_r\frac{b^2m}{2a\beta_{mr}}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\\
&+B'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_m\sum_r\mu\frac{\beta_{mr}}{2}\Big\{H_{mr}\Big(1+\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\Big)\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+H'_{mr}\Big(1+\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\Big)\\
&\times\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\times\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\mu\frac{\alpha_{nr}}{2}\Big\{J_{nr}\Big(1+\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\Big)\\
&\times\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+J'_{nr}\Big(1+\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\Big)\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m\mu\frac{b}{4}\Big[B_{m0}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}+B'_{m0}\\
&\times\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\sum_r\frac{a}{4}\\
&\times\Big[A_{n0}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}+A'_{n0}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\mu\frac{mb}{2a}\Big\{H_{m0}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\\
&+H'_{m0}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x-\sum_n\mu\frac{na}{2b}\Big\{J_{n0}\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+J'_{n0}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\\
&\times\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_n\mu\frac{c}{4}\Big\{D_{0n}\phi^{(1)}(\gamma_{0n}\zeta)+D'_{0n}\phi^{(2)}(\gamma_{0n}\zeta)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_r\mu\frac{br}{4c}\Big\{J_{0r}\phi^{(1)}(\beta_{0r}\eta)+J'_{0r}\phi^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\Big\}\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\mu\frac{c}{4}
\end{aligned}
\tag{73}
$$

$$\times \left\{F_{m0}\phi^{(1)}(\gamma_{m0}\zeta) + F'_{m0}\phi^{(2)}(\gamma_{m0}\zeta)\right\} \cos\frac{m\pi}{a}x - \sum_r \mu \frac{ra}{4c}\left\{H_{0r}\phi^{(1)}(\alpha_{0r}\xi)\right.$$
$$\left. + H'_{0r}\phi^{(2)}(\alpha_{0r}\xi)\right\} \cos\frac{r\pi}{c}x + \frac{1}{4}\left(H_{00} + J_{00}\right).$$

Eighteen unkown values A_{nr}, A'_{nr}, B_{mr}, B'_{mr}, D_{mn}, D'_{mn}, E_{nr}, E'_{nr}, F_{mn}, F'_{mn}, G_{mr}, G'_{mr}, H_{mr}, H'_{mr}, J_{nr}, J'_{nr}, K_{mn}, K'_{mn} can be all determined to satisfy the eighteen boundary conditions on the side planes. The terms involving the unkown values whose index n, m, or r are zero, indicate the behaviour in regard to the plane elasticity.

In virtue of Formulas (64)~(72), we could, for instance, investigate the differences between the simply supported plate and the hinged plate ; or to find out suitability of Kirchhoff's assumption for the edge reaction of the thin plate.

(Received April 30, 1958)

電位差滴定法における電極（双金属）の選択について—酸化滴定（第5報）

上野幸三・太刀川哲平

On the Selection of Bimetallic Electrodes for Potentiometric Titration in Oxidimetry (V).

Kozo Ueno and Tetsuhei Tachikawa

Abstract

In the previous papers, the potentiometric titration in neutralization, argentimetry, has been observed by our using four bimetallic electrodes, Pt-Ni, Pt-Ag, Pt-W and Pt-Sb.

In this paper, the titrations of $FeSO_4$ and H_2O_2 with $KMnO_4$, $FeCl_2$ with $K_2Cr_2O_7$, As_2O_3 with $KBrO_3$ (N/10 and N/100) are done. At the same time the titration curves and the changes of potential at the end point ($\Delta E/\Delta V$) have been obtained. The electrodes and apparatus employed were the same as that described in the previous paper (III). The time required for a titration was 30 to 50 minutes. The results obtained are summarized as follows:

(1) In the titration of $FeSO_4$ with $KMnO_4$, Pt-W is the best of all in both N/10 and N/100 solutions. Pt-Ni indicates the sharp end point, but its end point shows a deviation of 1.9 per cent from that obtained in routine method in both solutions. Pt-Ag is similar to Pt-Ni in trend and the deviation of its end point is 0.9 per cent in N/10 solution. On the other hand, in N/100, this couple gives no good indication of the end point. Pt-Sb is not suitable for this titration.

(2) In the titration of H_2O_2 with KMn_4O, Pt-Ni, Pt-Ag and Pt-Sb are excellent in both solutions. Pt-W is also good and the form of the titration curve is different from any other one.

(3) In the titration of $FeCl_2$ with $K_2Cr_2O_7$, Pt-Ag and Pt-W are good in both solutions and the deviation of end point for the former is 0.4 per cent in N/10, 0.8 per cent in N/100. Pt-Ni is also good. Pt-Sb is not suitable for this titration.

(4) In the titration of As_2O_3 with $KBrO_3$, Pt-Sb, Pt-Ni, Pt-Ag and Pt-W are all good and the deviation of end point for Pt-Sb is 0.7 per cent in N/10 solution. Pt-Ni, Pt-Ag and Pt-W are good and Pt-Sb does not indicate the sharp end point in N/100 solution. The values of $\Delta E/\Delta V$ at the end point in N/100 solution are greater than those in N/10 solution.

I. 緒　　論

電位差滴定法による（双金属）酸化滴定の研究は古くから多くの研究者によつて行なわれている。たとえば，Hostetter および Roberts[1] 等は Fe^{++} と $Cr_2O_7^{--}$ の電位差滴定に Pd−Pt あるいは Au−Au (60)+Pd (40) の電極を用い，比較検討しており，その後 Willard および Fenwick[2),3)], Zintl および Wattenberg[4)], Lingane および Karplus[5)] 等により更に広範囲にわたつて研究が行なわれた。がしかし，その多くの場合は甘汞電極，塩化銀電極およびガラス電極を基準電極とし白金線ないし白金薄板を指示電極とする組合せが用いられている。現在までに行なわれている双金属の組合せは Pt−W, Pt−Au, Pt−AuHg, Pt−Pt 黒, Pt−PtIr, PtIr−CuHg 等である。しかし滴定液あるいは被滴定液の濃度変化にともなつて終点における電位差変化 ($\Delta E/\Delta V$) がどの程度違うか，また，その滴定曲線の形を比較して電極の組合せを検討した報告があまり見当らないので，著者等は前報告に引続き，Pt−Ni, Pt−Ag, Pt−W, Pt−Sb の 4 組合せを用いた酸化滴定のうち，$KMnO_4$ による第一鉄塩 ($FeSO_4 \cdot 7H_2O$) および H_2O_2 の滴定，$K_2Cr_2O_7$ による第一鉄塩 ($FeCl_2 \cdot 4H_2O$) の滴定，$KBrO_3$ による As_2O_3 の滴定を検討した。

II. 実　　験

(1) 試　　薬

実験に使用した $KMnO_4$, $K_2Cr_2O_7$, $KBrO_3$, $FeSO_4 \cdot 7H_2O$, $FeCl_2 \cdot 4H_2O$, As_2O_3, および H_2O_2 (30%) はそれぞれ一級品（関東化学）でつぎのように調製ならびに標定した。

(i) N/10 (f:1.2443) および N/100 (f:1.079) $KMnO_4$ 溶液

N/10 $KMnO_4$ 溶液は常法のように結晶約 3.3 g を秤取し，水 100 mℓ に溶解した後，約 15 分間静かに煮沸し，室温に放冷後 2 日間放置した。ついでガラスフイルター No. 4 で濾過し，N/10 $H_2C_2O_4$ 溶液で標定した。N/100 $KMnO_4$ 溶液は N/10 $KMnO_4$ 溶液を 10 倍に希釈した。

(ii) N/10 および N/100 $K_2Cr_2O_7$ 溶液

N/10 $K_2Cr_2O_7$ 溶液は結晶を 140～150°C に約 30 分間乾燥した後，その 4.9035 g を精秤し，水に溶解，100 mℓ とした。N/100 $K_2Cr_2O_7$ 溶液は N/10 $K_2Cr_2O_7$ 溶液を 10 倍に希釈した。

(iii) N/10 および N/100 $KBrO_3$ 溶液

N/10 $KBrO_3$ 溶液は結晶を約 110°C において約 1 時間乾燥後，その 2.7835 g を精秤し，水

1) Hostetter, J. C. and Roberts, H. S.: J. Am. Chem. Soc., **44**, 2504 (1922).
2) Willard, H. H. and Fenwick, F.: ibid, **44**, 2516 (1922).
3) Van Name, R. G. and Fenwick, F.: ibid. **47**, 9 (1925).
4) Zintl. E. and Wattenberg, H.,: Ber., **56**, 472 (1923).
5) Lingane, J. J. and Karplus, R.,: Ind. Eng. Chem., Anal Ed., **18**, 191 (1946).

に溶解し，100 mℓとした。N/100 $KBrO_3$ 溶液は N/10 $KBrO_3$ 溶液を10倍に希釈した。

(iv) N/10 および N/100 $FeSO_4$ 溶液

N/10 $FeSO_4$ 溶液は $FeSO_4 \cdot 7H_2O$ の結晶約27.8 gを秤取し，20% H_2SO_4 に溶解，100 mℓとした。N/100 $FeSO_4$ 溶液は N/10 $FeSO_4$ 溶液を水で10倍に希釈した。

(v) 0.3% および 0.03% H_2O_2 溶液

30% H_2O_2 溶液を水にて100倍および1000倍に希釈した。

(vi) N/10 および N/100 $FeCl_2$ 溶液

N/10 $FeCl_2$ 溶液は $FeCl_2 \cdot 4H_2O$ の結晶約20 gを10% HCl に溶解し，100 mℓとした。N/100 $FeCl_2$ 溶液は N/100 $FeCl_2$ 溶液を水で10倍に希釈した。

(vii) N/10 および N/100 As_2O_3 溶液

N/10 As_2O_3 溶液は Kolthoff ら[6] の方法によつて As_2O_3 の粉末を100°C で恒量になるまで乾燥し，その4.946 gを秤取して1 N-NaOH 溶液40 mℓにとかし，つぎに1 N-HCl を微酸性になるまで加え，水で1000 mℓとした。N/100 As_2O_3 溶液は N/10 As_2O_3 溶液を水で10倍に希釈した。

(2) 分析操作

各滴定はつぎの要領で行なつた。すなわち，$KMnO_4$ 法による第一鉄塩($FeSO_4$)の滴定において，N/10 および N/100 溶液いずれの場合も前記溶液を25 mℓとり，これに水25 mℓを加えて全量を50 mℓとした。$KMnO_4$ 溶液の淡紅色が着色した所を終点とした。一方，H_2O_2 溶液の滴定において，0.3% H_2O_2 溶液の場合は前記溶液25 mℓをとり，2 N-H_2SO_4 溶液25 mℓを加えて全量を50 mℓにした。また，0.03% 溶液の場合は前記溶液25 mℓとり，0.2 N-H_2SO_4 溶液25 mℓを加えて全量を50 mℓとした。終点は $KMnO_4$ 溶液の脱色しなくなつた点とした。

$K_2Cr_2O_7$ 法による第一鉄塩($FeCl_2$)の滴定において，N/10 溶液の場合，前記溶液25 mℓとり，水25 mℓを加えて倍に希釈し，これに25% H_3PO_4 5 mℓを加えた。一方，N/100 溶液の場合は前記溶液25 mℓとり，水で倍に希釈，これに N/10 溶液の場合と同様に25% H_3PO_4 5 mℓを加えた。終点は1% ジフエニルアミン濃硫酸溶液により決めた。

$KBrO_3$ 法による As_2O_3 溶液の滴定において，N/10 溶液の場合，前記溶液を25 mℓとり，水で倍に希釈し，これに12 N-HCl 15 mℓを加えた。N/100 溶液の場合も同様に前記溶液25 mℓに水を加えて全量を50 mℓとし，これに12 N-HCl 15 mℓを加えた。終点は0.2% メチルオレンジの脱色した点とした。

(3) 使用電極ならびに電位測定要領

6) Kolthoff, I. M. and Sandell, E. B.: "Textbook of Quantitative Inorganic Analysis." Macmillan Company. New York, 1936, p. 593.

