室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

室蘭工業大学研究報告 第3巻第2号 全1冊

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-05-15 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/2931

室蘭工業大学

研究報告

第三巻　第二号

昭和三十四年六月

MEMOIRS

OF

THE MURORAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

VOL. 3　NO. 2

JUNE 1959

MURORAN HOKKAIDO

JAPAN

Editing Committee

T. Ohga	President.	*Chairman of the Committee*
K. Morita	Asst. Prof.	*Civil Engineering*
M. Naito	Asst. Prof.	*Mechanical Engineering*
H. Sato	Prof.	*Chemical Engineering*
S. Sawa	Prof.	*Electrical Engineering*
S. Sayama	Prof.	*Mining Engineering*
D. Washiyama	Prof.	*Literature*
M. Yoshida	Prof.	*Mathematics, Chief Librarian*

All communications regarding the memoirs should be addressed to the chairman of the committee.

These publications are issued irregular intervals. When they amount to about 800 pages, they form one volume.

室蘭工業大学研究報告　第三巻 第二号

目　　次

			頁
鋳鉄の硫黄蒸気腐食に関する研究（第2報）	西田恵三	2（1）	221
直列コンデンサ系統における凸極同期機の一相中性点間短絡について	三浦五郎	2（15）	235
エチレンの酸化反応の平衡論的考察	加納久男	2（37）	257
10 mm Racshig ring 充填物に対する液境膜係数 —— 充填塔によるガス吸収 ——	木村一宏 岡	2（47）	267
キノリンの空気酸化（第2報）	小松藤男	2（63）	283
高さを考慮せる桁梁の挫屈荷重に関する理論的並びに実験的研究	中村作太郎	2（87）	307
On Elastic Behavior along Simply Supported Edges of Rectangular Plates	Sumio Nomachi	2 (129)	349
低温における鋼の機械的性質について（第1報）	内藤正鄰 菊地千之	2 (153)	373
電位差滴定法によるシアン化物の定量	上野幸三 太刀川哲平	2 (157)	377
昭和33年度研究業績		2 (163)	383

鋳鉄の硫黄蒸気腐食に関する研究 (第2報)

腐食に伴なう組織並びに硬度変化について*

西　田　恵　三

On the High-Temperature Corrosion of Cast Iron in Sulfur Vapor (Part II)

The Change of Structure and Its Hardness during Corrosion

Keizo Nishida

Abstract

The mechanical properties of cast iron are very important as well as its resistance to corrosion in the practical use at high temperature and in sulfiding atmosphere. But there has been, so far, few reports on the structural change of cast iron during corrosion.

So, we investigated the structure and its hardness on the sections of test pieces of two kinds of cast iron (mottled one and the other bearing 3.62% Al) which were corroded in sulfur vapor (1 atm.) at various temperatures(600-900°C) and in various durations (to 12 hrs.).

The results are summarized as follows:

1) For the mottled cast iron, no significant change was observed up to 700°C, but at higher temperature fine pearlite structure appeared in the substrate and began to harden. For the Al-cast iron, on the other hand, the structure changed rapidly at 700°C, and indicated only ferrite and graphite at 800°C, resulting to remarkable softening. At 900°C, however, it suffered another change in appearence, and its hardness did not fall so much as that of lower temperature corrosion.

2) The above observations were explained on the basis of the heating effect of cast iron and the effect of enrichment of dissolved carbon in substrate during corrosion. Namely, these two effects operate alternately on each of two kinds of cast iron and many different structures are observed.

Consequently, we must pay more attention to the selection of Al-content, and specifically for the practical use of Al-cast iron at high temperature and in sulfur-atmosphere.

I. 緒　　言

鋳鉄の硫化腐食に関する研究は，現在まで多数行われているが[1)~6)]，その組織の変化につ

* 第6回腐食・防食討論会 (北海道) にて一部講演 (昭和33年6月).

いてはほとんと報告されていない。この腐食と共に，必然的に加熱焼鈍が行われる結果，素地組織に変化を生じ得ることは，鋳鉄の構成成分の性質から当然考えられることである。従つてこれら材料を硫黄雰囲気中で使用する時，思わざる破損を生ずることも考えられ，ただ単なる硫化腐食の耐久性のみでは論じ切れない点が多い。

著者は，先に2～3の鋳鉄種について，現場使用後の組織変化の研究を行つた[7]。また，斑鋳鉄及びAl含有鋳鉄(3.62%)試片について硫黄蒸気腐食に伴なうスケール生成に関する測定；観察結果から，動力学的考察を行つたが[8]，上述の見地から，腐食に伴なう組織の変化並びに硬度変化を先の試片について測定した。ここにその続報として，得られた結果及びそれに関する考察を報告する。

II. 試料並びに研究方法

試料は前報[8]に使用したものであり，斑鋳鉄及びAl含有鋳鉄(以後Al鋳鉄と略記する)の二種であり，その組成は第1表のごとくである。この試料の断面の顕微鏡観察を行うと共にこの断面の中央を横切つて，その硬度変化を微小硬度計(荷重＝500 g)によつて測定した。

第1表 両種試料の化学組成 (重量 %)

成分	C % 全量	C % 黒鉛	Si %	Mn %	P %	S %	Al %
斑鋳鉄	3.03	1.90	0.96	0.25	0.417	0.172	--
Al鋳鉄	3.34	2.32	1.79	0.40	0.164	0.042	3.62

特に，Al鋳鉄については，研究に先立つて，大気加熱を行ない，これの組織；硬度の結果を以後の研究の参考とした。

III. Al鋳鉄に関する予備的実験結果

Al鋳鉄試料について，鋳造のままのものと，これを焼鈍(800°C；5時間；昇温に約1時間，焼鈍後炉冷)したものについて，組織の観察並びに硬度測定結果を示と次の通りである。比較のために他の2試料(7.50% Al；14.3% Al含有)をも加えて行つた。これらをA-I，A-II，A-IIIと名ずける。

A-Iの組織は写真1～5に示すごとく，鋳放しのままで，フエライト粒子が所所に見られ，各種のエッチ剤でも大差なく，あまり明瞭な組織が見られない。これを焼鈍すると写真6～8に見られる組織となる。これによると5% Nitalが最も良好な組織を示す。写真6によれば，一般に黒鉛量が増加しており，しかも，黒鉛の周縁ではセメンタイトの分解によるフエライト増加も示されている。

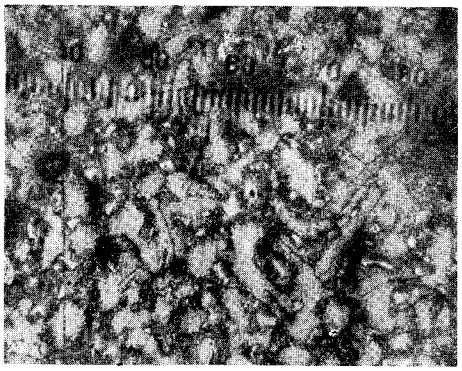


写真 1　Al 鋳鉄（鋳放なし）　×95
5% Nital エッチ

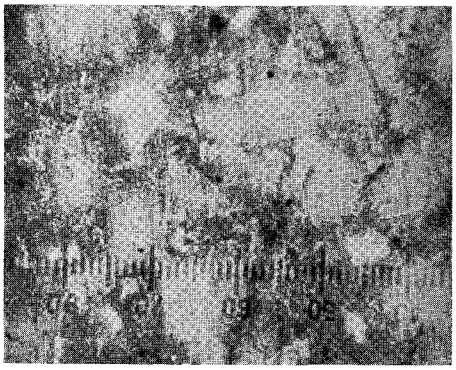


写真 2　同　前　拡　大　×300

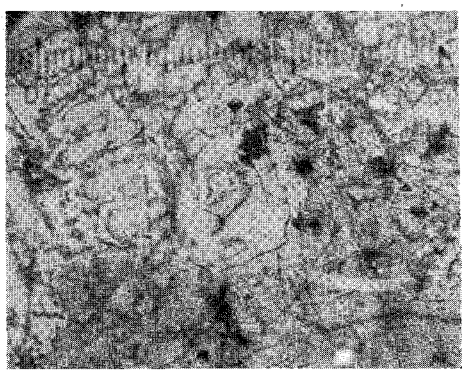


写真 3　Al 鋳鉄（鋳放なし）　×95
ピクリン酸ソーダ煮沸

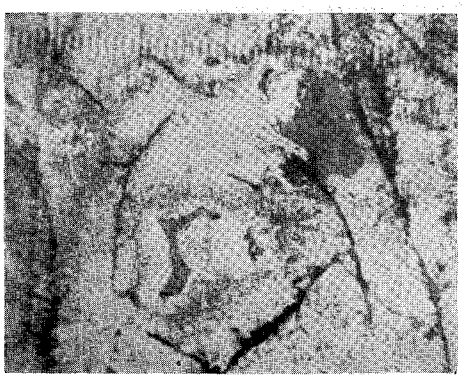


写真 4　同　前　拡　大　×300

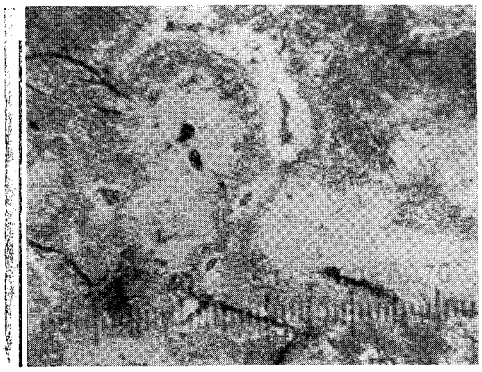


写真 5　Al 鋳鉄（鋳放し）　×300
赤血塩アルカリ液高温エッチ

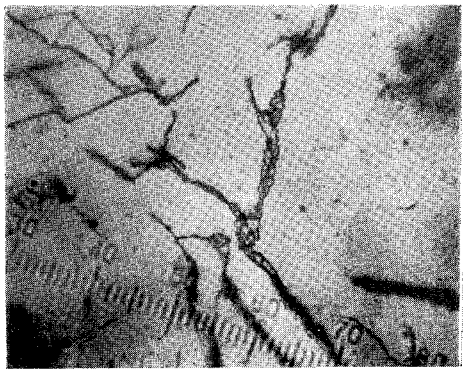


写真 6　Al 鋳鉄（焼鈍）　×300
5% Nital エッチ

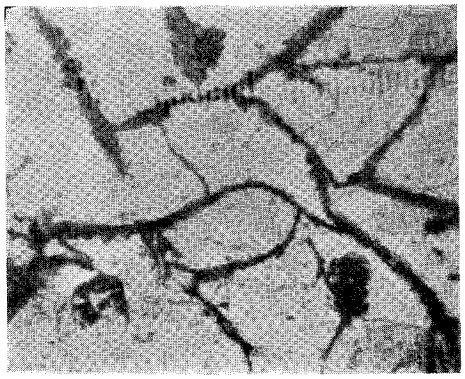


写真 7 Al 鋳鉄 (焼鈍) ×300
ピクリン酸ソーダ煮沸

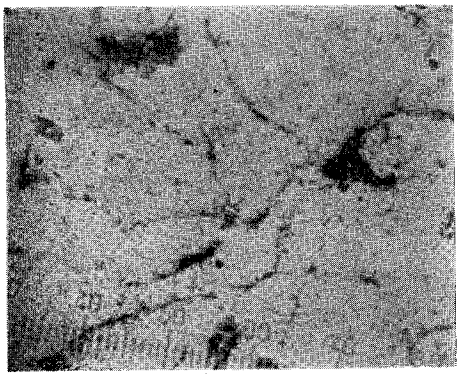


写真 8 Al 鋳鉄 (焼鈍) ×300
赤血塩アルカル液高温エッチ

さらに A-II, A-III の組織を示すと写真 9～12 であり，焼鈍によりいずれも黒鉛化が進むが，先の A-I よりは，はるかに少ない。また存在するパーライトが粗大化しているのがわか

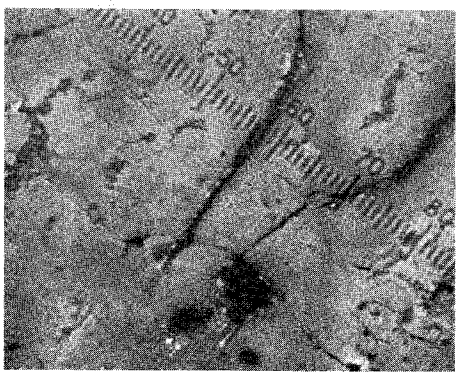


写真 9 Al 鋳鉄 (A-II) (鋳放なし) ×300
5% Nital エッチ

写真 10 Al 鋳鉄 (A-II) (焼鈍) ×300
5% Nital エッチ

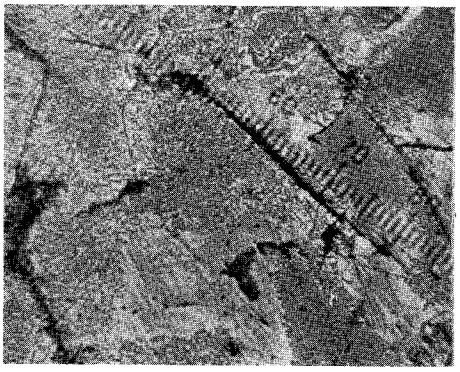


写真 11 Al 鋳鉄 (A-III) (鋳放なし) ×300
赤血塩アルカリ液高温エッチ

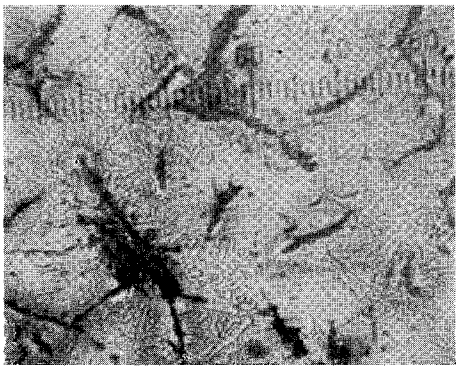


写真 12 Al 鋳鉄 (A-III) (焼鈍) ×300
5% Nital エッチ

る。硬度変化を示せば，第2表のごとくであり，先の組織から見られる結果と一致し，A-I の方が著しく軟化しているが，A-III は最も硬い。

第 2 表　Al 鋳鉄各試料の焼鈍前後における硬度
（ロツクウエル C スケール）

	A-I (3.62% Al)	A-II (7.50% Al)	A-III (14.3% Al)
焼　鈍　前	32.0	36.5	29.5
焼　鈍　後	9.5	20.0	24.0

IV. 実験結果並びにその考察

A. 腐食した試料の組織観察

両種試料における組織の変化は著しく異なつており，同種試料でも腐食温度によつてまた異なつているので，次にその特色を組織写真と共に列記する。

a) 斑鋳鉄の場合

i) 比較的低温度腐食した場合

700°C 以下の温度で腐食した試料の組織は，高温度ほど，また長時間ほど，パーライトの層状組織が粗大化しており，一方黒鉛の形状も，細長のものから，肥大化の傾向を示している。

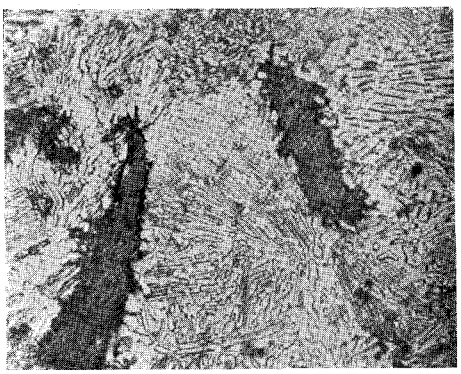


写真 13 (a)　斑鋳鉄 700°C；12 時間　×425
腐食（中央附近）

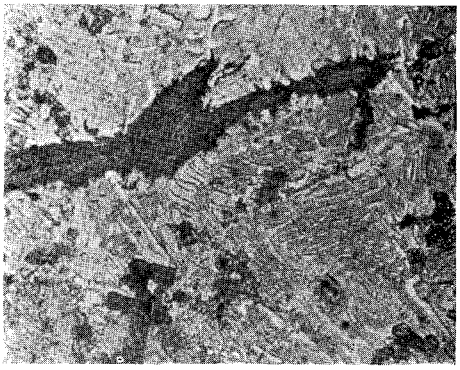


写真 13 (b)　同前，別の場所　×425

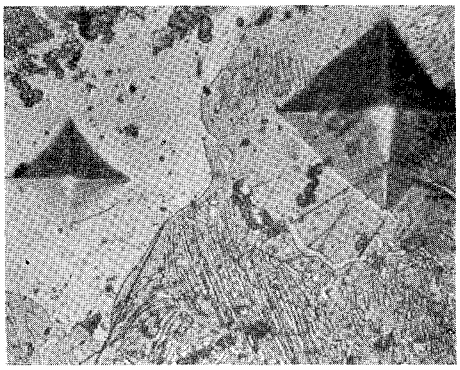


写真 13 (c)　同前，別の場所　×425
初析セメンタイト粒子と素地（パーライト＋フエライト）との硬度測定痕
左側：　セメンタイト粒子
右側：　フエライト部

写真13(a); (b)に示した通り，黒鉛周縁の凸凹が激しく，新しい黒鉛がもとの黒鉛の表面に生成している。すなわち，加熱温度が高くなると共に，また腐食時間が長くなると共に，パーライト構成のセメンタイトが粗大化し，ついで分解するが，後者の変化が黒鉛周縁で行われるものと考えられる。

ii) 比較的高温度で腐食した場合

800℃; 1時間腐食の時は写真14(a)のごとく，一面に粗大セメンタイト粒子が見られるが10時間では，写真14(b)のごとく，さらに大きなセメンタイト粒子がまばらに存在するのみである。この温度では，鋳鉄の状態図からは，Ac_1変態点以上の温度に相当し，その組織は，オーステナイト＋初析セメンタイトである。従つて，低温で存在していたパーライト構成のセメンタイトは完全に固溶すべきであるが，800℃では，10時間腐食でも残留している。これは，腐食速度の増大と共に，試料表面でオーステナイト中えの炭素の濃化[9]及び，それにもとずく

写真 14(a) 斑鋳鉄 800℃; 1時間 ×425
腐食（中央附近）

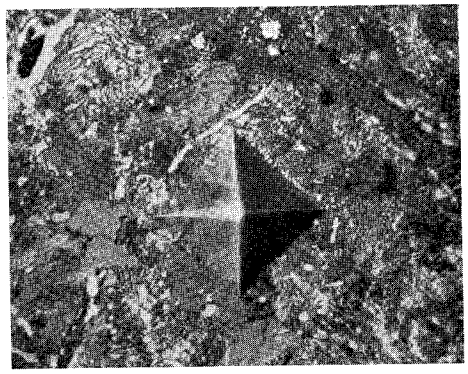


写真 14(b) 斑鋳鉄 800℃; 10時間 ×425
腐食（中央附近）

セメンタイトの生成が加速され，セメンタイト粒子の粗大化と相まつて，これの分解に打勝つほどになるためであろうと考えられる。

しかして，800℃; 10時間腐食の際，試料周辺では写真15に示すごとく，セメンタイト粒子が多数存在している（特に試料の支払台側を示すが，ここでは他の面より腐食が緩慢である）。この事実は，周辺において，内部よりも炭素量が著しく大なることを示すものであろう*。

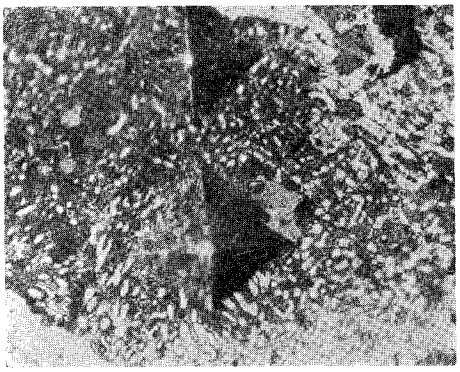


写真 15 斑鋳鉄 800℃; 10時間 ×425
腐食（周辺附近）

ここで，素地構成のパーライトが相当に狭い層間

* 特に素地周辺では，硫黄の影響も大であると考えられる。

隔を有することは，オーステナイトの Ar_1 変態点によるものであり，腐食温度からの冷却速度の影響にもよるものであろう。

写真 16　斑鋳鉄 900℃；5 時間　×425
腐食（中央附近）

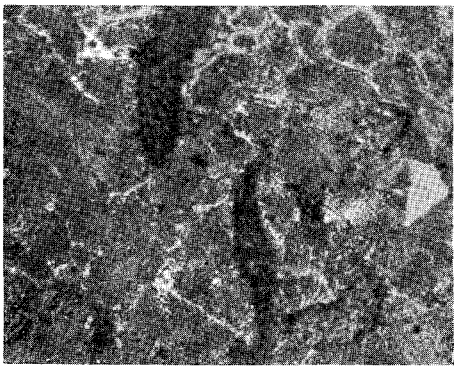


写真 17　斑鋳鉄 900℃；10 時間　×425
腐食（中央附近）

900℃においては，先のセメンタイト粒子はほとんど消失し，腐食時間が長くなれば完全になくなる。巨大な，最初から試料に存在していた初析セメンタイト粒子以外は，先の温度で見られた状態と異なり，緻密なパーライトとなつている。しかし，黒鉛化も進んでいることは残留黒鉛の周縁にひげ状の黒鉛が生成していることからわかる（写真 16；17）。

b)　Al 鋳鉄について

i)　650℃までは，腐食によつても何等著

写真 18　Al 鋳鉄 600℃；5 時間　×425
腐食（中央附近）

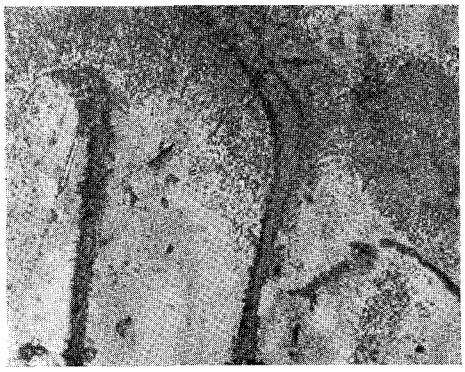


写真 19　Al 鋳鉄 700℃；3 時間　×425
腐食（中央附近）

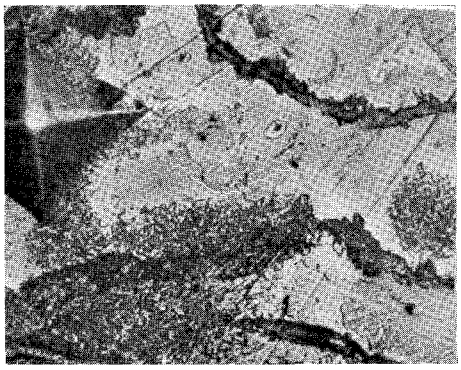


写真 20　Al 鋳鉄 700℃；10 時間　×425
腐食（中央附近）

しい変化が組織上に現われていない。ただ，パーライト組織は，先の斑鋳鉄と異なり，細かい層状をなしていたものが，高温度ほど，局部的に切断されたものとなる（写真18）。

ii) 700°Cでは，上記パーライトが層状を失ない，完全に切断された細片か，細粒に変化し，長時間腐食ほど，局所的に凝集している（写真19；20）。従つて残りの素地はフエライトである。また黒鉛片の周縁には，結節状の黒鉛が附着しており，セメンタイトの分解が激しいことを示している。

iii) 800°Cにおいては完全にパーライトが消失し，素地は黒鉛片＋フエライトのみとなる（写真21；22）。これは，先の大気焼鈍の組織（前掲写真6～8参照）と明らかに異なつている。

iv) 900°Cでの腐食の場合には，さらに異なつた様相を示しており，フエライト素地と思われる場所に着色粒子が混在し，腐食時間の長くなるに従つて，大きな粒子となつている（写真23；24）。

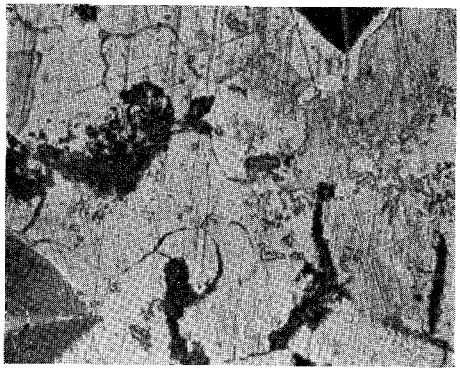


写真 21 Al鋳鉄 800°C；5時間 ×425
腐食（中央附近）

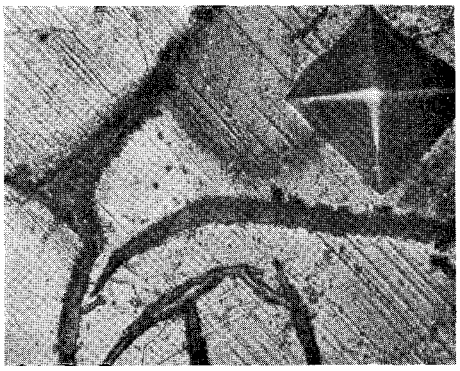


写真 22 Al鋳鉄 800°C；10時間 ×425
腐食（中央附近）

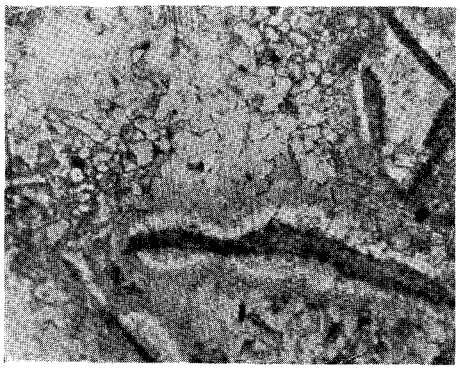


写真 23 Al鋳鉄 900°C；1時間 ×425
腐食（中央附近）

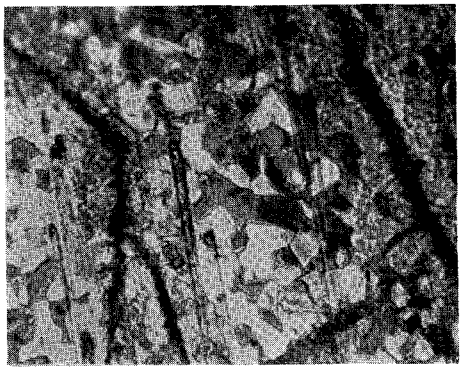
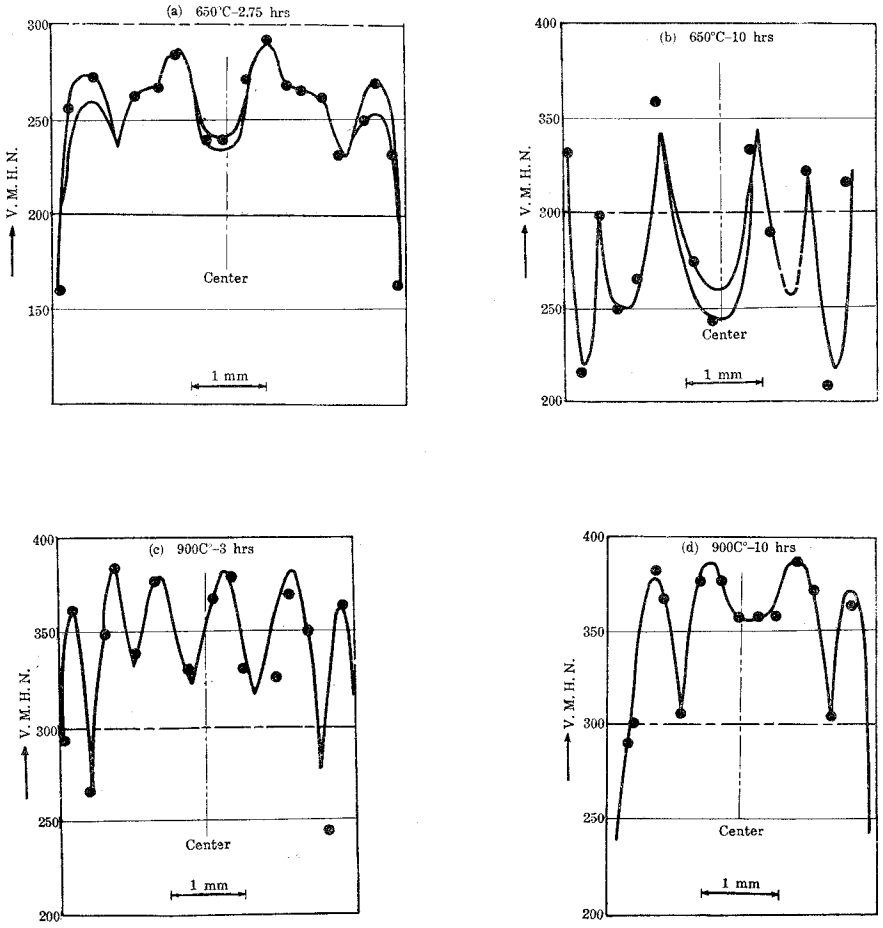


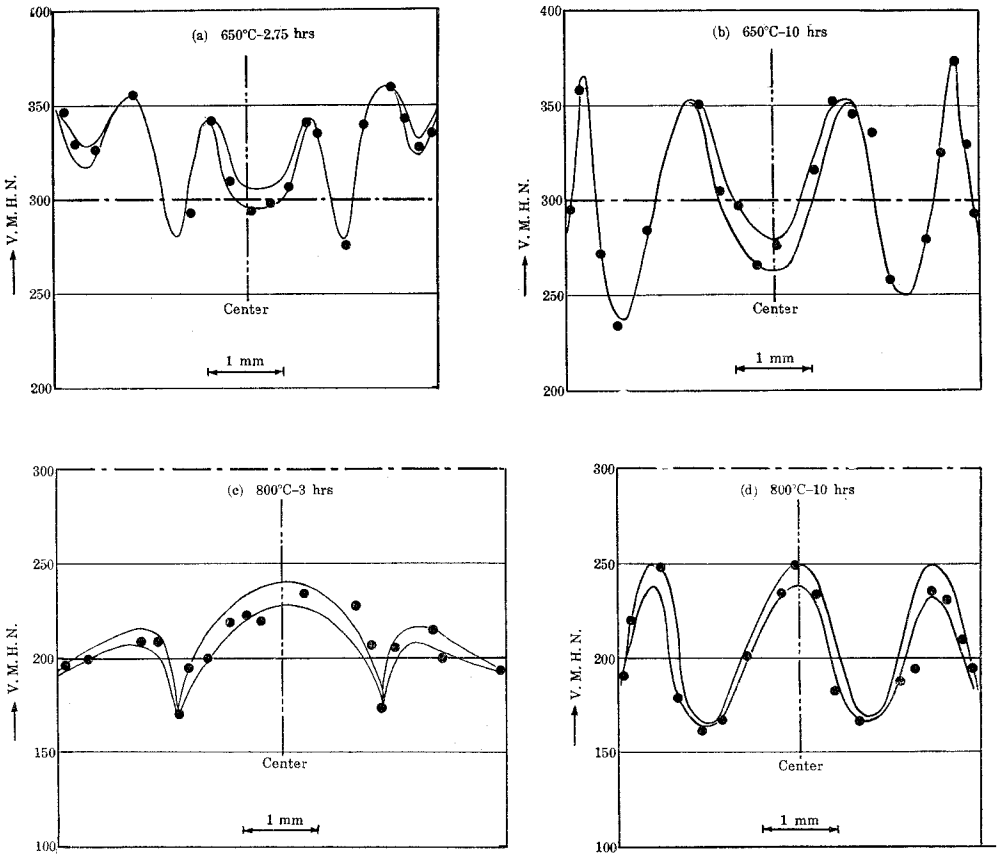
写真 24 Al斑鋳 900°C；10時間 ×425
腐食（中央附近）

B. 腐食した試料の硬度変化について

A. に見られるごとき組織の変化をさらに確認するため，その断面を横切つて，硬度の変化を測定した。一般に鋳鉄試料では，その中に，黒鉛；セメンタイトまたは，フエライト等の組織を含んでいるため，測定に当つては，これら，巨大な成分の場所は注意して避け，主としてパーライト（及びフエライト）部分について測定したが，硬度のバラッキは止むを得ない。しかしながら，大体の傾向は推察出来ると思われる。その結果の一例を示せば，第1図（斑鋳鉄），第2図（Al 鋳鉄）のごとくである。これによれば，いずれの場合も，ほぼ試料の中心線の両側に対称的な消状的硬度分布を示している。しかも，腐食の温度；時間が異なれば，周辺部での硬度が常に硬化または軟化しているしているとは限らず，その硬；軟の場合が，時間と共に対称的に内方に移行して行くもののごとくである。



第 1 図　斑鋳鉄の腐食による硬度変化（試料断面の硬度分布）



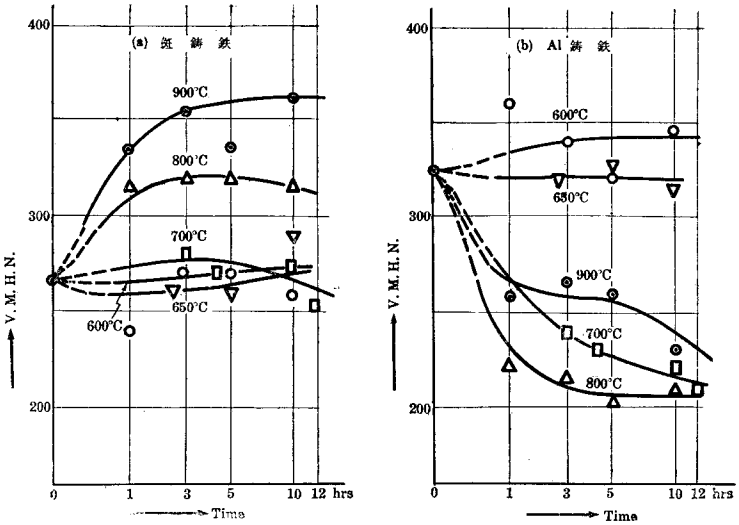
第 2 図 Al 鋳鉄の腐食による硬度変化 (試料断面の硬度分布)

この一連の硬度分布から，各試料ごとに，中央附近での平均硬度値を，腐食時間に対してプロットすると，第3図(a)及び(b)のごとくである。これらの結果から次の事実が云われる。

1) 斑鋳鉄では，700°C 以下の腐食温度では，いずれも大差なく，また時間によつても大きな変化を示していない。一方，800°C；900°C での腐食においては，単時間で著しい硬化を示している。

2) Al 鋳鉄では，逆に低温度ほど硬度がもとの値を維持してるが，700°C では，時間と共に著しく低下を示す。特に 800°C では，短時間で軟化する傾向を示し，以後はほぼ一定である。これは，先の組織観察における，パーライトの分解；黒鉛生成と一致している。

しかしながら，900°C では，単時間で一時軟化するも，その程度は，700°C の場合よりも少なく，この事実は，先の観察でも着色粒子の生成と対応し，これの生成が硬度維持を示す根拠であると考えられる。しかし，これもまた長時間腐食後は軟化を示すが，これは，素地内の黒鉛量が大となることを意味するものであろう。



第 3 図　両種鋳鉄の腐食に伴う硬度変化 (試料中央附近)

V. 綜 合 考 察

以上の結果を綜合するに，腐食現象を除外して，加熱焼鈍効果のみを考えれば，鋳鉄の場合には，その中に含有されるセメンタイト及び，パーライト構成の層状セメンタイトが分解して黒鉛＋フエライトを生成することは明らかであり，これが高温度；長時間ほど著しいことは良く知られている所である。また，分解されずに残留するパーライトも，その形状は粗大化することは，先の予備実験からも明らかである。その結果，硬度もそれに相応して来ることもまた明らかであろう。しかして，本研究結果によれば，斑鋳鉄の場合に，700°C 以下においてはその傾向を示しており，Al 鋳鉄でも 700°C 及び 800°C で特に著しく示される。しかしながらより高温度での腐食では，両種の試料とも，異なつた相を示しており，かえつて硬化する事実は，先の炭素鋼において考えられるごとく，腐食に伴なつて炭素が残留することを考えなければならないであろう[9]。従つて，一般に鋳鉄の硫化腐食に際しては，一方においては，その素地が焼鈍効果を受けてセメンタイトの分解が起り，安定な黒鉛が生成し，これが腐食と共に素地から放出されて，スケール内層に入ることは，すでに示した所である (写真 25；26) が，他方，素地に固溶している炭素は，そのまま残留すると考えられる。もちろん，素地周辺においては，その腐食温度で溶解限度に達すれば，ふたたびセメンタイト粒子を形成する。特に高温での腐食においては，素地がオーステナイトとなるため，炭素の固溶度が増加するがまた腐食速度も大となるため，同様にセメンタイトを形成するであろう。

従つて，一般に，セメンタイト→黒鉛＋フエライトの変化と，固溶炭素→セメンタイト形

写真 25 斑鋳鉄 700°C；12 時間腐食
スケール(内層)中の黒鉛 ×125

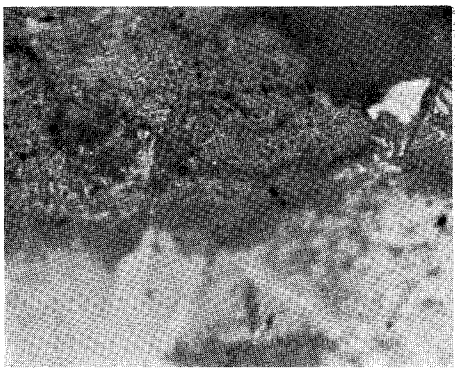
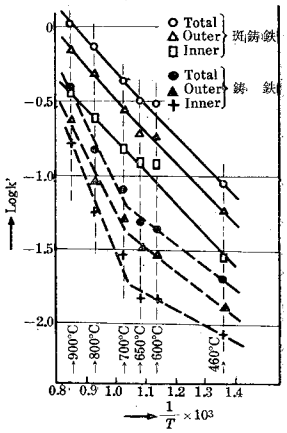


写真 26 斑鋳鉄 600°C；3 時間腐食 ×425
素地/硫化物境界におけるセメンタイトの
黒鉛化 (600°C；3 時間腐食)

成が相次いで行われながら腐食されて行く。

特に本試料のごとき Al 鋳鉄では，セメンタイトの黒鉛化が急速であるため，700～800°C の腐食温度では，ほとんど黒鉛化のみが行われているが，さらに高温度で腐食速度が早くなるときには，炭素の残留量が大となり，従つて，これによる硬化が生ずることも考えられ，900°C での腐食の場合がそれに当当するであろう。

一方，腐食速度の点から見ると，かくのごとく Al 鋳鉄で黒鉛化が早い場合には，腐食が加速されて来ることは，第 4 図の経過からも明らかに示され，700°C より高温では，Al 鋳鉄の腐食速度が急速に斑鋳鉄のそれに接近を示している通りである。またセメンタイトの多い白鋳鉄の方が灰鋳鉄よりも耐硫化性が大であるという結果[10]とも一致している。従つて，低温では非常に良好な耐硫化性を示す Al 鋳鉄でも，高温において黒鉛化を起す場合には，その効果が激減することも考えられる。



第 4 図 腐食速度恒数～温度関係曲線

これまでの研究結果によれば，Al 鋳鉄中の Al 含量の変化によつて，加熱によるセメンタイトの黒鉛化が非常に異なると云われ[11]，これによれば，4% Al 附近の組成を中心にして，極大の黒鉛化を示しており，一方，約 10～16% Al の範囲では黒鉛化傾向が皆無である。本研究に用いた Al 鋳鉄は，従つて，最も黒鉛化を生ずる組成に近いため，前述の結果が得られたものと解される。

実際問題として，もしかかる変化が局部的に発生する様な使用条件では，予想外に短時間

の使用で破損を起すことも考えられる。従つて，黒鉛化傾向の少ないAl含量の大なる鋳鉄を利用することは，Al本来の耐硫化性の増大と相まつて，非常に好都合と考えられるが，実際的には，Al含量が10%以上の鋳鉄では，非常に脆弱であることはよく知られており，これが改善には別途の方法を講ずる必要があると思われる。

さらに，先の硬度分布について一言すれば，測定の誤差範囲を越えて，その硬度変化が場所と共に著しく示されていることは注目に値する事実である。素地の腐食に伴ない，素地/硫化物境界に発生した空孔が，内方に拡散；集積して空隙となり[12]，これがため，素地の密度減少並びに硬度の低下を生じ得ることも考えられる。ただいまの結果がそれに相応するか否かに関しては結論を得ないが，一般に鋳鉄内部組織は炭素鋼その他の合金に比較して非常に粗雑な様相を示しているため，これらの硬度の波状的変化を空隙によるものと判断することは困難であろう。

VI. 要　　約

斑鋳鉄及び3.62% Al鋳鉄の硫化腐食（600～900°C；12時間まで）した試料について，その断面の組織を観察し，またその硬度分布を測定した結果について考察を行つたが，これらを要約すれば次の通りである：

1) 斑鋳鉄では，700°Cまでは大きな変化が見られないが，さらに高温度腐食では，著しく硬化し，組織も黒鉛以外は緻密となる。一方，Al鋳鉄では，700°C以上の温度では急激に軟化を起し，素地はフエライト＋黒鉛のみとなる。しかし，900°Cでは，さらに素地が変化し，硬度低下が一時疎止される。

2) これらの諸結果について，鋳鉄の焼鈍効果と，硫化腐食に伴なう固溶炭素の濃化とを基礎にして，推論を行なつた。

3) 単純Al鋳鉄製品を硫黄雰囲気中で使用する際には，その組成を充分考慮しなければ，かえつて早期破損を生ずることも考えられ，さらに他の合金元素の添加によつてこれを改善しなければならない。

終りに当つて色々と御討議をして下さつた北大教授萩原・吉井両博士に厚く御礼申し上げます。

補　　記

先の顕微鏡観察結果を確認のため，二，三の腐食した試料について化学分析を行なつた結果を補充すると，次表の通りである。素地の周辺と中央部分では著しく差異があることと，周辺での分析が困難なために，本分析に当つては，出来るだけ素地の中央部分について行つた。これによると，斑鋳鉄では，全炭素量が増加していることは明らかであり，しかも，黒鉛量が

減して化合炭素が増加していることがわかる。また Al 鋳鉄でも，腐食による全炭素量の増加があるが，この場合には，化合炭素の分解に伴なう黒鉛生成が著しい。しかし，900°C での腐食(5時間)において，この黒鉛化が他の試料に少ないことは，先の組織観察で，着色粒子の出現と一致している。

附 表： 腐食に伴なう素地の炭素；硫黄含量の変化

	C %				S %	
	全炭素		黒鉛			
斑鋳鉄 900°C；5 hrs 腐食	3.16	腐食前	1.86	腐食前	0.198	腐食前
〃 800°C；10 hrs 〃	3.10	3.03	1.55	1.90	0.193	0.172
〃 700°C；12 hrs 〃	3.16		1.49		0.198	
Al 鋳鉄 900°C；5 hrs 腐食	3.38	腐食前	2.99	腐食前	0.071	腐食前
〃 800°C；10 hrs 〃	3.43	3.34	3.15	2.32	0.068	0.042
〃 700°C；10 hrs 〃	3.44		3.15		0.052	

(昭和34年4月30日受理)

文献

1) 村上，長崎： 日本金属学会誌，**3**，131 (1939).
2) 川端，上村，本田，米田： 鉄と鋼，**39**，343 (1953).
3) 塩沢，中井： Rep. Castings Res. Lab., No. 4, 17 (1953).
4) 中井，塩沢： 鉄と鋼，**42** 811 (1956). 日本鉄鋼協会第52回講演会大要
5) 塩沢，中井，前田： 鉄と鋼，**43**，991 (1957).
6) 芹田： 鋳物，**30**，88 (1958).
7) 西田，及川： 室工大研報，**3**，7 (1958).
8) 西田： 電気化学，**26**，650 (1958).
9) 西田： 室工大研報，**2**，691 (1957).
10) 川端，上村，本田，米田： 前掲文献 2) 参照.
11) K. Löhberg, W. Schmidt： Arch. Eisen hüttenw., **11**, 607 (1937/38).
12) A. de S. Brasunas： Metal Progress, **62**, 88 (1956).