電極は前報のようにエメリー研磨紙0/3～0/5でよく研磨後，ベンヂンでよく洗い，ろ紙でふきとつた。また，各電極の寸法は前報[7]と同じである。

各被滴定溶液を200 mℓのビーカーにとり，つぎに電極および攪拌器(電動)を入れて攪拌し，約5～10分後，電位の安定をまつてから測定をはじめた。なお，測定中は攪拌速度を一定に保つた。電位測定は各滴定において，N/10, N/100溶液いずれの場合にも最初2 mℓごとに行ない，終点附近において0.03(1滴の量に相当)～0.1 mℓきざみに行なつた。1回の滴定所要時間は30～50分で室温(20±2°C)で行なつた。

(4) 装　　置

電位差の測定には島津K-2型精密級電位差計を使用した。

III. 実験結果および考察

滴定は3～5回行ない，その電位差の平均値をとり，滴定曲線を作つた。図の縦軸は電位

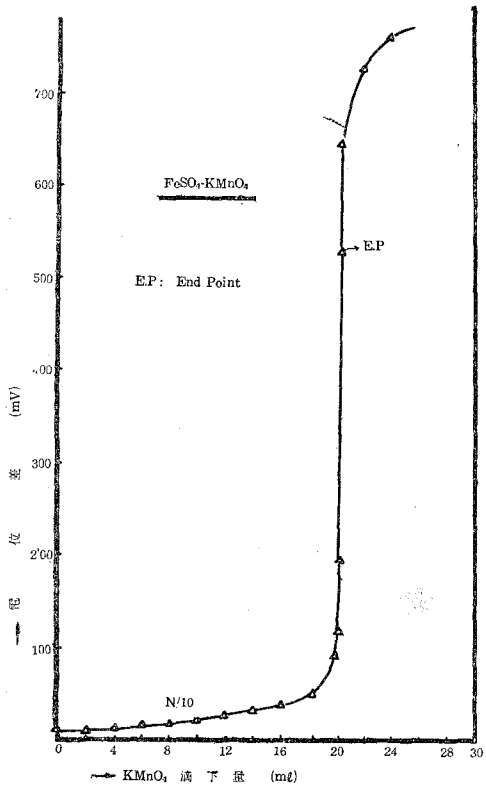


Fig. 1 Pt^{+}-Ni 滴定曲線

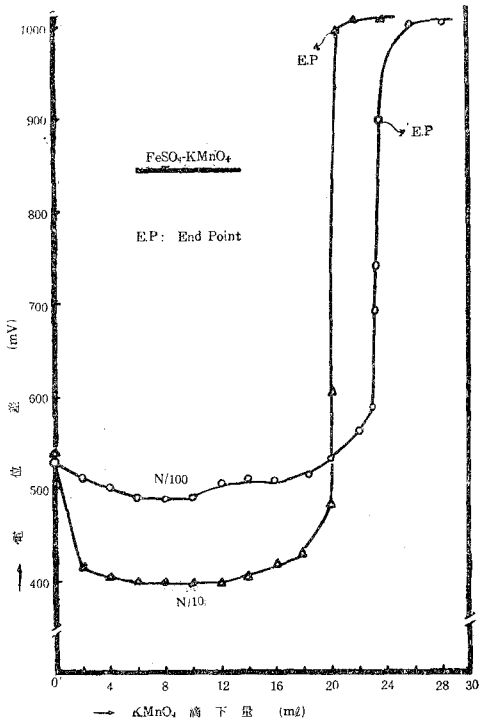


Fig. 2 Pt^{+}-Ag 滴定曲線

7) 上野，太刀川： 室工大研報，**2**, 762, (1957).

差(mV:millivolt), 横軸は滴定液の滴下量(mℓ:milliliter)を表わしている。また，電極の右肩に付してある＋(プラス)の記号はその極性を示している。

$KMnO_4$ 法による第一鉄塩($FeSO_4$)および H_2O_2, $K_2Cr_2O_7$ 法による第一鉄塩($FeCl_2$), $KBrO_3$ 法による As_2O_3 の各滴定の際，Pt^+-Ni, Pt^+-Ag, Pt^+-W, Pt^+-Sb の4組合せによりえられた滴定曲線ならびに終点における電位差変化($\Delta E/\Delta V$)を順次考察する。

(i) $KMnO_4$ 法による第一鉄塩($FeSO_4$)の滴定

この滴定における Pt−Ni, Pt−Ag および Pt−W による N/10, N/100 溶液の滴定曲線は Fig. 1, 2, および3のようである。なお，Pt−Sb はこの滴定では終点における電位差変化が表われず，従つて使用不可能であつた。また，Pt−Ag は N/10 溶液の場合はよかつたのであるが，N/100 溶液においては Pt−Sb の時と同様，終点が表われず，使用不可能であつた。

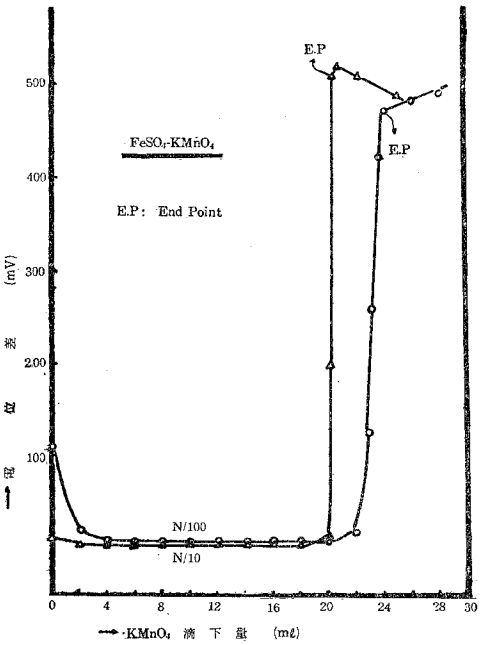


Fig. 3 Pt^+-W 滴定曲線

Pt−Ni の場合，図から明らかなように，N/10 溶液においては最初の2 mℓ 滴下により電位は約70〜100 mV 程度降下し，約10 mℓ 附近まで徐々に降下した。以後ここを最低として徐々に上昇し，終点において300〜400 mV に達する急激な電位差変化を示した。しかし，常法による終点(滴下量:20.30 mℓ)より約1.9% 遅れて表われた。

N/100 溶液においては，N/10 溶液の場合と同様，滴下量約10 mℓ 附近まで徐々に電位は降下した。以後徐々に上昇，終点において約50〜70 mV の急激な変化を示した。しかし，この濃度の場合も N/10 溶液の場合と同様，常法による終点(滴下量:23.20 mℓ)より約1.9% 遅れた。

滴定終了後，ニッケル電極の表面は N/10, N/100 溶液いずれの場合も黒色の酸化被膜によりおおわれていた。標準酸化還元電圧[8]によると，$Fe^{++}=Fe^{+++}+e$ は−0.771 であり，$Ni=Ni^{++}+2e$ は 0.250 で前者より後者の方が還元電圧は大である故，当然反応生成物，$Fe_2(SO_4)_3$ はニッケルによつて $FeSO_4$ に還元され，従つてこれが過剰の $KMnO_4$ を消費し，終点の遅れになる。がしかし，ニッケルの酸化被膜は滴定初期に形成され，不溶解性でかつ相当程度の厚さと強さ

8) Latimer, W. M.: "The Oxidation States of the Elements and their Potentials in Aqueous Solutions," 2nd Ed., Prentice-Hall, Inc., New York. p. 342-344.

をもつているため，前述の還元がはばまれる。従つて1.9%位の終点の遅れで終つたと考えられる。

一方，使用不可能であつたPt−SbにおいてはN/10およびN/100溶液いずれの場合にも滴定初期において黒色被膜によりおおわれていたが，終点近傍に至つて被膜がなくなつた。滴定間に生成された$Fe_2(SO_4)_3$はアンチモンによつて$FeSO_4$に還元される[9]。そして，ニッケル極と異なつて滴定中に電極表面上に形成された酸化被膜は弱くかつ可溶性のためか，あるいは酸化被膜が薄いためイオンの出入が自由に行なわれ，アンチモンによる還元が進み過剰の$KMnO_4$の消費をきたす，すなわち，正しい終点を示さぬものと思われる。

Pt−AgにおいてはN/10溶液の場合のみが滴定可能であつた。すなわち，滴定開始前電位は10〜20 mVにあつてかつ安定であつた。滴定開始後は滴下量18 mℓ附近までは2 mℓに対し数mVの割合で電位上昇し，その後，上昇度も大きく，終点においてPt−Niの場合と同程度の電位変化(上昇)を示した。しかし，終点は0.9%遅れて表われた。

一方，N/100溶液の場合はPt−Sbと同様，明確な終点における電位変化を示さず，かつ，終点を過ぎても$KMnO_4$の淡紅色が表われなかつた。この事は前述したように銀極の還元作用によるものと思われる。すなわち，銀は亜鉛，カドミウム，アルミニウムなどとともに第二鉄塩の還元に使用されている事は衆知のとおりである。しかし，N/10溶液の場合は滴定開始後間もなく表面にその割に安定な酸化被膜が形成され，銀による第二鉄塩の還元がはばまれて，0.9%の遅れですんだものと思われる。

Pt−WにおいてはN/10およびN/100溶液いずれの場合も他の組合せより鋭敏な終点を示した。すなわち，N/10溶液においては滴定開始前の電位は10数mV前後であつたが，最初2 mℓ滴下すると，約10 mV電位降下を示した。それ以後，滴下量14 mℓ附近までは降下を続け，0.1 mVないしそれ以下の電位を示したが，再び徐々に上昇，終点において約400〜500 mVの大きな電位変化(上昇)を示した。終点後は滴下量0.5 mℓまでは上昇，以後再び降下した。

一方，N/100溶液においては滴定曲線の傾向としてはN/10溶液の場合と同様である。すなわち，滴定開始前，電位は約120〜150 mV位でN/10溶液のそれに比較して高い。従つて，最初2 mℓ滴下するとその降下度も大きく約100 mVあり，滴下量約14 mℓ附近までは降下し，以後再び上昇し，終点において約100〜150 mVの電位上昇を示した。終点後は滴下量とともにそのまま電位は上昇した。

つぎにN/10，N/100各溶液における各組合せの終点における電位差変化($\Delta E/\Delta V$)を示すと第1表のようである。

9) Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie, Teil 18, Antimon B2, (1949) p. 272.