直列コンデンサ系統における凸極同期機の一相中性点間短絡について

三　浦　五　郎

On the Line-to-Neutral Short Circuits of a Salient-pole Synchronous Machine in Series Capacitor Systems

Goro Miura

Abstract

The theories for line-to-neutral short circuits of series capacitor systems consisting a salient-pole synchronous machine have been successfully developed in this paper. The process of calculation and the individual results are somewhat different from the previous analyses reached by the author for line-to-line short circuits.

The results given in the paper are summarized as follows:

(1) Both steady and transient components of sudden short circuit currents are derived in analytical solutions.

(2) The values of higher harmonic frequencies in the system are obtained.

(3) As to a transient voltage across the series capacitor, the maximum peak value is expressed by an approximation formula.

(4) The transient current in a field winding of the machine are derived.

I. 緒　　言

凸極同期機に直列コンデンサを有する系統が接続された際の突発線間短絡故障については，筆者が基本式に Laplace 変換を施こして無限次マトリクス方程式を解く新解析法に成功し，すでにその理論および実験結果を発表した[1)~3)]。

本文はこの理論を，線間短絡とならんで代表的な故障である一線地絡について進展させたものである。一線地絡についても線間短絡とほとんど同様に解析できるが，計算過程その他個々の結果に大部異なつている点がみられる。まず適用仮定については，コンデンサ補償度が単に不足補償であること以外に，さらに

$$\frac{x_c}{x_l} < \frac{2}{3} + \frac{x_o}{3x_l} \tag{1}$$

を満足することが必要である。ただし，x_l は直列線路リアクタンスを含めた同期機の過渡リア

クタンスとする。ゆえにもし電線路長が大である等によつて，系統の零相リアクタンスが過渡リアクタンスにほぼ等しいような場合は，この条件は約「補償度が1より小さいこと」を意味し線間短絡の仮定と同一になるが，もし x_o が甚少であるときは補償度（過渡リアクタンスに対する値）は大よそ60%以下でなければならない。

その他の適用仮定については線間短絡におけると同一で，線路抵抗は十分小であり同期機のアモルト捲線は一応考慮しない。電線路は直列 R, L 回路とし，線路定数はすべて凸極機定数に直列加算して r, $x_d(p)$, $x_q(p)$, x_o 等とおく。(r は接地抵抗等を含める)

II. 基礎方程式

短絡は無負荷より a 線が地絡するとし接地抵抗は甚少とする。相軸における凸極同期機の基本式において電機子各相の自己インピーダンス要素に $\frac{x_c}{p}$ を加算し，これを条件 $i_b=i_c=0$ によつて変形誘導すれば次の基礎方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned} & x_{afd}\left[T'_{d0}\frac{d}{dt}+1\right]I_{fd}=-\frac{2}{3}\,T'_{d0}(x_d-x'_d)\frac{d}{dt}\,i\cos\theta \\ & e\sin\theta=x_{afd}\frac{d}{dt}I_{fd}\cos\theta+\left[r+\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(x_o+2A+2B\cos 2\theta)\right]i+x_c\int i\,dt \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

記号は従来の慣習にしたがつて

T'_{d0}: 過渡直軸開路時定数

I_{fd}: 直軸界磁回路電流

i: a 線の突発短絡電流

x_{afd}: 直軸電機子と界磁との相互リアクタンス

θ: 直軸と電機子 a 相磁軸間の電気角

x_c: 直列コンデンサのリアクタンス

A: 直リアクタンス x_d と横リアクタンス x_q の和の平均

B: 同上の差の平均

x'_d: 直過渡リアクタンス

x_o: 零相リアクタンス

r: 電機子 a 相回路の抵抗

とする。この基礎方程式に Laplace 変換を施こすときは次のようになる。

$$x_{afd}(T'_{d0}p+1)I_{fd}(p)=-\frac{1}{3}\,T'_{d0}(x_d-x'_d)\,\varepsilon^{j\varphi}\,pI(p-j)+\mathrm{Conj}$$

$$e\,\frac{p\sin\varphi+\cos\varphi}{p^2+1}=-\frac{1}{2}\,x_{afd}\,\varepsilon^{j\varphi}\,pI_{fd}(p-j)+\mathrm{Conj}$$

$$+\left[r+\frac{p}{3}(x_o+2A)+\frac{x_c}{p}\right]I(p)$$

$$+\left\{\frac{1}{3}B\varepsilon^{j2\varphi}pI(p-2j)+\mathrm{Conj}\right\}$$

Conj とは前出項の共軛値の意であり，$I(p-j)$, $I(p-2j)$ 等は $I(p)$ において p に $p-j$, $p-2j$ 等を代入したものである。φ は短絡瞬時における a 相磁軸と直軸間の電気角である。

上式第1式より $I_{fd}(p)$ は

$$x_{afd}I_{fd}(p)=-\frac{1}{3}\frac{T'_{d0}(x_d-x'_d)}{T'_{d0}p+1}\varepsilon^{-j\varphi}pI(p+j)+\mathrm{Conj} \tag{3}$$

を得るから，これより $I_{fd}(p+j)$ および $I_{fd}(p-j)$ を作つて第2式に代入すれば，I_{fd} の項は消失し次式が導かれる。

$$I(p)\left[r+\frac{p}{3}\left\{x_o+A(p+j)+A(p-j)\right\}+\frac{x_c}{p}\right]$$

$$+\left\{\frac{1}{3}I(p+2j)p\varepsilon^{-j2\varphi}B(p+j)+\mathrm{Conj}\right\}=\frac{e(p\sin\varphi+\cos\varphi)}{p^2+1} \tag{4}$$

ただし

$$A(p)=\frac{1}{2}\left\{x_d(p)+x_q\right\}$$

$$B(p)=\frac{1}{2}\left\{x_d(p)-x_q\right\}$$

$$x_d(p)=\frac{T'_{d0}x'_dp+x_d}{T'_{d0}p+1}$$

いま次のような $K(p)$, $F(p)$ を定義する。

$$\left.\begin{aligned}
K(p)&=\frac{p\varepsilon^{-j2\varphi}B(p+j)}{3\left[r+\frac{p}{3}\left\{x_o+A(p+j)+A(p-j)\right\}+\frac{x_c}{p}\right]}\\
K^*(p)&=K(p)\text{ の共軛値}\\
F(p)&=\frac{e}{r+\frac{p}{3}\left\{x_o+A(p+j)+A(p-j)\right\}+\frac{x_c}{p}}\cdot\frac{p\sin\varphi+\cos\varphi}{p^2+1}
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

このときは(4)式は次式のごとくなる。

$$I(p)+K(p)I(p+2j)+K^*(p)I(p-2j)=F(p) \tag{6}$$

この $I(p)$ に関する循環方程式を代数的に解析するのであるが，本式は直列コンデンサ系統の線間短絡におけるときと同一形であり，同じ方法で以下の運算を行うことができる訳である。

III. Laplace 変換式の一般解と特異点

すなわち，p に関する恒等式(6)式において p に $p+j2n$ ($n=-\infty\sim+\infty$ なる整数全部) を置換すれば，無限次のマトリクス方程式を形成しその代数解は次式で与えられる。

$$I(p)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(p)F(p+j2n) \tag{7}$$

または

$$I(p)=A_0(p)F(p)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(p)F(p+j2n)+\mathrm{Conj} \tag{8}$$

と記してもよい。$A_n(p)$ については一般解(7)式を(6)式に代入して，$n=-\infty\sim+\infty$ の整数全部に対し未定係数法を適用することによつて求まる。この過程は既発表論文[2),3)]の説明と全く軌を一つにするからここに繰り返さない。

かくして必要な演算子式 $Y_a(p)$, $Y_a^*(p)$, $A_n(p)$, $A_{-n}(p)$, および $A_0(p)$ が得られた。

$$\left.\begin{aligned} Y_a(p)&=1-\frac{K^*(p)K(p-j2)}{Y_a(p-j2)}\\ Y_a^*(p)&=Y_a(p)\text{ の共軛値}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} A_n(p)&=(-1)^n A_0(p+j2n)\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K(p+j2\nu)}{Y_a(p+j2\nu)}\cdots\cdots(n>0)\\ A_{-n}(p)&=A_n^*(p)=A_n(p)\text{ の共軛値}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n<0)\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} A_0(p)&=\frac{1}{Y_a(p)+Y_a^*(p)-1}\\ A_0^*(p)&=A_0(p)\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

さて一般解が計算されれば，その Laplace 逆変換によつて実電流 $i(t)$ は

$$\left.\begin{aligned} i&=\mathfrak{L}^{-1}I(p)=\sum C_k\varepsilon^{p_k t}\\ C_k&=\{(p-p_k)I(p)\}_{p=p_k}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となる。C_k は $I(p)$ の特異点 p_k における留数値である。では次にこの特異点 p_k を考察するに一相中性点間の短絡故障においては特異点は次の3種類に分けられる。

a) 定常電流項に対応する特異点 p_k

印加電圧 $F(p)$ は(5)式の第3式であり，その分母項の1つは p^2+1 である。したがつて一般解(7)または(8)式の $F(p\pm j2n)$ は $p_k=\mp j(2n+1)$ (ただし $n=0\sim\infty$) の特異点を有する。すなわち定常電流は無限次の奇数調波から成り立つている。このときの近似として，同期機の電機子および回転子の全回路抵抗を省略する。

b) 界磁回路にもとづく過渡電流項に対する特異点 p_k

界磁回路の抵抗によつて a) の定常電流に減衰移行する過渡電流項である。

$$p_k = -a \mp j(2n+1) \qquad (n=0\sim\infty)$$

周波数は a) と同じく無限奇数高調波であるが，a なる減衰率を有する。このときの近似は電機子回路の抵抗を無視する。

c) 電機子回路にもとづく過渡電流項に対応する特異点 p_k

$F(p)$ および $K(p)$ の分母項による特異点である。このときの近似として界磁回路の抵抗を無視すれば，該分母項を零とおいて

$$r+\frac{p}{3}(x_o+2A'')+\frac{x_o}{p}=0$$

ただし

$$A''=\frac{1}{2}(x_d'+x_q)$$

より，印加電圧 $F(p\pm j2n)$ にもとづく特異点は次のように決定される。

$$p_k \doteqdot -\frac{3r}{2(x_o+2A'')} \mp j\left[2n\pm\sqrt{\frac{3x_c}{x_o+2A''}}\right] \qquad (n=0\sim\infty)$$

高調波周波数に関しては線間短絡の場合では $2n\pm\sqrt{\frac{x_c}{A''}}$ であつたが，一相中性点間短絡の場合は $2n\pm\sqrt{\frac{3x_c}{x_o+2A''}}$ となるのである。しかるに対称同期機と直列コンデンサの組み合せによる一線地絡故障においては，電機子回路にもとづく過渡電流の周波数には $\sqrt{\frac{3x_c}{x_o+2A''}}$ がただ1個だけ出現するのであり，このことは筆者が別に n 相多相機について発表した論文において，$n=3$ とおいて直ちに誘導され証明される[4]。かつ，減衰率が $\frac{3r}{2(x_0+2A'')}$ となることについても同様である。

IV. 定常電流の算定

定常電流の特異点 $p_k=-j(2n+1)$ は，印加電圧 $F(p+j2n)$ と $F(p+j\overline{2n+2})$ とによつて作られ，その留数は

$$C_k=[p+j(2n+1)][A_n(p)F(p+j2n)+A_{n+1}(p)F(p+j\overline{2n+2})]_{p=-j(2n+1)} \tag{13}$$

にて与えられる。いま1つの特異点 $p_k=+j(2n+1)$ については，単に上記の留数の共軛値をとればよい。便宜上，次章の界磁回路にもとづく過渡項を算定するに必要な数式をも，一括してここに求めておく。

$$\left.\begin{aligned} K(p)_{p\doteqdot j} &= \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B''}{x_o+A''+A(p-j)-3x_c} \\ K(p)_{p\doteqdot -j} &= \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B(p+j)}{x_o+A(p+j)+A''-3x_c} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} K(p)_{p=j} &= \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B''}{x_o+A''+A-3x_c} \\ K(p)_{p=-j} &= \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B}{x_o+A+A''-3x_c} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

ただし

$$A'' = \frac{1}{2}(x_d'+x_q)$$

$$B'' = \frac{1}{2}(x_d'-x_q)$$

また $|p|\geq 2j$ (すなわち $p\geq 2j$ および $p\leq -2j$) に対しては

$$K(p) = \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B''}{x_o+2A''+\dfrac{3x_c}{p^2}}$$

であるが，不定補償系統における仮定

$$\frac{x_c}{A''} < \frac{2}{3} + \frac{x_o}{3A''}$$

より，$|p^2|\geq 4$ においては近似的に

$$K(p)_{|p|\geq 2j} \doteqdot \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B''}{x_o+2A''} = -\frac{\varepsilon^{-j2\varphi}}{2}\cdot\frac{x_q-x_d'}{x_o+x_d'+x_q} \tag{16}$$

が成立する。また以上の共軛値については直ちに

$$\left.\begin{aligned} K^*(p)_{p\doteqdot j} &= [K(p)_{p\doteqdot -j}]^* = \frac{\varepsilon^{j2\varphi}B(p-j)}{x_o+A(p-j)+A''-3x_c} \\ K^*(p)_{p\doteqdot -j} &= [K(p)_{p\doteqdot j}]^* = \frac{\varepsilon^{j2\varphi}B''}{x_o+A'+A(p+j)-3x_c} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$K^*(p)_{|p|\geq 2j} = [K(p)_{|p|\geq 2j}]^* = -\frac{\varepsilon^{j2\varphi}}{2}\cdot\frac{x_q-x_d'}{x_o+x_d'+x_q} \tag{18}$$

同様にして

$$K(p-j2)_{p\doteqdot j} = [K^*(p+j2)_{p\doteqdot -j}]^* = \frac{\varepsilon^{-j2\varphi}B(p-j)}{x_o+A(p-j)+A''-3x_c} \tag{19}$$

$$K^*(p-j2)_{p\doteqdot j} = [K(p+j2)_{p\doteqdot -j}]^* = \frac{\varepsilon^{j2\varphi}B''}{x_o+A(p-j)+A''-3x_c} \tag{20}$$

が得られる。

また $Y_a(p)$ については (9), (16), (18) 式等より

$$Y_a(p)_{p\leq -2j} = 1 - \frac{K^*(p)K(p)}{Y_a(p)}\Bigg|_{p\leq -2j}$$

であるから，これに (16), (18) 両式を代入して解けば

$$\left.\begin{aligned} Y_a(p)_{p\leq -2j} &= \frac{\left\{\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_d'}+\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_q}\right\}^2}{2(x_o+x_d'+x_q)} \\ Y_a^*(p)_{p\geq 2j} &= [Y_a(p)_{p\leq -2j}]^* = \text{上と同一値} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

なお上記の $K(p)_{|p|\geq 2j}$, $K^*(p)_{|p|\geq 2j}$, $Y_a(p)_{p\leq -2j}$, $Y_a^*(p)_{p\geq 2j}$ の結果より直ちに次式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{K(p)}{Y_a(p)}_{p\leq -2j} &= -\varepsilon^{-j2\varphi}b_0 \\ \frac{K^*(p)}{Y_a^*(p)}_{p\geq 2j} &= -\varepsilon^{j2\varphi}b_0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ただし

$$b_0 = \frac{\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_q}-\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_d'}}{\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_q}+\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_d'}} \tag{23}$$

なお

$$B''b_0 = -\frac{1}{2}x_o - A'' + \sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)} \tag{24}$$

も得らるのである。

以上までの結果を用いれば，(9)式の $Y_a(p)$ は $p\fallingdotseq\pm j$, $p=\pm j$ において，それぞれ次のごとくなる。

$$\begin{aligned} Y_a(p)_{p\fallingdotseq j} &= 1-\frac{K^*(p)K(p-j2)}{1-K^*(p-j2)\frac{K(p-j4)}{Y_a(p-j4)}}_{p\fallingdotseq j} \\ &= 1-\frac{[B(p-j)]^2}{x_o+A(p-j)+A''-3x_c}\cdot\frac{1}{\frac{x_o}{2}+A(p-j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} Y_a(p)_{p\fallingdotseq -j} &= 1-K^*(p)\frac{K(p-j2)}{Y_a(p-j2)}_{p\fallingdotseq -j} \\ &= \frac{\frac{x_o}{2}+A(p+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}{x_o+A''+A(p+j)-3x_c} \end{aligned} \tag{26}$$

$$Y_a^*(p)_{p\fallingdotseq j} = [Y_a(p)_{p\fallingdotseq -j}]^*$$

$$Y_a^*(p)_{p\fallingdotseq -j} = [Y_a(p)_{p\fallingdotseq j}]^*$$

$p=j$, $p=-j$ のときは，それぞれ $A(0)=A$, $B(0)=B$ を上式に代置すればよい。

これらより $A_0(p)$ は次のように計算される。

$$\left.\begin{aligned} A_0(p)_{p\doteqdot j} &= \frac{\left[x_o+A''+A(p-j)-3x_c\right]\left[\frac{x_o}{2}+A(p-j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}{\left[\frac{x_o}{2}+A(p-j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-\left[B(p-j)\right]^2} \\ A_0(p)_{p\doteqdot -j} &= [A(p)_{p\doteqdot j}]^* \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$A_0(p)_{p=j} = A_0(p)_{p=-j} = \frac{\left[x_o+A''+A-3x_c\right]\left[\frac{x_o}{2}+A+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}{\left[\frac{x_o}{2}+A+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-B^2} \tag{28}$$

以上の結果より特異点 $p_k=-j(2n+1)$ における留数(13)式を計算することができる。すなわち同式の $A_n(p)_{p=-j(2n+1)}$, $A_{n+1}(p)_{p=-j(2n+1)}$ は下のごとくなる。(10)式へ(22)式と(28)式の関係を代入して

$$\begin{aligned} A_n(p)_{p=-j(2n+1)} &= (-1)^n A_0(-j)\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K[j(2\nu-\overline{2n+1})]}{Y_a[j(2\nu-\overline{2n+1})]} \\ &= \varepsilon^{-j2n\varphi}\, b_0^n \frac{\left[x_o+A''+A-3x_c\right]\left[\frac{x_o}{2}+A+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}{\left[\frac{x_o}{2}+A+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-B^2} \end{aligned} \tag{29}$$

また(10)式を変形して $A_{n+1}(p)$ を作り，これにさらに(15)式(26)式の関係を代入して

$$\begin{aligned} A_{n+1}(p)_{p=-j(2n+1)} &= (-1)^{n+1} A_0(j)\left[-\varepsilon^{-j2\varphi}\, b_0\right]^n \frac{K(-j)}{Y_a(-j)} \\ &= -\varepsilon^{-j(2n+2)\varphi}\, b_0^n \frac{B[x_o+A''+A-3x_c]}{\left[\frac{x_o}{2}+A+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-B^2} \end{aligned} \tag{30}$$

留数(13)式の他の部分については，(5)式の $F(p)$ を変形することによつて次のように計算される。

$$\left.\begin{aligned} &\left\{[p+j(2n+1)]\,F(p+j2n)\right\}_{p=-j(2n+1)} = -\frac{\varepsilon^{-j\varphi}}{2}\cdot\frac{3e}{x_o+A+A''-3x_c} \\ &\left\{[p+j(2n+1)]\,F(p+j\overline{2n+2})\right\}_{p=-j(2n+1)} = \text{上の共軛値} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ゆえに留数 C_k は(29), (30)および(31)各式から次のように求まるのである。

$$\begin{aligned} C_k &= \left[p+j(2n+1)\right]\left[A_n(p)F(p+j2n)+A_{n+1}(p)F(p+j\overline{2n+2})\right]_{p=-j(2n+1)} \\ &= \frac{-3e\, b_0^n\, \varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}}{2\left[\frac{x_o}{2}+A+B+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]} \end{aligned} \tag{32}$$

これは特異点 $p_k=-j(2n+1)$ における留数であるが，他の特異点 $p_k=+j(2n+1)$ (ただし $n=0\sim\infty$) は上式の共軛値 C_k^* である。

したがつて定常電流 $i_s(t)$ は Laplace 逆変換によつて

$$i_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_k\varepsilon^{p_k t}+\mathrm{Conj}\right\}$$

$$=\frac{-3e}{\dfrac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\sum_{n=0}^{\infty}b_0^n\cos(2n+1)\theta \tag{33}$$

である。基本周波数に対するリアクタンスは

$$\left[x_o-x_c\right]+\left[x_d-x_c\right]+\left[\left\{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-\frac{x_o}{2}\right\}-x_c\right]$$

であるから，同期機の正，逆，零相リアクタンスよりコンデンサ・リアクタンスを差引いたものが，それぞれ系統の正，逆，零相リアクタンスになつている。

V. 界磁回路にもづく過渡電流

特異点は $p_k=-a-j(2n+1)$ (ただし $n=0\sim\infty$) およびその共軛値である。a は減衰率である。特異点 $p_k=-a-j(2n+1)$ における留数を C_k' とすれば

$$C_k'=\left[p+a+j(2n+1)\right]\left[A_n(p)F(p+j2n)+A_{n+1}(p)F(p+j\overline{2n+2})\right]_{p\doteqdot -j(2n+1)} \tag{34}$$

であり，以下 $p+j2n=p'$ とおく。

まず (22), (27) 両式の関係より

$$A_n(p)_{p\doteqdot -j(2n+1)}=(-1)^n A_0(p')\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{K[p'+j2\nu-2n]}{Y_a[p'+j2\nu-2n]}\quad{}_{p'\doteqdot -j}$$

$$=\varepsilon^{-j2n\varphi}b_0^n\frac{\left[x_o+A''+A(p'+j)-3x_c\right]\left[\dfrac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}{\left[\dfrac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-\left[B(p'+j)\right]^2}$$

次に

$$A_{n+1}(p)_{p\doteqdot -j(2n+1)}=(-1)^{n+1}A_0(p+j\overline{2n+2})\prod_{\nu=0}^{n}\frac{K[p+j2\nu]}{Y_a[p+j2\nu]}\quad{}_{p\doteqdot -j(2n+1)}$$

$$=-\varepsilon^{-j2n\varphi}b_0^n A_0(p'+j2)\frac{K(p')}{Y_a(p')}\quad{}_{p'\doteqdot -j}$$

であるが，ここでまず $Y_a(p'+j2)_{p'\doteqdot -j}$ を求めよう。すなわち (14), (17), (19), (22) および (24) 各式を用いれば

$$Y_a(p'+j2)_{p'\doteqdot -j}=1-\frac{K^*(p'+j2)K(p')}{1-K^*(p')\dfrac{K(p'-j2)}{Y_a(p'-j2)}}\quad{}_{p'\doteqdot -j}$$

$$=1-\frac{[B(p'+j)]^2}{\left[x_o+A(p'+j)+A''-3x_c\right]\left[\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}$$

同様に(20), (22)および(24)各式を用いれば

$$Y_a^*(p'+j2)_{p'\doteqdot -j}=1-K(p'+j2)\frac{K^*(p'+j4)}{Y_a^*(p'+j4)}\Bigg|_{p'\doteqdot -j}$$

$$=\frac{\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}{x_o+A(p'+j)+A''-3x_c}$$

が得られるから，これら2式を用いて $A_0(p'+j2)_{p'\doteqdot -j}$ を計算すると

$$A_0(p'+j2)_{p'\doteqdot -j}=\frac{1}{Y_a(p'+j2)+Y_a^*(p'+j2)-1}\Bigg|_{p'\doteqdot -j}$$

$$=\frac{\left[x_o+A(p'+j)+A''-3x_c\right]\left[\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}{\left[\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-\left[B(p'+j)\right]^2}$$

前にもどり $A_{n+1}(p)_{p\doteqdot -j(2n+1)}$ は上記の関係より次のように完成される。

$$A_{n+1}(p)_{p\doteqdot -j(2n+1)}$$

$$=-\varepsilon^{-j(2n+2)\varphi}b_0^n\frac{B(p'+j)[x_o+A(p'+j)+A''-3x_c]}{\left[\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]^2-\left[B(p'+j)\right]^2}$$

次に留数 C_k' の印加電圧項に関しては(5)式より

$$F(p+j2n)_{p\doteqdot -j(2n+1)}=F(p')_{p'\doteqdot -j}=\frac{-3e}{x_o+A(p'+j)+A''-3x_c}\cdot\frac{\varepsilon^{-j\varphi}}{2(p'+j)}$$

$$F(p'+j\overline{2n+2})_{p\doteqdot -j(2n+1)}=F(p'+j2)_{p'\doteqdot -j}=\frac{-3e}{x_o+A''+A(p'+j)-3x_c}\cdot\frac{\varepsilon^{j\varphi}}{2(p'+j)}$$

のように求まる。かくして(34)式の留数 C_k' に以上の数式を代入する。直列コンデンサ線間短絡の解析と同一過程をふみ，まず C_k' と $p+a+j(2n+1)$ の商を求めると次のようになる。

$$\frac{C_k'}{p+a+j(2n+1)}\Bigg|_{p\doteqdot -j(2n+1)}=\left[A_n(p)F(p+j2n)+A_{n+1}(p)F(p+j\overline{2n+2})\right]_{p\doteqdot -j(2n+1)}$$

$$=\frac{-3eb_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}}{\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+B(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\cdot\frac{1}{2(p'+j)}\Bigg|_{p'\doteqdot -j}\qquad(35)$$

ゆえに界磁回路にもとづく $I(p)$ は，上式の分母に出現している $\phi(p')$ より決定される特異点 p' を有する筈である。ただし

$$\phi(p')=\frac{x_o}{2}+A(p'+j)+B(p'+j)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c$$

$$= \frac{x_o}{2} + x_d(p'+j) + \sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)} - 3x_c$$

$$= \frac{x_o}{2} + \frac{(p'+j)T_{d0}'x_d' + x_d}{(p'+j)T_{d0}'+1} + \sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)} - 3x_c$$

$\phi(p')$ は p' に関する1次関数であつて，その分子項が特異点を決定する。上式を書きかえると

$$\phi(p') = \frac{\left[\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]T_{d0}'}{(p'+j)T_{d0}'+1}(a+p'+j)$$

ただし

$$a = \frac{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\cdot\frac{1}{T_{d0}'} \tag{36}$$

となるから，$I(p)$ は $p'=-a-j$ すなわち $p=-a-j(2n+1)$ なる特異点を持つことが明らかであり，その実電流解は $\varepsilon^{-\alpha t}$ のごとく1にくらべ小量なる実数 α を減衰率とする指数関数項を含んでくることがわかる。そして一線地絡における過渡時定数は

$$T_{d(1u)}' = \frac{1}{a} = T_{d0}'\frac{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c} \tag{37}$$

となる。

求めようとする留数 C_k' は(35)式の結果に以上の関係を代入して

$$C_k' = -3eb_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}\frac{a+p'+j}{\phi(p')}\cdot\frac{1}{2(p'+j)}\Bigg|_{p'=-\alpha-j}$$

$$= \left[\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c} - \frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right]\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}}{2} \tag{38}$$

のごとくなり，界磁回路にもとづく実電流 $i'(t)$ は次式のように完成される。

$$i'(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_k'\varepsilon^{-\alpha t}\varepsilon^{-j(2n+1)t} + \mathrm{Conj}\right\}$$

$$= \left[\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c} - \frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right]\varepsilon^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{\infty}b_0^n\cos(2n+1)\theta \tag{39}$$

短絡瞬時は，回路突流は過渡正相リアクタンスを含むインピーダンス項によつて制限され，時間の経過とともに減衰率 a によつて (33) 式の定常値に移行するのである。

VI. 電機子回路にもとづく過渡電流

III 章において述べたごとく特異点は

$$p_k = -a' - j(2n \pm \kappa) \text{ およびその共軛値}$$

ただし
$$\kappa \doteqdot \sqrt{\frac{3x_c}{x_o+2A''}} < 1$$

である。しかし，より妥当な κ および a' の値は後述の計算より明らかとなる。いま，この 2 種類 $(2n+\kappa$ と $2n-\kappa)$ の周波数を分離して，それぞれ

$$\begin{cases} p_{k1} = -a' - j(2n+\kappa) & \text{およびその共軛値} \\ p_{k2} = -a' - j(2n-\kappa) & \text{およびその共軛値} \end{cases}$$

としよう。ここで $n=0\sim\infty$ に変化させる訳であるが，$n=0$ の項に限り同一の値が 2 回重複するので，重複しないようとくに注意を要する。

まず p_{k1} の方から求める。その留数を C''_{k1} とすると

$$C''_{k1} = [p+a'+j(2n+\kappa)]\,[A_n(p)F(p+j2n)]_{p \doteqdot -j(2n+\kappa)} \tag{40}$$

$p+j2n=p'$ とおけば (10) 式より

$$[A_n(p)F(p+j2n)]_{p \doteqdot -j(2n+\kappa)} = (-1)^n A_0(p') \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{K[p'+j\overline{2\nu-2n}]}{Y_a[p'+j\overline{2\nu-2n}]} F(p')_{p' \doteqdot -j\kappa} \tag{41}$$

を得る。(22) 式より Π を計算すると

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{K[p'+j\overline{2\nu-2n}]}{Y_a[p'+j\overline{2\nu-2n}]}\ {}_{p' \doteqdot -j\kappa} = (-1)^n \varepsilon^{-j2n\varphi} b_0^n$$

次に $Y_a(p')_{p' \doteqdot -j\kappa}$ を求めると

$$Y_a(p') = 1 - K^*(p') \frac{K(p'-j2)}{Y_a(p'-j2)} = 1 + K^*(p')\varepsilon^{-j2\varphi} b_0$$

となるが，ここで (5) 式より

$$K^*(p') = \frac{p'\varepsilon^{j2\varphi}B''}{3\left[r + \frac{p'}{3}(x_o+2A'') + \frac{x_c}{p'}\right]}$$

であり，また $B''b_0$ は (24) 式で与えられるからこれらの関係より

$$Y_a(p') = \frac{r + \frac{p'}{3}\left[\frac{x_o}{2} + A'' + \sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}\right] + \frac{x_c}{p'}}{r + \frac{p'}{3}(x_o+2A'') + \frac{x_c}{p'}} \tag{42}$$

また $Y_a^*(p')_{p'\doteqdot -j\kappa}$ について計算すると

$$Y_a^*(p')=1-\frac{K(p')\,K^*(p'+j2)}{1+K(p'+j2)\varepsilon^{j2\varphi}b_0}$$

となるがこれにそれぞれ $p'\doteqdot -j\kappa$ における $K(p')$, $K(p'+j2)$, $K^*(p'+j2)$ を(5)式から作成して（このとき，電機子回路の抵抗 r のみ考慮し界磁抵抗を無視することに留意する）代入するときは

$$Y_a^*(p')=1-\frac{p'B''}{3\left[r+\frac{p'}{3}(x_o+2A'')+\frac{x_c}{p'}\right]}\xi_0(p') \tag{43}$$

ただし

$$\xi_0(p')=\frac{B''}{\frac{x_o}{2}+A''+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}+\frac{3x_c}{(p'+j2)^2}}$$

なる結果が導かれる。そして高調波 $2-\kappa$ において，系統の直列リアクタンスが直列コンデンサ・リアクタンスに比し十分大であり

$$(2-\kappa)\left[\frac{x_o}{2}+A''+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}\right]$$
$$\doteqdot(2-\kappa)(x_o+2A'')\gg\frac{3x_c}{2-\kappa}$$

が満足されるならば $\xi_0(p')$ の分母第2項は省略され $\xi_0(p')=-b_0$ となる。この条件は $1\gg\kappa^2$ に一致するから，近似成立の妥当いかんは結局(1)式の仮定にかかつている。

さて $\xi_0(p')=-b_0$ とするときは(43)式は(42)式と相等しくなり，$Y_a^*(p')=Y_a(p')$ が成立する。したがつて $p'\doteqdot -j\kappa$ における $A_0(p')$ は

$$A_0(p')=\frac{1}{Y_a(p')+Y_a^*(p')-1}$$
$$=\frac{r+\frac{p'}{3}(x_o+2A'')+\frac{x_c}{p'}}{r+\frac{2}{3}p'\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}+\frac{x_c}{p'}}$$

である。また印加電圧項である $F(p')$ は(5)式より直ちに

$$F(p')=\frac{e}{r+\frac{p'}{3}(x_o+2A'')+\frac{x_c}{p'}}\cdot\frac{p'\sin\varphi+\cos\varphi}{p'^2+1}$$

この諸関係を(41)式へ代入するときは

$$[A_n(p)F(p+j2n)]_{p\doteqdot -j(2n+\kappa)}$$
$$=\frac{3e\varepsilon^{-j2n\varphi}b_0^n}{2}\cdot\frac{p'\sin\varphi+\cos\varphi}{p'^2+1}\cdot\frac{p'}{p'^2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}+\frac{3}{2}rp'+\frac{3}{2}x_c}$$

となり，電機子回路にもとづく $I(p)$ は最右項分母により決定される特異点を有する。ゆえに該項を零とする方程式

$$p'^2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}+\frac{3}{2}rp'+\frac{3}{2}x_c=0$$

を解いて得られる共軛2根の1つは

$$p'=p+j2n\doteqdot-\frac{3r}{4\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}}-j\sqrt{\frac{3x_c}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}}}$$
$$=-\alpha'-j\kappa$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\frac{3r}{4\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}}\\ \kappa&=\sqrt{\frac{3x_c}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}}}\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

であり，$I(p)$ は $p=-\alpha'-j(2n+\kappa)$ の特異点を有するのである。α' はそのときの減衰率である。他の分母項 $(p'+j)(p'-j)$ より決定される特異点については，定常電流に対するものであつて前に検討ずみである。

さて(40)式にもどつて，$p_{k1}=-\alpha'-j(2n+\kappa)$ における留数 C_{k1}'' を算出すれば，以上の関係式より

$$C_{k1}''=\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\cdot\frac{b_0^n\varepsilon^{-j2n\varphi}(-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2}\tag{45}$$

が得られ，電機子にもとづく回路突流 $i_{a1}(t)$ は次のごとくなる。

$$i_{a1}(t)=[C_{k1}''\varepsilon^{p_{k1}t}]_{n=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\{C_{k1}''\varepsilon^{p_{k1}t}+\mathrm{Conj}\}$$
$$=\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\varepsilon^{-\alpha't}\sum_{n=1}^{\infty}b_0^n\{-\kappa\sin\varphi\sin(2n\theta+\kappa t)+\cos\varphi\cos(2n\theta+\kappa t)\}$$
$$+\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\cdot\frac{-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi}{2}\varepsilon^{-\alpha't}\varepsilon^{-j\kappa t}\tag{46}$$

次に他の特異点 $p_{k2}=-\alpha'-j(2n-\kappa)$ についても，同一仮定下においては上と全く同様に解析され，単に κ が $-\kappa$ と置換されるにすぎない。すなわち(46)式において κ を $-\kappa$ とすればよろしく，その過渡電流 $i_{a2}(t)$ は

$$i_{a2}(t)=\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\varepsilon^{-\alpha' t}\sum_{n=1}^{\infty}b_0^n\{\kappa\sin\varphi\sin(2n\theta-\kappa t)+\cos\varphi\cos(2n\theta-\kappa t)\}$$
$$+\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\cdot\frac{j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi}{2}\varepsilon^{-\alpha' t}\varepsilon^{j\kappa t} \tag{47}$$

電機子回路にもとづく過渡電流は $i_{a1}(t)$ と $i_{a2}(t)$ の和によつて与えられる。

$$i_a(t)=i_{a1}(t)+i_{a2}(t)$$
$$=\frac{3e}{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-\frac{3}{2}x_c}\varepsilon^{-\alpha' t}\{\cos\varphi\cos\kappa t-\kappa\sin\varphi\sin\kappa t\}$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_0^n\cos 2n\theta\right\} \tag{48}$$

電流は，$\left[\left\{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-\frac{x_o}{2}\right\}-x_c\right]+\frac{1}{2}\left[x_o-x_c\right]$ のごとく系統の逆相リアクタンスに系統の零相リアクタンスの $\frac{1}{2}$ を加えた値によつて制限されることは，無コンデンサ系統における一線地絡と同様であるが，周波数は $2n\pm\kappa$ のごとくコンデンサ系統の固有周波数 κ を含む無限高調波を発生する点が特徴である。また対称同期機の場合では，上式の $\sum$ 項である高調波は消失して $\kappa=\sqrt{\frac{3x_c}{x_o+2x''}}$ なる周波数のみが発生し，過渡突流を制限するインピーダンスは $\frac{x_o}{2}+x''-\frac{3}{2}x_c$ のごとくなるのであり，この理論については別に発表した。[4]

VII. 突流の結果

かくして定常電流，界磁回路にもとづく過渡電流，および電機子回路にもとづく過渡電流の3者の和が一線地絡時の突発短絡電流を与える。

$$i(t)=i_s(t)+i'(t)+i_{a1}(t)+i_{a2}(t)$$
$$=-\left\{\left[\frac{3e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{3e}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right]\varepsilon^{-\frac{t}{T_{d'(1n)}}}$$
$$\left.+\frac{3e}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}b_0^n\cos(2n+1)\theta$$

$$+\frac{3e}{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-\frac{3}{2}x_c}\varepsilon^{-\alpha' t}\{\cos\varphi\cos\kappa t-\kappa\sin\varphi\sin\kappa t\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_0^n\cos 2n\theta\right\} \tag{49}$$

直列コンデンサが無い場合は上式で $x_c=0$, $\kappa=0$ を代入すればよいが，電機子減衰率 α' は真値の半分となる点に留意せねばならない。また対称機系統では上式で $x_d'=x_q=x''$ とし，さらに全高調波を省いて $\sum_0^{\infty}b_0^n\cos(2n+1)\theta=\cos\theta$, $\sum_1^{\infty}b_0^n\cos 2n\theta=0$ とおけばよろしい。

以上は同期機の回転子が，アモルト捲線を持つていないときの解析である。アモルト捲線のある場合には (49) 式において $\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}$ を $\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}$ と置換し，界磁回路にもとづく突流をリアクタンス $x_o+x_d''+x_2-3x_c\to x_o+x_d'+x_2-3x_c\to x_o+x_d+x_2-3x_c$ (ただし x_2 は同期機の逆相リアクタンス) の 3 段階にわたつて，それぞれ $T_{d(\ln)}''$, $T_{d(\ln)}'$ なる減衰時定数によつて減衰せしめるなど，線間短絡におけると同様の修正を加えればよいのである。すなわちアモルト捲線を有する場合の，減衰率を省略した数式は次のごとく表わされる。

$$i(t)=-\frac{3e}{\frac{x_o}{2}+x_d''+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-3x_c}\sum_{n=0}^{\infty}b_0^n\cos(2n+1)\theta$$

$$+\frac{3e}{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-\frac{3}{2}x_c}\left\{\cos\varphi\cos\kappa t-\kappa\sin\varphi\sin\kappa t\right\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_0^n\cos 2n\theta\right\} \tag{50}$$

ただし

$$b_0=\frac{\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_q''}-\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_d''}}{\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_q''}+\sqrt{\frac{x_o}{2}+x_d''}}$$

突流の尖頭値を求めるには，たとえばアモルト捲線を有する場合では (50) 式にて $\theta=\pi$ において最大値となる。

$$(i_s+i')_{\max}=\frac{3e}{\frac{x_o}{2}+x_d''+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-3x_c}\cdot\frac{1}{1-b_0}$$

$$(i_{a1}+i_{a2})_{\max}=\frac{3e}{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-\frac{3}{2}x_c}\sqrt{\cos^2\varphi+\kappa^2\sin^2\varphi}$$

$$\times\cos\left\{\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi]\right\}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{b_0}{1-b_0}\right]$$

第2式中における $\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi]$ は

$$\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi]=\varphi-\left[\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right]\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\left[\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right]^2\sin 4\varphi-\frac{1}{3}\left[\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right]^3\sin 6\varphi+\cdots\cdots$$

のごとく展開されるから，第2式が $\kappa(<1)$ のいかんを問わず最大値になる条件は $t=0$, $\varphi=\pi$ (最大磁束鎖交) である。ゆえに

$$(i_{a1}+i_{a2})_{\max}=-\frac{3e}{\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-\frac{3}{2}x_c}\left[\frac{1}{2}+\frac{b_0}{1-b_0}\right]$$

$t=0$ においては初期条件より電流総和は零となるが，(i_s+i') および $(i_{a1}+i_{a2})$ はそれぞれ最大の振幅値を有する。すなわち両者の振幅値は同大，異符号となる。ただしこのことは現在の場合，近似的に成立することである。(対称機系統では厳密に成立する。) ゆえに $t=0$ 以外の随時に発生し得る最大振幅値は各値の絶対値の和，換言すれば近似的に $2(i_s+i')_{\max}$ となるとしてよく，直列コンデンサ系統における一相中性点間短絡時の突流最大値と定常短絡電流最大値との比は近似的に

$$\frac{\text{最大尖頭値}}{\text{定常振幅値}}=\frac{2\left[\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-3x_c\right]}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-3x_c}\tag{51}$$

にて与えられるのである。

VIII. コンデンサ端子間の過渡電圧

前章において求出した一線地絡時の線路突流 $i(t)$ を用いて，コンデンサに加わる過渡電圧 $e_c=\int x_c i(t)dt$ を計算することができる。電圧の最大値を求める意味で，$i(t)$ の減衰率をすべて零とおくときは(49)式より次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
(i_s+i')&=-\frac{3e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\sum_0^\infty b_0^n\cos(2n+1)\theta\\
(i_{a1}+i_{a2})&=\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\sqrt{\cos^2\varphi+\kappa^2\sin^2\varphi}\\
&\quad\times\left[\cos(\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])+\sum_1^\infty b_0^n\left\{\cos(2n\theta+\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\cos(2n\theta-\kappa t-\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])\right\}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{52}$$

ただし，上式は t に関する積分が容易なように(49)式を変形してある。その積分値は直ちに次のごとくなる。

$$(e_s+e') = \int x_c(i_s+i')\,dt$$

$$= -\frac{3x_c e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\sum_0^\infty \frac{b_0^n}{2n+1}\sin(2n+1)\theta$$

$$(e_{a1}+e_{a2}) = \int x_c(i_{a1}+i_{a2})\,dt$$

$$= \frac{3x_c e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\sqrt{\cos^2\varphi+\kappa^2\sin^2\varphi}\times\left[\frac{1}{\kappa}\sin(\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])\right.$$

$$+\sum_1^\infty\left\{\frac{b_0^n}{2n+\kappa}\sin(2n\theta+\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b_0^n}{2n-\kappa}\sin(2n\theta-\kappa t-\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])\right\}\right]$$

上2式を最大値にする θ は $\theta=\frac{\pi}{2}$ であり，このときは

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{b_0^n}{2n+1}\sin(2n+1)\theta = \sum_0^\infty \frac{(-b_0)^n}{2n+1} = \frac{\tan^{-1}\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b_0^n}{2n+\kappa}\sin(2n\theta+\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi] = \sum_1^\infty \frac{(-b_0)^n}{2n+\kappa}\sin(\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b_0^n}{2n-\kappa}\sin(2n\theta-\kappa t-\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi]) = -\sum_1^\infty \frac{(-b_0)^n}{2n-\kappa}\sin(\kappa t+\tan^{-1}[\kappa\tan\varphi])$$

が成立する。したがつて $t=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$（したがつて $\theta=\frac{\pi}{2}$）において最大振幅を有するのであり，この値は近似的に次式によつて表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned}(e_s+e')_{\max} &= -\frac{3x_c e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\cdot\frac{\tan^{-1}\sqrt{b_0}}{\sqrt{b_0}}\\ (e_{a1}+e_{a2})_{\max} &= \frac{3x_c e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\left\{1-\kappa^2\sum_1^\infty\frac{(-b_0)^n}{2n^2}\right\}\end{aligned}\right\}\qquad(53)$$

ゆえに起り得る過電圧の最大値は(53)式における2式の絶対値の和，すなわち近似的に $2(e_s+e')_{\max}$ である。かつ短絡瞬時 $(t=0)$ において，直列コンデンサは無電荷であると仮定してあるから $(e_s+e')_{\max}+(e_{a1}+e_{a2})_{\max}=0$ となるはずであるが，上式については厳密には成立せず近似的にいえるのである。(対称機系統では正しく成立する。)

さてコンデンサ過電圧の最大尖頭値を，直列コンデンサに永久短絡電流が流れるときの電圧最大値と比較すれば

$$\tau=\frac{\text{最大尖頭電圧}}{\text{定常振幅値}}=\frac{2\left[\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c\right]}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c} \tag{54}$$

また同期機がアモルト捲線を有する場合については

$$\tau'=\frac{\text{最大尖頭電圧}}{\text{定常振幅値}}=\frac{2\left[\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-3x_c\right]}{\frac{x_o}{2}+x_d''+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d''\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q''\right)}-3x_c} \tag{55}$$

なお，これらの式は直列コンデンサ系統の線間短絡における電圧高騰度の結果より類推すれば(49)式より直ちに導かれるものである。このように一相中性点間短絡においては，回路の零相リアクタンスによる影響が相加わつてくる。

IX. 界磁回路の異常突流

a 線が一線地絡を起す際に，直列コンデンサ系統の凸極機界磁回路に流れる過渡電流を算出する。すでに電機子回路突流 $i(t)=i_s(t)+i'(t)+i_{a1}(t)+i_{a2}(t)$ の導出にあたつては，一般電流解 $I(p)$ に $(p-p_k)$ を乗ずることによつて，それぞれの留数値 C_k, C_k', C_{k1}'', C_{k2}'' を誘導した。すなわち一般電流解 $I(p)$ を定常成分，界磁回路にもとづく過渡成分および電機子回路にもとづく過渡成分の3者に分け，おのおのに Laplace 変換を行つたのである。

したがつて，これらの実電流 $i(t)$ の結果より逆にその対応する電流成分 $I(p)$ を得るのであつて，たとえば(32)式と(38)式より定常電流および界磁にもとづく過渡成分に対しては

$$\begin{aligned}I'(p)=&\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\sum_0^\infty\left[\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}}{2(p+j\overline{2n+1})}+\mathrm{Conj}\right]\\&+\left[\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d'+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right.\\&\left.-\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\right]\sum_0^\infty\left[\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}}{2(p+a+j\overline{2n+1})}+\mathrm{Conj}\right]\\=&\sum_0^\infty\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d(p+j\overline{2n+1})+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\left\{\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}}{2(p+j\overline{2n+1})}+\mathrm{Conj}\right\}\end{aligned} \tag{56}$$

また電機子にもとづく過渡成分に対しては(45)式等より

$$I_a(p)=\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x_d'\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)}-3x_c}\left\{\sum_1^\infty\frac{b_0^n\varepsilon^{-j2n\varphi}(-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n+\kappa})}\right.$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\frac{b_0^n\varepsilon^{-j2n\varphi}(j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n-\kappa})}+\frac{-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi}{2(p+a'+j\kappa)}+\mathrm{Conj}\Big\} \tag{57}$$

である。ただし(56)式の $x_d(p+j\overline{2n+1})$ は演算子リアクタンス $x_d(p)$ において p に $p+j(2n+1)$ を置換したもの，また(57)式の Conj は括弧｛ ｝内にある3項全部の共軛式を表わす。

一線地絡故障における界磁電流はすでに(3)式より

$$x_{afd}I_{fd}(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{T'_{d0}(x_d-x'_d)p}{T'_{d0}p+1}\Big[\varepsilon^{-j\varphi}I(p+j)+\mathrm{Conj}\Big] \tag{58}$$

によつて表わされから(56), (57)両式の和 $I(p)=I'(p)+I_a(p)$ において，p を $p+j$ および $p-j$ と置換して $I(p+j)$ および $I(p-j)$ を作成し，それを上式に代入すれば界磁電流解 $x_{afd}I_{fd}(p)$ が誘導されるのである。この計算は若干複雑であるが，その要点を示せば次のごとくである。

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-j\varphi}I(p+j)=&\sum_{1}^{\infty}\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}-x_d(p+j2n)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\cdot\frac{b_0^{n-1}\varepsilon^{-j2n\varphi}}{2(p+j2n)}\\&+\sum_{0}^{\infty}\frac{-3e}{\frac{x_o}{2}+x_d(p-j2n)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\cdot\frac{b_0^{n}\varepsilon^{j2n\varphi}}{2(p-j2n)}\\&+\frac{3e}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\\&\times\Big\{\sum_{0}^{\infty}\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}(-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n+1+\kappa})}+\sum_{0}^{\infty}\frac{b_0^{n+1}\varepsilon^{j(2n+1)\varphi}(j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n+1+\kappa})}\\&+\sum_{0}^{\infty}\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}(j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n+1-\kappa})}+\sum_{0}^{\infty}\frac{b_0^{n+1}\varepsilon^{j(2n+1)\varphi}(-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'-j\overline{2n+1-\kappa})}\Big\}\end{aligned}$$

$\varepsilon^{j\varphi}I(p-j)=$ 上式の共軛値

$$\begin{aligned}x_{afd}I_{fd}(p)=&\frac{eT'_{d0}(x_d-x'_d)p}{T'_{d0}p+1}\Big[(1+b_0)\sum_{1}^{\infty}\frac{b_0^{n-1}}{\frac{x_o}{2}+x_d(p+j2n)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\\&\times\frac{\varepsilon^{-j2n\varphi}}{2(p+j2n)}+\mathrm{Conj}+\frac{1}{\frac{x_o}{2}+x_d(p)+\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\cdot\frac{1}{p}\\&-\frac{1+b_0}{2\sqrt{\left(\frac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\frac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\Big\{\sum_{0}^{\infty}\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}(-j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n+1+\kappa})}\\&+\mathrm{Conj}+\sum_{0}^{\infty}\frac{b_0^n\varepsilon^{-j(2n+1)\varphi}(j\kappa\sin\varphi+\cos\varphi)}{2(p+a'+j\overline{2n+1-\kappa})}+\mathrm{Conj}\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{59}$$

上式の各項の特異点は明らかに $p_k=-j2n$, $-a-j2n$, $-a$ および $-a'-j(2n+1+\kappa)$, $-a'-j(2n+1-\kappa)$ の5種であり，それぞれの項は定態界磁成分，界磁にもとづく過渡成分，直流分および電機子にもとづく過渡成分である。ただし a および a' はすでに算出せる界磁減

衰率および電機子減衰率である。特異点がわかれば上式各項の留数は $\{(p-p_k)I_{fd}(p)\}_{p=p_k}$ を個々に計算して求まるから，直ちにそれより Laplace 逆変換を施せる各実電流 $\mathfrak{L}^{-1}I_{fd}(p)=I_{fd}(t)$ を得るのであつて，その結果の和に直流定常電流 $I_{f0}=-e/x_{afd}$ を加えて界磁回路の突発電流が完成されることになる。この計算結果を示すと次式のごとくである。

$$
\begin{aligned}
I_{fd}(t) = {} & I_{f0}\frac{(1+b_0)(x_d-x'_d)}{\dfrac{x_o}{2}+x'_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\,g_0(t)\sum_1^{\infty}b_0^{n-1}\cos 2n\theta \\
& +I_{f0}+I_{f0}\frac{x_d-x'_d}{\dfrac{x_o}{2}+x'_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\,\varepsilon^{-\alpha t} \\
& -I_{f0}\frac{(1+b_0)(x_d-x'_d)}{\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-\dfrac{3}{2}x_c}}\,\varepsilon^{-\alpha' t}\left\{\cos\varphi\cos\kappa t-\kappa\sin\varphi\sin\kappa t\right\} \\
& \times\sum_0^{\infty}b_0^n\cos(2n+1)\theta
\end{aligned}
\tag{60}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
g_0(t) = {} & \frac{\dfrac{x_o}{2}+x'_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}{\dfrac{x_o}{2}+x_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}} \\
& +\left[1-\frac{\dfrac{x_o}{2}+x'_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}{\dfrac{x_o}{2}-x_d+\sqrt{\left(\dfrac{x_o}{2}+x'_d\right)\left(\dfrac{x_o}{2}+x_q\right)-3x_c}}\right]\varepsilon^{-\alpha t}
\end{aligned}
$$

界磁回路を流れる過渡電流は，線間短絡の場合と同様，直流分と 2, 4, 6, 8…… の偶数高調波および $1\pm\kappa$, $3\pm\kappa$, $5\pm\kappa$…… のごときコンデンサ系統特有の無限高調波より成立する。ただし κ は (44) 式で与えられるとおり零相リアクタンスによつて変化する値である。$I_{fd}(t)$ の最大尖頭値は $\theta=\pi$, $\varphi=\pi$, $t=0$ の条件より数式的に求められる。すなわち電機子捲線が最大磁束鎖交数を有する瞬時に短絡を起すときは，コンデンサ回路に特有の周波数 $2n+1\pm\kappa$ ($n=0\sim\infty$) の電流が最大になるからである。対称機系統，無コンデンサの場合についても直ちに上式より結果が求まる。

X. 結　　言

凸極同期発電機が直列コンデンサを有する線路に接続され，一般に行われているように機器リアクタンスを含めた系統全部に対する補償度が，$\dfrac{x_c}{x_l}<\dfrac{2}{3}+\dfrac{x_o}{3x_l}$ のごとき不足補償の場合の一相中性点間短絡故障理論を明らかにしたものである。以下，要約すれば次のとおりである。

(イ) 解析の方法は筆者がすでに発表した直列コンデンサ線間短絡故障における方法と相似しているが，仮定の1部および結果は相当に異なつている。したがつて線間短絡の結果より直ちに一相中性点故障の結論を引きだすことは困難である。

(ロ) 定常短絡電流については，対称座標法で考えるとおり $(x_1-x_c)+(x_2-x_c)+(x_o-x_c)$ なるインピーダンスによつて正相電流を制限する。ただし x_1, x_2, x_o は直列コンデンサが無いときの，その故障条件における系統の対称分リアクタンスである。

(ハ) 系統が無負荷の状態より a 線地絡を起す場合の線路突発短絡電流を計算した。この解析はアモルト捲線を有しないときのものであるが，アモルト捲線を有する場合も直ちに誘導できることを示した。

(ニ) その定常項は無限次の奇数高調波より成り立つている。またその過渡項は $2n\pm\kappa$ $(n=0\sim\infty)$ のごとく，直列コンデンサによる系統の固有周波数を含む無限高調波より成立している。

(ホ) 線路突流の最大尖頭値を算出し，近似的に簡単な結果で表わし得た。

(ヘ) 直列コンデンサに加わる過渡電圧を解析し，その最大尖頭値の簡単な近似式を得た。

(ト) 同期機界磁捲線回路に発生する突流を定量的に明らかにし，周波数は無限次偶数調波および $2n+1\pm\kappa$ $(n=0\sim\infty)$ の高調波であることを証した。

かくして従来，解法不可能とされていたこの種の短絡現象が理論的に明らかになつた。実験による認証は時日の都合で行えなかつたので他日にゆずりたいが，結果の線間短絡理論との比較ならびにすでに行つた線間短絡の理論と実験結果の比較を検討すれば，本理論の妥当性は明瞭である。計算式は一見複雑であるが，収れん迅速な無限級数を取り扱かうから，数値計算およびグラフ表示は比較的簡単である。

本研究を実施するにあたつて，懇篤な御指導を頂いた北大工学部の小串孝治教授と俣野麻太郎教授に深甚な謝意を表するとともに，御討議下さつた本学電気工学教室の各教官に感謝の意を表わす。

なお，本研究費の一部を文部省科学研究費および北海道科学研究助成金によつたことを附記して謝意を表する次第である。

(昭和34年4月30日受理)

文　　献

1) 三浦： 連大, 357 (1956).
2) 三浦： 室工大研報, **2**, 173 (1956).
3) 三浦： 電気学会誌, **77**, 404 (1957).
4) 三浦： 電工論, **4**, 145 (1952).

エチレンの酸化反応の平衡論的考察

加　納　久　雄

Thermodynamics of Vapor-phase Oxidation of Ethylene

Hisao Kano

Abstract

Besides the formation of ethylene oxide, various side reactions are involved in the vapor-phase oxidation of ethylene, among which the following two are important —the direct oxidation of ethylene to carbon dioxide and water, and the deep oxidation of ethylene oxide to form carbon dioxide and water. It is necessary to find conditions more favorable for partial oxidation than the above-mentioned undesirable sider eactions. Thermodynamic calculation has shown that each of these reactions proceeds almost to completeness below 600 °K and 1000 atm when equilibrium is established. Therefore, the vital point is to find the catalyst of high selectivity so that the direct oxidation method may prove to be an industrial success.

1. 緒　　言

本論文においてエチレンの気相酸化反応工程に含まれる諸種の反応の平衡論的検討を行う。目的とするのはエチレンの部分酸化によるエチレンオキサイドの生成反応

$$C_2H_4+1/2\,O_2=C_2H_4O \qquad (1)$$

であるが，これと並行的及は逐次的にそれぞれ下記副反応がおこる。エチレンオキサイドの直

$$C_2H_4+3O_2=2CO_2+2H_2O \qquad (2)$$

$$C_2H_4O+5/2\,O_2=2CO_2+2H_2O \qquad (3)$$

接合成工業を成功に導くためにはその生成を他の副反応よりも有利ならしめる反応条件を選定することにあるから，広範囲な反応条件にわたり理論反応率に対する検討を行い，収率向上のための主要点がどこに存するかを明らかにすることが必要である。

2. $C_2H_4+1/2\,O_2=C_2H_4O\,(g)$ の平衡

2-1. 平 衡 定 数

定圧分子熱を

$$C_p = \alpha + \beta T + \gamma T^2$$

の形式で表わすと標準反応熱及び標準自由エネルギー変化量はそれぞれ

$$\Delta H^\circ_T = \Delta H^\circ_0 + \Delta\alpha\, T + 1/2\, \Delta\beta\, T^2 + 1/3\, \Delta\gamma\, T^3 \qquad (4)$$

$$\Delta F^\circ_T = \Delta H^\circ_0 - \Delta\alpha\, T \ln T - 1/2\, \Delta\beta\, T^2 - 1/6\, \Delta\gamma\, T^3 + IT \qquad (5)$$

となる。たゞし I は定数である。

25°C の標準生成熱 ΔH°_f, 標準生成自由エネルギー ΔF°_f および α, β, γ の値を第1表に示す（本表には第3節以下の計算に必要な物質に関する数値をも挙げておいた）。

第1表 ΔH°_f, ΔF°_f 及び C_p

	ΔH°_f (298.2 °K)[1] kcal mol^{-1}	$F^\circ_f\Delta$ (298.2 °K)[1] kcal mol^{-1}	α cal °K^{-1} mol^{-1}	$\beta\times10^3$ cal °K^{-2} mol^{-1}	$\gamma\times10^6$ cal °K^{-3} mol^{-1}
C_2H_4	12.496	16.282	2.706	29.16	−9.059[2]
O_2	0	0	6.148	3.102	−0.923[3]
C_2H_4O	−16.1	− 6.94	0.626	38.88	−8.395[4]
CO_2	−94.052	−94.260	6.369	10.100	−3.405[2]
H_2O	−57.7979	−54.6351	7.219	2.374	0.267[2]
CH_3CHO	−39.72	−31.46	7.422	29.029	−8.742[5]

先ず第1表の ΔH°_f の値を用いて 25°C の標準反応熱を求めると

$$\Delta H^\circ_{298.2} = -28596 \text{ cal}$$

又 $\Delta\alpha = -5.144$ cal °K^{-1} mol^{-1}, $\Delta\beta = 8.169\times10^{-3}$ cal °K^{-2} mol^{-1}, $\Delta\gamma = 1.126\times10^{-6}$ cal °K^{-3} mol^{-1} となるから (4) により

$$\Delta H^\circ_0 = -27435 \text{ cal}$$

次に ΔF°_f の値から

$$\Delta F^\circ_{298.2} = -23222 \text{ cal}$$

以上の諸数値を (5) に代入して I を定めると

$$I = -13.95$$

したがつて (5) は次のようになる。

$$\Delta F^\circ_T = -27435 + 11.847\, T \log T - 4.085\times10^{-3} T^2 - 0.188\times10^{-6} T^3 - 13.95\, T \qquad (6)$$

故に反応の平衡定数を K_{I} とすると

$$\log K_{\mathrm{I}} = -\frac{\Delta F^\circ_T}{2.303\, RT}$$

$$= \frac{5996.28}{T} - 2.589 \log T + 0.8927 \times 10^{-3} T + 0.0411 \times 10^{-3} T^2 + 3.05 \qquad (7)$$

種々の T に対する $\log K_{\mathrm{I}}$ の値を第2表に示す。

第 2 表　種々の T に対する $\log K_{\mathrm{I}}$

T, °K	298.2	350	400	450	500	600
$\log K_{\mathrm{I}}$	17.02	13.91	11.67	9.92	8.51	6.40

2-2. 反応率におよぼす圧力の影響

今 n_1, ν_1: 平衡混合物中の C_2H_4 のそれぞれモル数及びフュガシティー係数

n_2, ν_2: 同じく O_2 のモル数及びフュガシティー係数

n_3, ν_3: 同じく C_2H_4O のモル数及びフュガシティー係数

n_4: 不活性ガスのモル数

π: 反応系の全圧

とし，$\nu_3/\nu_1\nu_2^{1/2} = K_{\nu_{\mathrm{I}}}$ とおけば，

$$\left[\frac{n_3}{n_1 n_2^{1/2}}\right] K_{\nu_{\mathrm{I}}} \left[\frac{\pi}{n_1+n_2+n_3+n_4}\right]^{-1/2} = K_{\mathrm{I}} \qquad (8)$$

C_2H_4 4.5%，空気 95.5% の原料ガスを用いた場合その 100 モルをとれば，C_2H_4 4.5 モル，O_2 20.06 モル，N_2 75.44 モルを含むことになるから C_2H_4 から C_2H_4O への転換率を x とすれば平衡混合物の組成は下記のようになる。

$n_1 = 4.5 - 4.5\,x$ モル

$x_2 = 20.06 - 2.25\,x$ モル

$n_3 = 4.5\,x$ モル

$n_4 = 75.44$ モル

(8) に代入して

$$\frac{x}{(1-x)(20.06-2.25\,x)^{1/2}(100-2.25\,x)^{1/2}} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{K_{\nu_{\mathrm{I}}}} \pi^{1/2} \qquad (9)$$

各気体の臨界定数は次の通りである。

	T_c	P_c
C_2H_4[6]	282.9 °K	50.9 atm
O_2[6]	154.4	49.7
C_2H_4O[7]	468.4	71

実用温度として 500 °K を選び種々の圧力に於ける ν の値を求め第3表の結果を得た。これか

第 3 表 500 °K 及び種々の圧力におけるフュガシティー係数

	ν			
π, atm	100	200	500	1000
C_2H_4	0.92	0.87	0.87	1.14
O_2	1.02	1.10	1.24	1.50
C_2H_4O	0.62	0.41	0.27	0.27

ら K_{ν_I} が得られるから，したがって $\frac{K_I}{K_{\nu_I}}\pi^{1/2}$ を算出すると第4表の結果を得る。(9) の左辺は $x(\leqq 1)$ が大きいほど大である。右辺は第4表に示したように π の大なるほど大となる。したがつて圧力を大にした方がエチレンオキサイドへの平衡転換率が高い。しかし π が常圧附近の場合でさへ (9) の右辺はきわめて大であるから，事実上エチレンオキサイドの平衡収率は著く大となる。

第 4 表 500 °K 及び種々の圧力における K_{ν_I} 及び $\frac{K_I}{K_{\nu_I}}\pi^{1/2}$

π, atm	K_{ν_I}	$\frac{K_I}{K_{\nu_I}}\pi^{1/2}$
100	0.67	4.84×10^9
200	0.45	10.20×10^9
500	0.28	16.10×10^9
1000	0.19	53.92×10^9

3. $C_2H_4+3O_2=2CO_2+2H_2O(g)$ の平衡

3-1. 平衡定数

第1表のデータを用いてこの反応の 25°C の標準反応熱を求めると

$$\Delta H^\circ_{298.2}=-316100\ \mathrm{cal}$$

又 $\Delta\alpha=6.026\,\mathrm{cal\,°K^{-1}\,mol^{-1}}$, $\Delta\beta=-13.518\times10^{-3}\,\mathrm{cal\,°K^{-2}\,mol^{-1}}$, $\Delta\gamma=5.552\times10^{-6}\,\mathrm{cal\,°K^{-3}\,mol^{-1}}$ となるから (4) により

$$\Delta H^\circ_0=-317441\ \mathrm{cal}$$

次に ΔF°_f の値から $\Delta F^\circ_{298.2}$ を求め

$$\Delta F^\circ_{298.2}=-314072\ \mathrm{cal}$$

以上の数値を (5) に代入して I を求め

$$I=-43.46$$

したがつて

$$\Delta F_T^\circ = -317441 - 13.878\,T\log T + 6.759\times10^{-3}\,T^2 + 1.851\times10^{-6}\,T^3 + 43.46T \quad (10)$$

$$\log K_{\mathrm{II}} = \frac{69370.84}{T} + 3.033\log T - 1.477\times10^{-3}\,T - 0.405\times10^{-6}\,T^2 - 9.50 \quad (11)$$

(11)によつて種々の T に対する $\log K_{\mathrm{II}}$ を求め第5表の結果を得た。

第5表 種々の T 対する $\log K_{\mathrm{II}}$

T, °K	298.2	400	500	600
$\log K_{\mathrm{II}}$	230.19	171.17	136.59	113.51

3-2. 反応率におよぼす圧力の影響

今 n_1, ν_1: 平衡混合物中の C_2H_4 のそれぞれモル数及びフュガシティー係数

n_2, ν_2: 同じく O_2 のモル数及びフュガシティー係数

n_3, ν_3: 同じく CO_2 のモル数及びフュガシティー係数

n_4, ν_4: 同じく H_2O のモル数及びフュガシティー係数

n_5: 不活性ガスのモル数

π: 反応系の全圧

とし，$\nu_3^2\nu_4^2/\nu_1\nu_2^3 = K_{\nu_{\mathrm{II}}}$ とおけば，

$$\left[\frac{n_3^2 n_4^2}{n_1 n_2^3}\right] K_{\nu_{\mathrm{II}}} \left[\frac{\pi}{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}\right]^0 = K_{\mathrm{II}} \quad (12)$$

2-2の場合と同じ組成の原料ガス100モルをとり，C_2H_4 から CO_2 への転換率を x とすれば平衡混合物の組成は，

$n_1 = 4.5 - 4.5\,x$ モル

$n_2 = 20.06 - 13.5\,x$ モル

$n_3 = 9\,x$ モル

$n_4 = 9\,x$ モル

$n_5 = 75.44$ モル

となるから(12)に代入し，

$$\frac{(9x)^2\,(9x)^2}{(4.5-4.5\,x)\,(20.06-13.5\,x)^3}\,K_{\nu_{\mathrm{II}}} = K_{\mathrm{II}}$$

故に

$$\frac{1458\,x^4}{(1-x)\,(20.06-13.5\,x)^3} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{K_{\nu_{\mathrm{II}}}} \quad (13)$$

CO_2 及び H_2O の臨界定数は下記の通りである。

	T_c	P_c
CO_2[6]	304.1 °K	72.9 atm
H_2O[6]	647.3	218.2

2-2 と同様に実用温度として 500 °K を選び，種々の π に対する ν の値を求め第 6 表の結果を得た。第 3 表及び第 6 表の値を用いて $K_{\nu_{II}}$ を求め，ついで $K_{II}/K_{\nu_{II}}$ を算出すると第 7 表の結果が得られる。

第 6 表 500 °K 及び種々の圧力におけるフュガシティー係数

	ν			
π atm	100	200	500	1000
CO_2	0.93	0.87	0.79	0.90
H_2O	0.67	0.44	0.19	0.11

(13) の左辺は $x(\leqslant 1)$ が大なる程大となる。又右辺の値は第 7 表の結果から π が大なる程大である。したがつて加圧によつてエチレンの完全酸化反応を抑制することは不可能である。かつ常圧以下の圧力においても殆んど定量的に反応が完結する。

第 7 表 500 °K 及び種々の圧力における $K_{\nu_{II}}$ 及び $\dfrac{K_{II}}{K_{\nu_{II}}}$

π, atm	$K_{\nu_{II}}$	$\dfrac{K_{II}}{K_{\nu_{II}}}$
100	0.40	9.73×10^{136}
200	0.127	30.63×10^{136}
500	0.0136	286.03×10^{136}
1000	0.00255	1525.49×10^{136}

4. $C_2H_4O+5/2\,O_2=2CO_2+2H_2O\,(g)$ の平衡

4-1. 平衡定数

$$C_2H_4+1/2\,O_2=C_2H_4O$$

$$C_2H_4+\ \ 3\,O_2=2CO_2+2H_2O$$

$$C_2H_4O+5/2\,O_2=2CO_2+2H_2O$$

上の 3 反応の ΔF° 及び K をそれぞれ ΔF_I°, ΔF_{II}°, ΔF_{III}° 及び K_I, K_{II}, K_{III} とすると，

$$-\Delta F_{III}^\circ=-\Delta F_{II}^\circ+\Delta F_I^\circ$$

したがつて

$$\log K_{III}=\log K_{II}-\log K_I$$

種々の温度における $\log K_{III}$ の値を求めると第 8 表の結果が得られる。

第 8 表 種々の T に対する $\log K_{\mathrm{III}}$

T, °K	298.2	400	500	600
$\log K_{\mathrm{III}}$	213.17	159.50	128.08	107.11

4-2. 反応率に及ぼす圧力の影響

n_1, ν_1: 平衡混合物中の C_2H_4O のそれぞれモル数及びフュガシティー係数

n_2, ν_2: 同じく O_2 のモル数及びフェガシティー係数

n_3, ν_3: 同じく CO_2 のモル数及びフュガシティー係数

n_4, ν_4: 同じく H_2O のモル数及びフュガシティー係数

n_5: 不活性ガスのモル数

π: 反応系の全圧

とすれば

$$\left[\frac{n_3^2\cdot n_4^2}{n_1\cdot n_2^{5/2}}\right]K_{\nu_{\mathrm{III}}}\left[\frac{\pi}{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}\right]^{1/2}=K_{\mathrm{III}} \tag{14}$$

ここに

$$K_{\nu_{\mathrm{III}}}=\nu_3^2\cdot\nu_4^2/\nu_1\cdot\nu_2^{5/2}$$

100 モルの原料ガスをとり，C_2H_4O 4.5 モル，O_2 20.06 モル，N_2 75.44 モルから成るとし，反応率を x とすれば平衡混合物の組成は

$n_1=4.5-4.5\,x$ モル

$n_2=20.06-11.25\,x$ モル

$n_3=9\,x$ モル

$n_4=9\,x$ モル

となるから (14) に代入し

$$\frac{(9x)^2(9x)^2}{(4.5-4.5x)(20.06-11.25x)^{5/2}}K_{\nu_{\mathrm{III}}}\left[\frac{\pi}{100+2.25x}\right]^{1/2}=K_{\mathrm{III}}$$

したがつて

$$\frac{1458x^3(100+2.25x)^{1/2}}{(1-x)(20.06-11.25x)^{5/2}(100/x+2.25)}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{K_{\nu_{\mathrm{III}}}}\frac{1}{\pi^{1/2}} \tag{15}$$

(15) によれば x が大なる程左辺の値が大きい。2-2 及び 3-2 の場合と同様 $T=500$ °K を選んで種々の π における $K_{\nu_{\mathrm{III}}}$ 及び $K_{\mathrm{III}}/K_{\nu_{\mathrm{III}}}\pi^{1/2}$ の値を求めると第 9 表の結果が得られる。

故にこの反応においても圧力の増加が C_2H_4O の燃焼を有利ならしめることゝなる。しかし低圧の場合でも (15) の右辺は極めて大きい値となるから，平衡時には C_2H_4O が殆んど完全に燃焼してしまうことを示している。

第 9 表 500°K 及び種々の圧力における $K_{\nu_{III}}$ 及び $K_{III}/K_{\nu_{III}}\pi^{1/2}$

π, atm	$K_{\nu_{III}}$	$\frac{K_{III}}{K_{\nu_{III}}}\frac{1}{\pi^{1/2}}$
100	0.596	0.201×10^{128}
200	0.282	0.301×10^{128}
500	0.0487	1.102×10^{128}
1000	0.0132	2.878×10^{128}

5. $C_2H_4O = CH_3CHO$ の平衡

Twigg[8] によればエチレンの部分酸化反応によつて生成したエチレンオキサイドはアセトアルデヒドへ異性化をおこし，かつアルデヒドは容易に燃焼する性質があるから，この異性化反応を抑制できる条件が存在するならばエチレンオキサイドの無益な損失を防ぐことができる筈である。

5-1. 平衡定数

第1表の ΔH_f° の値を用いて 25°C の標準反応熱を求めると，

$$\Delta H^\circ_{298.2} = -23620\ \text{cal}$$

又 $\Delta\alpha = 6.796\,\text{cal}\,°\text{K}^{-1}\,\text{mol}^{-1}$, $\Delta\beta = -9.851\times10^{-3}\,\text{cal}\,°\text{K}^{-2}\text{mol}^{-1}$, $\Delta\gamma = -0.347\times10^{-6}\,\text{cal}\,°\text{K}^{-3}\text{mol}^{-1}$ となるから (4) により

$$\Delta H_0^\circ = -25206\ \text{cal}$$

次に ΔF_f° の値から

$$\Delta F^\circ_{298.2} = -24520\ \text{cal}$$

以上の数値を (5) に代入して I を求めると

$$I = 39.56$$

したがつて (5) は

$$\Delta F_T^\circ = -25206 - 15.651\,T\log T + 4.926\times10^{-3}\,T^2 + 0.058\times10^{-6}\,T^3 + 39.56\,T \qquad (16)$$

故に平衡定数を K_{IV} とすると

$$\log K_{IV} = 5508.3/T + 3.42\log T - 1.0765\times10^{-3}\,T - 0.0127\times10^{-6}\,T^2 - 8.65 \qquad (17)$$

種々の T に対する $\log K_{IV}$ の値を求め第 10 表の結果を得た。

第 10 表 種々の T に対する $\log K_{\nu_{IV}}$

T, °K	298.2	400	500	600
$\log K_{IV}$	16.84	13.59	11.06	9.38

5-2. 反応率に及ぼす圧力の影響

n_1, ν_1: 平衡混合物中の C_2H_4O のそれぞれモル数及びフュガシティー係数

n_2, ν_2: 同じく CH_3CHO のモル数及びフュガシティー係数

n_3: 不活性ガスのモル数

π: 全　圧

とし $\nu_2/\nu_1=K_{\nu_{IV}}$ とおけば,

$$\frac{n_2}{n_1}K_{\nu IV}\left[\frac{\pi}{n_1+n_2+n_3}\right]^0=K_{IV} \tag{18}$$

初めの C_2H_4O のモル数を1モルとし, CH_3CHO への転換率を x とすれば

$n_1=1-x$ モル

$n_2=x$ モル

となり, これを(18)に代入し,

$$\frac{x}{1-x}=\frac{K_{IV}}{K_{\nu IV}} \tag{19}$$

CH_3CHO の臨界定数[9] は

$T_c=454.7$ °K, $P_c=63.2$ atm

500 °K 及び種々の π に対する ν の値を求め第11表の結果を得た。

第3表及び第11表の値を用いて $K_{\nu_{IV}}$ を求め, ついで $K_{IV}/K_{\nu_{IV}}$ を算出すると第12表の結果が得られる。即ち $K_{IV}/K_{\nu_{IV}}$ は π が大なる程小となるから(19)によつて π の大なる程 x ($\leqq 1$) は小となり C_2H_4O の異性化が起りにくいことが言へるが, $\pi=1000$ atm の場合でも $x/1-x$ は

第11表 500 °K 及び種々の圧力における CH_3CHO のフュガシティー係数

π, atm	100	200	500	1000
ν	0.60	0.43	0.31	0.46

第12表 500 °K 及び種々の圧力における $K_{\nu_{IV}}$ 及び $K_{VI}/K_{\nu_{IV}}$

π, atm	$K_{\nu_{IV}}$	$\frac{K_{IV}}{K_{\nu_{IV}}}$
100	0.97	1.19×10^{11}
200	1.05	1.09×10^{11}
500	1.11	1.04×10^{11}
1000	1.70	0.68×10^{11}

10^{10} 程度の値となる故 $x \fallingdotseq 1$ となり平衡状態では殆ど定量的に異性化が完結することになる。他方異性化によつて一旦 CH_3CHO が生成すれば O_2 の存在においてその燃焼反応が極めて速かにおこることが認められており[8]，著者も同様の機構の想定のもとに自身の実験結果を解析して満足すべき結果を得た[10]。4-1 及び 5-1 で得た結果を用い 500 °K における CH_3CHO の燃焼に対する平衡定数として $\log K = 117.02$ という大きい値が得られるから，この反応も定量的に完結する。また加圧によつてほとんど影響を受けることがない。

6. 結　　論

以上の結果から 300～600 °K の実用温度ではエチレンの部分酸化によるエチレンオキサイドの生成，エチレンオキサイドのアセトアルデヒドへの異性化を経る燃焼及びエチレンの直接完全酸化反応はいずれも大きい平衡定数を有し，又加圧の影響について検討した結果，圧力の増加によつて上記諸反応の平衡の位置を殆ど移動させ得ないことが明かとなつた。したがつて平衡論上目的とする部分酸化反応を有利に行わせる条件は存在しない。故に適当な触媒を使用することによつてエチレンオキサイドの生成速度を選択的に大ならしめ，副反応を抑制することが基本的要訣であることが結論される。

(昭和 34 年 4 月 30 日受理)

文　　献

1) J. H. Perry: "Chem. Engrs'. Handbook", 3rd ed. McGraw-Hill, N. Y., 1950, p. 236.
2) H. M. Spencer, G. N. Flannagan: J. A. C. S., **64**, 2511 (1942).
3) H. M. Spencer: J. A. C. S., **67**, 1859 (1945).
4) C. J. Waters, J. M. Smith: Chem. Eng. Progr. **48**, 337 (1952).
5) H. M. Spencer: Ind. Eng. Chem., **40**, 2152 (1948).
6) J. H. Perry: "Chem. Engrs'. Handbook", 3rd ed. McGraw-Hill, N. Y., 1950, p. 204.
7) L. G. Hess, V. V. Tilton: Ind. Eng. Chem., **42**, 1251 (1950).
8) G. H. Twigg: Proc. Roy. Soc. (London), A **188**, 92 (1946).
9) R. E. Kirk, D. F. Othmer: Encyclopedia of Chemical Technology. Interscience Inc., N. Y., Vol. 1, p. 34.
10) 加納，金塚：工化，**61**，1157 (1958).

10 mm Raschig ring 充塡物に対する液境膜係数

——充填塔によるガス吸収——

木村　一・岡　宏

Liquid Film Coefficients for 10 mm Ceramic Raschig ring

—— Gas Absorption in a Packed Column ——

Hajime Kimura and Hiroshi Oka

Abstract

Experiments on gas absorption of pure carbon dioxide by water were carried out in several towers packed with 10 mm ceramic Raschig ring: in order to obtain liquid film coefficients directly, and investigated the effects of the following variables on the coefficients: — rate of liquid flow, gas velocity, end effect, height of packing, tower diameter.

We obtained the following experimental results. When the temperature was reduced to 15°C.

1) The coefficient was independent of gas velocity. This conclusion agreed with the results achieved by previous investigators.
2) k_La at above 6000, of liquid rate was proportionate to 0.82 power of this, while at below 6000, the coefficient was proportionate to $L^{1.22}$.
3) k_La was inversely proportional to the pipe diameter.
4) Conspiquous difference was obserbed with the data of other researchs in the height of packing on

$$k_La \propto Z^{-0.6}$$

5) Following experimental equations were:

$$\frac{k_La}{D_L} = \alpha\left(\frac{L}{\mu_L}\right)^n\left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L}\right)^{0.5} \qquad \begin{array}{lll} L > 3000 & \alpha = 5400 & n = 0.82 \\ < 3000 & \alpha = 310 & n = 1.22 \end{array}$$

Range of Experiments

Gas velocity	40～ 2,500 kg/m²·hr
Rate of liquid flow	400～20,000 kg/m²·hr
Tower diameter	0.02～0.10 m
Height of packing.	0.3 ～0.8 m

1. 緒　言

液体によるガス吸収は化学工業上重要で，其の研究も種々行われているが，主として物理

吸収の研究で，化学反応を伴なう吸収については，現在行われつつあるが，その数は極めて少ない。古くは八田氏[1]の著名な研究から，最近 van Krevelen[2]，Sherwood[3]，藤田氏[4]，Pigford[5]，Himmelblau[6] 等の実用的な研究等も，主に炭酸ガスの苛性アルカリ，或いはモノー，ジー，トリエタノールアミン溶液による吸収，酸化窒素の水に対する吸収等であつた。

筆者らは，現在タール工業に於いて行われているタール中油中のタール酸をタール酸ソーダとして抽出し，更に炭酸ガスでタール酸として分解回収する工程についての化学吸収を系統的に追究して来たが，その中充填塔操作について必要な予備的基礎実験を行つた結果を此所に報告する。

一般に化学吸収で充填塔を使用する場合の充填塔の設計には，(1) 藤田氏[7]の述べた如く，各個境膜係数 k_Ga，k_La を物理吸収より求め，化学吸収の場合の反応係数 β を $\beta=X/\tanh X$ $(X=\sqrt{kA_mD_L/k_L})$ より計算で求め，$1/K_Ga=1/k_Ga+1/H\beta k_La$ より総括吸収係数 K_Ga を得て $z=N_A/K_Ga\cdot(\Delta P)\ln$ より塔高を求める方法や，(2) Wilson plot 法や，(3) 既に報告された諸家の実験式を適用する方法等種々あるが，(2) の方法は指数の数に制限があり，且つ余程精密な実測値を基にしないと誤差が多く，(3) の方法も適用実験条件，化学反応の種類，実験式の再現性，誤差範囲等に於いて特定な実験には適用しても信謬性に乏しく，結局，気・液有効接触面積 a を含んでいるという難点はあるも，(1) の方法が最も信頼性の置ける方法と考えられる。

而して，充填塔のガス吸収操作に於いては，一般に液一ガス接触面の両側に液境膜およびガス境膜が存在し，その個々の境膜が溶質ガスの移動に対し抵抗を示し，その両境膜抵抗の和が吸収速度を支配すると考えられている。これらの境膜抵抗（又はその逆数の境膜係数）に対する液およびガス流速，充填物の形状・寸法，その他液，ガスの物理的性質などの諸因子影響を知るために従来多くの実験的研究が行われている。

すなわち，ガス境膜係数 k_Ga に関しては，多くの実測値はあるが，理論的にも実験的にも完全に求め得られない事が知られた現在，最も確実と見られる Shulman, Surosky, Dodge 等の純液を不活性ガス中に蒸発させて液側の濃度勾配をなくする方法とか，液側で迅速な不可逆反応が生じて抵抗をゼロにする方法が行われている。また，a の確実なる評価の難点があるがこの外に藤田氏[8]，van Krevelen[9] 等の比較的まとまつた実験式も存在するが，系の差の補正をしても如何に k_Ga の値が不一致であるかは Lynch & Wilke によつて明らかである。本実験に於いても以上の点より考えて，比較的実験条件の適用範囲の類似した藤田氏，van Krevelen の実験式をそのまま採用して爾後の計算の進展に供した。

また一方，液境膜係数に関する研究としては，Sherwood-Holloway[10] の実験結果が最も信頼されている。かれらの実験は主として液流速 L が 2000 kg/m²·hr 以上の部分で行われたものであり，藤田氏等[11]，疋田氏等[12] も略々同じ傾向を示している。しかし Deed 等[13] は L が 5000

以下では $(H.T.U)_L$ が Sherwood 等の式から偏倚するという結果を得ている。

液境膜係数を求める実験方法としては，水素，酸素，炭酸ガス等の溶解度の小さいガスを空気中から水に吸収させるか，水中から空気中に放散させて，得られた総括吸収係数を液境膜係数として使用する方法が一般に採用されている[3),13)]。これらの方法のかわりに，気相として純粋溶質ガスのみ用いこれを吸収させる方法をとればガス側には溶質ガスの分圧勾配がなく，ガス境膜抵抗はないものとしてよいから，得られた液境膜係数は酸素や水素などの放散又は吸収実験から求めた値より一層真の値に近い筈である。

著者らは現在行つている「石炭酸ソーダ溶液分解塔の化学工学的研究」の一部として充填塔による化学吸収の予備実験で，純粋炭酸ガスの水に対する吸収を 10 mm Raschig ring を充填物として行い，液境膜係数を測定し，これに対するガスおよび液流速，管径，充填層高，温度等の影響をしらべた。特に液流速に関しては極めて低い範囲まで実験を行つた。すなわち前述の如く，物理吸収の場合の k_La より化学吸収の反応係数 β を求めんとするものである。

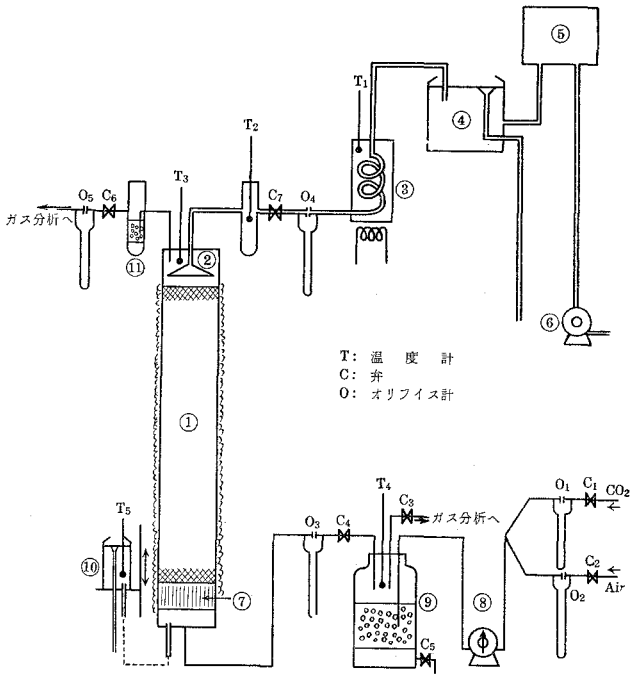
但し，以下述べる結果は 10 mm Raschig ring の場合にのみ適用できるもので，充填物の形状大きさの影響を知るためには，さらに今後の豊富な信用ある実測値の蓄積が必要である。

2. 実験装置および操作

実験に用いた装置の概略を第1図に示す。また使用した充填塔の種類，特性値の一部は，第1表の如くである。水はイオン交換樹脂層を通した蒸溜水を用い，これを定水位槽から流量調節弁および液分布器を通して充填物上に供給した。液分布器はノズルと開放口の両者を用い之をガラスサドルと硝子綿により均一に分布する様に工夫され，塔内を炭酸ガスと向流に流下し塔下部から排出された。液の排出には溢流形式を採り，塔内の圧力に応じて溢流部を上下し塔下部水面を一定位置（充填層下の距離）に保つた。

炭酸ガスはボンベからニードルバルブ，洗気瓶，流量計を通した後，塔下部へ送入し塔頂から排出したが，この際送入炭酸ガスは塔内での吸収量より稍々過剰に送りこの過剰分はガス溜に附設したガス放出管中に気泡として放出した。また系内の圧力を大気圧以上に保つて系外からの空気の混入を防いだ。

実験の操作法は，ガス循環を行わず，先ず液およびガスの流量を任意に調節し，一定時間後に定常状態に達せしめ，液ガスの温度，流量を測定し，両者の分析を行つた。液分析方法は溢流部より液試料を 10 mℓ のピペットで直接吸上げ，これを N/10 水酸化バリウム溶液の一定量入つた三角フラスコ内に入れ，過剰の水酸化バリウムを N/10 塩酸溶液で中和滴定をした。試料は毎回 2～3 回採取したが，分析結果は約 1% 以内でよく一致をした。亦塔頂への供給水も同様の分析を行つた。ガスは塔頂，塔底共に Orsat 法で分析した。