第1表　($\Delta E/\Delta V$: mV)

濃　度	極名		
	Pt-Ni	Pt-Ag	Pt-W
N/10	300～400	300～400	400～500
N/100	50～ 70	—	100～150

(ii) KMn_4O 法による H_2O_2 の滴定

この滴定における Pt-Ni, Pt-Ag, Pt-W, Pt-Sb による 0.3% および 0.03% 溶液の滴定曲線は Fig. 4, 5, 6 および Fig. 7 のとおりである。すなわち，Pt-Ni において，0.3% 溶液の場合(終点:27.00 mℓ)，24 mℓ 附近までは滴下量 2 mℓ に対し数 mV 電位上昇し，以後上昇度を増し，終点において約 300～400 mV の急激な電位変化を示して終点に達した。終点後，電位は僅かながら上昇した。

0.03% 溶液においては 0.3% 溶液の滴定曲線とほとんど同じ傾向であつた。すなわち，電位は滴下量 12 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し数 mV の割合で徐々に上昇し，以後上昇度を増し，終点 (16.00 mℓ) においては約 200～250 mV の電位変化があつた。

滴定後，ニッケル極の表面はいずれの溶液の場合も黒色被膜でおおわれており，他の3組

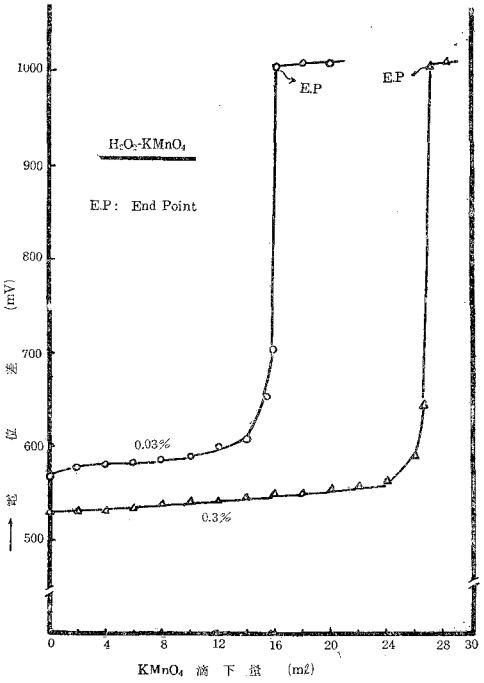


Fig. 4　Pt^{+}-Ni 滴定曲線

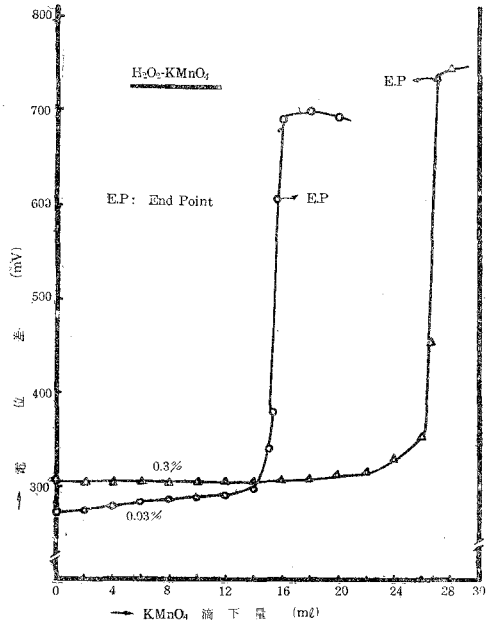


Fig. 5　Pt^{+}-Ag 滴定曲線

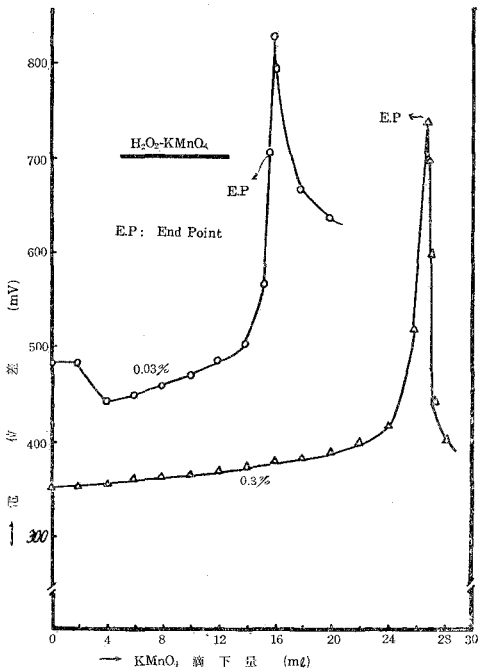


Fig. 6 Pt^{+}–W 滴定曲線

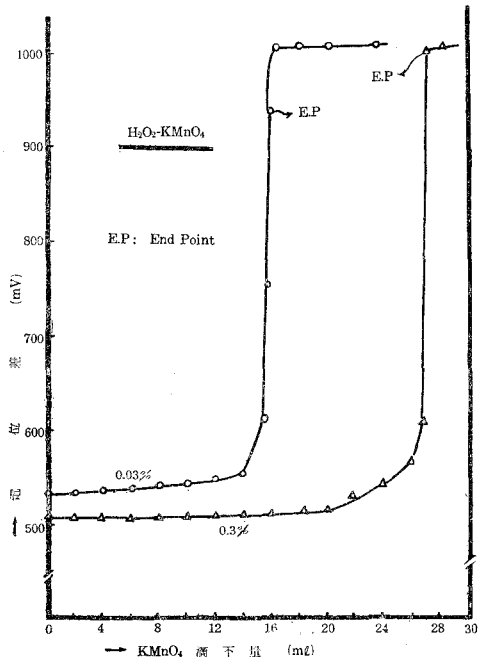


Fig. 7 Pt^{+}–Sb 滴定曲線

合せに比較して電位の安定度が悪かつた。

Pt–Ag において，0.3% 溶液の場合，電位は 24 mℓ 附近までは Pt–Ni のように 2 mℓ に対し数 mV の割合で徐々に上昇した。終点において 350～400 mV の電位上昇があつた。終点後も電位はそのまま上昇した。一方，0.03% 溶液においては 0.3% 溶液と同じく電位は滴下量 14 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し数 mV の割合で徐々に上昇，終点において 200～250 mV の変化を示した。終点後は滴下量 1 mℓ 附近（約 17 mℓ）まで徐々に上昇，その後降下した。

銀極の表面はニッケル極のように黒色酸化被膜でおおわれることなく輝きを失つた程度であつた。特に 0.03% 溶液の場合は滴定前と大して変化がないように見えた。

Pt–W においては他の 3 組合せと異なつた滴定曲線を示した。すなわち，0.3% 溶液においては滴下量 20 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し数 mV の割合で徐々に上昇，以後上昇度を増し，終点において約 200～300 mV の電位上昇を示した。終点後は 1 滴（約 0.03 mℓ）の滴下により 50～100 mV の電位降下があり，その後も非常に大きな降下が続き，1 mℓ に対し約 300 mV であつた。

0.03% 溶液においては 0.3% 溶液と異なり，電位は最初 2 mℓ 滴下すると数 mV 上昇し，つぎに 2 mℓ 滴下すると約 40 mV 降下した。その後ここを最低電位として滴下量増加とともに上昇し，終点において約 150～200 mV の電位変化があつた。終点後は 0.3% 溶液の場合（終点

が最高電位)と異なつて，つぎに0.1 mℓ滴下した所が電位が最高となり，再び降下した。しかし，終点後は0.3%溶液程大きな電位の降下はなかつた。以上のようにこの組合せにおいて終点近傍で極端な電位の上昇，降下がある故1滴の加え過ぎによつて終点を見失う事がある。従つてこの組合せ使用にあたつては十分な注意を払う必要がある。

Pt–Sbにおいて，0.3%溶液の場合，電位は滴下量約20 mℓ附近までは2 mℓに対し約0.5～5 mV位の割合で徐々に上昇した。以後上昇度を増し，終点において約300～400 mVの電位変化があつた。0.03%溶液の場合も前者と同じ傾向であり，すなわち，電位は滴下量約14 mℓ附近までは2 mℓに対し数mVの割合で上昇，終点において約200～250 mVの電位変化があつた。終点後，0.2～0.3 mℓ滴下量までは電位上昇は大きく，以後2 mℓに対し数mVの割合で漸次上昇した。

アンチモン極の表面は両溶液いずれの場合もニッケル極と同様，黒色被膜でおおわれていた。しかし，他の滴定の場合と異なり，アンチモン極の使用が可能であつた事は極表面に生成された酸化被膜が相当の厚さをもち，かつ強く，H_2O_2をふくむH_2SO_4溶液にはとけない[10]事を意味し，前述したような還元作用も全く行なわれなかつたと考えられる。つぎに0.3%および0.03%溶液における各組合せの終点における電位差変化($\Delta E/\Delta V$)を示する第2表のとおりである。

第2表　($\Delta E/\Delta V$: mV)

濃　度	極名			
	Pt–Ni	Pt–Ag	Pt–W	Pt–Sb
0.3%	300～400	350～400	200～300	300～400
0.03%	200～250	200～250	150～200	200～250

(iii) $K_2Cr_2O_7$法による第一鉄塩($FeCl_2$)の滴定

この滴定におけるPt–Ni, Pt–Ag, およびPt–WによるN/10およびN/100溶液の滴定曲線はFig. 8, 9およびFig. 10のとおりである。また，Pt–Sbは既に述べた$KMnO_4$法による$FeSO_4$の滴定と同様に明確な終点を示さず，使用不可能であつた。

Pt–Niにおいて，N/10溶液の場合，電位は滴下量8 mℓ附近(終点:25.18 mℓ)まで降下し，その後，ここを最低電位として上昇した。終点においては約80～100 mVの電位変化を示した。終点後は0.2 mℓ滴下の所まで大きい上昇度を示したが，その後は2 mℓに対して10 mV前後の電位上昇であつた。

一方，N/100溶液の場合はN/10溶液と異なつて滴下量8 mℓ附近までの電位降下は認めら

10) Gmelins Handbuch der Anorganischen Chemie, Teil 18, Antimon B 2 (1949) p. 267.