第1図 実験装置

① 充填塔 ② 液分布器 ③ 液温調節器 ④ 定水位槽
⑤ 貯槽 ⑥ ポンプ ⑦ ガス整流器 ⑧ ガスメーター
⑨ ガス溜兼ミスト捕集器 ⑩ 溢流タンク ⑪ ミスト捕集器

第1表 実験条件

塔記号	塔径 (m)	塔高 (m)	塔底空間高 (m)	空間率 (%)	液分布器
B_1	0.037	0.8	0.1	65.9	nozzle
B_2	0.037	0.8	0.1	65.9	Open
C_1	0.024	0.8	0.075	69.8	nozzle
C_2	0.024	0.5	0.075	69.9	nozzle
C_3	0.024	0.3	0.075	70.2	nozzle
D_1	0.0547	0.8	0.035	61.8	Open
D_2	0.0547	0.5	0.035	61.3	Open
D_3	0.0547	0.3	0.035	60.2	Open

3. 液境膜係数の算出

本実験では気相としては純粋の炭酸ガスを用いたからガス側による分圧勾配はなく，従つて気-液界面の液濃度はガス本体の圧力（全圧）に対応する溶質ガスの飽和濃度 C_s に等しい。C_s を塔全体を通じて一定とすれば，液境膜係数 k_La に対して次式が導かれる。

$$k_La = \frac{L}{\rho z}\int_{C_1}^{C_2}\frac{dC}{C_s-C} = \frac{L}{\rho z}\ln\frac{C_s-C_1}{C_s-C_2} \qquad (1)$$

此の場合 C_s は塔全体を通じて一定，すなわち液温が一定と仮定して導かれたものであるが，一般にガスが液に溶解する時は発熱を伴ない，この為液温の上昇を来たす傾向がある。而して，溶質ガスが炭酸ガスの如く溶解度の小さいものでは発生熱量も少なく，液温は塔の上下を通じて一定であるとみなして差支へなく，実験的にも確められた。此の実験の場合は，塔の保温は行つたが，液温が低温の場合はガス温度の影響を受けてガス側より液側へ顕熱の移動が行われ，塔頂と塔底の液温差が最高 6°C に達した為，(1) 式の C_s を一定とみなす事が出来ぬ故，塔上下の温度範囲での C_s の温度による変化を直線的とみなせば，推進力 (C_s-C) の塔全体を通じての平均値として塔入口および塔出口に於ける値の対数平均値が使用出来る。すなわち

$$k_La = \frac{L}{\rho z}\frac{C_2-C_1}{(C_s-C)_{av}} \qquad (2)$$

$$(C_s-C)_{av} = \frac{(C_s-C)_1-(C_s-C)_2}{\ln[(C_s-C)_1/(C_s-C)_2]} \qquad (3)$$

此の場合の C_s の値としては，大気圧，塔内平均液温，塔頂および塔底温度に対する値を I.C.T. より求め計算に供した。なお本実験は後におこなう同じ条件における石炭酸ソーダ液による吸収と比較する必要があるので，充填層の積変えはおこなわないが，端効果については後述の如く検討をおこなつた。また諸家の実験結果と比較対照の為の温度補正としては，一応概括的に (1), (2) 式より求めた k_La を Sherwood-Holloway[10] にならい次式により

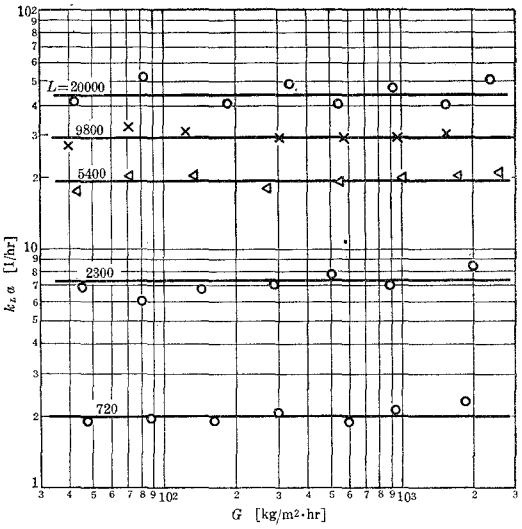
$$k_La \propto e^{0.023t} \qquad (4)$$

15°C の値に換算した。

4. 実験結果および考察

a. ガス流速の影響： 液境膜係数に対するガス流速の影響を，液温 16±1.5°C に於いて，充填層高 0.3 m，塔径 0.037 m，空間率 65.9% の塔を用い 720～20,000 kg/m²·hr の液流速のそれぞれに対し，ガス流速を 30～3000 kg/m²·hr の範囲に変化させて実験を行つた。なおガス流速 G の値としては，塔入口および塔出口の値の算術平均値を用いた。

実験結果を第2図に示す。これは $G=300$ 以上の数値は循環実験も併用した。図から知られる如く，G は k_La に影響を与えない。この事実は各種の充填物や溶質ガスを用いて行つた既往の研究者達[10),12),14),15)]の実験結果と全く一致している。したがつて充填塔のガス吸収又は放散操作で Loading velocity 以下のガス流速範囲および通常の液流速範囲では，充填物の形状，寸法，充填塔径の大小，溶質ガスの種類などの如何を問わず G は k_La に影響を与えないという一般的な定説は本実験の場合も当てはめ得た。



第2図　ガス速度の影響

b. 液流速の影響：　k_La に対する L の影響をしらべる目的で，$G=128.5$ kg/m²·hr の値の場合にガス循環を行わず，L を 500～20,000 kg/m²·hr に変化させて実験を行つた。

第2表に実験条件を，第3表に測定数値の一部を，第3図，第4図に括めた結果を図示する。第2表に於いてはガス分析結果よりの炭酸ガス消費量と液分析結果による炭酸ガス吸収量の良い一致を示したものを塔径，層高の異つた各塔について記載した。また有効接触面積 a については藤田氏[16)]等の方法により $L/a_t\mu_L$ vs. a/a_t より求めた。また記載した $(k_La)_{15°C}$ は前式(1)で求めた $(k_La)_{t°C}$ を(4)式により 15°C に換算した数値で，これを図示すると ±10% の範囲で第3図の直線上に点綴される。この点より爾後の計算に用いた k_La は凡て第3図より求めたものである。

第2表　実験条件

ガス流速	40～2,500	kg/m²·hr
液流速	400～20,000	kg/m²·hr
ガス濃度	95～99.5	%
ガス温度	17～20	°C
液温度	7.5～25.0	°C
充填塔径	0.02～0.10	m
充填塔径層高	0.3～0.8	m

第 3 表 実 験 結 果

Exp. No.	Mean Water Temp. t [°C]	Liq. Rate kg/m²·hr	$(Re)_L$	Sec. area [m²]	Height [m]	Liquor Conc. equil. [kg/kg H_2O]	Liquor Conc. Outlet [kg/kg H_2O]	a.	k_La at 15 [°C] 1/hr
B_1 01	24.75	519	19.7	13.82×10^{-4}	0.8	1.521×10^{-3}	0.651×10^{-3}	32.7	0.293
02	24.75	1623	40.8			1.521	0.887	49.4	1.2
03	24.0	3243	65.2			1.542	0 921	60.8	2.75
04	23.75	5450	90.5			1.561	0.817	72.2	4.2
05	21.25	12050	155.2			1.669	0.934	88.4	8.0
B^2 01	12.0	825	21.1	13.82×10^{-4}	0.8	2.205×10^{-3}	1.470×10^{-3}	34.8	1.18
02	8.0	1670	31.4			2.537	1.728	43.2	2.65
03	9.65	5780	74.9			2.375	1.759	65.2	10.2
04	9.0	11420	118.7			2.442	1.715	79.6	17.5
05	7.5	16720	151.7			2.580	1.672	88.2	24.8
C_1 01	17.0	1780	38.6	5.71×10^{-4}	0.8	1.890×10^{-3}	0.938×10^{-3}	47.5	1.5
02	17.0	3990	65.6			1.890	1.048	61.8	3.8
03	15.5	13440	149.0			1.976	1.152	87.2	14.0
04	15.0	17500	181.0			2.015	1.129	94.2	17.5
C_2 01	19.0	2360	48.4	5.71×10^{-4}	0 5	1.782×10^{-3}	0.774×10^{-3}	52.3	2.6
02	19.0	3760	64.7			1.782	0.851	61.8	4.4
03	18.5	8820	118.0			1.807	0.925	78 8	12.7
04	16.0	20350	204.4			1.948	0.935	93.9	25.2
C_3 01	16.5	1780	37.6	5.71×10^{-4}	0.3	1.888×10^{-3}	0.919×10^{-3}	47.5	3.0
02	16.5	3810	63.9			1.948	0.946	60.8	8.0
03	17.0	7980	113.0			1.890	0.956	72.0	17.3
04	16.0	18100	187.0			1.948	0.894	96.0	34.8
D_1 01	14.0	896	22.9	30.15×10^{-4}	0.8	2.075×10^{-3}	$1 285\times10^{-3}$	36.7	0.9
02	14.0	1235	28.0			2.075	1.145	41.3	1.31
03	12.0	2110	38.4			2.208	1.380	49.0	2.45
04	11.5	6620	84.5			2.241	1.194	69.0	6.75
D_2 01	11.5	718	19.0	30.15×10^{-4}	0.5	2.244×10^{-3}	1.158×10^{-3}	33.4	1.02
02	13.0	1095	25.6			2.120	1.166	39.0	1.70
03	11.0	2990	49.1			2.277	1.252	53 2	5.4
04	8.0	4930	161.5			2.537	1.314	62.0	8.0
D_3 01	12.5	876	22.2	30.15×10^{-4}	0.3	2.172×10^{-3}	1.145×10^{-3}	35.5	1.85
02	9.7	1542	30.5			2.382	1.099	42.6	3.35
03	9.2	4230	64 8			2.422	0.943	61.6	8.2
04	8.5	7580	87.9			2.482	1.222	70.7	18.2

第3図より明らかなる如く $L>5000$ の部分では傾斜0.82の直線で表わせるが $L<3000$ の部分ではその直線より偏倚し k_La は L の減少と共に大体 $L^{1.22}$ に比例して減少する。此の部分についての指数の変化は多少見受けられた。

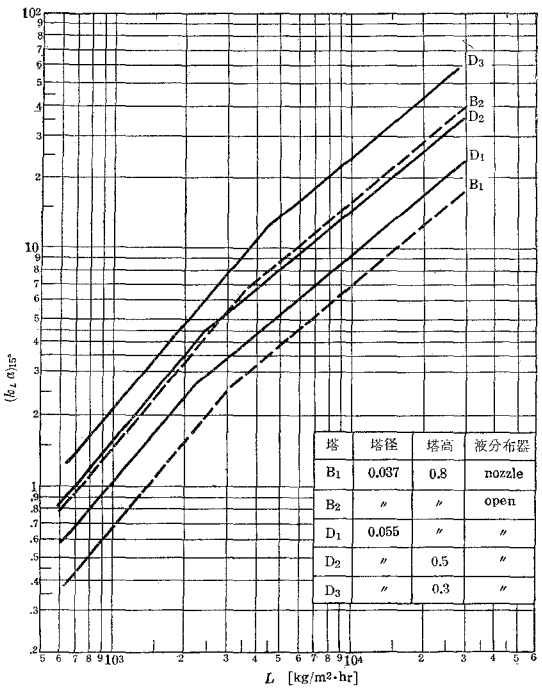
此の L の或る値以下で直線の屈折するのは液流速の低い時には塔内の充填物に充分均一な液分布を与える事が出来なくなり，有効接触面積 a の減少率が増大する為である。したがつて如何に塔内の液分布の良好な充填塔でも L の一定値以下では k_La の急激な減少が起る事が予想され，此の考えは Shulman[17]，Hikita[12] らの研究でも指摘されている。

又 Sherwood らによれば L/μ_L の指数はリングの大きさによつて変るとあり，此の点10 mm リングに対しては第4図に示される如く，

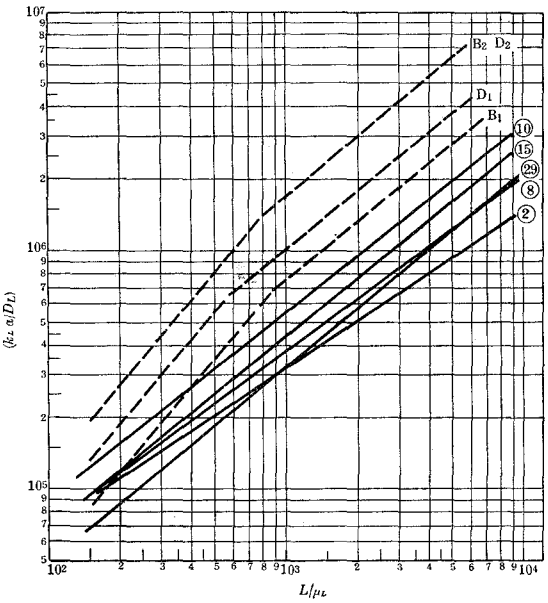
$$\frac{k_La}{D_L} \propto (L/\mu_L)^{0.82}$$

で表わされ，既往の実験に比し若干高い値であるが，リングの大小に余り変化なく指数は殆んど0.6～0.82の値を示している。

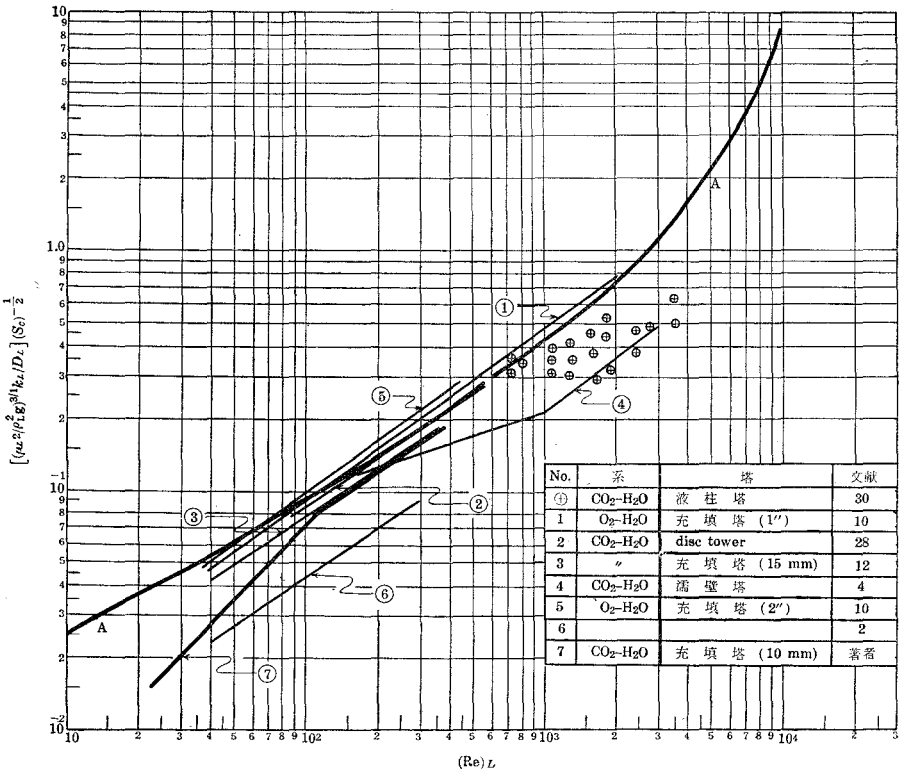
次に充填塔に於ける液側物質移動係数 k_L におよぼす諸種の影響を明らかにする為に，k_L を L, ρ, μ, D_L, a, g の函数として次元解析を行い，$(Sh)/(Sc)^{0.5}$ 対 $(Re)_L$ を点綴すれば第5図に示す如くなる。充填塔の $(Re)_L$ としては従来各種の形が用いられているが，著者らは Sher-



第3図　液流速の影響



第4図　Sherwood-Holloway の式との比較



第 5 図 $(Sh)(Sc)^{-1/2}$: $(Re)_L$

wood[3] らと同様な考え方より $(Re)_L=4L/a\mu$ を採用した。又 $(Sh)=(\mu_L^2/\rho_L^2 g)^{1/3} k_L/D_L$ 中の k_L は $k_L a$ を藤田氏等[16] の曲線より求めた a で除した値を用いた。又比較の為の充填層高の補正については，既に藤田氏等[18]，van Krevelen[9]，栗原氏等[19] の報告の如く k_L が充填層高 z の (0.19 ~0.33) 乗に逆比例するという実験事実があるが，後述の如く著者らの実験では z の 0.75 乗に逆比例する点より此の式により $z=0.3$ m に換算した値を用いた。

以上の結果，既往の実験結果と比較した曲線とは $(Re)_L>100$ で極めて良い一致を示したが，$(Re)_L<100$ では少しく減少した値を示した。しかし乍ら van Krevelen[9] の値より稍々高い点については

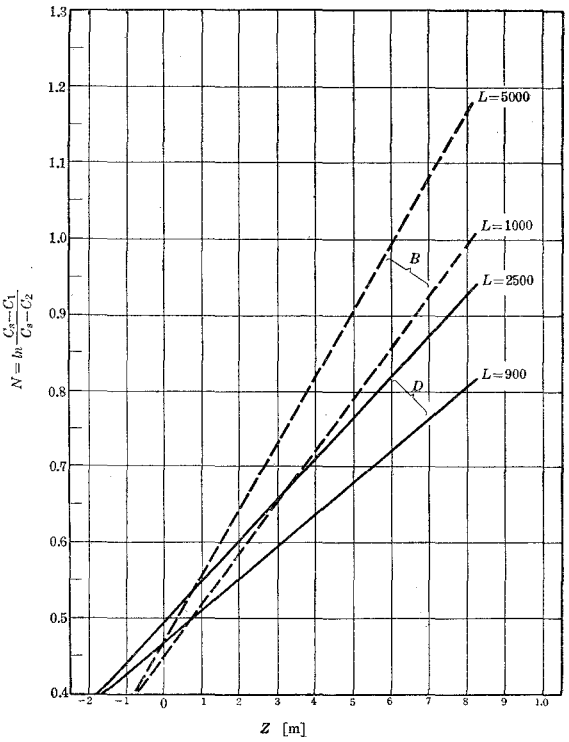
$$(Sh)=0.015\left(\frac{L}{a\mu_L}\right)^{2/3}(Sc)^{1/3}$$

の $(Sc)_L$ の指数が 1/2 でなく 1/3 としている点や，a の算出が明確でない点に原因があるものと考えられる。

c. End effect: 充填塔でガス吸収を行う場合には，液—ガスの接触は充填層の内部だけでなく，塔頂部および塔底部においてもおこり，塔入口および出口の組成から計算した係数

は実際の充填層のみによる係数よりも大きく出るわけである。特に低い充填高さの塔では塔の上下端の影響，すなわち End effect (端効果) は大きく無視出来ないのが普通である。

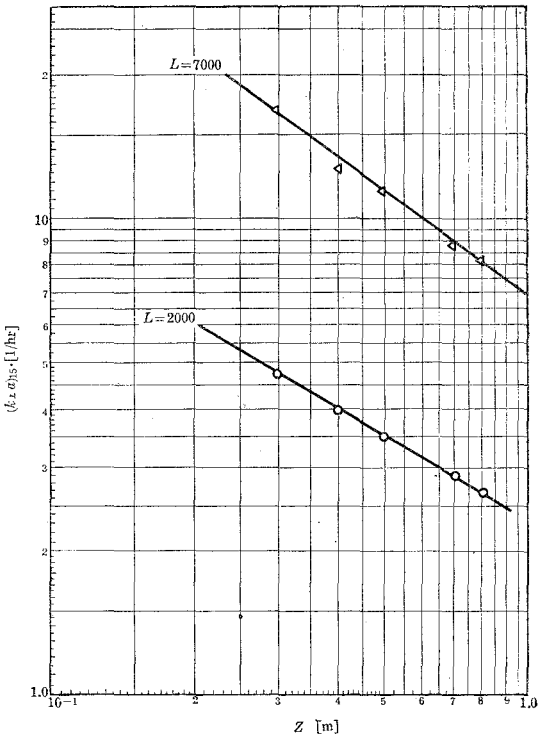
第3図に示した各種充填層高に対する実験結果から知られる如く k_La は z が低くなる程高くなる。これらの結果から End effect を知るために一定の液流速に於いて移動単位数 N，すなわち $\ln[(C_s-C_1)/(C_s-C_2)]$ を z に対して点綴する方法を用いた。第6図はこれを示す。図から End effect が約 17 cm 充填高さに相当する。この値は他の実験者等[12),20),21)] の結果より稍大きいが，これは本実験では液分布器を充填物のすぐ上に置き，分布器と充填層頂間の吸収は防いだが，充填層底部から液面間に長さ 0.1 m の整流器と更に空隙 0.03 m があり此の間の吸収と，更に液の流下および滴下に伴なう液面の動揺，気体の巻込み等により End effect の高い値が得られたものと思われる。また End effect は塔径により変化する事が知れた。



第 6 図　End effect

d. 層高の影響：　k_La が端効果以外に充填層高に影響ある点に関して，先に藤田氏[8)]，van Krevelen[9)]，織田氏等[22)] により指摘されている。すなわち藤田氏は若し Higbie[23)] の非定常拡散の理論を充填塔にあてはめ，時間を塔の長さに書きかえれば，むしろ当然の結果として k_L が z の 0.5 乗に逆比例することになる点に着目し，丹羽氏[24)]，栗原氏，脇田氏[19)] と共に塔高

$z=0.15\sim1.13$ m に於いて End effect の外に k_La が $z^{0.19}$ に逆比例する事を，更に工業的装置で H_{OL} が $z^{0.2}$ に比例する事を認めた。またその結果は ±20% の範囲内で Sherwood-Holloway のデータと極めてよい一致を示している[10]。此の事実は液境膜が層流の時は特に影響が大である事は言うまでもなく，また管内の伝熱を考えても定性的に合致する。一方 van Krevelen も $z^{1/3}$ に逆比例する事を認めて居り，此の層高の影響は実際の 20～25 m という工業的吸収塔では注目に値するものとして著者らも此の点を追及した。結果は第 7 図に示す如く層高の高い部分で $(Re)_L$ の大なる場合は前者の研究値に略々合致するも，層高の低い部分に対して約 0.6 乗に逆比例するという意外な結果が表われた。之は液分布器の影響（第 3 図に示す如く Nozzle と Open の 2 種の相違—i.e. nozzle は open の 1/2.16 の値—）もあるがこれ以外に層高の変化の折に外塔をそのままにし層高のみリングを除去して減少し，分布器は層頂迄延長して液を落下させた点，あるいは End effect が特に層高が低い場合に大きく影響を与えた点に原因するものと思われる。而し乍ら八田氏の指摘の如く指数のみならず層高の影響を理論的追究と今後信用あるデータの蓄積のみが層高の影響の解決の道に他ならない。



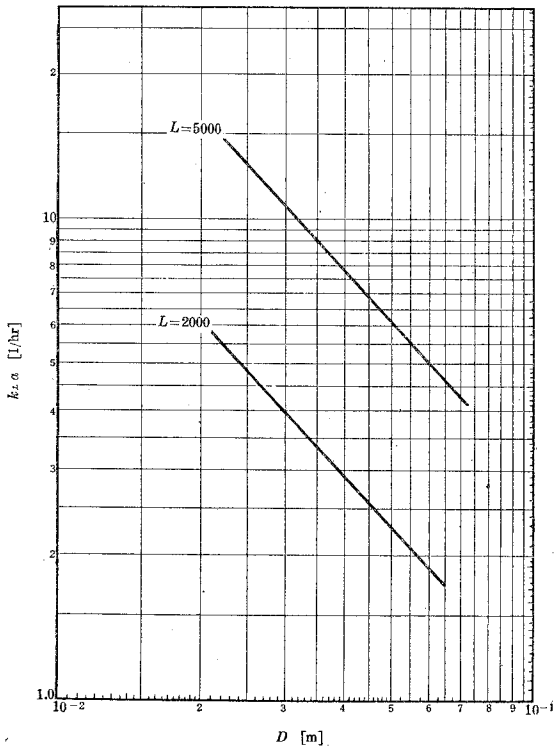
第 7 図　k_La 対 z

e. 塔径の影響： k_La に対する塔径の影響については余り文献が見当らず，溢汪現象等で僅かにしらべられている。最近矢木氏等[25]がアルカリ溶液による管内炭酸ガスの吸収に於て

$$K_Ga = Cd^{-0.9}$$

と単位容積当りの有効接触面積が管径の 0.9 乗に逆比例して変化することを示した。著者らは k_La に対する管径の影響として管径を 0.024～0.067 m について追究した結果第 8 図の如く管径が大になるにつれて k_La が減少し，次の関係式が得られた。

$$k_La = Cd^{-1.06}$$



第 8 図　k_La 対 D

ただし，図には分布器は open のみのものを示し，nozzle は補正係数 2.16 を乗じたものを，又層高は凡て 0.8 m の数値のみを採用した。すなわち，前述の矢木氏の結果と考え合わせて，アルカリ溶液による炭酸ガスの吸収で K_Ga は略々 k_La に相等しいオーダーを示す点より，k_La は管径に略々逆比例すると言い事が推定せられる。

f. 実験式の導出： Sherwood 等[10]はローディング速度以下のガス流速範囲で各種溶質ガス，各種充填物に対する k_La データを次の有次元の式で整理している。

$$\frac{k_L a}{D_L} = \alpha \left(\frac{L}{\mu_L}\right)^{1-n} \left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L}\right)^{0.5}$$

著者らも同一溶質ガスを用いて同一温度条件下で行つた実験に対して第3表の数値に End effect の補正を行つた後，15℃に換算，更に層高を 0.3 m に換算して $L=3000$ 附近で屈折する2本の直線群であらわされた。すなわち

$L>3000$

$$\frac{k_L a}{D_L} = 54.00 \left(\frac{L}{\mu_L}\right)^{0.82} \left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L}\right)^{0.5}$$

$L<3000$

$$\frac{k_L a}{D_L} = 310 \left(\frac{L}{\mu_L}\right)^{1.22} \left(\frac{\mu_L}{\rho_L D_L}\right)^{0.5}$$

しかし前述の Sherwood-Holloway の式は有次元である故，Fujita[11]，van Krevelen[2] 等は無次元の式に改良すべく努力した結果次式を得ている。

Fujita の式

$$Sh/(Sc)^{1/2} = 0.025 \left(\frac{4L}{a\mu_L}\right)^{2/3} \left\{(\mu_L^2/\rho_L^2 g)^{1/3}/z\right\}^{0.19}$$

van Krevelen の式

$$Sh/(Sc)^{1/3} = 0.05 \left(\frac{D_p}{z}\right)^{1/3} \left(\frac{L}{a\mu_L}\right)^{2/3}$$

しかして上述の2式については a の影響を或る程度許容値をとれば藤田の式がより信頼性がもたれる故著者らは此の 10 mm リングによる結果より次の実験式を求め得た。

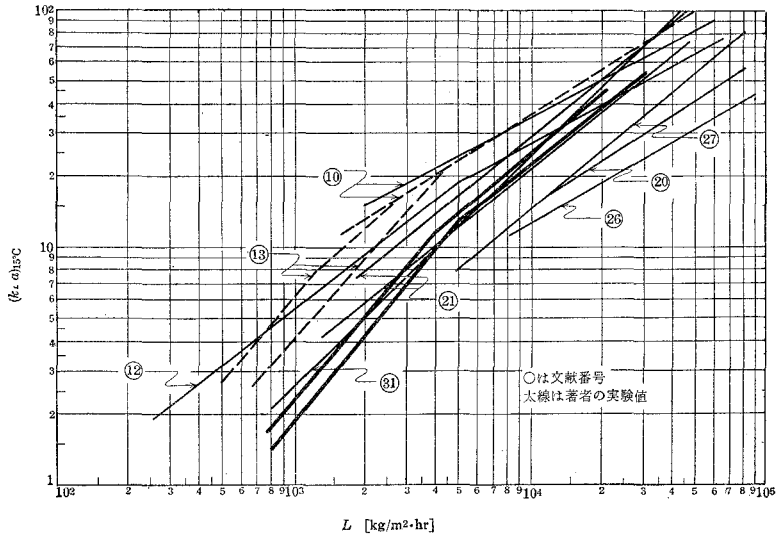
$$Sh/(Sc)_L^{1/2} = 0.025 \left(\frac{4L}{a\mu_L)}\right)^{2/3} \left\{\left(\frac{\rho_L}{\mu_L^2 g}\right)^{1/3} \Big/ z\right\}^{0.2\sim0.6}$$

上記の計算に使用した D_L，μ_L，ρ_L はいずれも I.C.T の値またわ水に対する値を用いた。

g. 既往文献との比較： 第9図，第4表に第4図にしめした場合と同じく Sherwood-Holloway の式の検討に対する著者の結果の外に，既往の研究者達の結果も示し，又文献値との比較とそれらの実験条件を示した。$k_L a$ はすべて (2) 式により更に (4) 式で 15℃に換算し，又 O_2 に対するデータは CO_2 になおしたものである。

著者等のデータは液流速の高い範囲では八田氏等[21]の直線と同一の傾斜を有するが約17%低く，又 L の低い所では Deed等[13] の 1/2″ リングに対するデータと同様 $k_L a$ の急激な減少を示すが約50% 近い値を示している。

ただ精密な比較検討は実験装置，特に液分布器が類似して居らねば如何に実験条件を相似にしても困難であり，また層高，管径の影響の理論的追究の困難な現段階に於いての比較も意



第 9 図 $k_L a$ 対 L

第 4 表

	Authors	Experimental formulas Converted into 15°C	Liq. Rate Range (m/hr)	Experimental Method	Temp Range (°C)	Packing used	Tower $D \times Z$ (mm)
1	Sherwood Holloway	$k_L a = 10.0 L^{0.50}$	7～50	CO_2H_2O abs. & desorp.	15	3/8″ Ceramic ring	52×305
2	Sherwood Holloway					1/2″ Ceramic ring	
3	Deeds Drew					1/2″ Ceramic ring	
4	Cautelo Simmors	$k_L a = 3.55 L^{0.56}$	10～70	10～25% CO_2–H^2O abs.	7～9	Glass	91×860
5	Hikita	$k_L a = 5.07 L^{0.54}$	6～60	CO_2–H_2O abs.	7～12	10 mm Alass	50×(100–330)
6	Simmors Osborn	$k_L a = 2.39 L^{0.74}$	15～40	8～25% CO_2–H_2O abs.	7～18	18 mm Glass sphere	–×815
7	Sherwood Ruckmann	$k_L a = 1.84 L^{0.88}$	4～45	CO_2–HO_2 desorp.	17～20	Carbon ring	250×1400
8	Hatta	$k_L a = 3.30 L^{0.79}$	3～28	98% CO_2–H_2O absorp	7～19	10 mm Glass	50×500
8	Hatta	$k_L a = 4.56 L^{0.79}$	3～28	98% C_2O–H_2O absorp	7～19	10 mm Glass	50×500
9	Koch	$k_L a =$					
10	Authors	$k_L a = 1.82 L^{0.82}$	1～22	98% CO_2–H_2O absorp	5～25	10 mm Rasching	54×800

義的に疑問視されるが信頼性のあるデータの蓄積は此の後の k_La に及ぼす諸種の函数関係の解明に重要な課題と考えられる。

附　記：　本研究に対し，終始懇切なご指導を戴いた佐藤久次教授はじめ教室の諸先生，ならびに実験に協力された米沢健次，山貫章三郎両工学士に厚く感謝の意を表する次第であります。

[昭和32年10月日本化学会北海道大会（於 釧路），昭和34年4月日本化学会年会講演発表の1部]

(昭和34年4月30日受理)

使　用　記　号

a:	有効接融面積	[m²/m³]
C:	水中炭酸ガス濃度	[kg/kg 水]
D:	統塡塔径	[m]
D_G:	ガス拡散係数	[m²/hr]
D_L:	液拡散係数	[m²/hr]
g:	重力加速度	[m/hr²]
G:	単位塔断面積当りのガス質量速度	[kg/m² hr]
L:	単位塔断面積当りの液質量速度	[kg/m² hr]
k_La:	液塡膜係数	[1/hr]
t:	液温	[°C]
(Re):	レイノルズ数$=4L/a\mu$	[—]
$(Sc)_L$:	シュミット数$=\mu_L/\rho_L D_L$	[—]
(Sh):	シャーウッド数$=k_L(\mu_L^2/\rho_L g)/D_L$	[—]
Z:	充塡塔層高	[m]
ρ:	密度	[kg/m³]
μ:	粘度	[kg/m·hr]

1, 2, s は入口，出口，飽和を表わす。

文　献

1) 八田：工化, **31**, 869 (1928); **32**, 809 (1929); **35**, 1389 (1932); Tech. Rep. Tohoku Imp. Univ., **10**, 613 (1932).
2) van Krevelen & Hoftijzer: Chem. Eng. Progress, **44**, 529 (1948).
3) Sherwood & Pigford: Absorption and Extraction 2nd Ed.
4) 藤田, 谷本, 土方, 推名, 中根：化工, **18**, 73 (1954).
5) Pigford & Wendel: A. I. Ch. E. J. **4**, 249 (1958).
6) Himmelblaw & Babb: A. I. Ch. E. J. **4**, 143 (1958).
7) 藤田, 丹羽：化学工学, **18**, 216 (1954).
8) 藤田, 丹羽：化学機械, **16**, 399 (1952).
9) van Krevelen, Hoftijzer & van Hooren: Rec. frav. chim., **66**, 513 (1947).
10) Sherwood & Holloway: Trans. Amm. Inst. Chem. Engrs., **36**, 39 (1940).
11) 藤田, 早川：化工, **20**, 113 (1956).

12) 疋田, 上山, 西上, 舟橋: 化工, **18**, 68 (1954).
13) Deed, Schutz & Drew: I. E. C. **39**, 766 (1947).
14) Molstad, Abbeyetc: Trans. Am. Inst. Chem. Engr. **38**, 410 (1942).
15) Vivan & Whitney: C. E. P. **43**, 691 (1947).
16) 藤田, 佐久間: 化工, **18**, 64 (1954).
17) Shulman, Ullrich, Proulx Z. Zimmerman: A. I. C. E. J., **1**, 247, 253, 259 (1955).
18) 藤田: 化学機械, **11**, 36 (1947).
19) 栗原: 化学機械協会大会講演, 1953年11月.
20) Simmons & Osborn: I. E. C, **26**, 529 (1934).
21) 八田, 小野寺: 化工, **18**, 484 (1954).
22) 織田: 化学機械, **13**, 198 (1949).
23) Higbie: T. A. I. C. E., **31**, 365 (1935).
24) 丹羽: 東工大卒研究の一部 (1952).
25) 矢木, 佐々木, 小野, 森: 化工, **18**, 13 (1954).
26) Cantelo & Simmons: I. E. C., **39**, 766 (1947).
27) Sherwood-Ruckman: ibd **29**, 282 (1937)
28) Stephan & Morris: C. E. P., **44**, 529 (1948).
29) Scheibel-Othmer
30) 松山: 化工, **14**, 245 (1950).
31) Koch, Stuzmann, Blum, Autchings: C. E. P. **45**, 977 (1949).

キノリンの空気酸化（第2報）

[高沸点タール塩基類酸化利用に関する研究（第6報）]

小松藤男

Air Catalytic and Non Catalytic Oxidation of Quinoline (II)

Fujio Komatsu

Abstract

In the previous reports, in order to synthesize pyridine from quinoline, the air catalytic oxydation had been carried out with catalyst, V_2O_5, $Sn(VO_3)_4$, $Fe(VO_3)_3$, KVO_3, $AgVO_3$ between 450°C and 550°C. A purpose of this experiment was to manufacture nicotinic acid rather than pyridine in its utilization by change of the conditions of the oxydation between 300°C and 500°C.

Further-more non catalytic air oxydation using quartz as a reaction pipe was done. The following results obtained:

1) In best conditions of non catalytic air oxydation, maximum yields of nicotinic acid were 14% at 430°C.

2) In air catalytic oxydation with SnO_2 catalyst, maximum yield of pyridine was 50% at 400°C, the theoretical air volume ratio 9.9. Its reaction proceeded violently to produce pyridine from nicotinic acid. By the effect of chlorine, the yield was extremely decreased.

3) In the compound catalysts of $Sn(VO_3)_4$ and SnO_2, in general, the yields of nicotinic acid decreased in order by decreasing the mole ratio of the latter to the former. Maximum yield of (1:1) mole ratio of these was 65.5% in the conditions of reaction temperature 450°C, space velocity 33300, reaction time over 1.5hr and sample velocity 3 g/hr, maximum yield of (1:3) mole ratio was 75%, in the best conditions of 400°C, space velocity 33300, theoretical air volume ratio 3.8–4.0, 10 mesh size and 4.3–4.5 cc volume of pumice stone as carrier.

4) In study on material balance, these analyses had 3.5% error at maximum.

5) Thermodynamically, production of nicotinic acid was possible.

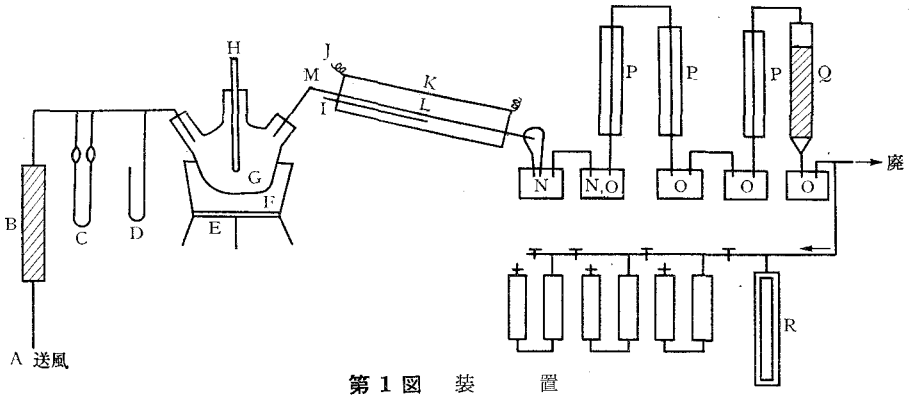
I. 緒　言

前報[1]に於て $AgVO_3$，硫酸製造用触媒，$Fe(VO_3)_3$，$Sn(VO_3)_4$，V_2O_5，KVO_3 を触媒とするキノリンの空気接触酸化について一部発表したが，何れもキノリンより直接ピリジンを合成する目的を以て行つたため，その条件はそれぞれ狭い範囲でなされた。併し利用面より考へるな

らば，キノリンの選択的酸化によつては，条件を変へることによりピリジン生成の一歩前に於て抑制することにより，ニコチン酸並びにキノリン酸を得ることは可能である。即ちヴイタミンB中間体として気相酸化によつてニコチン酸を多量に生産することは価値あることであり，既にニコチン酸については米国では年産 1200 瓲，我国では 170 瓲で，主として農薬，医薬，家蓄の飼料として生産額が増大しつつある。従つて中間体としてピリジン以外にニコチン酸を得る目的を以て行つたのが今回の実験の大要である。ニコチン酸の合成法は，1) ピリジン→ピリジンスルホン酸→ニコチンニトリル→ニコチン酸（液相），2) β-ピコリンの液相硫酸酸化[2]，3) 2-メチル—5 エチルピリジンの液相酸化[3]，4) ニコチンの気相酸化[4]，電解酸化[5]，ニコチン→ニコチンニトリル→ニコチン酸[6~10]，5) キノリンの液相酸化[11~16] と大別され，本邦では (5), (3), (1) の方式が大部分の様であるが，併し，ニコチン酸の高需要度から低廉な製造方式が望まれ，今回はタール溜分より分離されたキノリン（高沸点タール塩基類溜分中 41% 含有）を原料として，空気酸化によるニコチン酸の工業的合成法が一方法として考へられる。今回は以上の点より，第一に無触媒酸化並びに前報に用いた $Sn(VO_3)_4$ に SnO_2 を助触媒とするもの，SnO_2 単元触媒につき，坦体に軽石を用い，種々なる条件即ち，反応温度 300～500℃，空間速度，線速度試料濃度，$Sn(VO_3)_4:SnO_2$ のモル比変化，反応時間，最適坦体容量，粒度，物質収支の検討を行い，可なりの良い結果について報告すると共に，キノリンよりピリジン，ニコチン酸生成可能になることを熱力学的に平衡恒数により示し，キノリン酸生成については，実験的に求められないこと並びに熱分解によつてベンゾール分は殆ど得られなかつた。これらの点について述べる。

II. 実 験 の 部

(1) 実 験 装 置



第 1 図 装 置

A 送 風 機　E ニクロム線　I 熱 電 対　M 反 応 管　Q 活 性 炭
B 乾 燥 管　F グリセリン浴　J ニクロム線　N 未反応物回収瓶　R ガス分析装置
C フローメーター　G 試 料　K 反 応 炉　O 硫酸吸収瓶
D 圧 力 計　H 温 度 計　L 触 媒 層　P 冷 却 管

用いた装置は第1図に示されるが，前報に於ける装置と若干異る所は，試料を送り込む方法であり，前報に於ては滴下装置を用いたが，今回は空気の送風によつて一定の蒸気圧の試料を蒸気状態で送る点であり，反応を均一に行はしめる場合に良好である。従つて充分乾燥された空気によつて送られたキノリン蒸気と空気とによつて反応管（径 2.5 cm，長さ 1 m）に於て無触媒酸化又は触媒酸化が行はれ，反応生成物並びに未反応物は（20～10%）硫酸溶液捕集瓶及び未反応物回収瓶に於て回収し，更に活性炭によつて充分捕集を行はせ，廃気ガスは夫々ガス分析装置 R に於て分析に供した。

(2) 実験試料

(イ) 試　料　富士製鉄株式会社製の 95% キノリンを精溜塔によつて 238～238.2°C 溜分のものに精溜したものを使用した。238°C 溜分 99% 程度の純度のキノリンを実験に使用したが，純粋の合成キノリンを用いた場合と酸化に於ては，殆ど変らない結果を示しているので，以後この程度のものを用いた。従つて前報の様に塩酸酸性塩化亜鉛の複塩を用いなくても実験に差支へがないので，精製は物理的方法によつた。

(ロ) 触　媒　使用した触媒は $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$, $Sn(VO_3)_4+SnO_2$, SnO_2 であり，$Sn(VO_3)_4$, SnO_2 は夫々次の方法によつて製造した。

(例 1) $Sn(VO_3)_4$・触　媒

無水の塩化第二錫 12 g を 200 cc の蒸溜水に溶解した溶液に 20 g のメタバナジン酸アンモンを 500 cc の沸騰水に溶解した溶液を加え，更にそれらの混合液に軽石を夫々の濃度になる様に加え，軽石に附着沈澱するバナジン酸第二錫を 20 ℓ の蒸溜水によつて洗滌濾過し，100°C で乾燥し，5～20 mesh にして用いた。

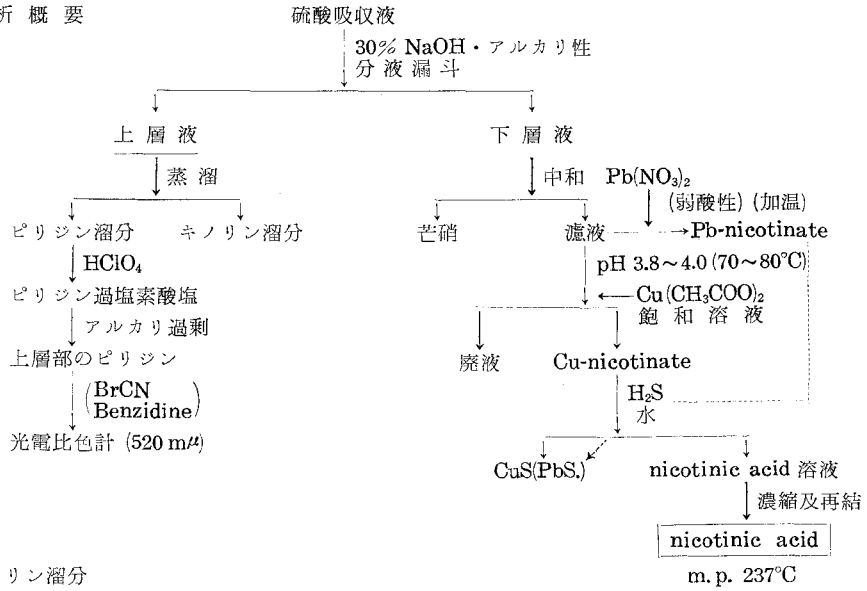
(例 2) SnO_2・触　媒

無水の塩化第二錫適当量をとり，之に蒸溜水を加え，充分溶解した上で，NH_3 水を加え，充分中和し，更に軽石を適当量添加し，生成する NH_4Cl の揮発成分を蒸発せしめ，最後に軽石に附着沈澱する水酸化錫を蒸溜水にて洗滌濾過し，炉にて 400～450°C 範囲で灼熱酸化させ，得られた SnO_2/軽石を 100°C で充分乾燥後貯蔵する。

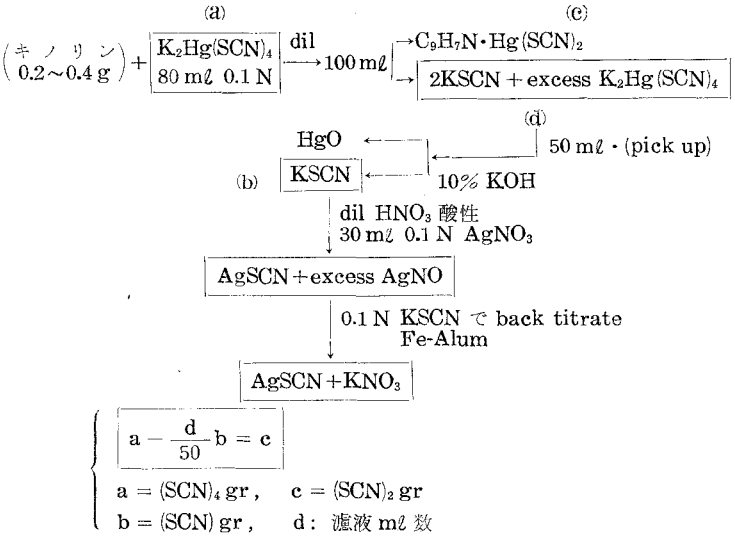
(3) 分析方法及びその検討

第2図の様に硫酸吸収液は 30% NaOH 溶液で一度中和し，更に弱アルカリ性にして，塩基性物質とカルボン酸とを上層液及び下層液に分離し，上層液は Widmer 精溜器を用いるか，粗蒸溜によつてピリジン溜分並びにキノリン溜分に分別し得る。ピリジン溜分は過塩素酸塩にして回収する。前報では過塩素酸塩を重量分析に供したが，今回は更にアルカリで分解，上層液を BrCN 及び Benzidine[17~20] による発色を利用し，光電比色計（520 mμ）にかけて分析した点が異る。更にキノリン溜分も前報に於ては 2・Quinoline+2HCl+$ZnCl_2$ の複塩により重量分

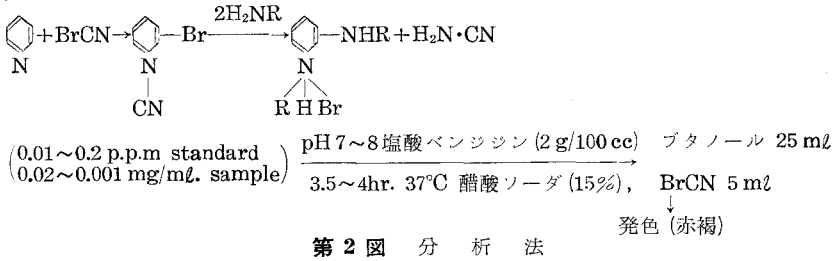
(1) 分 析 概 要



(2) キノリン溜分



(3) ピ リ ジ ン



第 2 図 分 析 法

析によつて求めたが，$K_2Hg(SCN)_4$ による新しい分析法[21] に改良を加えて容量分析によつた。又下層液は中和により芒硝を取り除き，その濾液を pH 3.8～4.0 に調整し，酢酸銅飽和溶液を加えて Cu-nicotinate として回収し，之より nicotinic acid に計算の上，収量を求めたが，更に銅塩は H_2S により nicotinic acid 溶液をつくり，濃縮及び再結し，m.p. 237°C の nicotinic acid が得られた。併し Cu 塩の回収は甚だ難しく，幾多の特許もあるが，何れも一長一短がある。本実験で知り得た事実は下層液の中和によつて芒硝を取除けば，殆どその濾液より得られる nicotinic acid 又はその Cu 塩は純粋のものが得られ易い点であるが，甚だ回収%は減少する事である。次に下層液の中和によつて芒硝をとらずに，pH 3.8～4.0 にした場合に Cu 塩は稍不純物を含む。併し乍らその回収%は減少しない点が分つた。即ち芒硝をとつた場合の回収率の低下は Na-nicotinate と芒硝との混在のまま廃去される事実が分かり，芒硝を取り除く操作では，n-butanol によつて又はエタノールを用いて Na 塩を弱酸性後の溶液を抽出すべき事が分かつた。又 nicotinic acid の回収には Cu 塩以外に重量分析には Pb-塩 が有効である。之の場合は中性より稍弱酸性で $Pb(NO_3)_2$ を用い，Pb-nicotinate として回収も行つたが，Cu 塩とはほぼ同じ結果を示すことが分つた。

III. 実験結果

本実験は大別して無触媒酸化並びに触媒酸化の二種類に分けられる。

I (イ) 無触媒酸化

不透明の石英管（直径 2.5 cm，長さ 1 m）を反応管として用いた。厳密に云へば，透明石英管によるのが望ましいのであるが，入手出来ず，不透明のものを使用したので，この結果には僅か乍らの変動があると考へられる。この実験では 300～500°C の反応温度範囲並びに線速度 22420～58155，空気/キノリンのモル比，90.5～478.0，反応時間 1 時間として行つた結果は第 1 表に示される。

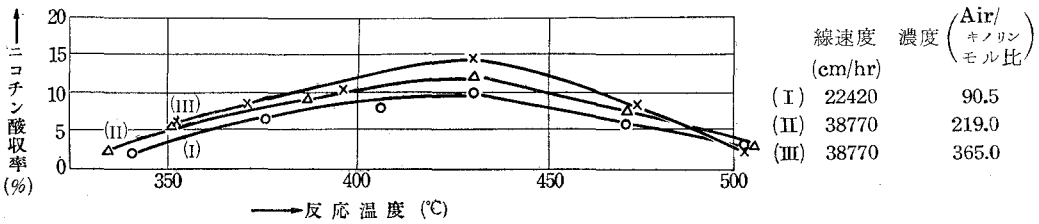
反応温度とニコチン酸の収率との関係を見るならば，線速度 22420，38700，濃度（空気量/キノリン）90.5，365.0 の間では何れも 430°C 附近が最大であり，500°C 附近ではニコチン酸の酸化又は熱分解が行はれると考へられ，数%に減少する。又空気量/キノリンの濃度 156.0 で一定の場合の線速度と収率との関係を見れば，430°C に於ては線速度 38770 が最大の収率を示す。(実験番号 251，254，255) 又空気量/キノリンの濃度は 365.0 以上では余り影響がない。(実験番号 40，43，44)。従つて無触媒酸化が行はれる反応管の大きさが重要な要素を占めるので，それに応じて条件を変へねばならない。

I (ロ) 無触媒酸化（磁製管による影響）

この実験は正確に無触媒反応とは云へない。即反応管に磁製管 Mullite（組成 $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$）

第 1 表 無 触 媒 酸 化 (石英管による)

実験番号	反応温度 (℃)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	線 速 度 (cm/hr)	Air/キノリン (モル比)	反応時間 (hr)	ニコチン酸 収 率 理論収率 (%)
25	350	7.0	110.0	22420	90.5	1	5.5
26	375	7.0	110.0	22420	90.5	1	6.0
27	405	7.0	110.0	22420	90.5	1	7.6
28	430	7.0	110.0	22420	90.5	1	10.0
29	470	7.0	110.0	22420	90.5	1	5.0
30	500	7.0	110.0	22420	90.5	1	3.0
31	330	5.0	190.0	38770	219.0	1	2.0
32	350	5.0	190.0	38770	219.0	1	5.8
33	385	5.0	190.0	38770	219.0	1	8.5
34	430	5.0	190.0	38770	219.0	1	12.0
35	470	5.0	190.0	38770	219.0	1	7.0
36	505	5.0	190.0	38770	219.0	1	4.0
37	350	3.0	190.0	38770	365.0	1	6.5
38	370	3.0	190.0	38770	365.0	1	8.0
39	395	3.0	190.0	38770	365.0	1	9.3
40	430	3.0	190.0	38770	365.0	1	14.0
41	470	3.0	190.0	38770	365.0	1	7.5
42	500	3.0	190.0	38770	365.0	1	5.0
43	435	2.5	190.0	38770	439.3	1	14.3
44	430	2.2	190.0	38770	478.0	1	14.1
251	430	7.0	190.0	38770	156.0	1	10.3
252	405	7.0	190.0	38770	156.0	1	7.9
253	350	7.0	190.0	38770	156.0	1	5.5
254	430	3.5	9.50	19385	156.0	1	9.5
255	435	10.5	285.0	58155	156.0	1	7.0



第 3 図 無 触 媒 酸 化 (石英管)

第 2 表 磁製管による酸化

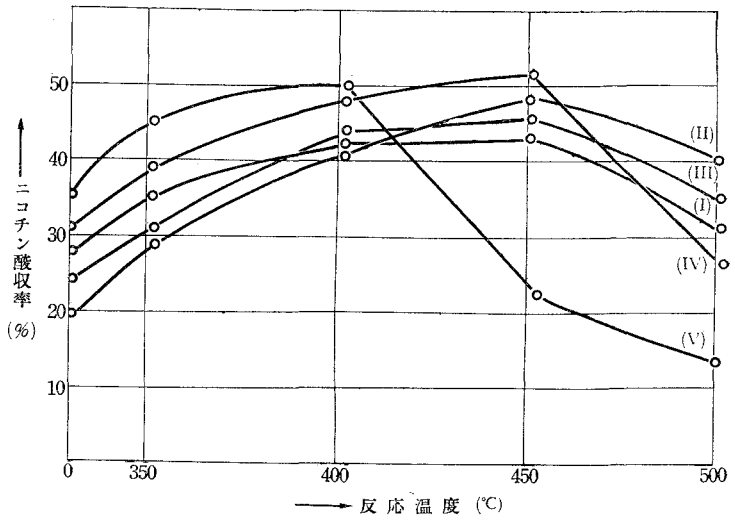
(担体, 充填物なし) (Mullite; $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$) に Fe_2O_3 3% を含む。

実験番号	反応温度 (°C)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	線速度 (cm/hr)	Air/キノリン (モル比)	反応時間 (hr)	ニコチン酸 収率 理論収率 (%)
1	350	7.2	115.8	23600	82.0	1	34.6
2	400	7.2	115.8	23600	82.0	1	41.7
3	450	7.2	115.8	23600	82.0	1	44.5
4	500	7.2	115.8	23600	82.0	1	25.9
5	350	8.0	156.8	31930	113.5	1	28.3
6	400	8.0	156.8	31930	113.5	1	41.2
7	450	8.0	156.8	31930	113.5	1	49.0
8	500	8.0	156.8	31930	113.5	1	30.7
9	350	8.0	211.2	43014	137.0	1	30.5
10	400	8.0	211.2	43014	137.0	1	42.8
11	450	8.0	211.2	43014	137.0	1	46.8
12	500	8.0	211.2	43014	137.0	1	32.1
13	350	5.5	189.2	38431	199.0	1	38.7
14	400	5.5	189.2	38431	199.0	1	47.8
15	450	5.5	189.2	38431	199.0	1	51.3
16	500	5.5	189.2	38431	199.0	1	27.4
17	350	3.2	181.4	36945	342.5	1	45.4
18	400	3.2	181.4	36945	342.5	1	49.7
19	450	3.2	181.4	36945	342.5	1	22.5
20	500	3.2	181.4	36945	342.5	1	15.9
21	450	2.8	181.4	36945	372.8	1	20.5
22	400	2.5	181.4	36945	419.1	1	49.5
23	450	4.0	105.6	21507	137.0	1	47.0
24	450	12.0	316.8	64511	137.0	1	38

のものを使用した。これは後程材質分析の結果，これに Fe_2O_3 3% 程度混入して居り，石英管を用いた結果を比較すれば，第二表に示す如く，触媒として充填物は入らないが，結果的には器壁による触媒作用として考へられるもので，実際に Fe_2O_3 を軽石に充填せしものを用いても可なり 20～30% のニコチン酸を得ることから，磁製管の影響があることが確認された。

線速度 23600～43014，反応温度 350～500°C，試料流量 2.5～8.0 g/hr，空気量/キノリンのモル比 82.0～419.1，反応時間 1 時間を範囲として行つた結果は，第 4 図に於て示される様に

空気量/キノリン 342.5 以上を除けば，何れの線速度に於ても，450°C に於てニコチン酸の収量が最大であり (図 4, I～IV)，342.5 以上の空気量/キノリンモル比では，ニコチン酸収量の最大なる反応温度は 400°C に移行することが分る (図 4, V)。又線速度稍一定の場合，空気量/



	反応時間	流量 (ℓ/hr)	滴下速度 (g/h)	理論空気量比	空気量/キノリンモル比
(I)	1	115.8	7.2	4.8	82
(II)	1	156.8	8.0	5.0	113.5
(III)	1	211.2	8.0	6.7	137.0
(IV)	1	189.2	5.5	9.6	199.0
(V)	1	181.4	3.2	15.0	342.5

第 4 図 無触媒酸化の反応温度と収率 (磁製管による影響)

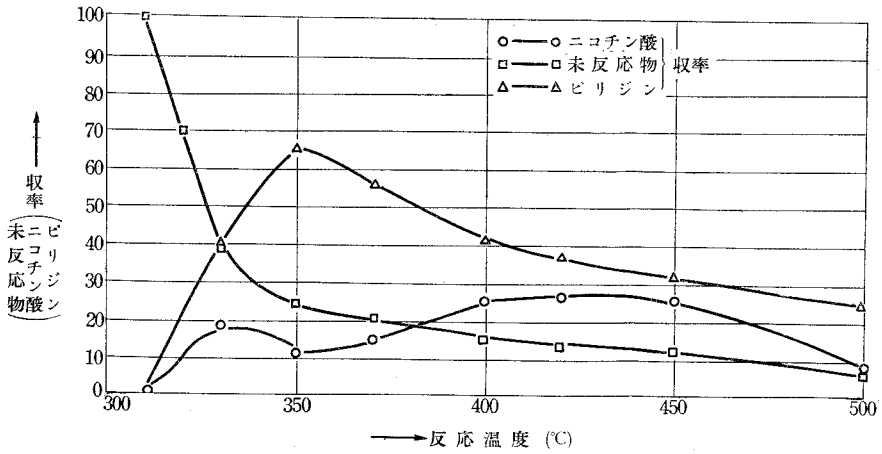
キノリン濃度増大では，350～400℃ に於て，ニコチン酸の収量を増大し，450～500℃ に於ては，同様にニコチン酸の収量の増大せんとする傾向が熱分解，酸化のため，逆に減少する結果を示し興味ある点である (第 2 表，実験番号 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20)。又空気量/キノリンモル比一定では，線速度の影響は 21507～38431 では，一定の収率を示すが，それ以上ではニコチン酸の収量は低下する。又流量一定，滴下速度の影響では (表 13, 17 ; 19, 21), 350, 450 ℃ を条件に入れると，高温 450℃ ではニコチン酸の収率は滴下速度大と共に増大し，低温 350 ℃ ではその収率は滴下速度小と共に増大することを示している。この関係は既報のイソキノリンの空気酸化の場合と類似する。

II. 触媒酸化

この実験では反応管は不透明石英管を用いた。SnO_2 を軽石に附着した触媒並びに $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ を軽石に附着した場合及び $Sn(VO_3)_4+SnO_2$・触媒も何れも，無触媒酸化 (石英管を用いる) に比較して遙かにニコチン酸の収率は上昇するし，それに伴つてピリジンの収率も，特に増大する傾向にあるニコチン酸の熱分解及び酸化の反応速度の増進のため，上昇してくる。此等について次の如く分けて示す。

第 3 表 SnO_2 触媒 (0.08 g/cc) (5～10 mesh)

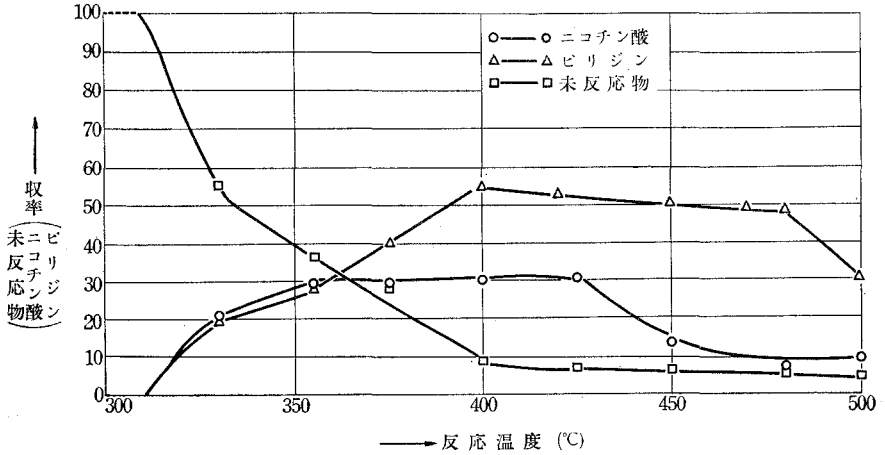
実験番号	反応温度 (℃)	浴温 (℃)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr/cc)	Air/キノリン (モル比)	反応時間 (hr)	ニコチン酸理論収率 (%)	ピリジン理論収率 (%)	$COCO_2$ 理論収率 完全燃焼 (%)
45	330	315	9	175	38890	112.4	1	18.0	40.0	4
46	350	325	9	175	38890	112.4	1	10.0	60.5	2
47	370	342	9	175	38890	112.4	1	14.0	55.0	11
48	400	370	9	175	38890	112.4	1	26.0	40.0	19
49	420	380	9	175	38890	112.4	1	25.5	36.0	25
50	450	395	9	175	38890	112.4	1	25.0	32.0	32
51	500	425	9	175	38890	112.4	1	7.0	25.0	61
52	330	300	5	195	33000	225.0	1	20.1	19.5	4.5
53	355	310	5	195	33000	225.0	1	28.6	28.5	6.0
54	375	325	5	195	33000	225.0	1	28.8	40.0	6.0
55	400	345	5	195	33000	225.0	1	29.0	55.0	8.0
56	425	350	5	195	33000	225.0	1	29.0	52.0	12.0
57	450	390	5	195	33000	225.0	1	12.8	50.0	31.0
58	480	415	5	195	33000	225.0	1	6.0	48.5	40.0
59	500	430	5	195	33000	225.0	1	9.0	30.0	54.0 (error 3%)
60	350	315	3	195	33000	375.0	1	29.5	28.0	—
61	400	350	3	195	33000	375.0	1	30.5	54.5	—
62	450	390	3	195	33000	375.0	1	11.5	50.5	—
63	500	440	3	195	33000	375.0	1	5.0	33.0	—



第 5 図 SnO_2 触媒/軽石 (Cl_2 なし) (0.35 g/4.5 cc 軽石) (5～10 mesh)
カルボン酸，ピリジン，未反応物の収率と反応温度
(理論空気量比 4.97，滴下速度 9 gr/hr)

II (イ) SnO_2 触媒/軽石 (0.35 g/4.5 cc) (5～10 mesh)

この実験では滴下速度（試料）は 3～9 g/hr に限定した。即ち 10 g/hr 以上又は 2 g 以下では，前者は収率は減少する。即ち反応管（直径 2.5 cm）の大さに限度がある理由によるし，後者は実験的に甚だ難しく，分析に困難を来たすために，除いた。従つて空間速度 33000～38890 の間に於て空気流量 175～195 ℓ/hr の範囲では，滴下速度 9 g/hr，理論空気量比約 5.07 の条件で，反応温度とニコチン酸収率との関係を見るならば，第 3 表，第 5 図の如く，400～425°C 間にニコチン酸の収率の最大点が見られる。併し，ニコチン酸の収率が無触媒酸化に比較し，意外に余り上昇しないのは，多量のニコチン酸生成が熱分解のために，完全燃焼及び，ピリジンへ脱炭酸化するためと考へられ，番号 48 に於て分かる如く，全転換率 85%，ニコチン酸及びピリジンへの転換率は 66% を示す点から，可なり反応が促進されている事が分かる。即ちこの場合は低温 350°C に於てピリジンの収率の最大点が現はれている。併し，350°C よりも 450°C の方が全転換率の大なる事が示されている。又ニコチン酸及びピリジンの転換率の総和は 350 °C の方が大であり，利用面から，ピリジンを主体とするならば，350°C を選ぶべきと考へられる。従つて未反応物は 300°C より高温 500°C に至るに従い，減少し，5% 程度に減少して来る。併し乍ら滴下速度を 5 g/hr に減少せしめた場合は，理論空気量比（ニコチン酸が得られると考へた場合の）9.9 の場合は，前と同様未反応物の%は温度上昇と共に減少してくるが，ニコチン酸の収率は 350～425°C 附近まで稍一定に近い値を示し，ピリジンの収率は 400°C を最大点として示され，漸次それ以上の温度と共に僅か乍ら減少する。この事実は第 6 図で示される様に第 5 図と比較して明らかに説明されうる。即ち第 5 図では 350°C に於て，ピリジンが最大であ



第 6 図 SnO_2 触媒 (Cl_2 なし) (0.35 g/4.5 cc) (5～10 mesh)
カルボン酸，ピリジン，未反応物の収率と反応温度
(理論空気量比 9.9，滴下速度 5 gr/hr)

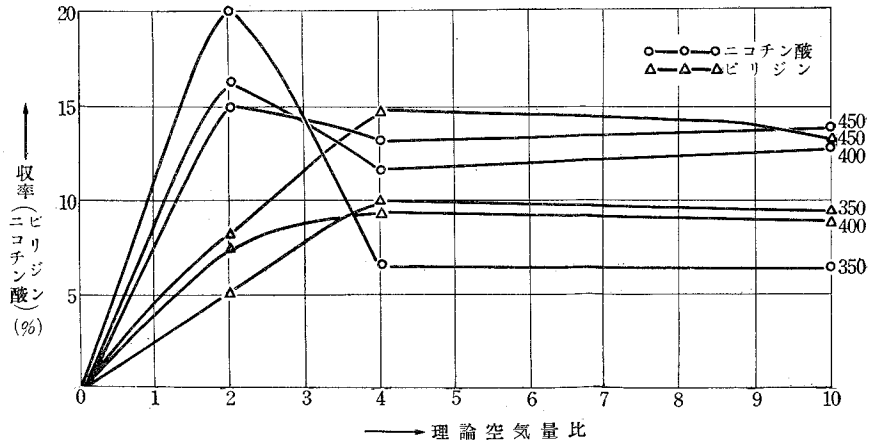
るが，その空気量/キノリン濃度がこの装置の大きさに適当しているからであるが，第6図の様に，その濃度が約2倍となつた場合には，キノリンの濃度の僅少のため，即ち空気による稀釈の甚しいため，350°C では酸化反応は第5図に比較して弱いと考へられ，ニコチン酸は稍大なるも，ピリジンは甚だ少いし，全転換量も同様少い。併し，温度の上昇により，始めて酸化反応が大となり，400°C に於てピリジンが最大値を示すに至る。第5図，第6図何れも完全燃焼の%は温度上昇と共に増大する。又3 g/hr の滴下速度で，空間速度33000で，流量195 ℓ/hr では，第6図に比較し，キノリン濃度が可なり小になるが，その影響の余りない事が第3表に於て示される。以上は軽石の大きさ 5～10 mesh のものについてであるが，20 mesh 以上，5 mesh 以下では，前者は収率は若干上昇するも，圧力がかかり，実験に不適当であり，後者は表面積は余りに減少し，収率は急激に減少するので，此処では省略した。即ち此の実験では，ニコチン酸の収率よりも，ピリジン収率を問題点とした。

II (ロ) SnO_2 触媒/軽石 (0.077 g/cc 径石) (10 mesh) (Cl_2 の影響)

0.077 g SnO_2/cc 軽石 の濃度の触媒に，実験的に精製を不充分にしたために，0.005 g/cc の Cl^- を含有した場合には，純粋な SnO_2 触媒に於ける酸化と可なり異なつた反応状況を示した。第4表，第7図に示すと，

第 4 表 SnO_2 触媒 (Cl_2 の影響) (0.077 g/cc 軽石) (10 mesh)

実験番号	反応温度 (°C)	浴温 (°C)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr/cc)	Air/キノリン (モル比)	反応時間 (hr)	ニコチン酸理論収率 (%)	ピリジン理論収率 (%)
64	350	325	9	70	33000	45.2	1	20.0	5.0
65	400	375	9	70	33000	45.2	1	16.0	7.5
66	450	400	9	70	33000	45.2	1	15.0	8.0
67	500	435	9	70	33000	45.2	1	10.0	5.5
68	350	330	9	140	33000	90.4	1	6.5	10.0
69	400	380	9	140	33000	90.4	1	11.6	9.5
50	450	415	9	140	33000	90.4	1	13.0	15.0
51	500	445	9	140	33000	90.4	1	7.0	6.0
52	350	320	5	195	33000	224	1	6.9	9.5
53	400	375	5	195	33000	224	1	12.8	9.0
54	450	415	5	195	33000	224	1	14.0	13.1
55	500	440	5	195	33000	224	1	7.5	5.5
56	350	325	3	195	33000	375	1	10.0	10.2
57	400	378	3	195	33000	375	1	15.0	9.5
58	450	423	3	195	33000	375	1	17.0	13.5
59	500	450	3	195	33000	375	1	9.0	5.9



第 7 図 SnO_2 触媒/軽石 (0.005 g/cc の Cl^- を含む) (0.07 g SnO_2/cc 軽石) (10 mesh)
カルボン酸，ピリジンの収率 (350～450°C) と理論空気量比
(滴下速度 5～9 g/hr，空間速度 33000 cc/hr/cc)

滴下速度は 5～9 g/hr，空間速度 33000 cc/hr/cc の範囲で行つた結果では，空気量/キノリン 45.2 では，350°C，400°C，450°C の順にニコチン酸が減少し，ピリジンは逆に 450°C を最大点としてそれ以上の温度では減少する。つまり理論空気量比 2 の場合である (実験番号 64～67)。併し，理論空気量比増大により，即ち理論空気量比 4 になるに及び，逆転し，350°C，400°C，450°C の順にニコチン酸の収量が増大する。ピリジンも 450°C が最大値を示す。即ち理論空気量比 4 以上では殆んどこの傾向が強く，キノリンの濃度による影響が低温 350°C では甚しく，高温につれて，その影響即ちこの場合はニコチン酸の収率の低下は少ない。併しピリジンの生成は 350°C，450°C に於いて，キノリン濃度の影響は多く，400°C に於いてその影響は少ない。何れにしろ，Cl^- の含有はニコチン酸及びピリジンの収率を各温度に渡つて減少させる結果を将来する。又 3 g/hr の滴下速度の場合も同様であるが，何れも収率は若干増大するのみである (滴下速度小のため)。

II (ハ) $Sn(VO_3)_4+SnO_2$ 触媒 (0.36 g/4.4 cc 軽石)

前報に於いて $Sn(VO_3)_4$ 単元触媒及び H_3PO_4, Na_2CO_3 を附着させ，担体を軽石に用いた 3 の例を報告したが，何れもピリジンを主目的として 450°C 以上でなければ生じない事，並びに H_3PO_4 附着の場合には，ニコチン酸の生成→ピリジンへの脱カルボン酸化の傾向の強い例を示したが，今回は低温 300°C 附近より高温 500°C 附近の広範囲について，SnO_2 を $Sn(VO_3)_4$ に添加し，脱カルボン酸化の弱い状態に置こうとして行つたものである。その結果を第 5 表に示す。

第 5 表に示される様に，空間速度 7000～43300 の範囲及び試料流量 3～10 g/hr，空気流量 70～195 ℓ/hr の範囲について行つた。150 ℓ/hr の空気流量，33300 の空間速度では，試料流量

第 5 表 $Sn(VO_3)_4+SnO_2$ 触媒 (0.36 g/4.4 cc 軽石)

実験番号	反応温度 (°C)	浴温 (°C)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr/cc)	Air/キノリン (モル比)	反応時間 (hr)	ニコチン酸理論収率 (%)
60	350	340	10	150	33300	86.4	1	54.6
61	400	370	10	150	33300	86.4	1	55.2
62	450	400	10	150	33300	86.4	1	63.4
63	500	465	10	150	33300	86.4	1	46.4
64	300	300	3	150	33300	288.3	1	—
65	320	310	3	150	33300	288.3	1	15.0
66	350	330	3	150	33300	288.3	1	59.0
67	380	350	3	150	33300	288.3	1	60.5
68	400	375	3	150	33300	288.3	1	62.6
69	450	400	3	150	33300	288.3	1	65.5
70	500	460	3	150	33300	288.3	1	39.0
71	320	305	5	195	43300	224.8	1	10.0
72	350	330	5	195	43300	224.8	1	47.0
73	380	355	5	195	43300	224.8	1	50.5
74	400	370	5	195	43300	224.8	1	57.5
75	450	405	5	195	43300	224.8	1	60.4
76	500	450	5	195	43300	224.8	1	40.5
77	380	345	3	90	20000	173.1	1	58.5
78	400	370	3	90	20000	173.1	1	61.0
79	450	410	3	90	20000	173.1	1	63.0
80	475	415	3	90	20000	173.1	1	55.0
81	380	340	3	70	7000	134.4	1	60.0
82	400	365	3	70	7000	134.4	1	62.5
83	450	405	3	70	7000	134.4	1	64.0
84	480	425	3	70	7000	134.4	1	60.5
85	450	405	3	90	9000	173.1	1	63.8
130	450	405	3	150	33300	288.3	3/4	50.0
131	450	405	3	150	33300	288.3	1/2	35.0
132	450	405	3	150	33300	288.3	1/4	18.0
133	455	400	3	150	33300	288.3	2	62.0
134	450	395	3	150	33300	288.3	3/2	64.0
135	450	398	3	150	33300	288.3	3	60.0

小即ち空気量/キノリンモル比の大なる場合一般にニコチン酸の収率を増大し，450°C に於いてその収率は最大である。450°C 以上では，完全燃焼及びピリジンへの酸化のために収率は可なり減少するものと考えられる (実験番号 60～70)。又試料流量 3 g hr 一定，軽石坦体 4.5 cc 一定，空間速度の関係を見るならば，33300 が最大の収率を示す (400～450°C)。又坦体容量 10 cc に増加した場合はニコチン酸の収率が増大する (実験番号 81～84；77～80；64～70)。又その反応時間と収率との関係を示せば，1 時間以内では収量悪く，少なくとも 1 時間以上必要である

(第11図に示される。)(実験番号130～134)。何れも反応温度450°Cが最適とされ，その最大収率は65.5%(実験番号69)である。併し，350°Cより可なりニコチン酸の収量が増大する点は，$Sn(VO_3)_4$ 単元触媒と異なる点である。

II (二) $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒 (0.5 g/4.4 cc 軽石) (10 mesh)

$Sn(VO_3)_4$ に SnO_2 の添加によつて可なりニコチン酸の脱カルボン酸化が350～450°Cに於いて著しく抑制されたが，$Sn(VO_3)_4:SnO_2$ のモル比を1:3に変えることにより，一層効果的結果を斉らしているが，その例を第6表に示す。

この表の実験番号86～91で分る様に，$Sn(VO_3)_4:SnO_2=1:1$ の場合よりもニコチン酸の

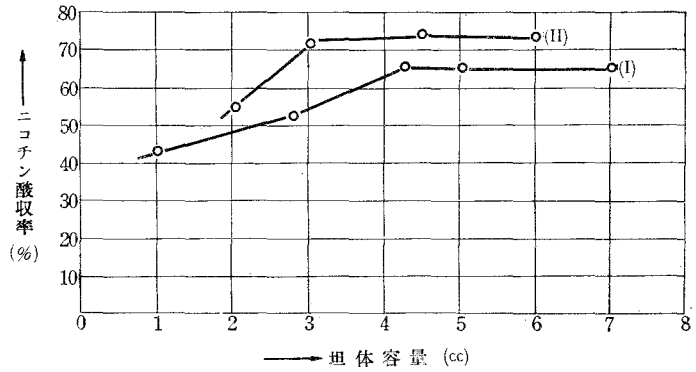
第6表 $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒 (0.53 g/4.4 cc) (10 mesh)

実験番号	反応温度 (°C)	浴温 (°C)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr/cc)	Air/キノリン (モル比)	反応時間 (hr)	ニコチン酸理論収率 (%)	備考
86	300	300	9.5	150	33300	90.8	1	—	
87	320	310	9.5	150	33300	90.8	1	15.0	
88	350	330	9.5	150	33300	90.8	1	69.3	担体容量
89	400	365	9.5	150	33300	90.8	1	74.0	4.5 cc
90	450	415	9.5	150	33300	90.8	1	65.2	
91	500	455	9.5	150	33300	90.8	1	50.4	
92	350	335	7.0	110	36600	90.5	1	65.7	
93	400	380	7.0	110	36600	90.5	1	72.0	3 cc
94	450	425	7.0	110	36600	90.5	1	58.2	
95	500	475	7.0	110	36600	90.5	1	46.3	
96	400	375	10.5	110	73300	60.3	1	45.2	1.5 cc
97	400	365	9.8	110	39300	64.6	1	52.8	2.8 cc
98	400	360	9.5	110	25300	66.7	1	67 2	4.3 cc
99	400	360	10.1	110	21500	62.7	1	65.2	5.1 cc
100	400	370	5.1	50	41700	56.4	1	40.7	1.2 cc
101	400	370	4.8	66	42600	79.0	1	53.2	1.5 cc
102	400	370	9.8	110	40700	64.6	1	60.2	2.7 cc
103	400	370	9.8	150	32600	88.1	1	74.0	4.5 cc
104	400	370	10.2	182	29900	102.7	1	60.5	6.0 cc
105	400	370	9.8	150	32700	88.1	2/3	50.4	
106	400	370	9.8	150	32700	88.1	1	74.0	
107	400	370	9.8	150	32700	88.1	3/2	70.0	反応時間
108	400	370	9.8	150	32700	88.1	2	69.8	との関係
109	400	370	9.8	150	32700	88.1	3	68.0	
110	400	370	9.8	150	32700	88.1	5	67.0	
126	400	375	10.5	110	15710	60.3	1	65.5	7.0 cc
127	400	370	8.0	130	65000	89.2	1	55.0	2.0 cc
128	405	370	8.0	130	21666	89.2	1	73.5	6.0 cc
129	400	370	9.8	150	32700	88.1	1/3	30.2	

収率が 350～500°C の広範囲に渡つて上昇している。又 400°C に於いて最大収率を示している点から，そのモル比 1:3 の方が遙かに低温に於いて有効的で，1:1 モル比の場合の最大収率を示す 450°C に比較し，反応速度が大である。この場合ニコチン酸及び完全燃焼の併列的反応が起き，ピリジンは殆んど生じていない。これは低温 350～450°C の範囲で，ニコチン酸生成の反応速度が $Sn(VO_3)_4$ 単元触媒では余り大でないが，$Sn(VO_3)_4+SnO_2$ によつて反応速度の増大となり，収率を高め，SnO_2 モル比の増大と共に，最大収率温度が更に 450°C より 400°C に移行したものと考えられる。併し乍ら，脱カルボン酸化への反応速度は殆んど少ない場合の例と考えられる（実験番号 86～91；60～63）（第 8 図参照）。

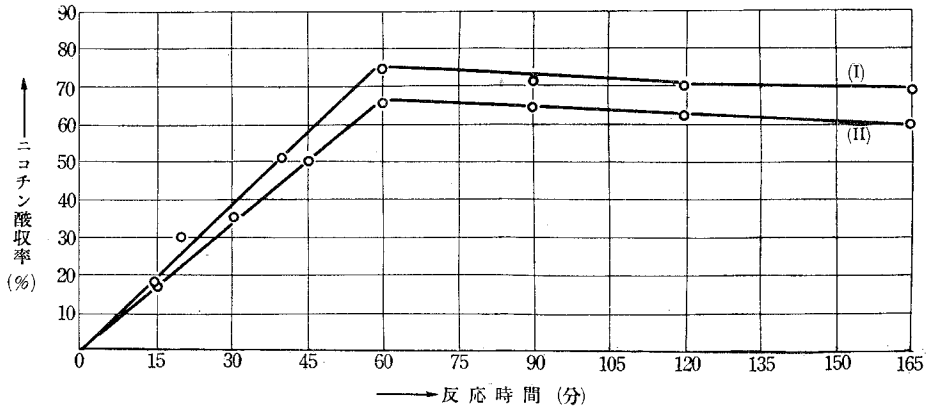
次に空気量/キノリンモル比，ほぼ一定（90.8～90.5），空間速度の影響を見るならば，各温度について，33300 より 36600 に空間速度を増大することにより，収量は減少する（実験番号 86～95）。又濃度（空気量/キノリン）モル比 60.3～66.7，21500～73300 の空間速度の変化の場合即ち，流量を一定にし，坦体容量を変えた場合には，25500 の空間速度即ち坦体容量 4.3 cc の場合が，400°C の反応温度に於いて，ほぼ一定のニコチン酸の良収率を示す。従つて此以下の容量では低収率を示し，此以上では殆んど一定収率となる。之の坦体の大きさは 10 mesh である（実験番号 96～99，126；89，93，127，128）

この図で分る如く，400°C では 4.3 cc 以上坦体容量が増大しても収率は増大しない。最適容量が存在することになる。何れも反応時間 1 時間，滴下速度 7.0～10.5 g hr の範囲である。又反応時間と収率との関係は 400°C の反応温度では，反応後 1 時間が最適であり，それまで急激に収率が増大する。併し 1 時間以後では僅か乍ら収率は減少し，5 時間後には 74% より 67



	反応温度 (°C)	時間 (hr)	滴下速度 (g/hr)	理論空気量比
(I)	400	1	9.5～10.5	2.8～2.6
(II)	400	1	7.0～9.5	4.0

第 10 図　$Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒/軽石 (0.53 g/4.4 cc) (10 mesh)
収率と坦体容量との関係



	$Sn(VO_3)_4$ SnO_2 モル比	触媒濃度 (g/cc)	空間速度 (cc/hr/cc)	反応温度 (℃)	理論空気量比
(I)	1:3	0.53/4.4	32700	400	3.8～4.0
(II)	1:1	0.36/4.4	33300	450	4.0

第 11 図 触媒酸化における反応時間と収率

%に減少し，$Sn(VO_3)_4:SnO_2=1:1$ に比較し類似的である。その関係を第 11 図に示す。

併し連続的操作上からは若干の収率の低下は免れないとすれば，1 時間以上と反応時間を限定する必要がある。実験番号 100～104 は流量並びに坦体容量を変えた場合であるが，坦体容量 4.5 cc 程度が収率の最大値を示していることからも，前上の結果とほぼ一致する。

次に $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒 (0.53 g/4.4 cc) に用いた坦体軽石の粒度の影響については第 7 表の如く，各温度について検討すれば，空間速度 33300，空気流量 150 ℓ/hr，空気量/キノリン 90.8 の一定条件の下では，350°C に於いては 20, 10, 5 mesh の順に 400°C に於いては 20, 10,

第 7 表 $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒 (0.53 g/4.4 cc) 粒度の影響

実験番号	反応温度 (℃)	浴温 (℃)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr/cc)	Air/キノリン (モル比)	担体の大きさ (mesh)	反応時間 (hr)	ニコチン酸理論収率 (%)	CO_2 完全燃焼 (理論%)	未反応物 (%) (error %)
111	325	310	9.5	150	33300	90.8	20	1	15.5	5.2	79.0 (0.3)
112	355	330	9.5	150	33300	90.8	20	1	69.8	7.1	22.1 (1.0)
113	407	365	9.5	150	33300	90.8	20	1	74.5	10.5	13.0 (2.0)
114	460	415	9.5	150	33300	90.8	20	1	65.0	20.0	12.0 (3.0)
115	505	455	9.5	150	33300	90.8	20	1	49.5	41.0	8.5 (1.0)
116	320	310	9.5	150	33300	90.8	5	1	14.0	3.0	80.0 (3.0)
117	350	330	9.5	150	33300	90.8	5	1	67.5	5.1	25.1 (2.3)
118	400	365	9.5	150	33300	90.8	5	1	72.5	7.4	18.1 (2.0)
119	452	415	9.5	150	33300	90.8	5	1	63.5	15.9	17.5 (3.1)
120	495	450	9.5	150	33300	90.8	5	1	46.5	35.0	15.5 (3.0)

5 mesh の順に，450°C ではほぼ前記と同様にニコチン酸の収量は減少する (実験番号 112, 88, 117; 113, 89, 118; 115, 90, 119)。

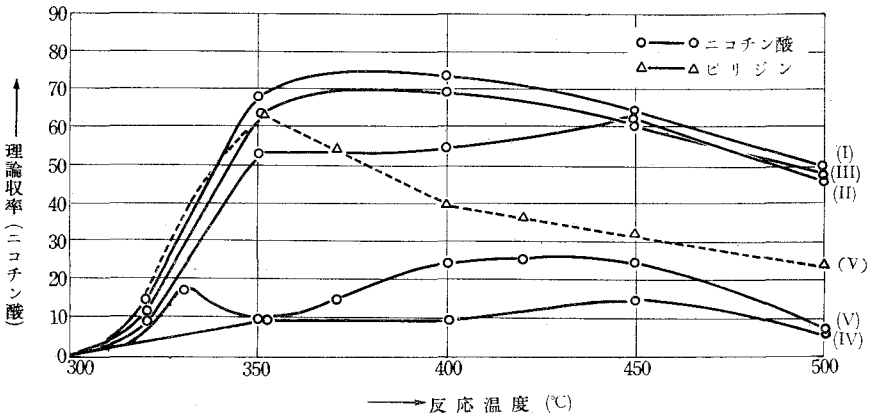
従つて担体の大きさは 20 mesh が良い結果を示すが，細粒度が極端になると収率は増大するも，圧がかかり，実験に困難を来たす。従つて本実験では 10 mesh 程度が良好と思われる。

次に $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒の軽石附着量の関係を示した場合が第 8 表である。

第 8 表 $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒 (0.32 g/4.4 cc) (10 mesh)

実験番号	反応温度 (°C)	浴温 (°C)	試料流量 (g/hr)	空気流量 (ℓ/hr)	空間速度 (cc/hr/cc)	Air/キノリン (モル比)	担体の大きさ (mesh)	反応時間 (hr)	ニコチン酸理論収率 (%)	CO_2 完全燃焼 (理論%)	未反応物 (%) (error %)
121	320	310	9.5	150	33300	90.8	10	1	13.0	3.5	80.0 (3.5)
122	350	335	9.5	150	33300	90.8	10	1	65.0	6.2	30.5 (2.3)
123	400	365	9.5	150	33300	90.8	10	1	70.5	8.4	19.5 (1.6)
124	450	415	9.5	150	33300	90.8	10	1	61.2	18.2	17.5 (3.1)
125	490	445	9.5	150	33300	90.8	10	1	48.5	39.2	20.7 (1.8)

即ち第 6 表に用いた場合よりも，触媒濃度を小にした場合 (0.32 g/4.4 cc) では，33300 の空間速度，空気量/キノリン 90.8，空気量 150 ℓ/hr の場合に，若干収率が低下することである (実験番号 121～125; 86～91)。又濃度 (触媒) を 0.53 g/4.4 cc 以上に高めるならば，増大する可能性は強いのであるが，附着が甚だ難しく，この程度に止めた。何れにしろ，400°C の反応温