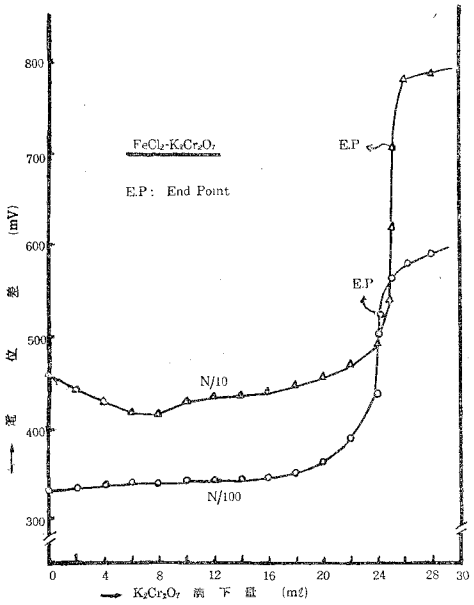


Fig. 8 Pt^{+}-Ni 滴定曲線

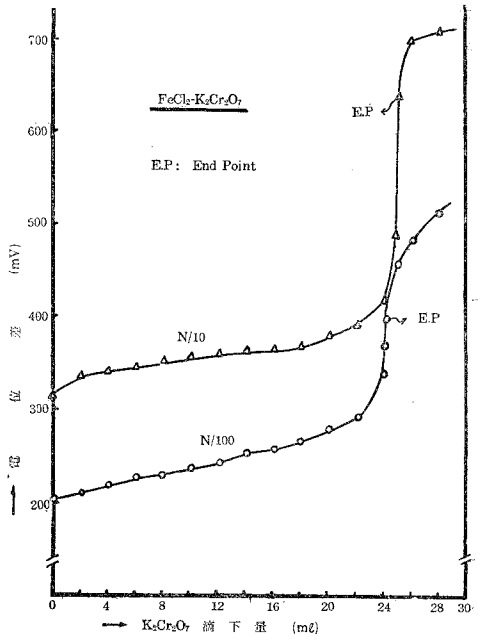


Fig. 9 Pt^{+}-Ag 滴定曲線

れず，滴下量増加とともに徐々に上昇した。終点（終点:24.30 mℓ）において約 20～40 mV の電位変化があつた。

ニッケル極の表面は黒色酸化被膜によりおおわれていた。また，前述の $KMnO_4$ 法による第一鉄塩の滴定の際にみられた終点の遅れは，N/10，N/100 溶液いずれの場合も表われなかつた。

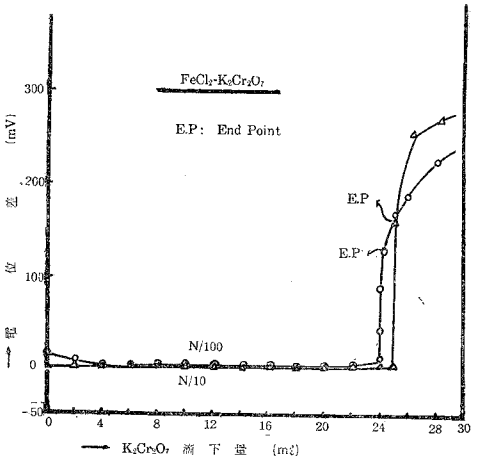


Fig. 10 Pt^{+}-W 滴定曲線

Pt-Ag において，N/10 溶液の場合，電位は最初の 2 mℓ を滴下すると，15～30 mV の上昇を示し，その後滴下量 20 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し数 mV の割合で徐々に上昇した。終点において約 120～160 mV の電位上昇変化があつた。終点後も上昇した。

一方，N/100 溶液において，N/10 溶液の場合と同様，滴下量増加とともに電位は上昇し，終点において 30～50 mV の電位変化があつた。しかし，この滴定により求められた終点は指示薬による終点より N/10 溶液の場合は 0.4%，N/100 溶液の場合は 0.8% 遅れた。

銀極の表面は両濃度溶液いずれも輝きをうしなう程度であつた。

Pt-W において，N/10 溶液の場合は滴定前の電位は 2～4 mV 間で，最初 2 mℓ 滴下すると，0.7 mV 位に降下し，18 mℓ 附近まで降下を続けて，約 0.3～0.4 mV になつた。以後，上昇して終点の 0.1 mℓ 前では約 7 mV 位に達し，終点において 100～160 mV の電位上昇を示した。従つて，曲線の形も普通のS字型とは異なり，非常に明確な屈曲になつた。終点後，電位はそのまま上昇した。

N/100 溶液においては滴定前の電位は 20～30 mV を示して N/10 溶液の電位より高い値を示した。しかし，曲線の傾向は同様で，最初 2 mℓ 滴下すると約 10 mV 降下し，以後 18 mℓ 附近まで降下を続けて，電位は 3～4 mV でN/10 溶液の約 10 倍の値を示した。その後，24 mℓ 附近まで徐々に上昇し，終点の約 0.3 mℓ 前よりその上昇度を増し，終点に達した。N/10 溶液に比較して明確な終点を示さず，また，終点後も同様に電位上昇した。タングステン極の表面はほとんど変化しないように見えた。

つぎに，N/10，N/100 溶液における各組合せの終点における電位差変化 ($\Delta E/\Delta V$) を示すと第3表のとおりである。

第 3 表　($\Delta E/\Delta V$: mV)

濃　　度	極名		
	Pt-Ni	Pt-Ag	Pt-W
N/10	90～100	120～160	100～160
N/100	20～ 40	30～ 50	30～ 50

(iv)　$KBrO_3$ 法による As_2O_3 の滴定

この滴定において，Pt-Ni，Pt-Ag，Pt-W および Pt-Sb による N/10 および N/100 溶液の滴定曲線は Fig. 11，12，13 および Fig. 14 のとおりである。しかし，Pt-Sb は N/100 溶液の場合は明確な終点を示さず使用不可能であつた。

Pt-Ni において，N/10 溶液の場合，電位は滴下量 8 mℓ 附近(終点:29.70 mℓ)までは 2 mℓ に対し約 20～30 mV 上昇した。その後 29 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し数 mV，また終点 0.1 mℓ 前までは 0.1 mℓ に対し 1 mV 以下の電位変化(上昇)であつた。終点において約 180～200 mV の電位上昇があつた。前述の $K_2Cr_2O_7$ 法による第一鉄塩の滴定における Pt-W の滴定曲線と同じような形を呈した。終点後，約 0.3 mℓ 附近までは 0.1 mℓ に対して 10 mV 前後の割合で上昇，その後 1 mℓ に対し数 mV の割合で上昇した。

一方，N/100 溶液においては，滴下量 8 mℓ までの急激な電位上昇は認められず，滴下量 29 mℓ 附近(終点:29.70 mℓ)までは 2 mℓ に対し数 mV の割合で徐々に上昇した。以後，0.1 mℓ に対し数 mV の割合で上昇し，終点においては約 300～350 mV の非常に大きい電位上昇を示

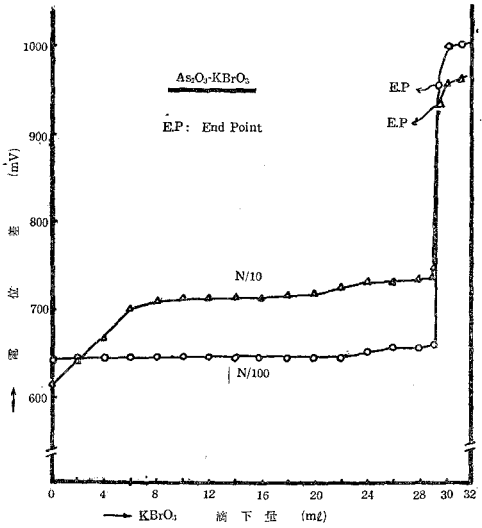


Fig. 11 Pt^{+}–Ni 滴定曲線

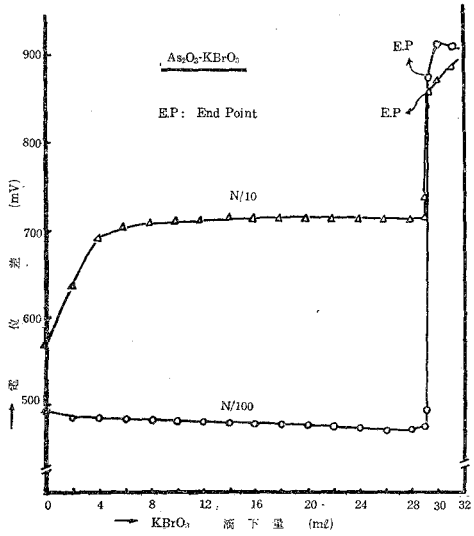


Fig. 12 Pt^{+}–Ag 滴定曲線

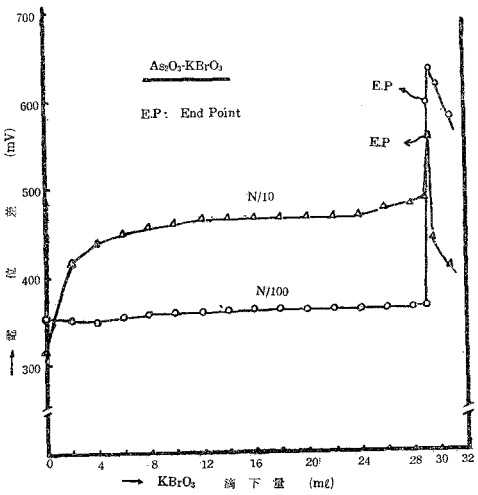


Fig. 13 Pt^{+}–W 滴定曲線

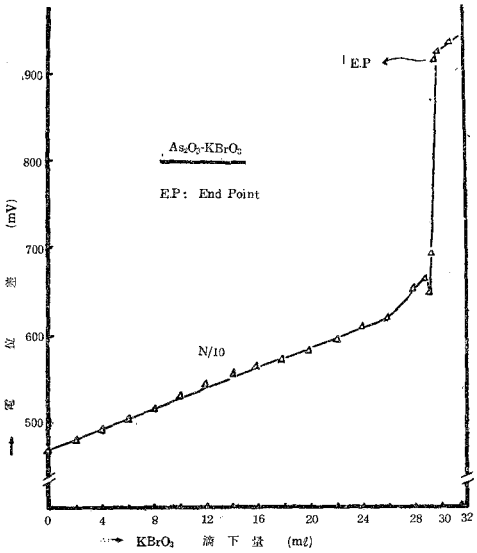


Fig. 14 Pt^{+}–Sb 滴定曲線

した。終点後，0.1 mℓ 附近まで約 30 mV 上昇したが，その後電位上昇はゆるやかになつた。

ニッケル極の表面は N/10，N/100 溶液いずれの場合も黒色酸化被膜でおおわれていた。

Pt–Ag において，N/10 溶液の場合，電位は滴下量 6 mℓ 附近までは 2 mℓ ごとに約 70, 50, 20 mV のように上昇した。その後，上昇は非常にゆるやかで，29 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し数 mV の割合，終点の約 0.5 mℓ 前までは 0.1 mℓ に対し約 1～3 mV，終点に至つて約 120～150

mV の電位上昇があつた。終点後も電位は上昇し続けた。

N/100 溶液においては N/10 溶液の場合と異なり，電位は滴下量増加とともに終点の 0.2～0.3 mℓ 前までは 2 mℓ に対し約 1～3 mV の割合で降下した。その後，0.1 mℓ に対して 4～20 mV 上昇し，終点において約 300～350 mV の電位上昇があつた。終点後，0.3 mℓ 附近まで上昇し，以後再び降下した。

銀極の表面は N/10，N/100 溶液いずれの場合も輝きを失う程度であつた'

Pt-W においては前述した $KMnO_4$ 法による H_2O_2 の滴定曲線と同じ形で，他の 3 組合せと異なつていた。すなわち，N/10 溶液において電位は最初 2 mℓ 滴下すると約 100 mV 急激に上昇し，以後 2 mℓ に対し約 20，10 mV また 6 mℓ 附近から 29 mℓ 附近までは約 1～4 mV の割合で上昇した。終点 0.03 mℓ 前では 0.1 mℓ に対し約 1～2 mV，終点に至つて 50～70 mV の電位上昇があつた。終点後は 0.1 mℓ 滴下によりこの終点を頂点として約 80～100 mV の電位降下があり，終点における電位変化($\Delta E/\Delta V$)より大きかつた。以後電位は滴下量とともに降下した。

一方，N/100 溶液においては N/10 溶液と異なり，電位は上昇せず，滴下量約 20 mℓ 附近までは 2 mℓ に対し約 0.5～1 mV の割合でごくゆつくりと降下し，以後 29 mℓ 附近までは 1～3 mV 上昇したが，多少不安定であつた。終点の約 0.5 mℓ 附近では 0.1 mℓ に対して 1～3 mV，終点においては約 260～300 mV の電位上昇があつた。終点後 0.1 mℓ 滴下すると約 30～50 mV 上昇し，以後ここを頂点として降下した。がしかし，N/10 溶液の場合に比較して降下度は小さく，終点における電位変化(上昇)が終点後のそれより小さいような事はなかつた。

ダングステン極の表面は N/10, N/100 溶液いずれの場合もほとんど変化がないようであつた。

Pt-Sb において，N/10 溶液の場合，電位は滴下量 26 mℓ 附近までは直線的に上昇し，以後上昇度を増し，29 mℓ 附近まで続いた。その後 29.30 mℓ 附近まで降下し，以後再び上昇，200～250 mV の電位変化を示して終点に至つた。しかし，求められた終点は指示薬により求められた終点より 0.7% 遅れて表われた。一方，N/100 溶液においては明確な終点がえられなかつた。アンチモン極の表面は N/10，N/100 溶液いずれの場合も黒色酸化被膜によりおおわれていた。以上のように N/10 溶液において終点は遅れるけれど，求められ，N/100 溶液においては全然求められぬ事は前述したニッケル，銀極の場合と同様である。すなわち，N/10 溶液においては滴定初期に割合に安定な黒色酸化被膜が形成され，アンチモン極による還元がはばまれるが，N/100 溶液においては酸化被膜は形成されるが，前者の場合に比して弱く，この被膜を通してイオンの出入があり，アンチモン極による還元が行なわれると同時に，被膜自体が可溶性であるためと考えられる。

この $KBrO_3$ 法による As_2O_3 の滴定の場合は他の滴定と相違して N/10 溶液における終点の

$\Delta E/\Delta V$ より N/100 溶液のそれが大きく，非常に明確に表われた。また，Pt–Ni, Pt–Ag, Pt–W において滴定曲線の形は終点に至るまで N/10, N/100 溶液いずれの場合もよく似ていた。

つぎに N/10, N/100 溶液の終点における電位差変化 ($\Delta E/\Delta V$) を示すと第 4 表のとおりである。

第 4 表　($\Delta E/\Delta V$: mV)

濃　　度	極　名			
	Pt–Ni	Pt–Ag	Pt–W	Pt–Sb
N/10	180～200	120～150	50～ 70	200～250
N/100	300～350	300～350	260～300	—

IV. 結　　言

以上述べた所を要約するとつぎのようである。

(1) $KMnO_4$ 法による第一鉄塩 ($FeSO_4$) の滴定において N/10, N/100 溶液いずれの場合においても Pt–W がもつともよく，Pt–Ni は明確な終点を示すが，N/10, N/100 溶液において約 1.9% の終点の遅れがあつた。Pt–Ag は N/10 溶液においては前 2 組合せと同様に明確な終点を示すが，0.9% の終点の遅れがあつた。一方，N/100 溶液においては終点が求められなかつた。Pt–Sb は全然終点が示されず，従つて使用不可能であつた。

(2) $KMnO_4$ 法による H_2O_2 の滴定において，0.3%, 0.03% 溶液いずれの場合も Pt–Ni, Pt–Ag, Pt–Sb がよく，これについで Pt–W がよかつた。しかし，Pt–W は他の 3 組合せと異なり，S 字型とならず，極端な山形となつた。

(3) $K_2Cr_2O_7$ 法による第一鉄塩 ($FeCl_2$) の滴定において，Pt–Ag および Pt–W は N/10, N/100 両溶液においてほぼ同程度の終点における $\Delta E/\Delta V$ の値を示したが，前者は N/10 溶液において 0.4%, N/100 溶液において 0.8% の終点の遅れがあつた。Pt–Ni がこれについだ。Pt–Sb は明確な終点を示さなかつた。

(4) $KBrO_3$ 法による As_2O_3 の滴定において，N/10 溶液の場合，終点における $\Delta E/\Delta V$ の大きさは Pt–Sb, Pt–Ni, Pt–Ag, Pt–W の順であつた。しかし，Pt–Sb の終点が 0.7% 遅れて表われた。一方，N/100 溶液の場合，Pt–Ni, Pt–Ag, Pt–W の順で，Pt–Sb は明確な終点を示さなかつた。また，N/100 溶液における終点の $\Delta E/\Delta V$ の値は N/10 溶液の値より大きかつたという他の 3 滴定と全く異なつた結果がえられた。

最後に本研究に御懇切な御教示を賜わつた北海道大学理学部太秦康光博士に感謝の意を表します。

(昭和 33 年 4 月，日本化学会第 11 年会講演)

(昭和 33 年 4 月 24 日受理)

A Study of the Categories of Summation

Yoshio Kinokuniya*

Abstract

The categories are specified by the primitive constitution by which the aggregated total or the limiting state of a set are mathematically conceived as existent. It is emphasized that the conceptions of the total and of the limiting state are not always coincident. Enumerable set is elucidated on its specially important construction.

1. Introduction. In studying the sets, it may be said that the hardest floorer for students is the conceptive uncertainty of a sum. So, to have a categorical study of the summation is considerable specially in point that, then a primitive light may be caught in some way rather apart from the traditional course. In this paper, the effectiveness of the categories of summation is studied in relation of the theory of measure.

The notion of a total is exposed specially on its proper operation, as it is, to be devided into its parts; while the notion of a limit of aggregating the elements is not always found to coincide with the total.

The probabilistic method gives often the most exact scale to distinguish any two ways of conception of a set. $\boldsymbol{N}$ be a subset of the set $\boldsymbol{M}$, the elements of which are presumed to be equi-probable at the selection of an element. Then, let's denote as

$$\text{Prob.}\,(x \in \boldsymbol{N}) = \mathfrak{p}\,(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M})$$

when x is restricted to be selected from within the set $\boldsymbol{M}$. If the value of $\mathfrak{p}\,(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M})$ be uniquely determined, then we say *the concomitance* $\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}$ *is determined in the a priori probabilism.*

As ZENON suggested, we cannot count up the total length 1 from the measure zero of each point contained in it. Nevertheless, with B. CAVALIERI, we may affirm the length 1 consists of the points contained in it. In effect, the formulation

$$\mathfrak{S}\mu_P = 1$$

μ_P indicating the dimension of the point P[1], gives us the category of sum-

* 紀国谷芳雄

1) About the symbols $\mathfrak{S}$ and μ_P, cf. e. g. Y. Kinokuniya: *A Course of Radonian Calculus* (1953) (this booklet will be obtained at Maruzen, Sapporo Japan).

mation that is exactly the same fact as in case of CAVALIERI. Such is the construction of the length 1 that is equivalent to the conception of the total of the points which are defined to make up the length 1

In the theory of a priori measure and in the a priori probabilism, discussions are made specially on the consistence of the following two destinations:

$\mathfrak{D}_1$: *$\overline{\overline{N}} < \overline{\overline{M}}$ and $\overline{\overline{M}} \geqslant \aleph_0$, then*[2] *it is destined that*

$$\widetilde{m}(N)/\widetilde{m}(M) = 0 \qquad (1,\ 1)_1$$

and

$$\mathfrak{p}(N/M) = 0. \qquad (1,\ 1)_2$$

$\mathfrak{D}_2$: *M be a bounded infinite set and F be any measurable set for which the concomitance F/M is determined, then we have*

$$\overline{\lim_{F \subset M}}\ \widetilde{m}(F) = \widetilde{m}(M) \qquad (1,\ 2)_1$$

and

$$\overline{\lim_{F \subset M}}\ \mathfrak{p}(F/M) = 1. \qquad (1,\ 2)_2$$

In the above, $\widetilde{m}$ indicates the a priori measure and it is appointed that

$$F \subset M \rhd M - F \neq \text{void}.$$

$\mathfrak{D}_1$ is called the *Null-Measure Assertion of the Second Species* and $\mathfrak{D}_2$ is called the *Pan-Measurability*. In the theory of a priori measure, the pan-measurability is induced from several axioms[3] posited as fundamental ones to make up the theory. The relations $(1, 1)_1$ and $(1, 2)_1$ are studied in the theory of a priori measure, and the relations $(1, 1)_2$ and $(1, 2)_2$ are studied in the a priori probabilism, respectively.

The category of a total of elements M is thought to be certain when, for any element x, it is decided either

$$x \in M \text{ or } x \bar{\in} M.$$

The conception of a summation is thought to be caused when a set of suffices X is given and a set M_x uniquely corresponds to each suffix $x \in X$. In this case, denoting as

$$\widetilde{M}_Y = \bigcup_{y \in Y} M_y$$

for any subset $Y \subset X$, the category of the summation

$$\widetilde{M} = \mathop{\mathfrak{S}}_{x \in X} M_x = \bigcup_{x \in X} M_x$$

2) The symbol $\overline{\overline{M}}$ indicates the cardinal number of the set M.

3) Cf. Y. Kinokuniya: *Logical Construction of the Theory of A Priori Measure*, Mem. Muroran Univ. Vol. 2, No. 3, p. 786 (268) (*Theorem* 2).

is said *effective with respect to the measure* $\tilde{\gamma}$ when the following two conditions are satisfied:

(i) $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ *is the total of all the elements contained in either* $\boldsymbol{M}_x\,(x\in\boldsymbol{X})$;

(ii) $\mathfrak{D}_2$ *is consistent with respect to* $\tilde{\gamma}$, i.e.

$$\overline{\lim_{Y\subset X}}\ \tilde{\gamma}(\boldsymbol{M}_Y)=\tilde{\gamma}(\widetilde{\boldsymbol{M}})\,; \qquad (1,\ 3)$$

$\tilde{\gamma}$ *is restricted to a non-negative measure. The condition* (1, 3) *is equivalent to the condition*

$$\underline{\lim_{Y\subset X}}\ \tilde{\gamma}(\widetilde{\boldsymbol{M}}-\widetilde{\boldsymbol{M}}_Y)=0.$$

In Paragraph 5, there is introduced the logical term "*Accommodation*", by which some important relations are designated and dealt with. The criticism on the theory of ordinal numbers is not referred to, since we may then digress from what is schemed in this paper.