	$Sn(VO_3)_4/SnO_2$	触媒 (g/cc)	空間速度 (cc/hr/cc)	理論空気量比	滴下速度 (g/hr)
(I)	1/3	0.53/4.4	33300	3.8～4.0	9.5
(II)	1/3	0.32/4.4	33300	3.8～4.0	9.5
(III)	1/1	0.36/4.4	33300	3.8	10.0
(IV)	SnO_2 (Cl を含む)	0.07/4.4	33300	4.0	9.0
(V)	SnO_2 (pure)	0.35/4.5	38890	4.97	9.0

第 8 図 $Sn(VO_3)_4$ と SnO_2 の mol 比変化における反応温度と収率

度に於いて収率は最大値を示す。

II (ホ) $Sn(VO_3)_4$ と SnO_2 とのモル比変化に於ける反応温度と収率

既に $Sn(VO_3)_4$, SnO_2 触媒につき述べたが，之を総括すると，第8図に示される。

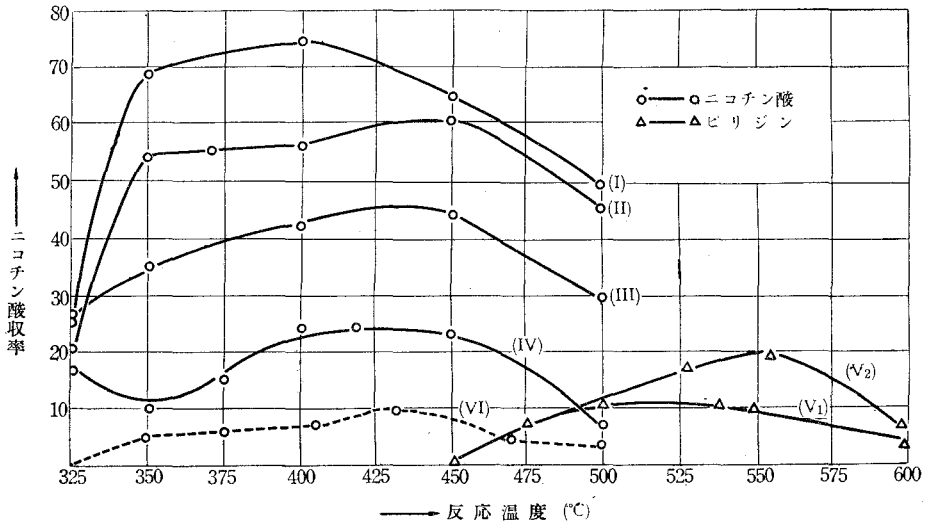
何れも300℃附近，500℃以上ではニコチン酸収率は少ないが，350～450℃の反応温度では夫々につき収率の良い条件をとつて比較すると，空間速度33300，理論空気量比4～5，滴下速度9～10 g/hr に於いて次の順位でニコチン酸の収率が減少する。

$1\,Sn(VO_2)_4 \cdot 3\,SnO_2$ (0.36 g/4.4 cc 軽石) > $1\,Sn(VO_3)_4 \cdot 3\,SnO_2$ (0.33 g/4.4 cc 軽石)
> $1\,Sn(VO_3)_4 \cdot 1\,SnO_2$ ·(0.36 g/4.4 cc 軽石) > SnO_2/軽石 (0.35 g/4.5 cc pure)
> SnO_2/軽石 (0.35 g/4.5 cc (Cl_2 をふくむ))

但し350℃に於いて SnO_2 はピリジン収率最大値を示すのが特異である。又ニコチン酸の収率が350～450℃に渡つて，余り変動がないのは寧ろ $Sn(VO_3)_4$ と SnO_2 の複合触媒である。比較的用い易い触媒であることが確認される。

II (ヘ) 触媒及び無触媒酸化に於ける反応温度と収率

総括的に今迄に用いられた触媒及び無触媒に於ける酸化を反応温度と収率との関係で示す



			反応時間 (hr)	理論空気量比
(I)	$Sn(VO_3)_4+3\,SnO_2$ 0.53 g/4.4 cc	空間速度 33300	1	4.0
(II)	$Sn(VO_3)_4+SnO_2$ 0.36 g/4.4 cc	〃 33300	1	4.0
(III)	磁製管による無触媒	線 速 度 23600	1	4.0
(IV)	SnO_2 (pure) 0.35 g/4.4 cc	空間速度 33300	1	4.0
(V_1)	$Sn(VO_3)_4$ 5 g/2.8 cc	〃 33300	1	3.8
(V_2)	$Sn(VO_3)_4$ 5 g/2.8 cc+$H_3PO_4$5.6 cc	〃 33300	1	3.8
(VI)	石英管による無触媒	線 速 度 22420	1	4.0

第 9 図 触媒及び無触媒酸化反応温度と収率

と，第9図になる。

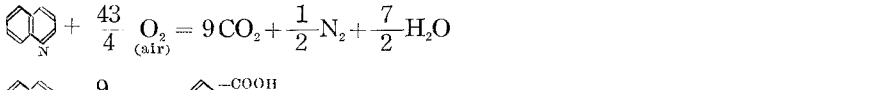
第8図に於いて既に $Sn(VO_3)_4$ 及び SnO_2 について述べたが，無触媒酸化と比較すれば，石英管による無触媒酸化では，330°C 附近より反応し，最大収率 10% (430°C に於いて) で線速度 22420，理論空気量比 4.0 で最低で，磁製管による（無添加物）無触媒酸化は Fe_2O_3 その他の影響により，石英管による無触媒酸化よりも収率は増大する。これを順位にしてあらわせば，収率の点から

$$1\,Sn(VO_3)_4\cdot 3\,SnO_2 > 1\,Sn(VO_3)_4\cdot 1\,SnO_2 >(\text{磁製管による無触媒酸化})$$
$$> SnO_2(\text{pure}) > SnO_2\,(Cl_2\ \text{をふくむ}) >(\text{石英管による無触媒酸化})$$

但し，$Sn(VO_3)_4+H_3PO_4$，$Sn(VO_3)_4$ は 500°C 以上でピリジンを生成し，550°C が最大値を示す。従つて $Sn(VO_3)_4\cdot 3\,SnO_2$ が無触媒酸化に比較して良い結果を示す。何れの場合も ($Sn(VO_3)_4$ 単元触媒を除いて，350°C より急激に収率が上昇し，450°C 以上に於いて，その熱分解又は酸化が進行する。

II (ト)　物質収支の検討

$Sn(VO_3)_4+3\,SnO_2$ 系触媒 (0.53 g/4.4 cc 軽石) について特に物質収支を検討した。第7表，並びに (0.32 g/4.4 cc) の濃度のものでは，第8表に示される。即ち（試料を S モルとすると）



これらの反応に於いて，ニコチン酸，完全燃焼の場合

$$\text{完全燃焼モル\%} = \frac{[(CO+CO_2)\,\text{モル数}]-3\,(\text{ニコチン酸モル数})}{9S}\times 100$$

但し，ニコチン酸以外にピリジンが完全燃焼と共に得られる場合，次の如く完全燃焼%を表わす。

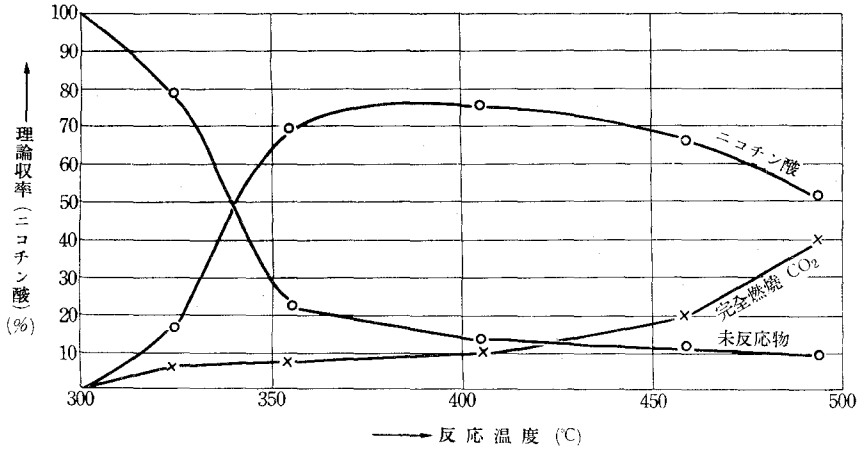
完全燃焼モル%

$$= \frac{[CO+CO_2\ \text{モル数}]-3\,(\text{ニコチン酸モル数})-4\,(\text{ピリジンモル数})}{9S}\times 100$$

若しも高温でピリジンと完全燃焼のみであれば，

$$\text{完全燃焼モル\%} = \frac{[(CO+CO_2)\,\text{モル数}]-4\,(\text{ピリジンモル数})}{9S}\times 100$$

何れもモル%であらわす。又 CO_2 はガス分析と全気体流量より，又 CO も CO_2 に換算して計算する。実験番号 111～120；121～125 で分る如く，未反応物の実験値が計算値に比較し，



試料流量 g/hr	空気流量 ℓ/hr	空間速度 (cc/hr/cc)	坦体の大いさ (mesh)	反応時間 (hr)
9.5	150	33300	20	1

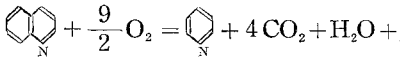
第 12 図 $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒収支の検討

最高 3.5% 程度低く出る。これはガス分析に於ける測定温度の補正をしない点からくると思われる。又キノリン未反応物の容量分析から誤差も僅か乍らありうると考えられる。併しガス分析については正確にはガスクロマイグラフイによるべきと考えられる。第 12 図にその物質収支を示す。

IV. 熱力学的考察

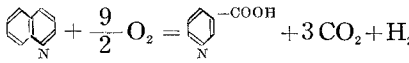
前報に於いてキノリンよりピリジン生成の場合の平衡恒数を計算し，熱力学的に酸化合成の可能性を論及したが，今回はその中間段階としてのニコチン酸の熱力学的可能性及びキノリン酸の生成に関して熱力学的データにより求めて見る。

(1) キノリン→ピリジン生成



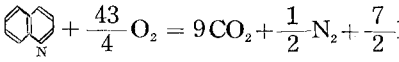
$$+\frac{9}{2}O_2=+4\,CO_2+H_2O+464.3\ \text{kcal/mol}$$

(2) キノリン→ニコチン酸生成



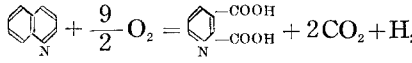
$$+\frac{9}{2}O_2=+3\,CO_2+H_2O+448.7\ \text{kcal/mol}$$

(3) キノリン→完全燃焼



$$+\frac{43}{4}O_2=9\,CO_2+\frac{1}{2}N_2+\frac{7}{2}H_2O+1122.3\ \text{kcal/mol}$$

(4) キノリン→キノリン酸生成



$$+\frac{9}{2}O_2=+2\,CO_2+H_2O+447.9\ \text{kcal/mol}$$

(1) ピリジン生成の平衡恒数と反応温度

T°K	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\log K_p$	343	257	208	174	150	132	120	101

○ $\left(\log K_p = \frac{464300}{4.573\,T} + 0.875 \log T + 3.31\right)$

(2) ニコチン酸生成の平衡恒数と反応温度

T°K	298	300	400	500	600	700	800	900	1000
$(-\Delta H_T)$	44873	448741	448724	448800	449173	449257	449573	449979	450424
$(-\Delta S_T)$	11.157	11.055	11.027	11.3013	11.589	12.532	12.436	12.523	15.057
$(-\Delta G_T)$	—	445425	444313	443150	442218	440526	439624	438709	435363
$\log K_p$		324.5	242.7	193.6	161.09	137.5	120.1	106.5	95.1

(3) 完全燃焼に於ける平衡恒数と反応温度

T°K	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\log K_p$	1241	832	628	506	424	366	322	288	245

○ $\left(\log K_p = \frac{1122300}{4.573\,T} + 2.1875 \log T + 9.3\right)$

(4) キノリン酸生成の平衡恒数と反応温度

T°K	298	300	400	500	600	700	800	900	1000
$(-\Delta H_T)$	447992	447987	447833	447974	448316	448886	449672	450922	452032
$(-\Delta S_T)$	38.672	38.653	37.984	38.374	38.704	40.000	41.104	42.254	43.604
$(-\Delta G_T)$		436491	432639	428787	425094	420886	416789	412902	408428
$\log K_p$		318.2	236.4	187.4	154.8	131.4	113.8	100.2	89.2

(1), (3) は何れも Nernst's equation

$$\left(\log K_p = -\frac{Q_p}{4.575\,T} + 1.75 \log T \sum n_j + \sum n_j c_j\right)$$

より求めた。又 (2), (4) は次式により求めた。

$$\left(\log K_p = -\frac{(-\Delta G_T)}{4.575\,T}\right), \quad \left(\Delta G_T^\circ = \Delta H_p^\circ - T(\Delta S_T^\circ)\right)$$

$$\left(\Delta S_T^\circ - \Delta S_{298}^\circ = \int_{298}^{T} \frac{\Delta C_p^\circ}{T} dT\right), \quad \left(\Delta H_T^\circ = \Delta H_{298}^\circ + \int_{298}^{T} \Delta C_p^\circ \, dT\right)$$

$\sum n_j$: 生成系と原系とのモル数の差

Q_p: 反 応 熱

T: 絶対温度 (°K)

ΔG_T: T°K に於ける遊離エネルギー変化

ΔH_T: T°K に於ける熱含量の変化

ΔS_T: T°K に於けるエントロピー変化

ΔC_p: 恒圧 p に於ける熱容量の差

キノリンよりニコチン酸生成の可能性は，平衡恒数が 200～1000 °K 附近の実験室で行え

る程度の温度では明らかに(+)である。(2)式よりされる。又これに伴なつて完全燃焼も，並びにピリジン生成も同様に云えることである。併しキノリン酸については，熱力学的に K_p は⊕であり，合成可能であるが，本実験で Skraup Test[22] 即ち硫酸第一鉄の水溶液に対して赤色を呈しない点より，少なくとも α- カルボン酸の生成即ちこの場合はキノリン酸 (α, β- カルボン酸) の生成が起きない事が分つている。従つて既報[23] に於ける硫酸酸化の場合と同様の結果を示し，300°C 以上の温度では，キノリン酸が生成されたとしても，熱分解のためにニコチン酸へ移行するか，又は更に低温部に於いて反応制御を工夫するならば，捕集されるかも知れぬが，この点は今後の問題点である。又触媒作用に関しては，キナルジン[24]，イソキノリンの酸化[25] 同様

$$Sn(VO_3)_4 \rightarrow SnO_2 + 2V_2O_5 \leftrightarrows SnO_2 + 2V_2O_4 + 2O$$
$$\downarrow\uparrow$$
$$SnO + 2V_2O_4 + 3O$$

いずれも発生機の酸素の強力な酸化作用と，その酸素の欠乏を空気によつて充たされて，平衡が成立されて行くものと考えられる。340°C に於けるアルコールの SnO_2 による酸化作用の様な挙動を示す様に考えられる。従つて V_2O_5 に SnO_2 のモル数の増大した状態で酸化作用が行われる事に相当する。

V. 結　　語

1) 無触媒酸化（不透明石英管による場合）では，ニコチン酸生成最適条件は，線速度 38770 cm/hr，空気流量 190 ℓ/hr，空気量/キノリン モル濃度 365.0～478.0 程度で，反応時間 1 時間以上，430°C 附近で 14% のニコチン酸収率を示す。

2) 無触媒酸化（磁製管による場合）では，正確には，触媒反応に入るが，Fe_2O_3 等の磁製管に於ける含有のための器壁反応が 350～500°C に於いて起きること。又 Fe_2O_3 のみにしても 20～30% の収率を示す。最適条件；450°C，線速度 384.31 cm/hr，空気流量 189.2 ℓ/hr，空気量/キノリン モル濃度 199.0 で 51.3% のニコチン酸収率を示す。又理論空気量比 15 倍では，ニコチン酸の最高値は 400°C に移行する。

3) SnO_2 触媒 (0.08 g/cc) (5～10 mesh) は純粋に近いものではニコチン酸の収率は一般に少なく，それに対してピリジン生成即ちニコチン酸の熱分解又は酸化が 310°C 附近より起ること。理論空気量比 9.9，滴下速度大では 400°C 附近にピリジン最高収率 55% を示す。ニコチン酸は 30% 附近に止まる。

4) SnO_2 触媒の Cl_2 による影響によつて，ニコチン酸及びピリジンの生成が甚だ阻害され，滴下速度 5～9 g/hr，空間速度 33000 では，理論空気量比 2 のとき，ニコチン酸の最高収率 (20%, 16%, 15%) を示し，350°C, 400°C, 450°C の順に低下し，理論空気量比大と共に，急激に減少し，ピリジンが急激に増大し，理論量比 4 を境として一定となる (10%, 9.4%, 14.6%)。

5) $Sn(VO_3)_4+SnO_2$ 触媒/軽石 (0.36 g/4.4 cc) (10 mesh) では，反応温度 450°C が最適温度で，空間速度 33300，反応時間 1.5 時間以上，滴下速度 3 g/hr の場合，最高収率（ニコチン酸）を示す。450°C 以上ではニコチン酸の酸化熱分解が起る。

6) $Sn(VO_3)_4+3SnO_2$ 触媒/軽石 (0.53 g/4.4 cc) (10 mesh) では，

(イ) SnO_2 のモル数の添加と共に収率を増大する（ニコチン酸）。400°C に於いて空間速度 33300，理論空気量 3.8～4.0 で最高収率（ニコチン酸）75% を示す。此の触媒は濃度小と共に収率を減少する。又収率は 350～450°C までは増減が少ない。使用に適すること。

(ロ) 粒度は 20 mesh が収率を大にするが，化学工学的には 10 mesh がよいこと。

(ハ) 反応時間は 1 時間以上必要である（一定値をうる）。

(ニ) 坦体容量は (4.3～4.5 cc) を限度とし，それ以上は収率は殆んど増大しない。

(ホ) 物質収支では約 3.5% の誤差があること。正確にはガスクロマトグラフイを使用すべきである。

7) (イ) 触媒酸化と無触媒酸化では触媒酸化が各温度に渡つて，ニコチン酸の収率は遙かに大であること。但し磁製管使用の場合は可なり器壁反応により収率のよいこと。

(ロ) $Sn(VO_3)_4$ と SnO_2 とによる複合触媒では，$Sn(VO_3)_4:SnO_2=1:3>1:1>$ 磁製管による場合 $>0:1\ (1:0)>$ 無触媒の順にニコチン酸の収率が低下する。但し SnO_2 はピリジンを併発すること，及び高温で $Sn(VO_3)_4$ 単元触媒がピリジンを得ること。

8) 熱力学的にニコチン酸生成は可能である。キノリン酸の生成は可能なるも，本実験の温度内では得られなかつたのは熱分解によるものと考える。

本実験では終始御指導下さつた理学博士佐藤久次教授に厚く感謝の意を表す。又実験を援助された山田国雄，蠣崎晃弘，穂坂既一，飯島孝，轟木清幸の諸工学士に感謝の意を表す。又本実験の試料については富士鉄株式会社（輪西）の労をわずらわし，種村正化工部長，玉置喜平次氏に併せて感謝の意を表す。又本実験の一部は北海道科学研究費によつてなされた事を附記する。

（日本化学会，北海道地方大会講演——室蘭富士鉄株式会社．昭和 33 年 7 月）

（昭和 34 年 4 月 30 日受理）

文　　献

1) 小松藤男：コールタール協会誌，**6**, 49 (1954).
2) C. F. Woodward, C. O. Badgett and Jerome, G. Kaufman: Ind. Eng. Chem. **36**, 202 (1896).
3) Dr. F. Raschig, G. mb. u. Brit. 710, 192, June. 9 (1954).
4) C. F. Woodward, C. O. Badgett, and J. J. Willaman: J. Ind. Eng. Chem. **36**, 540 (1944).
5) Yokoyama: Bull. Chem. Soc. Japan. **1**, 1038 (1932).
6) Craver (to Barrett), u. s. Patent, 1, 489, 741 (1924).

7) Huber: Ann. **141**, 271 (1867).
8) Laiblin: Ber. **10**, 2136 (1877).
9) Weidel: Ann. **165**, 331 (1873).
10) Woodward, Badgett and Kaufman: J. Ind End. Chem, **36**, 544 (1944).
11) Milbauer: I. Chem. Obzar, **11**, 1, 65, 132, 183, 208 (1936).
12) Lauro, M. F.: Ind. Eng. Chem. Anal. Ed. **3**, 401 (1931).
13) Bradstreet. R. B.: Chem. Rev. **27**, 331 (1940).
14) Weidel, H.: Ann. **165**, 330 (1873).
15) Max. B. Mueller: U. S. 27, 2513099 (1950).
16) C. F. Woodward, C. O., Badgett and Jerome, G. Kanfman; Ind. Eng. Chem. **36**, 202 (1896).
17) 小松藤男: 化学と電気 (伊藤超短波研究所), **4**, 16 (1956).
18) 小松藤男: 室工大研報, **2**, 93 (1955).
19) König. W.: J. Prakt. Chem, **66**, 150 (1904).
20) Waisman. H. A. and Elevehiem, C. A.: Ind. End, Chem. Anal. Ed., **13**, 121 (1941).
21) W. Fresenus und A. Krutenacker: Zeitschrift. für Analytische Chemie **136**, 411～15 (1952).
22) Taylor and Baker: Sidgwicks Organic. Chemistry of Nitrogen 533 (1937) (Oxford).
23) 小松藤男: 室工大研報, **1**, 709 (1954).
24) 小松藤男: コールタール協会誌, **10**, 525 (1958).
25) 小松藤男: コールタール協会誌, **10**, 575 (1958).

高さを考慮せる桁梁の挫屈荷重に関する理論的並びに実験的研究

中村作太郎

Theoretical and Experimental Studies in the Buckling Load of Beams with Reference to their Depth

Sakutaro Nakamura

Abstract

The present writer induced and solved fundamental differential equations about the buckling load of deep beams having unit concentrated load on any point, supported in some different conditions.

He strictly calculated the least buckling load on any point of these deep beams and compared the buckling state of each beam.

Then, the writer made experiment in the buckling or breaking load of small model beams of bamboo having various different ratios of width and depth in rectangular section and discussed the comparison of these experimental values and the calculating results obtained by his applying the above theoretical equation of buckling load and the formula of bending breaking load.

I. 緒　　言

桁梁の挫屈理論[1)-4)]には種々あるが，著者は高さを考慮せる桁梁の挫屈荷重に関する理論と実験の研究を行つた。すなわち，その理論については，高さに比べ幅の狭い矩形断面の梁が数種の支持状態にある場合を取扱い，実験に関しては，高さに比べ幅の狭いもの，幅に比べ高さの小さいものなど数種の小形模型の竹梁について，挫屈，破壊実験を行つた。高さに比べ，幅の狭い矩形断面の梁は，水平主軸に対する曲げの剛性が垂直主軸に対する曲げの剛性よりも著しく大であるから，垂直荷重を受けた場合，この荷重が余り大きくない間は，曲げの平面内で梁の垂直撓みもまた極く小さい。しかし，垂直荷重が段々大きくなり，ある限度を超過すると梁に挫屈を生じその中心軸線は曲げの平面から側方に移動する。この際，梁の中心軸線が曲げの平面から外れると捩り作用も働くから，梁は曲げの剛性のみならず捩りの剛性もまた大なる程挫屈が起り難い事になる。この種の問題は，L. Prandtl, A. G. M. Michell, H. Reissner, J. Prescott, S. Timoshenko, A. Koroboff, A. N. Dinnik, K. Federhofer, Dr. Fritz Stussi

の諸氏によつて研究されたところであるが，その研究が何れも断片的なるに鑑み，著者は，任意の単一集中荷重を受ける数種の梁，すなわち，両端単純支持梁（両端では水平垂直両変位に対し鉸），両端挾持梁（両端では水平変位に対し固定，垂直変位に対しては，鉸），両端固定梁（両端では水平垂直両変位に対し固定）の場合を取扱い，挫屈現象を表わす一般的の基本微分方程式の誘導より出発し，最小挫屈荷重を与える係数を，複雑なる数式の展開と処理，すなわち無限級数の導入と連立方程式の解並に，繰返えし試索法による函数方程式の逐次数値計算などの併用によつて求めた。更に，著者は挫屈荷重の実験を行うため，竹の小形模型梁を製作し，その中央点に集中荷重を逐次追加する事によつてその挫屈，破壊荷重と，そのときの撓み値などを求めた。すなわち，試験模型梁としては，孟宗竹の割竹にて製作せる数種の梁，支間，$l=17.70$ cm，30本の試験梁の平均断面，幅 0.661 cm×高さ 0.501 cm（表皮下側），22本の試験梁の平均断面，幅 0.604 cm×高さ 0.479 cm（表皮上側），15本の試験梁の平均断面，幅 0.431 cm×高さ 0.545 cm（表皮側面）並びに，単一の試験梁，幅 0.401 cm×高さ 0.624 cm，及び幅 0.306 cm×高さ 0.702 cm のもの各3本ずつ（何れも表皮側面）の中央点に逐次追加集中荷重を載せ，支持条件は，30本，22本，15本の場合は何れも両端単純支持，単一試験梁6本については，断面の異なるもの2本ずつについて，両端単純支持，両端挾持，両端固定の三通りの支持状態について実験を行つた。実験に用いた梁は，上述の如く，幅に比べ高さの割合小さいものと，幅に比べ高さの割合大きいものがあつたが，その各々について，著者の挫屈荷重解式並びに曲げ破壊公式などによつて計算し実験値との比較を試みた。尚，孟宗竹に関しては，一連の実験的研究を行い，梁の計算に必要な物理的性質を明らかならしめた。また，計算値と実験値の比較について感じた事を述べれば次の如くである。幅に比べ割合高さの大きい梁については，著者の理論解式によつて求めた最小挫屈荷重の値は略々実験値と一致するが，幅に比べ高さの小さい梁については寧ろ，曲げ破壊公式によつて求めた破壊荷重の値と接近する傾向のあを事を見出した。

II. 背の高い桁梁の挫屈に関する理論的研究[3),5)]

1. 基本微分方程式の誘導

幅に比べ背の高い一つの梁を水平に置き，その中心軸線を Z 軸，水平軸を X 軸，鉛直軸を Y 軸とすれば，垂直荷重に依る曲げ作用は YZ 平面内に於いて起る。この際，水平軸に対する曲げの剛性が鉛直軸に対する曲げの剛性に比して著しく大であれば限界荷重に達ずるまでは断面の廻転も中心軸線の移動も極める小さい。今第1図は，挫屈した梁の中心軸線を平面図で示したものとずる。一横断面 G の一方の側が他方に及ぼす作用は，一偶力と一鉛直力とであつて，此の偶力は，M_x，M_y 及び M_z の三つの分偶力に分けて考える事が出来る。今ここに

この水平面上の分偶力のみについて，GG_1 の釣合を考えると

$$(M_z+dM_z)-M_z\cos d\varphi+M_x\sin d\varphi=0 \qquad (1)$$

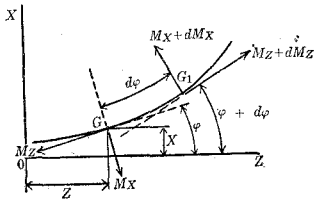
$d\varphi$ は極く小さな角だから

$$\cos d\varphi \doteqdot 1, \qquad \sin d\varphi \doteqdot d\varphi$$

$$\therefore \quad dM_z+M_x d\varphi=0$$

すなわち，

$$\frac{dM_z}{dZ}=-M_x\frac{d\varphi}{dZ} \qquad (2)$$



第1図　挫屈せる梁の中心軸線平面図

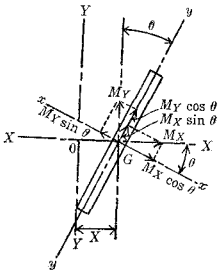
然るに

$$\frac{dX}{dZ}=\tan\varphi \doteqdot \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dZ}=\frac{d^2X}{dZ^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dM_z}{dZ}=-M_x\frac{d^2X}{dZ^2} \qquad (3)$$

(3)式は，GG_1 の部分に加わる荷重及び剪断力の影響を省略して求めたものである。G 点における梁の横断面図である第2図に於いて，図心 G は X だけ移動し，且つ，θ だけ捩られている。この X 及び θ の値は，極く小さな値であるから，$\cos\theta \doteqdot 1$，$\sin\theta \doteqdot \theta$ 尚，移動後の横断面の慣性主軸を，x，y とすれば

$$\left.\begin{aligned} X&=x\cos\theta+y\sin\theta \doteqdot x+y\cdot\theta \\ Y&=y\cos\theta-x\sin\theta \doteqdot y-x\cdot\theta \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$



第2図　横断面図

I_x 及び I_y を慣性主軸 x，y に関する断面の二次モーメントとし，これに対応する曲げモーメントを求めると

$$\left.\begin{aligned} M_x&=M_X\cos\theta-M_Y\sin\theta \doteqdot M_X-\theta M_Y \\ M_y&=M_X\sin\theta+M_Y\cos\theta \doteqdot \theta M_X+M_Y \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

yz 及び zx 平面に於いて

$$\left.\begin{aligned} EI_x\frac{d^2y}{dz^2}&=M_x=M_X-\theta M_Y \\ EI_y\frac{d^2x}{dz^2}&=M_y=\theta M_X+M_Y \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

x，y の代りに，X，Y を用いると，(4)式に依り

$$X=x+y\theta, \qquad \frac{dX}{dZ}=\frac{dx}{dz}+y\frac{d\theta}{dz}+\theta\frac{dy}{dz}$$

$$Y=y-x\theta,\qquad \frac{dY}{dZ}=\frac{dy}{dz}-x\frac{d\theta}{dz}-\theta\frac{dx}{dz}$$

$$\therefore\quad \frac{d^2X}{dZ^2}=\frac{d^2x}{dz^2}+\theta\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}\frac{d\theta}{dz}+y\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

$$\frac{d^2Y}{dZ^2}=\frac{d^2y}{dz^2}-\theta\frac{d^2x}{dz^2}-2\frac{dx}{dz}\frac{d\theta}{dz}-x\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

然るに，中心軸線上の点に就いて考えているのだから

$$\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dz}=0,\qquad x=y=0$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dZ^2}&=\frac{d^2x}{dz^2}+\theta\frac{d^2y}{dz^2}\\ \frac{d^2Y}{dZ^2}&=\frac{d^2y}{dz^2}-\theta\frac{d^2x}{dz^2}\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

(6)式より

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{\theta M_X+M_Y}{EI_y},\qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{M_X-\theta M_Y}{EI_x}$$

を(7)式右辺に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dZ^2}&=\frac{\theta M_XI_x+M_YI_x+\theta M_XI_y-\theta^2M_YI_y}{EI_xI_y}=\frac{\theta M_X(I_x+I_y)+M_Y(I_x-\theta^2I_y)}{EI_xI_y}\\ \frac{d^2Y}{dZ^2}&=\frac{M_XI_y-\theta M_YI_y-\theta^2M_XI_x-\theta M_YI_x}{EI_xI_y}=\frac{M_X(I_y-\theta^2I_x)-\theta M_Y(I_x+I_y)}{EI_xI_y}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$M_Y=0$，$\theta=0$ の場合は，

$$\frac{d^2Y}{dZ^2}=\frac{M_X}{EI_x}\tag{9}$$

となり，普通の場合の関係を得る。尚，捩りモーメント M_z と捩れ角 θ との関係は，梁の捩りの剛性係数を C とすれば，

$$\tau=\frac{d\theta}{dz}=\frac{M_z}{C}\tag{10}$$

$$\frac{dM_z}{dZ}=C\frac{d^2\theta}{dz^2}$$

$\therefore$ (3)式に依り，

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}=-M_x\frac{d^2X}{dZ^2}\tag{11}$$

$\therefore$ (8)式の $\dfrac{d^2X}{dZ^2}$ を代入すると，

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_X}{EI_xI_y}\left\{\theta M_X(I_x+I_y)+M_Y(I_x-\theta^2I_y)\right\}=0 \tag{12}$$

これが挫屈現象を表わす基本方程式である。

I_x に対し，I_y は極めて小さいからこれを省略すれば

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_X}{EI_y}\left(\theta\cdot M_X+M_Y\right)=0 \tag{13}$$

$M_Y=0$ なら

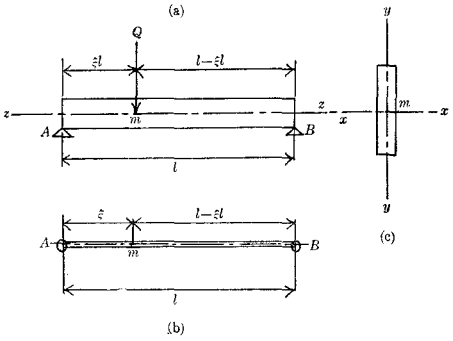
$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{(M_X)^2}{EI_y}\theta=0 \tag{14}$$

となる。

2. 両端単純支持梁の挫屈

ここで取扱う両端単純支持梁とは，両端では両端が単に捩れないように捩り偶力が働き，単に支持されている梁の事である。すなわち，この場合は，両端を水平及び垂直両変位に対して鉸と考え得るものである。

荷重 Q は，梁断面の重心に作用するものとする。



第3図 両端単純支持梁の図

今，A 点を原点とすれば，第3図を参照し，

(1) $0\leqq z\leqq \xi l$ の場合

基本方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}\left(\theta M_x+M_y\right)=0 \tag{15}$$

上式(15)に於いて

$$M_y=-M_0=0,\qquad M_x=\frac{l-\xi l}{l}Q\cdot z=(1-\xi)\cdot Q\cdot z$$

∴(15)式は

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}z^2\theta=0 \tag{16}$$

$$S^4=\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}=\frac{Q^2}{\dfrac{1}{(1-\xi)^2}EI_yC}$$

とすれば，(16)式は

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+S^4\cdot z^2\cdot\theta=0 \tag{17}$$

この微分方程式を解くために

$$\theta = \sum a_r z^r = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\cdots$$

とおけば

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \sum r(r-1) a_r z^{r-2} = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 z + 4\cdot 3\cdot a_4 z^2 + 5\cdot 4\cdot a_5 z^3 + \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \sum \{r(r-1) a_r z^{r-2} + S^4 a_r z^{r+2}\} = 0$$

$$2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 z + (4\cdot 3\cdot a_4 + S^4 a_0) z^2 + (5\cdot 4\cdot a_5 + S^4 a_1) z_3 + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \{r(r-1) a_r + S^4 a_{r-4}\} z^{r-2} + \cdots\cdots = 0 \tag{18}$$

$$\therefore \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad r(r-1) a_r + S^4 a_{r-4} = 0$$

$$\therefore \quad a_r = -\frac{S^4}{r(r-1)} a_{r-4}$$

すなわち

$$a_4 = -\frac{S^4}{3\cdot 4} a_0, \quad a_5 = -\frac{S^4}{4\cdot 5} a_1, \quad a_8 = -\frac{S^4}{7\cdot 8} a_4 = +\frac{S^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} a_0,$$

$$a_9 = -\frac{S^4}{8\cdot 9} a_5 = \frac{S^8}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} a_1 \cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \theta = a_0\left(1 - \frac{S^4 z^4}{3\cdot 4} + \frac{S^8 z^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{S^{12} z^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots\cdots\right)$$

$$+ a_1\left(z - \frac{S^4 z^5}{4\cdot 5} + \frac{S^8 z^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{S^{12} z^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\cdots\right) \tag{19}$$

$z=0$ では，$\theta=0 \quad \therefore \theta = a_0 = 0$

$$\therefore \quad \theta = a_1 z\left(1 - \frac{S^4 z^4}{4\cdot 5} + \frac{S^8 z^8}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{S^{12} z^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\cdots\right) \tag{20}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = a_1\left(1 - \frac{S^4 z^4}{4} + \frac{S^8 z^8}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{S^{12} z^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \cdots\cdots\right) \tag{21}$$

$z = \xi l$ にては，$S^4 \xi^4 l^4 = u$ とすれば

$$\theta = a_1 \xi l\left(1 - \frac{S^4 \xi^4 l^4}{4\cdot 5} + \frac{S^8 \xi^8 l^8}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{S^{12} \xi^{12} l^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\cdots\right)$$

$$= a_1 \xi l\left(1 - \frac{u}{4\cdot 5} + \frac{u^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\cdots\right) \tag{22}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = a_1\left(1 - \frac{S^4 \xi^4 l^4}{4} + \frac{S^8 \xi^8 l^8}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{S^{12} \xi^{12} l^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \cdots\cdots\right)$$

$$= a_1\left(1 - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \cdots\cdots\right) \tag{23}$$

(2) $\xi l \geqq z \geqq l$ の場合

基本方程式(15) $C\dfrac{d^2\theta}{dz^2}+\dfrac{M_x}{EI_y}(\theta M_x+M_y)=0$ において

$$M_y=-M_0=0,\quad M_x=Q\cdot\xi(l-z)$$

∴ 上式は

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{Q^2\xi^2(l-z)^2}{EI_yC}\cdot\theta=0 \tag{24}$$

$l-z=t$ とおき，$S'^4=\dfrac{\xi^2Q^2}{EI_yC}$ とすれば，(24) 式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+S'^4t^2\cdot\theta=0 \tag{25}$$

(25) 式の解は，(17) 式と同様に

$$\theta=a_0'\left(1-\frac{S'^4t^4}{3\cdot4}+\frac{S'^8t^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S'^{12}t^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)$$
$$+a_1't\left(1-\frac{S'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{S'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S'^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right) \tag{26}$$

境界条件，$z=l$，すなわち，$t=l-z=0$ では，$\theta=0$，∴(26) 式より，$a_0'=0$

$$\therefore\quad \theta=a_1't\left(1-\frac{S'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{S'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S'^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right) \tag{27}$$

また

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dz}=a_1'\left(1-\frac{S'^4t^4}{4}+\frac{S'^8t^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{S'^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right) \tag{28}$$

$z=\xi l$ にては，$u=S^4\xi^4l^4$，$S'^4=\dfrac{\xi^2}{(1-\xi)^2}S^4$ なるを以て

$$\theta=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right.$$
$$\left.-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\right\} \tag{29}$$

$$\frac{d\theta}{dz}=-a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\right\} \tag{30}$$

そこで，m 点 (ξl) においては，θ 及び $\dfrac{d\theta}{dz}$ は左右について，夫々相等しいとおき，すなわち，式 (22)=(29)，(23)=30) とする。

$$\theta=a_1\xi l\left(1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)$$

$$= a_1' l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad & 1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots=A\\ & 1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots=A'\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

とすれば

$$a_1\xi\cdot A-a_1'(1-\xi)A'=0 \tag{32}$$

また

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right)$$

$$=-a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad & 1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots=C\\ & 1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots=C'\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

とすれば

$$a_1C+a_1'C'=0 \tag{34}$$

(32) と (34) より，次の結果を得る。すなわち，

$(32)\times C'+(34)\times(1-\xi)A'$ を作れば $a_1\cdot\xi\cdot A\cdot C'+a_1(1-\xi)\cdot C\cdot A'=0$ を得る。

$\therefore a_1\neq0$ とすれば

$$A\cdot C'+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)C\cdot A'=0 \tag{35}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}A&=1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\\ A'&=1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\\ C&=1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\\ C'&=1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

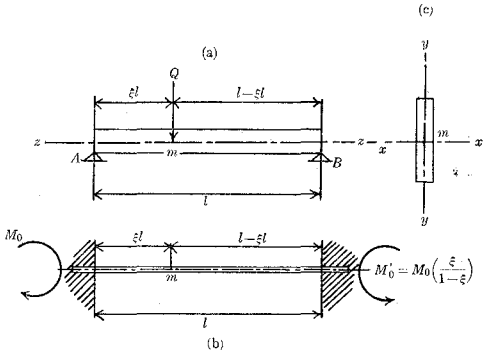
以上の式より，u を求め，$Q^2=\dfrac{S^4EI_yC}{(1-\xi)^2}$，すなわち，$Q=\dfrac{\sqrt{u}\sqrt{EI_yC}}{(1-\xi)\xi^2l^2}$ なる式より最小挫屈荷重を求めれば第1表の如くなる。

第　1　表

ξ	u	$\sqrt{u}$	$1-\xi$	$\xi^2(1-\xi)$	$Q=\frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)\xi^2}\cdot\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.01	0.00297	0.0545	0.99	0.000099	550.51 $\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.05	0.06860	0.2620	0.95	0.002375	110.32 〃
0.10	0.25200	0.5020	0.90	0.009000	55.78 〃
0.20	0.86500	0.9310	0.80	0.032000	29.10 〃
0.30	1.75000	1.3230	0.70	0.063000	21.00 〃
0.40	2.92600	1.7100	0.60	0.096000	17.81 〃
0.50	4.48200	2.1180	0.50	0.125000	16.94 〃

3.　両端挾持梁の挫屈

ここで取扱う両端挾持梁とは，両端は水平変位に対し固定されるだけで単に支持されている梁の事である。すなわち両端を水平変位に対し固定，垂直変位に対し鉸と考えることが出来る。この場合は鉛直軸の周りの偶力 M_0, M_0' が作用する。第4図において，m 点に，仮想の水平力 Q_0 が作用すると仮定すれば，A 点及び B 点に於いて，M_0 及び M_0' は，夫々次の如くなる。



第4図　両端挾持梁の図

$$M_0=-Q_0\cdot l\xi(1-\xi)^2,\quad M_0'=-Q_0\cdot l\cdot\xi^2(1-\xi)\qquad\therefore\quad M_0'=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$$

今，基本方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}\left(\theta M_x+M_y\right)=0 \tag{37}$$

において

(1)　$0\leqq z\leqq\xi l$ の場合

$$M_x=\frac{(l-\xi l)}{l}Q\cdot z=(1-\xi)\cdot Q\cdot z,\quad M_y=-M_0$$

なるを以て，(37)式は

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dz^2}+(1-\xi)^2Q^2z^2\cdot\theta-(1-\xi)QzM_0=0 \tag{38}$$

$$S^4=\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC},\qquad Sb=\frac{M_0}{6\sqrt{EI_yC}} \tag{39}$$

とすれば

$$\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{(1-\xi)^2Q^2}{EI_yC}\cdot z^2\cdot\theta-\frac{(1-\xi)QzM_0}{EI_yC}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dz^2}+S^4z^2\theta-6S^3bz=0 \tag{40}$$

この微分方程式の解は，

$$\theta=a_0\left(1-\frac{S^4z^4}{3\cdot4}+\frac{S^8z^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\cdots\cdots\right)+a_1z\left(1-\frac{S^4z^4}{4\cdot5}+\frac{S^8z^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)$$
$$+bS^3z^3\left(1-\frac{S^4z^4}{6\cdot7}+\frac{S^8z^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \tag{41}$$

境界条件は，$z=0$ にて，$\theta=0$ $\therefore a_0=0$

$$\therefore\quad \theta=a_1z\left(1-\frac{S^4z^4}{4\cdot5}+\frac{S^8z^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+bS^3z^3\left(1-\frac{S^4z^4}{6\cdot7}+\frac{S^8z^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \tag{42}$$

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{S^4z^4}{4}+\frac{S^8z^8}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bS^3z^2\left(3-\frac{S^4z^4}{6}+\frac{S^8z^8}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right) \tag{43}$$

$z=\xi l$ において，$S^4\xi^4l^4=u$ とすれば

$$\theta=a_1\xi l\left(1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+bS^3\xi^3l^3\left(1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \tag{44}$$

$$\frac{d\theta}{dz}=a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bS^3\xi^2l^2\left(3-\frac{u}{6}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right) \tag{45}$$

(2) $\xi l\geqq z\leqq l$ の場合

$$M_x=Q\cdot\xi\cdot(l-z),\qquad M_y=-M_0'$$

なるを以て，基本微分方程式は

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dz^2}+Q^2\xi^2(l-z)^2\theta-Q\xi(l-z)M_0'=0 \tag{46}$$