2. Enumerable Set. When the elements $a_k\,(k=1,2,\cdots)$ are given, the set

$$\boldsymbol{M}=(a_1,\ a_2,\cdots)$$

is thought to be the total of the elements on condition that any element x is decided either

$$x\in\boldsymbol{M}\ \text{ or }\ x\bar{\in}\boldsymbol{M}.$$

Let us denote as

$$\boldsymbol{M}_n=(a_1,\ a_2,\cdots,a_n)\,(n=1,\ 2,\cdots),$$

then it may not be stated as

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{M}_n=\boldsymbol{M}$$

in the probabilism, because it is evidently seen that

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{M}_n/\boldsymbol{M})=0$$

hence

$$\lim\ \mathfrak{p}(\boldsymbol{M}_n/\boldsymbol{M})=0\neq 1=\mathfrak{p}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}).$$

By the way, if we denote by $\boldsymbol{N}_\lambda$ the total of the elements $a_\lambda, a_{2\lambda},\cdots$, it may be naturally accepted that

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}_\lambda/\boldsymbol{M})=1/\lambda.$$

In effect, as far as we merely write in line

$$a_1,\ a_2,\cdots,$$

there may not be denied the arrangement to continue such as

$$a_1, a_2,\cdots, a_\omega, a_{\omega+1},\cdots, a_{n\omega},\cdots, a_{\omega^2}, a_{\omega^2+1},\cdots.$$

This being so, our criticism shall find its principal object in the tail part

$$\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_n (n=1,\ 2,\cdots).$$

In order to establish a relative construction between the values $\mathfrak{p}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M})=1$ and $\mathfrak{p}(a_n/\boldsymbol{M})=0$, we may do it well by introducing the application system

$$\pi_n = \mathfrak{p}(a_n/\boldsymbol{M})$$

instead of the formulas $\mathfrak{p}(a_n/\boldsymbol{M})=0$, to make up the new category of summation by the formula

$$\mathfrak{S}_{a_n \in M} \pi_n = 1. \qquad (2,\ 1)$$

It is very important that the summation (2, 1) might not be understood as of a mere enumerable construction in the classic sense.

In the classic analysis, it was decided that any enumerable set of real numbers must be of zero measure. The reason was:

$$0 \leqslant m(a_n) < \frac{1}{2^n}\varepsilon \text{ for any } \varepsilon > 0$$

so that

$$0 \leqslant \sum m(a_n) < \varepsilon.$$

However, this method is discovered now difficult because of the above-stated reasoning about the summation (2, 1). While, in the theory of a priori measure, we assert the zero measure of an enumerable set by means of the destination $\mathfrak{D}_1$, the null-measure assertion of the 2nd species.

3. Arranged Summation. $\mathfrak{A}$ be a set of ordinal numbers and $\boldsymbol{M}_\alpha$ be the set corresponds to the number $\alpha \in \mathfrak{A}$, then the summation

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \boldsymbol{M}_\alpha$$

comes into question; in this case, let us say the sum-set $\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta$ is posited in the *category of arranged summation*. The effectiveness of the conception $\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta$ shall be observed in the respect whether the relation

$$\overline{\lim_{\beta<\gamma}}\ \widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta) = \widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma) \qquad (3,\ 1)$$

effects or not.

When $\widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma)>0$, the problem is transferred to the probabilism, because we then directly have

$$\widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta)/\widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma) = \mathfrak{p}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta/\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma)$$

In this case, if it is observed that

$$m(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta) = 0 \text{ for each } \beta<\gamma,$$

we may never attain the effectiveness of the relation (3, 1). Besides, if

$$\widetilde{m}(\boldsymbol{M}_\alpha) = 0 \text{ for each } \alpha<\gamma$$

and the destination

$$\overline{\lim_{\alpha<\beta}}\ \widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\alpha)=\widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta)$$

is conformed by each $\beta<\alpha$, then it may be concluded by means of the transfinite induction that

$$\widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta)=0 \text{ for each } \beta<\gamma.$$

Thus we have:

Proposition 1. *As far as the relation of pan-measurability is conformed, the arranged summation does not produce a set of positive measure from the sets of zero measure.*

If we, from the first, restrict our observation within the a priori probabilism, the conditions are left in a more general scale, because we may then get along, paying no attention on the measure $\widetilde{m}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma)$. In this case, the pan-measurability is defined by the relation

$$\overline{\lim_{\alpha<\beta}}\ \mathfrak{p}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\alpha/\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma)=\mathfrak{p}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_\beta/\widetilde{\boldsymbol{M}}_\gamma).$$

According to $\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M})=0$ or >0, let us say $\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}$ is a *zero-concomitance* or a *positive concomitance* respectively. Then, by the evident analogous process, we may have:

Proposition 2. *As far as the relation of pan-measurability is conformed, the arranged summation does not produce a positive concomitance from the zero-concomitances.*

4. Co-ordinate Metamorphism. When between two sets of points $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$ the relation

$$\overline{\overline{\boldsymbol{M}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{N}}}$$

is observed, we say the two sets are *co-ordinate* with each other. As G. Cantor defined, this means that there exists a bi-univoque mapping

$$y=f(x)\ (x\in\boldsymbol{M},\ y\in\boldsymbol{N}). \tag{4, 1}$$

In the theory of a priori measure, we interpret that the inversion number of $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$ are then equal, so that denoting by

$$\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N})$$

the inversion number of $\boldsymbol{N}$ given by the mapping (4, 1), we may have

$$\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N})=\mathfrak{n}(\boldsymbol{M}) \tag{4, 2$_1$}$$

and, denoting by $f^{-1}(y)=x$ the inversive mapping of (4, 1), we may have

$$\mathfrak{n}_{f^{-1}}(\boldsymbol{M})=\mathfrak{n}(\boldsymbol{N}). \tag{4, 2$_2$}$$

It is remarkable that the case

$$\mathfrak{n}(\boldsymbol{M}) \neq \mathfrak{n}(\boldsymbol{N})$$

is possible despite of the simultaneous relations $(4, 2)_1$ and $(4, 2)_2$. In effect, the a priori measure of $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$ are expressed in the forms

$$\widetilde{m}(\boldsymbol{M}) = \mu \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{M})$$

and

$$\widetilde{m}(\boldsymbol{N}) = \mu \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{N})$$

respectively, μ indicating the point-dimension of each point in the space.

In case

$$\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}) \neq \mathfrak{n}(\boldsymbol{N}),$$

the values of $\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N})$ and $\mathfrak{n}(\boldsymbol{N})$ may not be applied under the same system of point-dimension. So, we introduce a system of non-negative application $\gamma_{f(P)}$ to be applied in the formulation

$$\widetilde{m}(\boldsymbol{N}) = \underset{P \in M}{\mathfrak{S}} \gamma_{f(P)}. \tag{4, 3}$$

We then presume that the system $\gamma_{f(P)}$ is uniquely determined simultaneously with the mapping f.

In case $\boldsymbol{M} = (0, 1)$ and $\boldsymbol{N} = (0, 2)$, a famous mapping of G. Cantor is given by the function

$$y = f(x) = 2x \quad (x \in \boldsymbol{M},\ y \in \boldsymbol{N})$$

by which he determined as $\overline{\overline{\boldsymbol{M}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}$. Then, the above-stated application $\gamma_{f(x)}$ is determined as

$$\gamma_{f(x)} = 2\mu.$$

In effect, when the point x runs through the interval $(0, 1)$, the corresponding point y runs through the interval $(0, 2)$ with redoubled velocity, so that the point (y)[4] may be measured as of the doubled scale.

In the a priori probabilism, an enumerable set $\boldsymbol{M} = (a_1, a_2, \cdots)$ shows properties analogous to the above-stated facts. In this case, by the biunivoque mapping

$$\varphi(a_k) = a_{k\lambda} \quad (k = 1,\ 2, \cdots)$$

$\boldsymbol{M}$ is transferred into its subsequence $\boldsymbol{N}_\lambda = (a_\lambda, a_{2\lambda}, \cdots)$, so that we may here introduce the pair of application systems (π_k) and $(\omega_{\varphi(a_k)})$ to be applied in the formulation

$$\underset{a_k \in M}{\mathfrak{S}} \pi_k = \mathfrak{p}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}) = 1$$

and

$$\underset{a_k \in M}{\mathfrak{S}} \omega_{\varphi(a_k)} = \mathfrak{p}(\boldsymbol{N}_\lambda/\boldsymbol{M}) = \frac{1}{\lambda}.$$

4) In the theory of a priori measure, the one-dimensional point of the abscissa x is denoted as (x) or P_x.

Moreover, it may be posited as

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{M}) = \pi \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{M}) \quad (\pi = \pi_k\,;\ k = 1, 2, \cdots)$$

and

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}_\lambda/\boldsymbol{M}) = \omega \cdot \mathfrak{n}_\varphi(\boldsymbol{M}) \quad (\omega = \omega_{\varphi(a_k)}\,;\ k = 1, 2, \cdots),$$

so that it may be analysed as

$$\omega = \frac{1}{\lambda}\pi$$

and

$$\mathfrak{n}_\varphi(\boldsymbol{M}) = \lambda \mathfrak{n}(\boldsymbol{N}_\lambda).$$

About the existence of the system $\gamma_{f(x)}$, we may refer to the following conditions:

(i) $f(x_1) \neq f(x_2)$ *when* $x_1 \neq x_2$;

(ii) *the value of* $\widetilde{m}(\boldsymbol{N}) = \widetilde{m}(f(\boldsymbol{M}))$ *is readily existent, provided especially with its total occupation*

$$((\boldsymbol{N})) = ((f(\boldsymbol{M}))).$$

But, if perfectly, we may not pass through without any axiomatization.