$l-z=t$ とおくと

$$EI_yC\frac{d^2\theta}{dt^2}+Q^2\xi^2t^2\cdot\theta-Q\xi tM_0'=0 \tag{47}$$

$$S'^4=\frac{\xi^2Q^2}{EI_yC},\qquad S'b'=\frac{M_0'}{6\sqrt{EI_yC}} \tag{48}$$

とすれば，(47) 式は次の如くなる。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+S'^4\cdot t^2\cdot\theta-6S'^3b't=0 \tag{49}$$

(49) 式を解けば，前同様に

$$\theta=a_0'\left(1-\frac{S'^4t^4}{3\cdot4}+\frac{S'^8t^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\cdots\cdots\right)+a_1't\left(1-\frac{S'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{S'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)$$
$$+b'S'^3t^3\left(1-\frac{S'^4t^4}{6\cdot7}+\frac{S'^8t^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \tag{50}$$

$z=l$ にて，$t=l-z=0$，$\therefore\ \theta=a_0'=0$

$$\therefore\quad \theta=a_1't\left(t-\frac{S'^4t^4}{4\cdot5}+\frac{S'^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+b'S'^3t^3\left(1-\frac{S'^4t^4}{6\cdot7}+\frac{S'^8t^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right) \tag{51}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dz}=a_1'\left(1-\frac{S'^4t^4}{4}+\frac{S'^8t^8}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+b'S'^3t^2\left(3-\frac{S'^4t^4}{6}+\frac{S'^8t^8}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right) \tag{52}$$

$z=\xi l$ にて，$t=l-z=l(1-\xi)$ なれば

$$S'^4=\frac{\xi^2}{(1-\xi)^2}S^4,\qquad b'S'^3=bS^3\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2,\qquad S^4\xi^4l^4=u \tag{53}$$

の如き関係があるから，(51)，(52) 式より

$$\theta=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$
$$+bS^3\xi^2(1-\xi)l^3\left\{1-\frac{u}{6\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\} \tag{54}$$

$$-\frac{d\theta}{dz}=a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$
$$+bS^3\xi^2l^2\left\{3-\frac{u}{6}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\} \tag{55}$$

そこで，$z=\xi l$ においては，θ 及び $\dfrac{d\theta}{dz}$ が左右より相等しいとおき，(44)=(54)，(45)=(55) とすれば

$$\theta=a_1\xi l\left(1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)+bS^3\xi^3l^3\left(1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\cdots\cdots\right)$$
$$=a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$
$$+bS^3\xi^2(1-\xi)l^3\left\{1-\frac{u}{6\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$\therefore\quad a_1\xi l\left(1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots\right)-a_1'(1-\xi)l\left\{1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}+bS^3\xi^3l^3\left[\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\frac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}\right.$$

$$+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}-\cdots\cdots\Bigg]=0 \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned}
&1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\cdots\cdots=A\\
&1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots=A'\\
&\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\frac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}-\cdots\cdots=B
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

とすれば

$$a_1\cdot\xi\cdot l\cdot A-a_1'(1-\xi)l\cdot A'+bS^3\xi^3l^3\cdot B=0 \tag{58}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dz}=&\,a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+bS^3\xi^2l^2\left(3-\frac{u}{6}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}-\cdots\cdots\right)\\
&+a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}\\
&+bS^3\xi^2l^2\left\{3-\frac{u}{6}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad &a_1\left(1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots\right)+a_1'\left\{1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots\right\}\\
&+bS^3\xi^2l^2\left[6-\frac{u}{6}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\cdots\cdots\right]=0
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\left.\begin{aligned}
&1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\cdots\cdots=C\\
&1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\cdots\cdots=C'\\
&6-\frac{u}{6}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\cdots\cdots=D
\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

とすれば

$$a_1C+a_1'C'+bS^3\xi^2l^2D=0 \tag{61}$$

次に，基本微分方程式 $EI_yC\dfrac{d^2\theta}{dz^2}\cdot\dfrac{1}{M_x}+(\theta M_x+M_y)=0$ において

$$EI_y\int C\frac{d^2\theta}{dz^2}\frac{1}{M_x}dz=0\qquad\therefore\quad-\int(\theta M_x+M_y)dz=0 \tag{62}$$

$0\leqq z\leqq\xi l$ において　　$M_y=-M_0,\quad M_x=(1-\xi)Q\cdot z$

$\xi l\leqq z\leqq l$ において　　$M_y=-M_0',\quad M_x=Q\xi(l-z)$

$$\therefore\quad\int_{z=0}^{z=\xi l}\left\{6\sqrt{EI_yC}\cdot Sb-S^2\cdot z\theta\sqrt{EI_yC}\right\}dz-\int_{z=\xi l}^{z=l}\left\{6\sqrt{EI_yC}\cdot Sb\left(\frac{S}{1-\xi}\right)\right.$$

$$-\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)S^2t\theta\sqrt{EI_yC}\Big\}dt=0 \tag{63}$$

$$\therefore\quad \int_0^{\xi l}6Sbdz-\int_0^{\xi l}S^2z\cdot\theta dz+\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t=0}^{t=l(1-\xi)}6\cdot Sb\cdot dt-\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_0^{l(1-\xi)}S^2t\theta dt=0 \tag{64}$$

(64)式において

$$\int_0^{\xi l}6Sbdz=6Sb\xi l,\quad \int_0^{\xi l}S^2z\cdot\theta dz=\frac{a_1}{S^2\xi l}\left(\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{3\cdot4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots\right)$$
$$+bS\xi l\left(\frac{u}{5}-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\cdots\cdots\right),\quad \left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t=0}^{t=l(1-\xi)}6\cdot Sb\cdot dt=6Sbl\xi,$$
$$\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t=0}^{t=l(1-\xi)}S^2t\theta dt=\frac{a_1'}{S^2(1-\xi)l}\left\{\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right.$$
$$\left.+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots\right\}+bS\xi l\left\{\frac{u}{5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right.$$
$$\left.+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6-\cdots\cdots\right\}$$

なるを以て，(64)式は

$$6Sb\xi l-\frac{a_1}{S^2\xi l}\left(\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots\right)-bS\xi l\left(\frac{u}{5}-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\right.$$
$$\left.+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\cdots\cdots\right)+6Sbl\xi-\frac{a_1'}{S^2(1-\xi)l}\left\{\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right.$$
$$\left.-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots\right\}-b\cdot S\cdot\xi\cdot l\left\{\frac{u}{5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4+\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6-\cdots\cdots\right\}=0 \tag{65}$$

$$\therefore\quad b\cdot S\cdot\xi\cdot l\left[12-\frac{u}{5}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\right.$$
$$\left.\times\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots\right]-\frac{a_1}{S^2\xi l}\left(\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots\right)$$
$$-\frac{a_1'}{S^2(1-\xi)l}\left\{\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots\right\}=0 \tag{66}$$

いま

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots=E\\
&\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots=E'\\
&12-\frac{u}{5}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}\\
&\quad-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots=F
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

とすれば

$$b\cdot S\cdot\xi\cdot l\cdot F-\frac{a_1}{S^2\xi l}E-\frac{a_1'}{S^2(1-\xi)l}E'=0 \tag{68}$$

(58), (61), (68) の 3 式より，a_1, a_1', b を消去すれば，次式が得られる。((69) 式参照)

$$\xi(A\cdot D-B\cdot C)\left\{C'\cdot F+\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)D\cdot E'\right\}+(C\cdot F+D\cdot E)\{(1-\xi)A'\cdot D+\xi B\cdot C'\}=0 \tag{69}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
A&=1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\\
A'&=1-\frac{u}{4\cdot5}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\\
B&=\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)\right\}-\frac{u}{6\cdot7}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5\right\}\\
&\quad-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}\left\{1-\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7\right\}+\cdots\cdots\\
C&=1-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\\
C'&=1-\frac{u}{4}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6+\cdots\cdots\\
D&=6-\frac{u}{6}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}\\
&\quad-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots\\
E&=\frac{u}{3}-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\cdots\cdots\\
E'&=\frac{u}{3}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3-\frac{u^2}{4\cdot5\cdot7}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^5+\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^7-\cdots\cdots\\
F&=12-\frac{u}{5}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^2\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot9}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^4\right\}\\
&\quad-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{1+\left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^6\right\}+\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

(69) 式を満足する u の最小値を ξ の各値に対して求め，更に，最小挫屈荷重

$$Q=\frac{S^2\sqrt{EI_yC}}{1-\xi}=\frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)\xi^2}\cdot\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$$

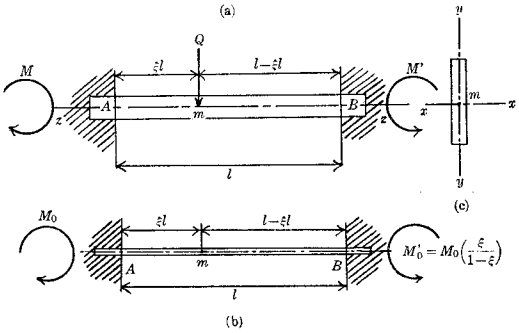
を計算すれば，第 2 表の如くなる。((39) 式参照)

第　2　表

ξ	u	$\sqrt{u}$	$1-\xi$	$\xi^2(1-\xi)$	$Q=\frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)\xi^2}\cdot\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.01	0.00813	0.09017	0.99	0.000099	910.81 $\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.05	0.11200	0.33470	0.95	0.002375	140.93 〃
0.10	0.44700	0.66860	0.90	0.009000	74.29 〃
0.20	1.78200	1.33500	0.80	0.032000	41.72 〃
0.30	3.92000	1.98000	0.70	0.063000	31.43 〃
0.40	6.77100	2.60200	0.60	0.096000	27.10 〃
0.50	10.47000	3.23600	0.50	0.125000	25.89 〃

4.　両端固定梁の挫屈

ここで取扱う両端固定梁とは，両端は垂直，水平両変位に対し固定された場合であるが，軸張力の働く完全固定梁ではなく，普通の両端固定梁を意味するものである。この場合は，両端挟持梁のときと同様に，鉛直軸の周りの偶力 M_0，M_0' が作用する。故に，第5図に於いて，m 点に，仮想の水平力 Q_0 が作用すると仮定すれば，A 点及び B 点に於て



第5図　公端固定梁の図

M_0 および M_0' は，夫々，$M_0=-\frac{Q_0\xi l(l-\xi l)^2}{l^2}=-Q_0\cdot l\xi(1-\xi)^2$，$M_0'=-\frac{Q_0\xi^2l^2(l-\xi l)}{l^2}=-Q_0\cdot l\cdot\xi^2(1-\xi)$　$\therefore\ M_0'=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$

今，基本微分方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta\cdot M_x+M_y)=0 \tag{71}$$

において

(1)　$0\leqq z\leqq\xi l$ の場合

$$M_x=\frac{Q(l-\xi l)^2\{(l+2\xi l)z-\xi l^2\}}{l^3}=Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)$$

$\therefore$　(71) 式は

$$CEI_y\frac{d^2\theta}{dz^2}+Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)\cdot\{\theta\cdot Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)-M_0\}=0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{Q^2(1-\xi)^4(z+2\xi z-\xi l)^2\cdot\theta}{CEI_y}-\frac{Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l)}{CEI_y}M_0=0 \tag{72}$$

$z+2\xi z-\xi l=t$ とおく

$$\frac{dt}{dz}=1+2\xi,\quad \frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt}(1+2\xi),\quad \frac{d^2\theta}{dz^2}=(1+2\xi)^2\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$(1+2\xi)^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Q^2(1-\xi)^4t^2\cdot\theta}{EI_y\cdot C}-\frac{Q(1-\xi)^2\cdot t}{EI_yC}M_0=0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{(1-\xi)^4\cdot Q^2}{(1+2\xi)^2EI_yC}t^2\theta-\frac{(1-\xi)^2Q}{(1+2\xi)^2EI_yC}t\cdot M_0=0 \tag{73}$$

ここに

$$S^4=\frac{(1-\xi)^4}{(1+2\xi)^2}\cdot\frac{Q^2}{EI_yC},\qquad Sb=\frac{1}{6(1+2\xi)}\cdot\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}} \tag{74}$$

とすれば，(74)式は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+S^4t^2\theta-6S^3bl=0$$

この微分方程式の解は

$$\theta=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^2+\cdots\cdots$$

とおいて

$$\theta=a_0\left(1-\frac{S^4t^4}{3\cdot4}+\frac{S^8t^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S^{12}t^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)+a_1t\left(1-\frac{S^4t^4}{4\cdot5}+\frac{S^8t^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\right.$$
$$\left.-\frac{S^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)+bS^3t^3\left(1-\frac{S^4t^4}{6\cdot7}+\frac{S^8t^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{S^{12}t^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right) \tag{76}$$

境界条件より

(i) $z=0$ にて $\theta=0$ すなわち，$t=z+2\xi z-\xi l=-\xi l$ において $\theta=0$

$$\therefore \quad \theta=a_0\left(1-\frac{S^4\xi^4l^4}{3\cdot4}+\frac{S^8\xi^8l^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S^{12}\xi^{12}l^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)-a_1\xi l\left(1-\frac{S^4\xi^4l^4}{4\cdot5}\right.$$
$$\left.+\frac{S^8\xi^8l^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S^{12}\xi^{12}l^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)-bS^3\xi^3l^3\left(1-\frac{S^4\xi^4l^4}{6\cdot7}+\frac{S^8\xi^8l^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$
$$\left.-\frac{S^{12}\xi^{12}l^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right)=0 \tag{77}$$

(ii) $z=\xi l$ において，すなわち，$t=z+2\xi z-\xi l=2\xi^2l$,　　(76)式より

$$\theta=a_0\left(1-\frac{S^4(2\xi^2l)^4}{3\cdot4}+\frac{S^8(2\xi^2l)^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S^{12}(2\xi^2l)^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)$$
$$+a_1(2\xi^2l)\left\{1-\frac{S^4(2\xi^2l)^4}{4\cdot5}+\frac{S^8(2\xi^2l)^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S^{12}(2\xi^2l)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+bS^3(2\xi^2l)^3\left\{1-\frac{S^4(2\xi^2l)^4}{6\cdot7}+\frac{S^8(2\xi^2l)^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{S^{12}(2\xi^2l)^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\} \tag{78}$$

$$\frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt}(1+2\xi)=\left\{a_0\left(-\frac{S^4t^3}{3}+\frac{S^8t^7}{3\cdot4\cdot7}-\frac{S^{12}t^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right)\right.$$
$$+a_1\left(1-\frac{S^4t^4}{4}+\frac{S^8t^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{S^{12}t^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right)$$
$$\left.+bS^3t^2\left(3-\frac{S^4t^4}{6}+\frac{S^8t^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{S^{12}t^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\cdots\right)\right\}(2\xi+1)$$

$\therefore\ z=\xi l$ すなわち，$t=2\xi^2l$ において

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=\left[a_0\left\{-\frac{S^4(2\xi^2l)^3}{3}+\frac{S^8(2\xi^2l)^7}{3\cdot4\cdot7}-\frac{S^{12}(2\xi^2l)^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right\}\right.$$
$$+a_1\left\{1-\frac{S^4(2\xi^2l)^4}{4}+\frac{S^8(2\xi^2l)^8}{4\cdot5\cdot8}-\frac{S^{12}(2\xi^2l)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right\}$$
$$\left.+bS^3(2\xi^2l)^2\left\{3-\frac{S^4(2\xi^2l)^4}{6}+\frac{S^8(2\xi^2l)^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{S^{12}(2\xi^2l)^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\}\right](2\xi+1) \tag{79}$$

(2) $\xi l\leqq z\leqq l$ の場合

基本微分方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta\cdot M_x+M_y)=0$$

において

$$M_x=Q\frac{(\xi l)^2}{l^3}\left[l\{l+(l-\xi l)\}-\{l+2(l-\xi l)\}z\right]=Q\cdot\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}$$

$$M_0'=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right),\qquad M_y=-M_0'$$

$\therefore$ 基本微分方程式は

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{\theta Q^2}{EI_y}\xi^4\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}^2+\frac{Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}}{EI_y}\left\{-M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\right\}=0$$

$$\therefore\quad\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{Q^2\xi^4\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}^2}{CEI_y}\theta-\frac{Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)M_0}{CEI_y}=0 \tag{80}$$

$l(2-\xi)-(3-2\xi)z=t'$ とおく，$\dfrac{dt'}{dz}=-(3-2\xi)$

$$\therefore\quad\frac{d\theta}{dz}=\frac{d\theta}{dt'}\left\{-(3-2\xi)\right\},\qquad\frac{d^2\theta}{dz^2}=(3-2\xi)^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt'^2}$$

$$\therefore\quad\frac{d^2\theta}{dt'^2}(3-2\xi)^2+\frac{\xi^4Q^2}{CEI_y}t'^2\theta-\frac{\xi^2Q\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)}{CEI_y}t'M_0=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\theta}{dt'^2}+\frac{\xi^4Q^2}{(3-2\xi)^2EI_yC}t^{2\prime}\cdot\theta-\frac{\xi^2\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)Q}{(3-2\xi)^2EI_yC}t'M_0=0 \tag{81}$$

今,

$$S'^4=\frac{\xi^4}{(3-2\xi)^2}\frac{Q^2}{EI_yC},\qquad S'b'=\frac{\xi}{6(3-2\xi)(1-\xi)}\cdot\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}} \tag{82}$$

とすれば, (81) 式は

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2}+S'^4t'^2\cdot\theta-6S'^3b't'=0 \tag{83}$$

この微分方程式の解は

$$\begin{aligned}\theta=a_0'&\left(1-\frac{S'^4t'^4}{3\cdot4}+\frac{S'^8t'^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S'^{12}t'^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)+a_1't'\left(1-\frac{S'^4t'^4}{4\cdot5}\right.\\&\left.+\frac{S'^8t'^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S'^{12}t'^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)+b'S'^3t'^3\left(1-\frac{S'^4t'^4}{6\cdot7}+\frac{S'^8t'^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.\\&\left.-\frac{S'^{12}t'^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right)\end{aligned} \tag{84}$$

(i) $z=l$ において, $\theta=0$

$$\therefore\quad t'=l(2-\xi)-(3-2\xi)z=-l(1-\xi)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\theta=a_0'&\left\{1-\frac{S'^4l^4(1-\xi)^4}{3\cdot4}+\frac{S'^8l^8(1-\xi)^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right\}\\&-a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{S'^4l^4(1-\xi)^4}{4\cdot5}+\frac{S'^8l^8(1-\xi)^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right\}\\&-b'S'^3l^3(1-\xi)^3\left\{1-\frac{S'^4l^4(1-\xi)^4}{6\cdot7}+\frac{S'^8l^8(1-\xi)^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{S'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\}=0\end{aligned} \tag{85}$$

(ii) $z=\xi l$ において, $t'=l(2-\xi)-(3-2\xi)\xi l=2l(1-\xi)^2$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\theta=a_0'&\left[1-\frac{S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{3\cdot4}+\frac{S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right]\\&+a_0'\{2l(1-\xi)^2\}\left[1-\frac{S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{4\cdot5}+\frac{S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\right.\\&\left.-\frac{S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right]+b'S'^3\{2l(1-\xi)^2\}^3\left[1-\frac{S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{6\cdot7}\right.\\&\left.+\frac{S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right]\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=\frac{d\theta}{dt'}\{-(3-2\xi)\}=-(3-2\xi)\Bigg\{a_0'&\left[-\frac{S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^3}{3}+\frac{S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^7}{3\cdot4\cdot7}\right.\\&\left.-\frac{S'^{12}\{2l(1-\xi)\}^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right]+a_1'\left[1-\frac{S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{4}+\frac{S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{4\cdot5\cdot8}\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\Big]+b'S'^3\{2l(1-\xi)^2\}^2\Big[3-\frac{S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4}{6}$$
$$+\frac{S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8}{6\cdot7\cdot10}-\frac{S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\cdots\Big]\Big] \tag{87}$$

以上の式において，$S^4\xi^4l^4=u$ とすれば，(77) 式より

$$\theta=a_0\left(1-\frac{u}{3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)-a_1\xi l\left(1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\right.$$
$$\left.-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)-bS^3\xi^3l^3\left(1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$
$$\left.-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right)=0 \tag{88}$$

(78) 式において，$S^4(2\xi^2l)^4=(2\xi)^4\cdot u$，$S^8(2\xi^2l)^8=(2\xi)^8u^2$，$S^{12}(2\xi^2l)^{12}=(2\xi)^{12}\cdot u^3$ なる故

$$\theta_{z=\xi l}=\Big[a_0\Big\{1-\frac{(2\xi)^4u}{3\cdot4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\Big\}+a_1(2\xi^2l)\Big\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4\cdot5}$$
$$+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\Big\}+bS^3(2\xi^2l)^3\Big\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6\cdot7}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}$$
$$-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\Big\}\Big] \tag{89}$$

(79) 式において，

$$S^4(2\xi^2l)^3=\frac{(2\xi)^3\cdot u}{\xi l},\quad S^8(2\xi^2l)^7=\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{\xi l},\quad S^{12}(2\xi^2l)^{11}=\frac{(2\xi)^{11}\cdot u^3}{\xi l}$$

なるを以て

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=a_0\frac{(2\xi+1)}{\xi l}\Big\{-\frac{(2\xi)^3\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{(2\xi)^{11}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\Big\}$$
$$+a_1(2\xi+1)\Big\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\Big\}$$
$$+bS^3(2\xi^2l)^2(2\xi+1)\Big\{3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\Big\} \tag{90}$$

次ぎに，(74) 式と (82) 式より

$$S'^4=S^4\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^4,\qquad S'b'=Sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right) \tag{91}$$

$$b'S'^3=S^3b\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^3 \tag{92}$$

故に

$$S'^4l^4(1-\xi)^4=u\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2,\quad S'^8l^8(1-\xi)^8=u^2\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4,\quad S'^{12}l^{12}(1-\xi)^{12}=u^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6$$

なるを以て，(85) 式は，

$$\theta = a_0'\left\{1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot 4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\cdots\cdots\right\}$$

$$-a_1'l(1-\xi)\left\{1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2 u}{4\cdot 5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\cdots\cdots\right\}$$

$$-bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3\cdot l^3\left\{1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot 7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15}+\cdots\cdots\right\}=0 \tag{93}$$

また，(86) 式は

$$S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^4=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u,$$

$$S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^8=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2,$$

$$S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{12}=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3,$$

$$b'S'^3\{2l(1-\xi)^2\}^3=bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot 2l\}^3$$

なるを以て

$$\theta=a_0'\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot 4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\cdots\cdots\right]+a_0'\{2l(1-\xi)^2\}\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot 5}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\cdots\cdots\right]$$

$$+bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot 2l\}^3\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot 7}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15}+\cdots\cdots\right] \tag{94}$$

また，(87) 式は

$$S'^4\{2l(1-\xi)^2\}^3=u\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\frac{2\{2(1-\xi)\}^3}{(1-\xi)l},$$

$$S'^8\{2l(1-\xi)^2\}^7=u^2\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\frac{\{2(1-\xi)\}^7}{(1-\xi)l},$$

$$S'^{12}\{2l(1-\xi)^2\}^{11}=u^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\frac{\{2(1-\xi)\}^{11}}{(1-\xi)l},$$

$$b'S'^3\{2l(1-\xi)^2\}^2(3-2\xi)=bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)\frac{\xi^3}{(1-\xi)^3}\{2l(1-\xi)^2\}^2$$

なるを以て

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=-a_0'(3-2\xi)\frac{2}{l}\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^2\cdot u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^6\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{10}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right]-a_1'(3-2\xi)\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\right]$$
$$-bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)(1-\xi)\xi^3\cdot(2l)^2\left[3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}+\right.$$
$$\left.\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\cdots\right] \tag{95}$$

そこで，$z=\xi l$ においては，θ 及び $\frac{d\theta}{dz}$ は，左右より相等しいとおく事が出来るから，(89)=(94)，(90)=(95) とおいて，(96)，(97) を得る。

$$\theta=a_0\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{3\cdot4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right\}+a_1(2\xi^2l)\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4\cdot5}\right.$$
$$\left.+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right\}+bS^3(2\xi^2l)^3\left\{1+\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6\cdot7}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$
$$\left.-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\}=a_0'\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot4}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right]+a_1'\{2l(1-\xi)^2\}$$
$$\times\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\right.$$
$$\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right]+bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot2l\}^3$$
$$\times\left[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\Bigg] \tag{96}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=\xi l}=a_0\frac{(2\xi+1)}{\xi l}\left\{-\frac{(2\xi)^3\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}-\frac{(2\xi)^7\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\right\}$$
$$+a_1(2\xi+1)\left\{1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot912}+\cdots\cdots\right\}+bS^3(2\xi^2l)^2(2\xi+1)$$
$$\times\left\{3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right\}=-a_0'(3-2\xi)\frac{2}{l}$$
$$\times\Bigg[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\{2(1-\xi)\}^2\cdot u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot\{2(1-\xi)\}^6\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7}$$
$$-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot\{2(1-\xi)\}^{10}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11}+\cdots\cdots\Bigg]-a_1'(3-2\xi)\Bigg[1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4}$$
$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\Bigg]$$
$$-bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)(1-\xi)\xi^3(2l)^2\Bigg[3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}$$
$$+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14}+\cdots\cdots\Bigg] \tag{97}$$

次ぎに，基本微分方程式

$$C\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{M_x}{EI_y}(\theta\cdot M_x+M_y)=0$$

において，

$$EI_y\int C\frac{d^2\theta}{dz^2}\frac{1}{M_x}dz=0 \qquad \therefore\quad -\int(\theta M_x+M_y)\,dz=0 \tag{98}$$

$0\leqq z\leqq\xi l$ において

$$M_y=-M_0,\qquad M_x=Q(1-\xi)^2(z+2\xi z-\xi l) \tag{99}$$

$$S^4=\frac{(1-\xi)^4}{(1+2\xi)^2}\cdot\frac{Q^2}{EI_yC},\qquad Sb=\frac{1}{6(1+2\xi)}\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}} \tag{100}$$

$\xi l\leqq z\leqq l$ において

$$M_y=-M_0'=-M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right),\qquad M_x=Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\} \tag{101}$$

$$S'^4=\frac{\xi^4}{(3-2\xi)^2}\frac{Q^2}{EI_yC},\qquad S'b'=\frac{\xi}{6(3-2\xi)(1-\xi)}\cdot\frac{M_0}{\sqrt{EI_yC}} \tag{102}$$

$$\therefore \int_{z=0}^{z=\xi l}\Big[M_0-Q(1-\xi)^2\{(1+2\xi)z-\xi l\}\theta\Big]dz$$
$$+\int_{z=\xi l}^{z=l}\Big[M_0'-Q\xi^2\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}\theta\Big]dz=0 \tag{103}$$

然るに，$0\leqq z\geqq \xi l$ にては

$$M_0=6(1+2\xi)Sb\sqrt{EI_yC},\qquad Q=S^2\frac{(1+2\xi)}{(1-\xi)^2}\sqrt{EI_yC}$$

$\xi l\leqq z\leqq l$ にては

$$M_0=\frac{6(3-2\xi)(1-\xi)}{\xi}S'b'\sqrt{EI_yC},\qquad Q=S'^2\frac{(3-2\xi)}{\xi^2}\sqrt{EI_yC}$$

$$M_0'=M_0\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)=6(3-2\xi)S'b'\sqrt{EI_yC}$$

$$\therefore \int_{z=0}^{z=\xi l}\Big[6(1+2\xi)Sb\sqrt{EI_yC}-(1+2\xi)\{(1+2\xi)z-\xi l\}\cdot S^2\cdot\theta\sqrt{EI_yC}\Big]dz$$
$$+\int_{z=\xi l}^{z=l}\Big[6(3-2\xi)S'b'\sqrt{EI_yC}-(3-2\xi)\{l(2-\xi)-(3-2\xi)z\}S'^2\cdot\theta\sqrt{EI_yC}\Big]dz=0 \tag{104}$$

今，$0\geqq z\geqq \xi l$ において $t=(1+2\xi)z-\xi l$ なる故 $\dfrac{dt}{dz}=1+2\xi$，$\therefore dz=\left(\dfrac{1}{1+2\xi}\right)dt$，$z=0$ にて，$t=-\xi l$，$z=\xi l$ にて，$t=2\xi^2 l$ になる。

また，$\xi l\leqq z\leqq l$ において，$t'=l(2-\xi)-(3-2\xi)z$ なる故 $\dfrac{dt'}{dz}=-(3-2\xi)$，$\therefore dz=-\dfrac{1}{(3-2\xi)}dt'$，$z=\xi l$ にて，$t'=2l(1-\xi)^2$，$z=l$ にて，$t'=-l(1-\xi)$ になる。

$$\therefore \int_{z=0}^{z=\xi l}\left\{6(1+2\xi)Sb\sqrt{EI_yC}-(1+2\xi)t\cdot S^2\cdot\theta\sqrt{EI_yC}\right\}\left(\frac{1}{1+2\xi}\right)dt$$
$$+\int_{z=\xi l}^{z=l}\left\{6(3-2\xi)Sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\sqrt{EI_yC}\right.$$
$$\left.-(3-2\xi)t'S^2\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2\theta\cdot\sqrt{EI_yC}\right\}\left\{-\frac{1}{(3-2\xi)}\right\}dt'=0$$

$$\therefore\ 6Sb\int_{t=-\xi l}^{t=+2\xi^2 l}dt-S^2\int_{t=-\xi l}^{t=+2\xi^2 l}\left\{a_0\left(t-\frac{S^4t^5}{3\cdot4}+\frac{S^8t^9}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{S^{12}t^{13}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)\right.$$
$$+a_1\left(t^2-\frac{S^4t^6}{4\cdot5}+\frac{S^8t^{10}}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S^{12}t^{14}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)+bS^3\left(t^4-\frac{S^4t^8}{6\cdot7}+\frac{S^8t^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{S^{12}t^{16}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right)\right\}dt-6Sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)\int_{t'=+2l(1-\xi)^2}^{t'=-l(1-\xi)}dt'$$
$$+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2S'^2\int_{t'=+2l(1-\xi)^2}^{t'=-l(1-\xi)}\left\{a_0'\left(t'-\frac{S'^4t'^5}{3\cdot4}+\frac{S'^8t'^9}{3\cdot4\cdot7\cdot8}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{S'^{12}t'^{13}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\right)+a_1'\left(t'^2+\frac{S'^4t'^6}{4\cdot5}+\frac{S'^8t'^{10}}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{S'^{12}t'^{14}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\right)$$
$$\left.+b'S'^3\left(t'^4-\frac{S'^4t'^8}{6\cdot7}+\frac{S'^8t'^{12}}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{S'^{12}t'^{16}}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\right)\right\}dt'=0 \tag{105}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & 6\cdot S\cdot b\xi l(2\xi+1)-a_0(2\xi^2 l)^2\cdot S^2\left(\frac{1}{2}-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\right.\\
& \left.+\cdots\cdots\right)-a_1(2\xi^2 l)^3 S^2\left\{\frac{1}{3}-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\cdots\right\}\\
& -bS^5(2\xi^2 l)^5\left\{\frac{1}{5}-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots\cdots\right\}\\
& +a_0(\xi l)^2 S^2\left(\frac{1}{2}-\frac{u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots\cdots\right)\\
& -a_1(\xi l)^3 S^2\left(\frac{1}{3}-\frac{u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\cdots\right)\\
& -bS^5(\xi l)^5\left(\frac{1}{5}-\frac{u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots\cdots\right)\\
& +6\cdot Sb\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)l(1-\xi)(3-2\xi)+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)^2 S^2\left[a_0' l^2(1-\xi)^2\left\{\frac{1}{2}\right.\right.\\
& \left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots\cdots\right\}-a_1' l^3(1-\xi)^3\left\{\frac{1}{3}\right.\\
& \left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot5\cdot7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\cdots\right\}-b' S^3 l^5(1-\xi)^5\left\{\frac{1}{5}\right.\\
& \left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}-\cdots\cdots\right\}-a_0'\{2l(1-\xi)^2\}^2\\
& \times\left[\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot4\cdot6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}\right.\\
& \left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}+\cdots\cdots\right]-a_1'\{2l(1-\xi)^2\}^3\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot5\cdot7}\right.\\
& \left.+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}+\cdots\cdots\right]\\
& -b' S'^3\{2l(1-\xi)^2\}^5\cdot\left[\frac{1}{5}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot7\cdot9}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\right.\\
& \left.\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}+\cdots\cdots\right]\right]
\end{aligned}
\tag{106}
$$

$$a_0(2\xi^2 l)^2 S^2=a_0(\xi l)^2 S^2(2\xi)^2,\quad a_1(2\xi^2 l)^3 S^2=a_1(\xi l)^3 S^2(2\xi)^3$$

$$bS^5(2\xi^2 l)^5=bS^5(\xi l)^5(2\xi)^5,\quad b' S'^3 l^5(1-\xi)^5=bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3(1-\xi)^2 l^5,$$

$$a_0'\{2l(1-\xi)^2\}^2=a_0' l^2(1-\xi)^2\{2(1-\xi)\}^2,\quad a_1'\{2l(1-\xi)^2\}^3=a_1' l^3(1-\xi)^3\{2(1-\xi)\}^3$$

$$b' S'^3\{2l(1-\xi)^2\}^5=bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\frac{\xi^3}{(1-\xi)^3}\,l^5(1-\xi)^5\{2(1-\xi)\}^5$$

なるを以て，(106) 式は次の如くなる。

$$
\begin{aligned}
&12Sb\xi l(2\xi+1)-a_0S^2(\xi l)^2\left[\frac{1}{2}\left\{(2\xi)^2-1\right\}-\frac{u}{3\cdot4\cdot6}\left\{(2\xi)^6-1\right\}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}\left\{(2\xi)^{10}-1\right\}\right.\\
&\left.-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\left\{(2\xi)^{14}-1\right\}+\cdots\cdots\right]-a_1S^2(\xi l)^3\left[\frac{1}{3}\left\{(2\xi)^3+1\right\}-\frac{u}{4\cdot5\cdot7}\left\{(2\xi)^7+1\right\}\right.\\
&\left.+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\left\{(2\xi)^{11}+1\right\}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\left\{(2\xi)^{15}+1\right\}+\cdots\cdots\right]\\
&-bS^5\xi^5l^5\left[\frac{1}{5}\left\{(2\xi)^5+1\right\}-\frac{u}{6\cdot7\cdot9}\left\{(2\xi)^9+1\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{(2\xi)^{13}+1\right\}\right.\\
&\left.-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}\left\{(2\xi)^{15}+1\right\}+\cdots\cdots\right]+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)a_0'l^2S^2\xi^2\left[\frac{1}{2}\left[1-\left\{2(1-\xi)\right\}^2\right]\right.\\
&-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4\cdot6}\left[1-\left\{2(1-\xi)\right\}^6\right]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}\left[1-\left\{2(1-\xi)\right\}^{10}\right]\\
&\left.-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\left[1-\left\{2(1-\xi)\right\}^{14}+\cdots\cdots\right]\right]-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)a_1'S^2l^3\xi^2\\
&\times\left[\frac{1}{3}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^3\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot5\cdot7}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^7\right]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\right.\\
&\left.\times\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^{11}\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^{15}\right]+\cdots\cdots\right]\\
&-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3bS^5\xi^5l^5\left[\frac{1}{5}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^5\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot7\cdot9}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^9\right]\right.\\
&+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot13}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^{13}\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}\left[1+\left\{2(1-\xi)\right\}^{15}\right]\\
&\left.+\cdots\cdots\right]=0 \qquad (107)
\end{aligned}
$$

(88), (93), (96), (97), (107) 式において

$$
\left.
\begin{aligned}
A&=1-\frac{u}{3\cdot4}+\frac{u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\\
B&=1-\frac{u}{4\cdot5}+\frac{u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\\
C&=1-\frac{u}{6\cdot7}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots\\
A_1&=1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{3\cdot4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}+\cdots\cdots\\
B_1&=1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4.5}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13}+\cdots\cdots\\
C_1&=1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6\cdot7}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15}+\cdots\cdots
\end{aligned}
\right|
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
A_2 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{3\cdot 4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}\\
&\quad+\cdots\cdots\\
B_2 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4\cdot 5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}\\
&\quad+\cdots\cdots\\
C_2 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6\cdot 7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15}\\
&\quad+\cdots\cdots\\
D &= -\frac{(2\xi)^3\cdot u}{3}+\frac{(2\xi)^7\cdot u^2}{3\cdot 4\cdot 7}-\frac{(2\xi)^{11}\cdot u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11}+\cdots\cdots\\
E &= 1-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{4}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{4\cdot 5\cdot 8}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12}+\cdots\cdots\\
F &= 3-\frac{(2\xi)^4\cdot u}{6}+\frac{(2\xi)^8\cdot u^2}{6\cdot 7\cdot 10}-\frac{(2\xi)^{12}\cdot u^3}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15}+\cdots\cdots\\
D_1 &= \frac{2}{l}\left[-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^2\cdot u}{3}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^6\cdot u^2}{3\cdot 4\cdot 7}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{10}\cdot u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11}\right.\\
&\quad\left.+\cdots\cdots\right]\\
E_1 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{4\cdot 5\cdot 8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12}\\
&\quad+\cdots\cdots\\
F_1 &= 3-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{2(1-\xi)\}^4\cdot u}{6}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\{2(1-\xi)\}^8\cdot u^2}{6\cdot 7\cdot 10}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\{2(1-\xi)\}^{12}\cdot u^3}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 14}\\
&\quad+\cdots\cdots\\
A_3 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot 4}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\cdots\cdots\\
B_3 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot 5}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\cdots\cdots\\
C_3 &= 1-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot 7}+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11}-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot 14\cdot 15}+\cdots\cdots\\
G_1 &= \frac{1}{2}\left\{(2\xi)^2-1\right\}-\frac{u}{3\cdot 4\cdot 6}\left\{(2\xi)^6-1\right\}+\frac{u^2}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 10}\left\{(2\xi)^{10}-1\right\}\\
&\quad-\frac{u^3}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12\cdot 14}\left\{(2\xi)^{14}-1\right\}+\cdots\cdots\\
H_1 &= \frac{1}{3}\left\{(2\xi)^3+1\right\}-\frac{u}{4\cdot 5\cdot 7}\left\{(2\xi)^7+1\right\}+\frac{u^2}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 11}\left\{(2\xi)^{11}+1\right\}
\end{aligned}
\right\}\quad(108)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\left\{(2\xi)^{15}+1\right\}+\cdots\cdots\\
I_1 &= \frac{1}{5}\left\{(2\xi)^5+1\right\}-\frac{u}{6\cdot7\cdot9}\left\{(2\xi)^9+1\right\}+\frac{u^2}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot13}\left\{(2\xi)^{13}+1\right\}\\
&-\frac{u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}\left\{(2\xi)^{15}+1\right\}+\cdots\cdots\\
G_2 &= \frac{1}{2}\left[1-\{2(1-\xi)\}^2\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{3\cdot4\cdot6}\left[1-\{2(1-\xi)\}^6\right]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot10}\\
&\times\left[1-\{2(1-\xi\}^{10}\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot14}\left[1-\{2(1-\xi)\}^{14}\right]+\cdots\cdots\\
H_2 &= \frac{1}{3}\left[1+\{2(1-\xi)\}^3\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{4\cdot5\cdot7}\left[1+\{2(1-\xi)\}^7\right]+\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot11}\\
&\times\left[1+\{2(1-\xi)\}^{11}\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot12\cdot13\cdot15}\left[1+\{2(1-\xi)\}^{15}\right]+\cdots\cdots\\
I_2 &= \frac{1}{5}\left[1+\{2(1-\xi)\}^5\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot u}{6\cdot7\cdot9}\left[1+\{2(1-\xi)\}^9\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^4\cdot u^2}{6\cdot9\cdot10\cdot11\cdot13}\\
&\times\left[1+\{2(1-\xi)\}^{13}\right]-\frac{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^6\cdot u^3}{6\cdot7\cdot10\cdot11\cdot14\cdot15\cdot17}\left[1+\{2(1-\xi)\}^{15}\right]+\cdots\cdots
\end{aligned}
\right)
$$

とすれば，(88) 式は

$$a_0A-a_1\cdot\xi\cdot l\cdot B-bS^3\xi^3l^3\cdot C=0 \tag{109}$$

(96) 式は

$$
\begin{aligned}
a_0A_1+a_1(2\xi^2l)\cdot B_1+bS^3(2\xi^2l)^3\cdot C_1 &= a_1'A_2+a_1'\{2l(1-\xi)^2\}B_2\\
&+bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\{\xi(1-\xi)\cdot2l\}^3\cdot C_2
\end{aligned}
\tag{110}
$$

(97) 式は

$$
\begin{aligned}
a_0\frac{(2\xi+1)}{\xi l}D+a_1(2\xi+1)E+bS^3(2\xi^2l)^2(2\xi+1)F &= -a_0'(3-2\xi)D_1\\
&-a_1'(3-2\xi)E_1-bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1+2\xi)(1-\xi)\xi^3(2l)^2F_1
\end{aligned}
\tag{111}
$$

(93) 式は

$$a_0'A_3-a_1'l(1-\xi)B_3-bS^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\xi^3l^3C_3=0 \tag{112}$$

(107) 式は

$$12\cdot Sb\xi l(2\xi+1)-a_0S^2(\xi l)^2G_1-a_1S^2(\xi l)^3H_1-bS^5\xi^5l^5\cdot I_1+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)a_0'l^2S^2\xi^2\cdot G_2$$

$$-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)a_1'S^2l^3\xi^2H_2-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3\cdot bS^5\xi^5l^5I_2=0 \tag{113}$$

今，

$$\left.\begin{aligned} X&=12(2\xi+1)-S^4\xi^4l^4I_1-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^3 I_2\\ Y&=\xi\cdot F+\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)F_1\\ Z&=\xi^3C_1-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2(1-\xi)^3C_2 \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

とすれば，(109) 式は

$$a_0\cdot(A)+a_1(-\xi l\cdot B)+b(-S^3\xi^3l^3C)=0 \tag{115}$$

(110) 式は

$$a_0(A_1)+a_1\{(2\xi^2l)\cdot B\}+a_0'(-A_2)+a_1'[-\{2l(1-\xi)^2\}B_2]+b\{S^3(2l\xi)^3Z\}=0 \tag{116}$$

また，(111) 式は

$$\begin{aligned} &a_0\left\{\left(\frac{2\xi+1}{\xi l}\right)D\right\}+a_1\{(2\xi+1)\cdot E\}+a_0'\{(3-2\xi)D_1\}+a_1'\{(3-2\xi)E_1\}\\ &\quad+b\{S^3(2l)^2\xi^3(2\xi+1)Y\}=0 \end{aligned} \tag{117}$$

(112) 式は

$$a_0'(A_3)+a_1'\{-l(1-\xi)\cdot B_3\}+b\left\{-S^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\cdot\xi^3l^3\cdot C_3\right\}=0 \tag{118}$$

(113) 式は

$$\begin{aligned} &a_0\{-S(\xi l)G_1\}+a_1\{-S(\xi l)^2H_1\}+a_0'\left\{\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)lS\xi G_2\right\}\\ &\quad+a_1'\left\{-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)Sl^2\xi H_2\right\}+b(X)=0 \end{aligned} \tag{119}$$

そこで，今

$$\left.\begin{array}{lll} ①=A & ⑧=S^3(2l\xi)^3Z & ⑮=-l(1-\xi)B_3\\ ②=-\xi l\cdot B & ⑨=\left(\frac{2\xi+1}{\xi l}\right)D & ⑯=-S^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\xi^3l^3\cdot C_3\\ ③=-S^3\xi^3l^3C & ⑩=(2\xi+1)E & ⑰=-S(\xi l)G_1\\ ④=A_1 & ⑪=(3-2\xi)D_1=(3-2\xi)\frac{D_1'}{l} & ⑱=-S(\xi l)^2H_1\\ ⑤=(2\xi^2l)B_1 & ⑫=(3-2\xi)E_1 & ⑲=\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)S\xi lG_2\\ ⑥=-A_2 & ⑬=S^3(2l)^2\xi^3(2\xi+1)Y & ⑳=-\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)(1-\xi)S\xi l^2H_2\\ ⑦=-\{2l(1-\xi)^2\}B^2 & ⑭=A_3 & ㉑=X \end{array}\right\} \tag{120}$$