Puting back to the case the formulas (4, 1)–(4, 3) are effective, if $\widetilde{m}(\boldsymbol{N}) = 0$ whereas $\widetilde{m}(\boldsymbol{M}) > 0$, we have

$$\mathfrak{n}(\boldsymbol{N})/\mathfrak{n}(\boldsymbol{M}) = 0$$

under the same normal[5] system of point-dimension μ; because the measures are then expressed as

$$\widetilde{m}(\boldsymbol{M}) = \mu \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{M}) \text{ and } \widetilde{m}(\boldsymbol{N}) = \mu \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{N}).$$

Therefore, denoting as

$$\boldsymbol{E}\left(P:\ P \in \boldsymbol{M} \text{ and } \frac{1}{k} < \frac{\gamma_{f(P)}}{\mu}\right) = \overset{(k)}{\boldsymbol{N}} \quad (k=1,\ 2, \cdots)$$

and

$$\boldsymbol{E}\left(P:\ P \in \boldsymbol{M} \text{ and } 0 = \frac{\gamma_{f(P)}}{\mu}\right) = \boldsymbol{N}_0,$$

we may have

$$\frac{\mathfrak{n}_f(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}})}{\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N})} = \frac{\mathfrak{n}_f(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}})}{\mathfrak{n}(\boldsymbol{M})} = 0 \tag{4, 4}$$

because

$$\frac{\mathfrak{n}_f(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}})}{\mathfrak{n}(\boldsymbol{M})} = \frac{\mu \cdot \mathfrak{n}_f(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}})}{\mu \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{M})} < \frac{\underset{P \in \overset{(k)}{\boldsymbol{N}}}{k \mathfrak{S} \gamma_{f(P)}}}{\mu \cdot \mathfrak{n}(\boldsymbol{M})} = k\,\frac{\widetilde{m}(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}})}{\widetilde{m}(\boldsymbol{M})} \leqslant k\,\frac{\widetilde{m}(\boldsymbol{N})}{\widetilde{m}(\boldsymbol{M})} = 0.$$

Then, on account of (4, 4)

5) When $\mu_P = \mu_Q$ for each P and Q of the space, the system of point-dimension μ_P is said normal, and is briefly represented by μ on condition that $\mu = \mu_P$ for each P.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathfrak{n}_f(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}})}{\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N})} = 0. \tag{4, 5}$$

On the other hand

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_0 + \lim_{k\to\infty} \overset{(k)}{\boldsymbol{N}},$$

so that

$$\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}) = \mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}_0) + \lim_{k\to\infty} \mathfrak{n}_f(\overset{(k)}{\boldsymbol{N}}). \tag{4, 6}$$

Hence, by (4, 5) and (4, 6), we may have

$$\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}_0)/\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}) = 1$$

i. e.

$$\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}) = \mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N}_0). \tag{4, 7}$$

In such a case as (4, 7), we say *the set $\boldsymbol{N}_0$ consists of almost all elements of the set $\boldsymbol{N}$ in respect to the inversion $\mathfrak{n}_f$*; then we may state the above result as follows:

Proposition 3. *If there exists the system of non-negative application $\gamma_f(P)$ in respect to the two sets $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{N}$ for which it is observed that*

$$\tilde{m}(\boldsymbol{N}) = 0 \text{ and } \tilde{m}(\boldsymbol{M}) > 0,$$

then almost all points of the set $\boldsymbol{N}$ suffer measure cohesion[6] *in respect to the inversion $\mathfrak{n}_f$.*

If the system of non-negative application $\gamma_{f(P)}$ exists and is regular (i.e. $0<\gamma_{f(P)}/\mu<\infty$), then $f(P)$ is called a *measure-regular mapping* or briefly a *regular mapping*. In case of Proposition 3, the mapping may not be expected necessarily to be a regular one, since $\gamma_{f(P)}$ can be infinitesimal even when $\gamma_{f(P)}/\mu=\infty$.

5. Theory of Accommodation. A fact $\mathfrak{b}$, being surmised by the fact $\mathfrak{a}$ in the theory $\mathfrak{A}$, be presumed effective in the theory $\mathfrak{B}$, then we say, *$\mathfrak{b}$ is an accommodation in $\mathfrak{B}$ caused by $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$.* If the formula

$$p(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0 \tag{5, 1}$$

is needed in order that the facts $\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}$ may accord with each other, then the formula (5, 1) is called a *conformity contributed to $\mathfrak{b}$ by $\mathfrak{a}$.*

The inversion number $\mathfrak{n}(\boldsymbol{M})$ in the theory of a apriori measure may be regarded as an accommodation caused by the notion of the number of the elements in the theory of finite sets. The normal system of point-dimension μ is an accommodation caused by the homogenity of the Euclidian space; and the formula

$$\tilde{m}(\boldsymbol{M}) = \mu\cdot\mathfrak{n}(\boldsymbol{M})$$

6) $\gamma_{f(P)}/\mu=0$, then P is said suffers *measure cohesion* by the mapping $f(P)$. Cf. e.g. ibid. with 1.

is then the conformity contributed to the a priori measure $\widetilde{m}(\boldsymbol{M})$ of a set $\boldsymbol{M}$.

With respect to the mapping

$$y = f(x) = 2x$$

we should not overlook the difference of the respective velocities of the points (y) and (x), as stated in the previous paragraph. This is the difference of spacing characters of the two points. The corresponding accommodation caused by this phasic property is the notion of the occupation of a point (x), denoted as $((x))$, and the point-dimension μ_x of (x) is expressed in the form

$$\widetilde{m}[((x))] = \mu_x,$$

which is the conformity contributed to $((x))$ in the theory of a priori measure.

6. Transmutation of Concomitance. When the normal system μ in the x-space is transferred by a bi-univoque mapping $y=f(x)$ to an application system $\gamma_{f(x)}$ in the y-space, the concomitance

$$\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}$$

is transferred to the concomitance

$$f(\boldsymbol{N})/f(\boldsymbol{M}).$$

It is then to be computed by the definition as

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}) = \frac{\widetilde{m}(\boldsymbol{N})}{\widetilde{m}(\boldsymbol{M})} = \frac{\mathfrak{n}(\boldsymbol{N})}{\mathfrak{n}(\boldsymbol{M})}$$

and

$$\mathfrak{p}(f(\boldsymbol{N})/f(\boldsymbol{M})) = \widetilde{m}(f(\boldsymbol{N}))/\widetilde{m}(f(\boldsymbol{M})).$$

In this process, it is remarkable that the equation

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}) = \mathfrak{p}(f(\boldsymbol{N})/f(\boldsymbol{M}))$$

may not be generally satisfied, since the equation

$$\frac{\widetilde{m}(\boldsymbol{N})}{\widetilde{m}(f(\boldsymbol{N}))} = \frac{\widetilde{m}(\boldsymbol{M})}{\widetilde{m}(f(\boldsymbol{M}))}$$

may not be generally effected. Hence there is presumed a transmutation of concomitance, which may be defined, as it is, by the expression

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}) \longrightarrow \mathfrak{p}(f(\boldsymbol{N})/f(\boldsymbol{M}))$$

or briefly by the expression

$$\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M} \longrightarrow f(\boldsymbol{N})/f(\boldsymbol{M}).$$

Under the normal system μ we have

$$\mathfrak{p}(\boldsymbol{N}/\boldsymbol{M}) = \mathfrak{n}(\boldsymbol{N})/\mathfrak{n}(\boldsymbol{M})$$

whereas under the system $\gamma_{f(x)}$ we may not generally have the analogous relation

$$\mathfrak{p}(f(\boldsymbol{N})/f(\boldsymbol{M})) = \mathfrak{n}_f(\boldsymbol{N})/\mathfrak{n}_f(\boldsymbol{M})$$

to be effective; because, when $x_1 \neq x_2$, the value of the ratio

$$\gamma_{f(x_1)}/\gamma_{f(x_2)}$$

may not be generally equal to 1. In this case, the normal system

$$\pi = \pi_x = \mu/\widetilde{m}(\boldsymbol{M})$$

is transferred to the system

$$\omega_{f(x)} = \gamma_{f(x)}/\widetilde{m}(f(\boldsymbol{M})).$$

As it is computed as

$$\pi = \pi_{x_1} = \pi_{x_2} \quad \text{for each } x_1,\ x_2 \in \boldsymbol{M}$$

the system π is applied just in accord with the equi-probabilism, but the transmuted system $\omega_{f(x)}$ no more holds the homogenity.

In effect, the occupation $((f(x)))$ is found in diverse spacing, so that the concomitance $f(x)/f(\boldsymbol{M})$ should be determined in proportion to the size of the spacing, i.e. the value of $\gamma_{f(x)}$. Such means that the occupation of a point is turned to be observed in the same property as a set, though it is not originally defined as a set.

On examination, it may be said that the transmuted application $\omega_{f(x)}$ has two ways to be interpreted: as an accommodation caused by the notion of a point to fill up the space, and as an accommodation caused by the set-theoretical determination in the classic probabilism. This is homologous to the fact that a point is understood at the same time as a mere element, which has no size to be measured, and as the limit of a sequence of intervals (or neighbourhoods). It will be very difficult to establish the notion of probability of a point without any use of the set-theoretical probabilism. Viewed from this angle, a point cannot be independently posited from the notion of devision of the total. Besides, such may also be an unavoidable destiny for the conception of a continuum. Thus, the conceptions of a total and of a limiting object are exposed to be originally distinguished.

Mathematical Seminar in the
Muroran Inst. of Tech., Hokkaido
(*Received April* 23, 1958)

昭和32年度研究業績

I 論　文

題　目	著者名	発表機関名	月　日
ブラッドリー「沙翁の悲劇」全訳	鷲山第三郎	内田老鶴圃　単行本	33. 2.30
明治初期の道徳教育について On Moral Education early in Meiji.	石山敬雄	倫理学年報　第7集	33. 3.31
Jack London: Tales of Ships and Seas. (註釈)	増田　貢	英宝社	32.12.
ラウンズベリ原著, 英語史大要 (ほん訳)	増田　貢	関書院	33. 2.
The past (last)～と時制	増田　貢	英文法研究 (語学専門誌)	33. 1.
Points of Grammar.	増田　貢	〃	33. 2.
Remarks on the Normal Curvature of a Vector Field	Yukiyoshi Nagata	The Tensor Society "Tensor" Vol 2. No. 3	33. 3.16
直列コンデンサ系統における線間短絡究流	三浦五郎	電気学会誌 第77巻第823号	32. 4.
Tripping Characteristics of Protective Relays on Transmission Network Expressed by Circle Diagram Method (Part III)	小串孝治 三浦五郎	北大工学部紀要 第10冊第3号	32. 9.
磁気増幅器設計上の問題点 (1) (磁気的にみた鉄心の形状寸法)	小斯波　脩	電気雑誌 OHM 第44巻第10号	32. 8.
磁気増幅器用鉄心について	小斯波　脩	電子工学 第7巻第3号	33. 3.
泥炭の工業的利用及び泥炭を原料とする有機窒素肥料の製造試験	佐藤久次 佐々木満雄	北海道工業試験場報告　第151号	32. 9.
土壌による鉄の腐蝕に関する研究	杉田治八郎	帯広畜産大学学術研究報告第2巻第4号	33. 1.
沙流川流域の融雪流出について	境　隆雄	土木学会北海道支部技術資料第14号	33. 2.
On the Torsion of I-Beams According to the Thin Plate Theory.	Sumio Nomachi	Proceeding of the 7 th Japan National Congress for App. Mech.	32. 9.
P.S.C. 橋における横締めの力学的効果について	能町純雄	技術資料 昭32年2月号	32. 2.
The New Solution and Calculation of Arch loaded with a Torsional Moment.	Sakutaro Nakamura	Proceeding of the 6 th Japan National Congress for App. Mech.	32. 5.
CO_2 プロセスについて	内藤正鄰 菊地千之	マシナリー	32. 9.
アルミニウム溶解鍋の塗布剤に関する研究	及川　弘 西田恵三 幸田成康	軽金属第7巻第6号 (軽金属協会誌)	32. 11.

II 講　演

題　目	著者名	発表機関名	月　日
誤植の実例とその分類	川村信一	北海道心理学会 第4回大会	33. 2.23
ベクトル野の法曲率に関する注意	永田幸令	日本数学会	32.10.12
電位差滴定法における電極（双金属）の選択について 沈でん滴定（第4報）	上野幸三 太刀川哲平	分析化学会 北海道支部大会	32. 7. 7
微小短間隙における火花放電の機構について	沢　茂夫 伊藤隆清	電気四学会連合大会 講演論文集	32. 4. 3
凸極機と線路容量との故障時における共振	小串孝治 三浦五郎	電気四学会連合大会 講演論文集	32. 4. 3
直列コンデンサ系統の三相突流について	三浦五郎	電気四学会連合大会 講演論文集	32. 4. 3
電力円線図を応用したオッシロスコープおよび直流使用の送電系統計算器	小串孝治 小池東一郎 鈴木健元 三浦五郎	電気四学会連合大会 講演論文集	32. 4. 3
連系送電網の電力分布および過度安定度計算器	小串孝治 三浦五郎	電気関係学会 関西支部連合大会 講演論文集	32.10.26
表面電荷測定における入力回路について	北村正一	電気三学会 北海道支部連合大会	32.10.25
磁気増幅器設計上の問題点	小斯波　脩	電気学会北海道支部 磁気増幅器講演会	32. 8.22
磁気増幅器用鉄心について	小斯波　脩	電気学会北海道支部 磁気増幅器講演会	32. 8.23
過マンガン酸カリ消費量試験方法について	佐々木満雄 八幡寿雄	日本化学会	32.10. 6
キナルジンの空気接触酸化	小松藤男	日本化学会 第10年年会	32. 4. 3
タンニン抽出における亜硫酸パルプ廃液の混入効果について	杉田治八郎	日本化学会 北海道支部	32.10. 6
標準型蒸発罐によるタンニン液の蒸発能力について	杉田治八郎	帯広畜産大学集談会 (第8回)	32.12. 6
直接酸化法による酸化エチレン合成用銀触媒の担体に関する研究	加納久雄 金塚高次	日本化学会年会	32. 4.
杭内自然発火に関する研究（第2報）	佐藤干城	北海道鉱山学会	32.10.19
沙流川流域の融雪流出について	境　隆雄	土木学会北海道支部 (講演会)	33. 2.13
カンテレバー矩形板の曲げについて	能町純雄	土木学会学術講演会	32. 6. 1
桁梁の撓み理論に関する厳密解析	中村作太郎	第12回土木学会 学術講演会	32. 6. 2
薄梁の撓み理論に関する厳密解析	中村作太郎	第7回応用力 学連合講演会	32. 9. 7

ランガー構桁橋の影響函数性撓算定について	中村作太郎 原　日出男	第12回土木学会学術講演会	32. 6. 2
ガス型法に関する二，三の考察	内藤正鄰 菊地千之	機械学会60周年記念講演会	32. 7. 11
アルミニウム溶解鍋の塗布剤に関する研究	及川　弘 西田恵三 幸田成康	日本金属学会北海道支部春季講演会	32. 6. 22
硫化鉄鉱中に随伴する稀少鉱物の回収（第1報） ——ホロベツナイトの塩化焙焼について——	西田恵三 田中章彦 及川　弘 川村信一	日本金属学会北海道支部秋季講演会	32. 11. 26
市販黄銅線の応力腐蝕に関する研究 （捩り応力の場合）	西田恵三	日本金属学会春季講演会	32. 4. 3

室蘭工業大学研究報告第二巻総目次

(自 第1号　至 第3号)

題　　目	氏　名	号	頁	総頁
長距離送電線における直列コンデンサの定態運転特性 (第1報)	三浦五郎	1	(1)	1
Laplace 変換による一変定数回路の解析	三浦五郎 山上孝	1	(15)	15
Heaviside 演算子の変定数回路に対する応用	山上孝 三浦五郎 伊達隆三	1	(29)	29
北海道産ウスネア属地衣類の成分に関する研究 (第4報)	佐藤久次	1	(39)	39
泥炭のアンモニア化 (第3報)	佐々木満雄 八幡寿雄 佐藤久次	1	(51)	51
市販真鍮線の応力腐蝕の研究	西田恵三	1	(59)	59
I-ピコリンの分光光電法による分析について	小松藤男	1	(93)	93
捩りモーメントを受ける拱橋の新解法について	中村作太郎	1	(101)	101
不連続な基礎上に在る梁および矩形板の曲げ	能町純雄	1	(133)	133
リンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度	上野幸三	1	(147)	147
電位差滴定における電極(双金属)の選択について—中和滴定	上野幸三 太刀川哲平	1	(153)	153
心霊現象に対する態度の研究	川村信一	1	(163)	163
新中国における三反，五反運動と運動下の財経工作	三木毅	1	(173)	173
中国経済における封建性および殖民地性の解剖	三木毅	1	(185)	185
$(n+1)$次元のフインスラー空間内の超曲面の主法曲率の新しい特性付け	永田幸令	1	(205)	205
Fundamental Viewpoints in the Theory of A Priori Measure	Y. Kinokuniya	1	(211)	211
On Numerical Differentiation	M. Yoshida	1	(221)	221
On Term by Term Integration	M. Yoshida	1	(227)	227
A Numerical Table of the Laguerre Functions	M. Yoshida	1	(231)	231
助触しない銀触媒によるエチレンの空気酸化の速度に関する研究	加納久雄 金塚高次	2	(1)	241

不銹鋼製硫黄精錬釜に関する調査ならびに研究 …… 西田恵三 2 (9) 249

平面三角網の調整計算について …… 森田健造 2 (31) 281

水準網の調整計算について …… 森田健造 2 (107) 347

平板及び平面弾性問題に対する有限なフーリエ変換の応用 …… 能町純雄 2 (123) 363

表面に垂直及び水平荷重を受ける梁について …… 能町純雄 菅原登 2 (143) 383

桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (I) …… 中村作太郎 2 (151) 391

直列コンデンサ補償系統の単相短絡理論と
一般非対称回路の取扱い …… 三浦五郎 2 (173) 413

凸極同期機系統における基礎式変換理論 …… 三浦五郎 2 (195) 435

放電電流による磁歪振動子の励振について …… 二木治郎 秋山稠 2 (207) 447

低温における鋼の二，三の性質について …… 内藤正鄰 菊地千之 2 (217) 457

電位差滴定法における電極(双金属)の選択について—中和滴定
(強酸—弱塩基，弱酸—強塩基) …… 上野幸三 太刀川哲平 2 (227) 467

中国における紙幣乱行の状況 …… 三木毅 2 (243) 483

新中国における人民幣の発行と流通 …… 三木毅 2 (257) 497

A Constructive Study of the Vector
Space of Real Functions …… Y. Kinokuniya 2 (271) 511

桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (II) …… 中村作太郎 3 (1) 519

管網の流量計算について …… 森田健造 3 (29) 547

炭酸ガス法に関する実験的研究 (第1報) …… 内藤正鄰 菊地千之 3 (43) 561

真空管電位計による表面電荷測定の2,3の問題 …… 北村正一 3 (51) 569

線間短絡，一線地絡が同時に発生する場合の
凸極同期発電機の過渡現象 …… 三浦五郎 3 (61) 579

長距離送電線における直列コンデンサの定態運転特性 (第2報)
数値例による結果とその考察 …… 三浦五郎 伊達隆三 3 (77) 595

アルギン酸製造法の改良 (その4)
アルギン酸ソーダの加熱による粘度低下について …… 佐藤久次 森田睦夫 半井和三 3 (99) 617

アルギン酸製造法の改良 (その5)
配合アルギン酸ソーダの粘度について …… 佐藤久次 森田睦夫 半井和三 3 (99) 617

泥炭のアンモニア化（第4報）
小型回転炉によるアンモニア化試験 …… 佐藤久次 佐々木満雄 八幡寿雄 紀俊道 3 (107) 625

泥炭のアンモニア化（第5報）
連続式回転炉によるアンモニア化試験 …… 佐藤久次 佐々木満雄 八幡寿雄 紀俊道 3 (115) 633

泥炭の空気酸化に関する研究
泥炭アンモニア化前処理としての空気酸化 …… 佐藤久次 佐々木満雄 八幡寿雄 紀俊道 3 (125) 643

泥炭の硝酸処理に関する研究（その2）
硝酸廃液の成分について …… 佐々木満雄 八幡夢雄 佐藤久次 3 (133) 651

泥炭フミン酸に関する研究（第1報）
（カルボキシル基，水酸基及び分子量測定） …… 佐々木満雄 八幡寿雄 3 (141) 659

高沸点タール塩基類の分離に関する研究 …… 小松藤男 3 (151) 669

直接酸化法による酸化エチレン合成用
銀触媒の担体に関する研究 …… 加納久雄 金塚高次 3 (161) 679

鉄綱の硫黄蒸気による腐蝕について …… 西田恵三 3 (173) 691

市販黄銅線の応力腐蝕に関する研究
捩り応力の場合 …… 西田恵三 3 (191) 709

新中国における工商業調整および税収調整の後果 …… 三木毅 3 (209) 727

リンモリブデン酸アンモニウムの硝酸に対する溶解度（続報）… 上野幸三 3 (235) 753

電位差滴定法における電極（双金属）の選択について
中和滴定（第3報） …… 上野幸三 太刀川哲平 3 (243) 761

線型束空間における Bimodular と
ノルム modular の間の或る関係について …… 本田孝二 3 (253) 771

Logical Construction of the Theory of A Priori Measure … Y. Kinokuniya 3 (263) 781

昭和三十三年七月一日印刷
昭和三十三年七月十日発行

【非売品】

編輯兼発行者　室蘭工業大学

札幌市北三条東七丁目三四二番地

印刷者　山中キヨ

札幌市北三条東七丁目三四二番地

印刷所　文栄堂印刷所

〒②〇八五一・③五五六〇・③二七二

PRINTED BY
BUNYEIDO PRINTING CO.
Higashi 7-chome, Kita 3-jo
Sapporo, Japan

CONTENTS

Vol. 3. No. 1. June. 1958 Whole No. 9

Page

Experimental Investigation of Carbon Dioxide Proecss (II) . . . . . M. Naito & K. Kikuchi 1

Extraction from Rare Minerals associated with Pyrite (Part I) On the Chloridizing Roasting of Horobetsunite . . . . . K. Nishida, A. Tanaka, H. Oikawa & S. Kawamura 7

Investigations of Pots Corroded on Sulfur Smelting (Part II) On the Cast Iron Pot . . . . . K. Nishida & H. Oikawa 17

An Analysis of Over-Compensated Series Capacitor Systems . . . . . G. Miura 33

Air Catalytic and Non-catalytic Oxidation of Quinaldine . . . . . F. Komatsu 41

On the Air Vapor Phase Oxidation of Isoquinoline . . . . . F. Komatsu 61

Fundamental Studies on the Deflection Theory of Beam (III) . . . . S. Nakamura 81

A Cubic Solution on Girder Elastically Fixed andan Applied Calculation on Lattice Plate Girder Bridge . . . . . S. Nakamura 119

On the Computation of Snow-melt Runoffin River Basin . . . . . T. Sakai 145

On one Method for Solving Three-Dimensional Stress Problems by Means of Finite Fourier Transforms . . . . . S. Nomachi 167

On the Selection of Bimetallic Electrodes for Potentiometric Titration in Oxidimetry (V). . . . . K. Ueno & T. Tachikawa 193

A Study of the Categories of Summation . . . . . Y. Kinokuniya 207

Other Achievements in Studies, Oral or Written, for 1957 by Professors in this University. 217

A General Table of Contents. Vol. II (No. 1 — No. 5) i