とすれば，(115)，(116)，(117)，(118)，(119) 式より

$$①a_0+②a_1 \qquad\qquad +③b=0 \tag{121}$$

$$④a_0+⑤a_1+⑥a_0'+⑦a_1'+⑧b=0 \tag{122}$$

$$⑨a_0+⑩a_1+⑪a_0'+⑫a_1'+⑬b=0 \tag{123}$$

$$⑭a_0'+⑮a_1'+⑯b=0 \tag{124}$$

$$⑰a_0+⑱a_1+⑲a_0'+⑳a_1'+㉑b=0 \tag{125}$$

(121)，(122)，(123)，(125) 式より，a_0，a_1 を消去すれば，次の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned}&a_0'\{(⑥⑨-⑪④)(②④-⑤①)+⑥①(⑤⑨-⑩④)\}\\&\quad+a_1'\{(⑦⑨-⑫④)(②④-⑤①)+⑦①(⑤⑨-⑩④)\}\\&\quad+\{(⑧⑨-⑬④)(②④-⑤①)-(③④-⑧①)(⑤⑨-⑩④)\}\,b=0\end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned}&a_0'\{(⑥⑨-⑪④)(⑩⑰-⑱⑨)-(⑪⑰-⑲⑨)(⑤⑨-⑩④)\}\\&\quad+a_1'\{(⑦⑨-⑫④)(⑩⑰-⑱⑨)-(⑫⑰-⑳⑨)(⑤⑨-⑩④)\}\\&\quad+b\{(⑧⑨-⑬④)(⑩⑰-⑱⑨)-(⑬⑰-㉑⑨)(⑤⑨-⑩④)\}=0\end{aligned} \tag{127}$$

そこで，(126)，(127)，(124) 式において

$$\left.\begin{aligned}
\alpha&=(⑥⑨-⑪④)(②④-⑤①)+⑥①(⑤⑨-⑩④)=⑥⑨②④-⑪④②④\\
&\quad+⑪④⑤①-⑥①⑩④\\
\beta&=(⑦⑨-⑫④)(②④-⑤①)+⑦①(⑤⑨-⑩④)=⑦⑨②④-⑫④②④\\
&\quad+⑫④⑤①-⑦①⑩④\\
\gamma&=(⑧⑨-⑬④)(②④-⑤①)-(③④-⑧①)(⑤⑨-⑩④)=⑧⑨②④\\
&\quad-⑬④②④+⑬④⑤①-③④⑤⑨+③④⑩④-⑧①⑩④\\
\alpha'&=(⑥⑨-⑪④)(⑩⑰-⑱⑨)-(⑪⑰-⑲⑨)(⑤⑨-⑩④)=⑥⑨⑩⑰\\
&\quad-⑥⑨⑱⑨+⑪④⑱⑨-⑪⑰⑤⑨+⑲⑨⑤⑨-⑲⑨⑩④\\
\beta'&=(⑦⑨-⑫④)(⑩⑰-⑱⑨)-(⑫⑰-⑳⑨)(⑤⑨-⑩④)=⑦⑨⑩⑰\\
&\quad-⑦⑨⑱⑨+⑫④⑱⑨-⑫⑰⑤⑨+⑳⑨⑤⑨-⑳⑨⑩④\\
\gamma'&=(⑧⑨-⑬④)(⑩⑰-⑱⑨)-(⑬⑰-㉑⑨)(⑤⑨-⑩④)=⑧⑨⑩⑰\\
&\quad-⑧⑨⑱⑨+⑬④⑱⑨-⑬⑰⑤⑨+㉑⑨⑤⑨-㉑⑨⑩④
\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

とすれば，(126) 式より

$$a_0'\alpha+a_1'\beta+b\gamma=0 \tag{129}$$

(127) 式より

$$a_0'\alpha'+a_1'\beta'+b\gamma'=0 \tag{130}$$

(124)式より

$$a_0'⑭+a_1'⑮+b⑯=0$$

以上3式より，a_0', a_1', b を消去すれば

$$⑭(\gamma\beta'-\gamma'\beta)+⑮(\gamma'\alpha-\gamma\alpha')+⑯(\alpha'\beta-\alpha\beta')=0 \tag{131}$$

然るに

$$\begin{aligned}\alpha &= ⑥⑨②④-⑪④②④+⑪④⑤①-⑥①⑩④\\ &=(2\xi+1)A_1A_2(B\cdot D+A\cdot E)+(3-2\xi)\xi D_1'A_1(A_1B+2\xi AB_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= ⑦⑨②④-⑫④②④+⑫④⑤①-⑦①⑩④\\ &=2l(1-\xi)^2(2\xi+1)A_1B_2(B\cdot D+A\cdot E)+(3-2\xi)\xi lA_1E_1(A_1B+2\xi A\cdot B_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= ⑧⑨②④-⑬④②④+⑬④⑤①-③④⑤⑨+③④⑩④-⑧①⑩④\\ &=-S^3(2l\xi)^3(2\xi+1)A_1Z(B\cdot D+A\cdot E)+S^3(2)^2l^3\xi^4(2\xi+1)A_1Y(A_1B+2\xi AB_1)\\ &\quad+S^3\xi^3l^3(2\xi+1)A_1C(2\xi B_1D-A_1E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha' &= ⑥⑨⑩⑰-⑥⑨⑱⑨+⑪④⑱⑨-⑪⑰⑤⑨+⑲⑨⑤⑨-⑲⑨⑩④\\ &=S(2\xi+1)^2A_2D(EG_1-DH_1)-S\xi(3-2\xi)(2\xi+1)DD_1'(A_1H_1-2\xi B_1G_1)\\ &\quad+S\frac{(1+2\xi)^3}{(3-2\xi)}D\cdot G_2(2\xi B_1D-A_1E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta' &= ⑦⑨⑩⑰-⑦⑨⑱⑨+⑫④⑱⑨-⑫⑰⑤⑨+⑳⑨⑤⑨-⑳⑨⑩④\\ &=Sl\cdot 2(1-\xi)^2(2\xi+1)^2B_2D(EG_1+DH_1)-Sl\xi(3-2\xi)(2\xi+1)DE_1(A_1H_1-2\xi B_1G_1)\\ &\quad-Sl(1-\xi)\frac{(1+2\xi)^3}{(3-2\xi)}DH_2(2\xi B_1D-A_1E)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma' &= ⑧⑨⑩⑰-⑧⑨⑱⑨+⑬④⑱⑨-⑬⑰⑤⑨+㉑⑨⑤⑨-㉑⑨⑩④\\ &=-S^4l^3(2\xi)^3(2\xi+1)^2D\cdot Z(EG_1-DH_1)-S^4l^3(2)^2\xi^4(2\xi+1)^2DY(A_1H_1-2\xi B_1G_1)\\ &\quad+\frac{1}{\xi l}(2\xi+1)^2DX(2\xi B_1D-A_1E)\end{aligned}$$

$⑭=A_3$, $⑮=-l(1-\xi)B_3$, $⑯=-S^3\left(\frac{1+2\xi}{3-2\xi}\right)^2\xi^3l^3\cdot C_3$ なるを以て，(131)式は次の如くなる。

$$\begin{aligned}&A_3\Big\{-(2)^3\cdot Z\cdot(B\cdot D+A\cdot E)+(2)^2\xi Y(A_1B+2\xi AB_1)+C(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}\\ &\quad\times\Big\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(EG_1+DH_1)-\xi(3-2\xi)E_1(A_1H_1-2\xi B_1G_1)\\ &\quad-(1-\xi)\frac{(1+2\xi)^2}{(3-2\xi)}H_2(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}-A_3\Big\{-(2)^3Z(EG_1-DH_1)-(2)^2\xi Y(A_1H_1\\ &\quad-2\xi B_1G_1)+\frac{X}{u}(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}\Big\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(B\cdot D+A\cdot E)\\ &\quad+(3-2\xi)\xi E_1(A_1B+2\xi AB_1)\Big\}-B_3\Big\{-(2)^3Z(EG_1-DH_1)-(2)^2\xi Y(A_1H_1-2\xi B_1G_1)\\ &\quad+\frac{X}{u}(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}\Big\{(2\xi+1)A_2(BD+AE)+(3-2\xi)\xi D_1'(A_1B+2\xi AB_1)\Big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\xi)B_3\Big\{-(2)^3Z(BD+AE)+(2)^2\xi Y(A_1B+2\xi AB_1)+C(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}\\
&\times\Big\{(2\xi+1)A_2(EG_1-DH_1)-\xi(3-2\xi)D_1'(A_1H_1-2\xi B_1G_1)+\frac{(1+2\xi)^2}{(3-2\xi)}\\
&\times G_2(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}-\frac{(1+2\xi)}{(3-2\xi)^2}C_3\Big\{(2\xi+1)A_2(EG_1-DH_1)-\xi(3-2\xi)D_1'(A_1H_1\\
&-2\xi B_1G_1)+\frac{(1+2\xi)^2}{(3-2\xi)}G_2(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}\Big\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(BD+AE)\\
&+(3-2\xi)\xi E_1(A_1B+2\xi AB_1)\Big\}+\frac{(1+2\xi)}{(3-2\xi)^2}C_3\Big\{(2\xi+1)A_2(BD+AE)\\
&+(3-2\xi)\xi D_1'(A_1B+2\xi AB_1)\Big\}\Big\{2(1-\xi)^2(2\xi+1)B_2(EG_1+DH_1)-\xi(3-2\xi)E_1'(A_1H_1\\
&-2\xi B_1G_1)-(1-\xi)\frac{(1+2\xi)^2}{(3-2\xi)}H_2(2\xi B_1D-A_1E)\Big\}=0 \qquad (132)
\end{aligned}
$$

そこで，(132)式を満足するuの最小値をξの各値に対して求め，更に，最小挫屈荷重 $Q=\frac{(1+2\xi)S^2\sqrt{EI_yC}}{(1-\xi)^2}=\frac{\sqrt{u}\,(1+2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2}\cdot\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$ の値を計算すれば，第3表の如くなる。((74)式参照)。

第 3 表

ξ	u	$\sqrt{u}$	$1+2\xi$	$\xi^2(1-\xi)^2$	$\frac{1+2\xi^2}{\xi^2(1-\xi)^2}$	$Q=\frac{\sqrt{u}(1+2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2}\cdot\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$	
0.01	7.813	2.795	1.02	0.00009801	10410.00	29096.00	$\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$
0.05	7.058	2.656	1.10	0.00225600	487.40	1294.50	〃
0.10	5.922	2.433	1.20	0.00810000	148.10	360.30	〃
0.20	4.152	2.038	1.40	0.02560000	54.70	111.50	〃
0.30	2.928	1.711	1.60	0.04410000	36.29	62.09	〃
0.40	2.084	1.444	1.80	0.05760000	31.25	45.13	〃
0.50	1.536	1.239	2.00	0.06250000	32.00	39.65	〃

III. 高さを考慮せる桁梁の挫屈実験について*

1. 実験の経過

挫屈実験に用いた小形模型の梁には，強度その他の点において鋼鉄と似かよつた性質があり，しかも割合に小さな荷重により破壊するのに撓みは案外大きく測定し易しいという便利さのある点を考慮に入れ，孟宗竹を使用する事とした。

(1) 試験用竹材の出産地，その他

* 山形県鶴岡市三日町63，中村橋梁研究所並に山形大学農学部農業工学，物理研究室に於ける著者の実験. 1950, 1951.

(a) 挫屈試験用材

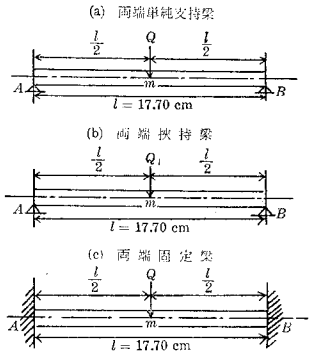
孟宗竹，出産地：山形県東田川郡高坂村宮下赤坂，生育期間：4年半，伐採年月：昭和23年10月，伐採後の経過：1年3カ月，試験片製作年月：昭和25年2月。

(b) 弾性率試験用材

孟宗竹，出産地：山形県西田川郡東郷村青山，生育期間：4年，伐採年月：昭和24年12月，伐採後の経過年月：6カ月，試験片製作年月：昭和25年6月，更に，上記挫屈試験用材は弾性率試験用材としても使用した。

(2) 実験方法

挫屈実験を行うには次の如き要領による。すなわち，上述の如き挫屈試験用孟宗竹にて試験片を製作し，支間17.70 cmの固定台の上に製作した模型梁（第6図参照）を取付け，中央にQなる追加集中荷重をかけて梁が挫屈（あるいは，曲げ破壊）せる時の荷重とその時の撓みを測定した。また必要且つ参考のため，亀裂の入つた時の撓みや荷重途中の撓みも記録した。また実験に用いた模型梁の断面は，幅に比べ高さの割合大きいもの（表皮側面）と幅に比べ高さの割合小さいもの（表皮下面，表皮上面）を採用し，支持状態は，両端単純支持，両端挾持，両端固定の三つの場合を取扱つた。次に，弯曲弾性率試験には，支間40 cmの弯曲弾性率試験用器具を用いた。（物理実験用）



第 6 図

(3) 試験梁の寸法と実験結果

孟宗竹試験梁の挾屈実験結果は次の如くである。

(a) 両端単純支持梁の挫屈実験

第 4 表

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ') (cm)	摘要
No. 1	0.7895	0.4935	17.70	17.500	6.50	5.25	両端単純支持 表皮下面
2	0.6583	0.5440	〃	16.100	5.20	4.00	〃
3	0.6920	0.5100	〃	15.200	6.20	3.50	〃
4	0.6990	0.5130	〃	13.500	5.90	5.00	〃
5	0.7105	0.4460	〃	20.200	6.40	4.80	〃
6	0.6370	0.5025	〃	18.700	6.60	5.50	〃
7	0.7150	0.4855	〃	18.500	6.20	5.30	〃
8	0.6675	0.5305	〃	15.800	4.60	3.70	〃
9	0.6425	0.5155	〃	10.900	7.10	4.70	〃
10	0.7035	0.4580	〃	14.800	7.60	3.80	〃

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ') (cm)	摘要
No. 11	0.5545	0.5450	17.70	22.400	6.10	5.60	両端単純支持 表皮下面
12	0.5415	0.4905	〃	7.400	6.10	6.10	〃
13	0.5180	0.5140	〃	13.700	6.50	6.10	〃
14	0.5985	0.3820	〃	9.700	6.80	6.80	〃
15	0.6985	0.5580	〃	10.800	4.50	4.50	〃
16	0.7640	0.5175	〃	23.800	7.30	6.20	〃
17	0.7390	0.5305	〃	21.000	6.70	5.20	〃
18	0.6795	0.4095	〃	11.900	7.60	6.30	〃
19	0.6800	0.4275	〃	16.900	7.80	6.70	〃
20	0.5715	0.4730	〃	13.700	7.00	6.30	〃
21	0.6325	0.4260	〃	10.100	7.30	6.80	〃
22	0.5595	0.5055	〃	9.100	6.20	5.60	〃
23	0.6555	0.5050	〃	6.500	3.50	3.50	〃
24	0.6260	0.6240	〃	17.600	5.60	5.10	〃
25	0.7510	0.4920	〃	12.300	6.60	4.20	〃
26	0.5660	0.4350	〃	12.700	8.10	6.00	〃
27	0.6715	0.4640	〃	13.600	8.10	5.30	〃
28	0.6100	0.5535	〃	12.700	5.40	4.00	〃
29	0.6915	0.4890	〃	6.200	2.80	2.80	〃
30	0.6965	0.5735	〃	18.000	6.90	4.70	〃
平均	0.6610	0.5010	〃	14.378	6.307	5.112	〃

破壊撓度と亀裂撓度との間に可なりの差異のあるもの数本あるが，これは表皮下面の割竹においては亀裂から破壊に至る経程が割合長い特徴を持つている事を物語つているものである。

第 5 表

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ') (cm)	摘要
No. 31	0.5075	0.3460	17.70	3.800	3.50	3.50	両端単純支持 表皮上面
32	0.6910	0.5065	〃	4.100	1.00	1.00	〃
33	0.5740	0.5435	〃	6.900	1.60	1.60	〃
34	0.6480	0.4740	〃	8.300	2.00	2.00	〃
35	0.6080	0.5075	〃	7.500	1.60	1.60	〃
36	0.7135	0.4340	〃	6.700	2.30	2.30	〃
37	0.5745	0.4740	〃	7.000	1.70	1.60	〃
38	0.4800	0.4190	〃	4.500	2.00	2.00	〃
39	0.5075	0.4510	〃	6.200	1.90	1.90	〃
40	0.7750	0.5855	〃	14.500	1.80	1.80	〃
41	0.6045	0.5140	〃	8.000	1.50	0.50	〃
42	0.6105	0.4860	〃	7.900	1.60	1.60	〃
43	0.7025	0.5225	〃	11.000	1.60	1.60	〃

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ′) (cm)	摘要
No. 44	0.6955	0.6060	17.70	12.800	1.50	1.50	両端単純支持 表皮上面
45	0.6815	0.4955	〃	9.300	1.50	1.50	〃
46	0.4795	0.4990	〃	5.300	1.50	1.50	〃
47	0.3855	0.4960	〃	4.200	1.60	1.60	〃
48	0.4965	0.4175	〃	4.800	1.80	1.80	〃
49	0.6950	0.4820	〃	9.500	1.50	1.50	〃
50	0.5925	0.3855	〃	4.800	2.50	2.50	〃
51	0.5550	0.5050	〃	7.500	1.70	1.70	〃
52	0.6495	0.4245	〃	7.300	2.20	2.20	〃
53	0.6565	0.4490	〃	7.000	1.70	1.70	〃
平均	0.6040	0.4790	〃	7.340	1.81	1.76	〃

表皮上面の場合は，破壊撓度と亀裂撓度の間に殆んど差異のない事が目立つている。これは，表皮下面のときに比べ破壊撓度も亀裂撓度も著しく小さい事に起因している。

第 6 表

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ′) (cm)	摘要
No. 54	0.4255	0.7466	17.70	17.800	3.40	3.00	両端単純支持 表皮側面
55	0.5045	0.6265	〃	11.700	3.00	2.80	〃
56	0.4345	0.4570	〃	6.000	1.70	1.70	〃
57	0.4960	0.6310	〃	9.200	1.50	1.50	〃
58	0.4005	0.6235	〃	10.700	3.00	3.00	〃
59	0.3745	0.4115	〃	4.100	2.80	2.80	〃
60	0.3625	0.5030	〃	9.100	3.20	3.00	〃
61	0.3770	0.5625	〃	10.800	2.10	1.60	〃
62	0.4990	0.6260	〃	16.400	3.10	2.40	〃
63	0.3950	0.4055	〃	6.400	2.40	2.40	〃
64	0.4535	0.5610	〃	8.000	1.40	1.40	〃
65	0.4825	0.5255	〃	11.800	2.40	2.40	〃
66	0.4095	0.4900	〃	12.500	3.60	3.00	〃
67	0.3635	0.3845	〃	10.200	2.00	2.00	〃
68	0.4845	0.5260	〃	4.700	2.00	2.00	〃
69	0.4320	0.6330	〃	7.600	1.50	1.00	〃
平均	0.4310	0.5445	〃	9.810	2.444	2.250	〃

表皮側面の場合も，破壊撓度と亀裂撓度の差異は可なり小さかつた。これも，表皮上面のとき同様，撓みが割合小さい事に起因している。

第 7 表

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ′) (cm)	摘要
No. 70	0.401	0.624	17.70	10.700	2.43	2.40	両端単純支持 表皮側面
71	0.306	0.702	17.70	10.620	2.50	2.45	〃

(b) 両端挾持梁の挾屈実験

第 8 表

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ′) (cm)	摘要
No. 72	0.401	0.624	17.70	19.220	1.94	1.94	両端挾持 表皮側面
73	0.306	0.702	17.70	12.430	1.90	1.88	〃

(c) 両端固定梁の挫屈実験

第 9 表

試験片番号	幅 (b) (cm)	高さ (h) (cm)	支間 (l) (cm)	破壊荷重 (Q) (kg)	破壊撓度 (δ) (cm)	亀裂撓度 (δ′) (cm)	摘要
No. 74	0.401	0.624	17.70	28.750	1.50	1.50	両端固定, 表皮側面
75	0.306	0.702	17.70	18.250	1.28	1.28	〃

(4) 竹の物理，機械的諸性質[6),7)]

著者は，竹について各種の物理，機械的実験を行つた。数値計算に必要・参考と考えられるもの 2, 3 を挙げれば，第 10, 11, 12 表の如くである。

第 10 表　孟宗竹の曲げ破壊強度 (kg/cm²)

材質	表皮下面	表皮上面	表皮側面	平均
最上級	2234	1374	2091	1900
普通	1607	951	1543	1367
最下級	1560	926	1496	1327

第 11 表　孟宗竹の弾性率及び剛性率 (kg/cm²)

種別	試験片 (表皮下面) No. 1～No. 30	試験片 (表皮側面) No. 31～No. 53	試験片 (表皮側面) No. 54～No. 69	試験片 (表皮側面) No. 70, 72, 74	試験片 (表皮側面) No. 71, 73, 75	荷重の範囲
曲げ弾性率	38033	84747	79798	629466	577789	破壊荷重附近
捩り剛性率	41650	41650	41650	41650	41650	〃

(註)　第 11 表は挫屈実験に用いたもので，材質普通以下のもの。

第10, 11表は，挫屈実験に用いた試験梁より求めたものであり，第11表の曲げ弾性率及び捩り剛性率の数値は，破壊荷重附近のものを示したものであり，数値計算に直ぐ用いてよいと考える。

第12表 各種竹の弾性率，剛性率 (kg/cm²)

種別	普通乾燥	絶乾	燻煙	平均	摘要
引張弾性率	403563	353900	437840	398434	矢竹，荷重極めて小
曲げ弾性率	167638	171050	169275	169321	孟宗竹，唐竹，荷重極めて小
捩り剛性率	77730	71500	81835	77022	矢竹，荷重極めて小

(註) 材質，最上級

第12表は，極めて良質の竹材（矢竹，孟宗竹，唐竹）に対し，荷重の非常に小さい範囲について物理実験を行つたものでその値も非常に高い。

また破壊に至るまでの荷重—撓み曲線を図に画けば，第7図の如くなる。また，荷重の小さい範囲の荷重—変形曲線は，著者の研究論文“竹筋コンクリ資材たる竹の研究(II)”[6] を参照されたい。

2. 挫屈荷重公式

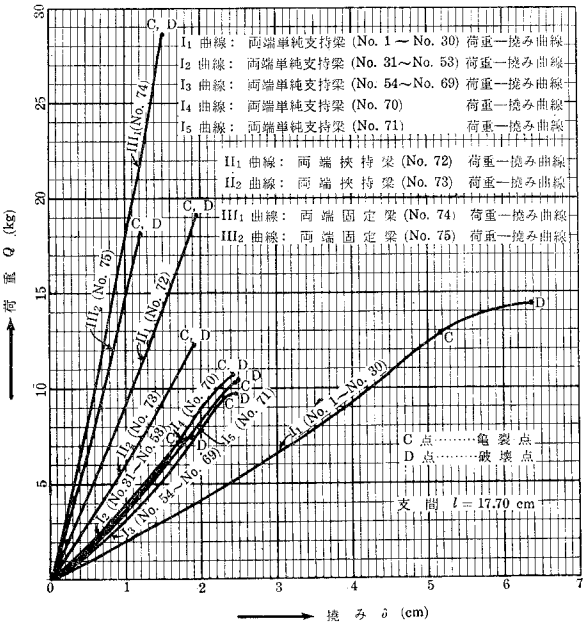
両端単純支持梁及び両端挾持梁にては，最小挫屈荷重

$$Q = \frac{\sqrt{u}}{(1-\xi)\xi^2}\,\frac{\sqrt{EI_y C}}{l^2} \tag{133}$$

であり，両端固定梁にては，最小挫屈荷重 Q は，

$$Q = \frac{\sqrt{u}\,(1+2\xi)}{\xi^2(1-\xi)^2}\,\frac{\sqrt{EI_y C}}{l^2} \tag{134}$$

である。ここに，E: 曲げ弾性係数 (kg/cm²)，I_y: y 軸に関する慣性能率 (cm⁴)，C: 捩り剛さ $= \frac{hb^3}{3}\left(1-0.630\frac{b}{h}\right)G$，$G$: 剪断弾性係数 (kg/cm²)，$u=S^4\xi^4 l^4$ (II のところ参照)，l: 支間 (cm)，b: 梁断面の幅 (cm)，h: 梁断面の高さ (cm)，ξ: 左支点より挫



第7図 孟宗竹梁（普通乾燥）の破壊荷重に至る中央点の荷重—撓み曲線の図

屈荷重 Q に至る距離の支間に対する比率 (第 1, 2, 3 表参照)。

3. 曲げ破壊荷重公式[6),8),9)]

曲げ破壊強度公式としては，木材に用いられる次の公式を用いた。

$$\sigma_B = \frac{M}{W} \tag{135}$$

ここに，M: 曲げモーメント (kg-cm), W: 断面係数 (cm^3), (135) より次の式が得られる。

$$\sigma_B = \frac{3Q_B l}{2bh^2} \tag{136}$$

ここに，Q_B: 破壊時の最大荷重 (kg), l: 支間 (cm), b: 梁断面の幅 (cm), h: 梁断面の高さ (cm)。

Monnin 氏に依ると，上式は欠点のない最上級の材質にて弾性限度内の荷重に対してのみ成立し，破壊時に対しては，h の指数の 2 を材質に応じて次のように変更すべきだといつている。

欠点なきもの、$\frac{11}{6}\sim\frac{10}{6}$，やや欠点あるもの，$\frac{10}{6}\sim\frac{9}{6}$，節，その他欠点多いもの，$\frac{9}{6}\sim\frac{8}{6}$ また，曲げ破壊強度は，$\frac{l}{h}$ が 15～20 以下となると剪断応力の影響を受けること大となり，その値が著しく低下する。Baumann 氏に依ると，$\frac{l}{h}=40$ の試験梁の曲げ破壊強度を σ_{Bl} とすれば，$\frac{l}{h}=40$ のものの破壊強度は次式で示されるといつている

$$\sigma_{Bk} = \frac{\sigma_{Bl}}{1+\frac{h}{l}} \tag{137}$$

そこで，著者は，種々研究の結果，竹材試験片に対しては，節がある故，h の指数を $\frac{9}{6}$ にとり，次式を用いた。

$$\sigma_B = \frac{3Q_B l}{2bh^{\frac{9}{6}}} = \frac{3Q_B l}{2bh^{\frac{2}{3}}} \tag{138}$$

(138) 式より，

$$Q_B = \frac{\sigma_B(2bh^{\frac{2}{3}})}{3l} \tag{139}$$

を得る。ここに，Q_B, σ_B, b, h, l などは上述の通りである。

4. 挫屈荷重及び曲げ破壊荷重の計算

最小挫屈荷重は，(133), (134) 式及び第 1, 2, 3 表を用い，曲げ破壊荷重は，(139) 式を用いて計算を行つた。その結果は第 13 表に示す。

第13表 最小挫屈荷重

支持条件		両端単純支持			
試験片種別		表皮下面 No. 1～No. 30	表皮上面 No. 31～No. 53	表皮側面 No. 54～No. 69	表皮側面 No. 70
Q_e	(kg)	14.378	7.340	9.810	10.700
l	(cm)	17.70	17.70	17.70	17.70
δ_e	(cm)	6.307	1.810	2.444	2.43
b	(cm)	0.661	0.604	0.431	0.401
h	(cm)	0.501	0.479	0.545	0.624
h^3	(cm^3)	0.1258	0.1099	0.1619	0.2427
$\delta_e h^3 b$	(cm^5)	0.52443	0.12015	0.17054	0.23581
$\frac{l^3 Q_e}{4}$	(kg-cm^3)	19945.7	10182.3	13608.8	14843.4
$E=\frac{l^3 Q_e}{4\delta_e h^3 b}$	(kg/cm^2)	38033	84747	79798	62947
I_y	(cm^4)	0.012050	0.008796	0.003635	0.003338
G	(kg/cm^2)	41650	41650	41650	41650
$\frac{hb^3}{3}\left(1-0.630\frac{b}{h}\right)$	(cm^4)	0.008149	0.007233	0.007296	0.007948
$C=\frac{hb^3}{3}\left(1-0.630\frac{b}{h}\right)G$	(kg-cm^2)	0.0003394	0.00030125	0.00030388	0.00033103
EI_yC	(kg^2-cm^4)	155549.0	224565.1	88145.2	69554.6
$\sqrt{EI_yC}$	(kg-cm^2)	394.4	473.9	296.9	263.7
$\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$	(kg)	1.258	1.512	0.947	0.841
$Q=16.94\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$	(kg)	21.31	25.61	16.04	14.25
$Q=25.89\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$	(kg)	—	—	—	—
$Q=39.65\frac{\sqrt{EI_yC}}{l^2}$	(kg)	—	—	—	—
δ	(cm)	6.77	1.81	2.17	2.24
$Q_B=\frac{\sigma_B(2bh^{2/3})}{3l}$	(kg) (上質)	21.10	11.50	13.62	13.85
〃	(kg) (中質)	15.15	7.96	10.07	10.25
〃	(kg) (下質)	14.70	7.76	9.75	9.90

(註) 第13表において，Q_e：実験に依る最小挫屈荷重，l：支間，δ_e：実験に依る中央点の撓み，b：梁断面の幅，h：梁断面の高さ，E：実験に依る破壊荷重附近の曲げ弾性率，I_y：y 軸に関する慣性能率，

及び曲げ破壊荷重 (kg)

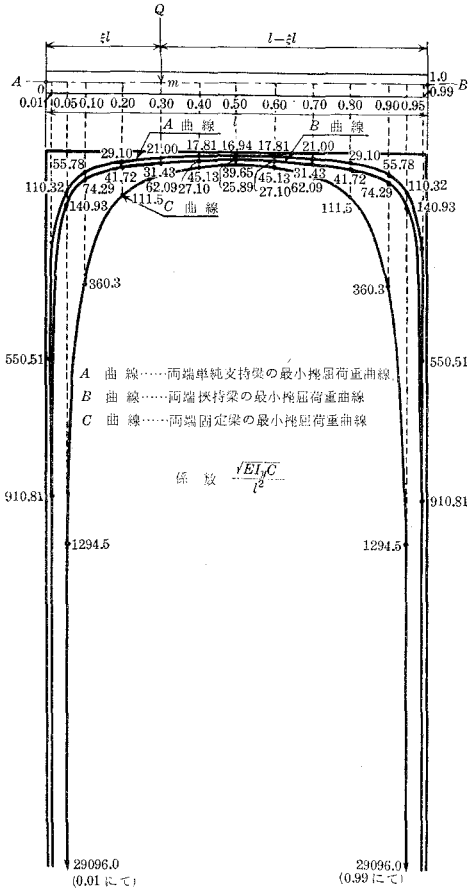
	両端挾持		両端固定	
表皮側面 No. 71	表皮側面 No. 72	表皮側面 No. 73	表皮側面 No. 74	表皮側面 No. 75
10.620	19.220	14.430	28.750	22.250
17.70	17.70	17.70	17.70	17.70
2.50	1.94	1.90	1.50	1.28
0.306	0.401	0.306	0.401	0.306
0.702	0.624	0.702	0.624	0.702
0.3461	0.2427	0.3461	0.2427	0.3461
0.25498	0.23581	0.25498	0.23581	0.25498
14732.5	14843.4	14732.5	14843.4	14732.5
57779	62947	57779	62947	57779
0.001676	0.003338	0.001676	0.003338	0.001676
41650	41650	41650	41650	41650
0.004864	0.007948	0.004864	0.007948	0.004864
0.00020259	0.00033103	0.00020259	0.00033103	0.00020259
19618.3	69554.6	19618.3	69554.6	19618.3
140.1	263.7	140.1	263.7	140.1
0.447	0.841	0.447	0.841	0.447
7.57	—	—	—	—
—	21.77	11.57	—	—
—	—	—	33.35	17.72
2.41	1.87	1.83	1.50	1.26
11.47	—	—	—	—
8.46	—	—	—	—
8.22	—	—	—	—

G: 捩り剛性率 (或は，剪断弾性係数)，C: 捩り剛さ，Q: 計算に依る最小挫屈荷重，Q_B: 計算に依る曲げ破壊荷重，δ: 計算に依る中央点の撓み。

IV. 結　言

1. 挫屈荷重の理論計算値について

背の高い両端単純支持梁，両端挾持梁，両端固定梁の最小挫屈荷重曲線を比較図示すれば第8図の如くなる。この三つの場合共，梁の中央より末端に行くに従い，挫屈荷重係数は増加している。すなわち，中央0.6～0.8 l 附近は，その影響も小さいがそれより末端に近づくに従い急激に増加している。また，両端単純支持梁と両端挾持梁の曲線の形は良く類似して居り，何れも急激なる増加は，$\xi=0.20\,l$ 附近及び $\xi=0.80\,l$ 附近より両端に向つて始まつているが，両端固定梁の曲線は，前両者よりも稍尖形を示し，$\xi=0.40\,l$ 附近及び $\xi=0.60\,l$ 附近より両端に向つて急激なる増加が始まつている。次に，以上三者の最小挫屈荷重係数の比を示せば，第14表の如くなる。但し，両端単純支持梁の最小挫屈荷重係数 $n=1$ とし，その場合の両端単純支持梁と両端挾持梁の最小挫屈荷重係数の比を n'，両端単純支持梁と両端固定梁の最小挫屈荷重係数の比を，n'' とする。また，両端挾持梁と両端固定梁の最小挫屈荷重係数の比は，n''' と定める。第14表を見れば分る通り，三つの梁共，中央 $\frac{1}{3}$ 附近においては，その最小挫屈荷重係数の比は変化少ないが，両端に近づくに従



第8図　支持条件による最小挫屈荷重曲線の比較に関する図

第 14 表

ξ	n	n'	n''	n'''
0.50 l	1	1.530	2.340	1.530
0.40 l, 0.60 l	1	1.522	2.530	1.665
0.30 l, 0.70 l	1	1.500	2.960	1.975
0.20 l, 0.80 l	1	1.430	3.840	2.680
0.10 l, 0.90 l	1	1.332	6.460	4.860
0.05 l, 0.95 l	1	1.278	11.750	9.200
0.01 l, 0.99 l	1	1.655	52.800	32.000

つて両端固定梁の最小挫屈荷重係数のみが，他の二者のそれと著しく遠ざかつて行く事が分る。すなわち，両端固定梁は中央附近においては，他の二者より可成り挫屈し難いのであるが，末端においては，更に著しく挫屈し難いという結論になる。両端単純支持梁の場合については，A. Koroboff, S. Timoshenko[2] の諸氏がその最小挫屈荷重を計算している。その結果は，著者の計算結果と略々一致している。

2. 実験値と理論計算値との比較

第13表を見れば分る通り，両端単純支持梁においては，No. 70, No. 71 の試験片，すなわち，幅に比べ高さの大きい梁の場合は，最小挫屈荷重についての理論計算値と実験値とが多少の差はあるが思つたよりよく近接している（差 25～30%）。然し，幅に比べ高さの小さな梁，No. 1～No. 30, No. 31～No. 53, No. 54～No. 69 などにおいては，実験値の方が，遙かに小さくなつている。この場合は寧ろ，曲げ破壊荷重公式によつて求めた計算値に，よく合致する事が明らかとなつた。また，両端挾持梁，両端固定梁においては少ない実験ではあつたが，最小挫屈荷重の理論計算値と実験値とは可なりよく近づいていた。これは，幅に比べ高さの大きい矩形断面を用いたので，解式の理論が，実際の条件を，略々，満足しているからだと考えられる。然し詳細に云えば材質の良否が大いに関係し，No. 72, No. 74 の試験片の方が No. 73, No. 75 の試験片よりも，理論計算値と実験値の差が幾分少なかつた。すなわち，その差は，No. 72, No. 73, No. 74, No. 75 で，夫々 12%, 25%, 14%, 31% となつている。また，破壊時における各梁の撓みについても，実験値と理論計算値を比較して見たところ，多少の差はあつたが，考えていたより接近している事が分つた。試験片として竹材を用いた場合の挫屈（或は破壊）実験としては，この位の差異（最大 30% 程度）は止むを得ないのではないかと思う。鋼材その他の金属についてこの種の実験を試みるならば，更に興味ある結果が得られる事と思う。

（昭和 34 年 4 月 30 日受理）

文　献

1) 倉西正嗣： 弾性学 (1957).
2) 長柱研究委員会（湯浅亀一外 6 名）： 弾性安定要覧 (1951).
3) S. Timoshenko： Theory of Elastic Stability (1936).
4) F. Bleich： Buckling Strength of Metal Structures (1952).
5) 中村作太郎： 深い梁の挫屈荷重に就て，土木学会誌，29, 907 (1943).
6) 中村作太郎： 竹筋コンクリート資材たる竹の研究 (II)，農業土木学会誌，“農業土木研究”，22, 567, (1955).
7) 宇野昌一： 竹材の性質と其の利用 (1948).
8) 竹山謙三郎： 木構造 (1954).
9) 青木楠男： 土木工事材料 (1940).

On Elastic Behavior along Simply Supported Edges of Rectangular Plates

Sumio Nomachi

Abstract

In this paper, the three-dimensional stress problems concerning the rectangular plate with two of the opposite edges simply supported and the other two edges hinged, are dealt with. In order to criticise Kirchhoff's assumption[1~4] concerning the boundary of the plate, the variations of the shearing forces in the vicinity of the simply supported edge are presented here. Along the simply supported edge, both the bending moments and the shearing forces acting on the cross section paralell to the same edge, always vanish by means of the thin plate theory. The results obtained here, however, indicate that they still remain at the edge.

Introduction

In an elastic body subjected to given forces the tractions specified by X_ν, Y_ν, Z_ν where ν denotes the normal to the boundary surfaces, have prescribed values at every point of those surfaces. The equilibrium of the forces at the boundary takes the following forms

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} &= X_\nu\,, \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} &= Y_\nu\,, \\ l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z &= Z_\nu\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

where σ_x, σ_y, and σ_z denote normal stresses by x, y, and z axes respectively; and τ_{yz}, τ_{zx}, and τ_{xy} denote shearing stresses. And l, m, and n are the direction cosine of the normal to the boundary. It shows us that three boundary conditions should be necessary at each point of surfaces bounding the elastic body. When the plates is thin, the actual distribution of the tractions applied to the edge regarded as a parabolic surface is no practical importance. We represent therefore the tractions applied to the edges by their force and couple-resultants, estimated per unit of length of the edge-line. Let T, S, N denote the components of force, H, G those of the couple: T is a tension, S and N are shearing force tangential and normal to the middle plane, G is a flexial couple, and H a torsional couple.

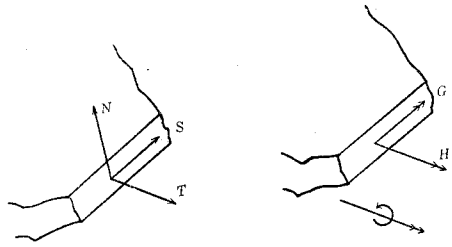


Fig. 1

We also let the stress-resultants and stress-couples belonging to a curve parallel to the edge-line, be denoted $\bar{T}$, $\bar{S}$, $\bar{N}$ and $\bar{G}$, $\bar{H}$. The statical equivalence at the edge-line is expressed as

$$T = \bar{T}, \quad S = \bar{S}, \quad N = \bar{N}, \quad H = \bar{H}, \quad G = \bar{G}. \tag{2}$$

When the distribution of the stresses by T, S are antisymmetrical* with respect to the middle plane by its thickness, the five conditions mentioned above, are diminished to the three conditions:

$$\left.\begin{aligned} N &= \bar{N}, \\ H &= \bar{H}, \\ G &= \bar{G}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

This represents the case where the plate is subjected by the equal tractions normal to its upper and lower surface respectively.

In this case a system of two boundary conditions was obtained by Kirchhoff, who set out from a special assumption as to the nature of the strain within the plate, and proceeded by the method of variation of the energy-function. The couple on any finite length might be applied by means of tractions directed at right angles to force- and couple-resultant, estimated per unit of length of the edge-line, would be equivalent to a distribution of shearing force of type N instead of torsional couple of the type H. The required shearing force is easily found to be $-\frac{\partial H}{\partial s}$, in which s denotes the length along the edge. The boundary conditions are thus found to be

$$\left.\begin{aligned} N - \frac{\partial H}{\partial s} &= \bar{N} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}, \\ G &= \bar{G}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

These conditions are generally adopted in the theory of plate and shell.

* If the stresses by T, S are symmentrical with respect to the middle plane the plate would be in the state of plane stress.

Components of Stress and Displacement from Three-Dimensional Stress Problems

From the equilibrium condition applied to a cubical element of the elastic medium, equations for the statical equivalence of forces take the well-known forms

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=X, \\ &\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=Y, \\ &\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=Z, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

where X, Y, Z denote the components of the body force per unit volume in x, y, z directions respectively.

The stresses are related to the displacements u, v, and w

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\sigma_y=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(2\mu+\lambda)\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\sigma_z=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+(2\mu+\lambda)\frac{\partial w}{\partial z}, \\ &\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ &\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ &\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

where u, v, w are the components of displacement in x, y, z directions respectively; and μ, λ are Lame's constants.

As the author have already described in the previous paper[5], Eq. (5) and Eq. (6) by means of finite Fourier transforms, yield the results without the body forces X, Y, and Z, as follows:

$$\begin{aligned} u=\sum_m\sum_n \frac{c^2 m}{2a\gamma_{mn}}\Bigg[&K_{mn}\left\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\} \\ &+K'_{mn}\left\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\Bigg]\cos\frac{m\pi}{a}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_n\frac{b^3mr}{2ca\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\left\{G_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+G'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\\
&\times \cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{ra^2}{2c\alpha_{nr}}\left[E_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+E'_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\right]\\
&\times \sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{b}{2}\left[H_{mr}\left\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{1}{\beta_{mr}^2}\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right.\right.\\
&\left.\left.\times P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}+H'_{mr}\left\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{1}{\beta_{mr}^2}\left(\frac{mb}{a}\right)^2P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\right]\\
&\times \cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a^2n}{2b\alpha_{nr}}\left[J_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+J'_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&\times \cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{b^3m}{4a\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\left\{B_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+B'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\\
&\times \cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^4mn}{4ab(\gamma_{mn})^3}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\left[F_{mn}\left\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right.\right.\\
&\left.\left.+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+F'_{mn}\left\{\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+(\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_n\sum_r\frac{a^2}{4\alpha_{nr}}\left[A_{nr}\left\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\right.\\
&\left.+A'_{nr}\left\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m\sum_n\frac{c^2}{4\gamma_{mn}\mu}\left[D_{mn}\left\{\left(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+D'_{mn}\left\{\left(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\frac{a^2}{8\mu}\sum_n\frac{b}{an}\left[A_{n0}\left\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}+A'_{n0}\left\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\Psi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{b}y+\frac{b}{4}\sum_m\left[H_{m0}\left\{Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\right.\\
&\left.+H'_{m0}\left\{Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\right]\cos\frac{m\pi}{a}x+\frac{a}{4}\sum_n\left[J_{n0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}+J'_{n0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.\\
&\left.\left.\times\Psi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\right]\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\frac{ab}{8m}\frac{1}{2\mu+\lambda}\left\{B_{m0}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+B'_{m0}\right.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\frac{bc}{4n}\Big\{D_{0n}\phi^{(1)}(\gamma_{0n}\zeta)+D'_{0n}\phi^{(2)}(\gamma_{0n}\zeta)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\frac{b}{4}\sum_r\Big\{J_{0r}Q^{(1)}(\beta_{0r}\eta)+J'_{0r}Q^{(2)}\beta_{0r}\eta)\Big\}\cos\frac{r\pi}{c}z-\frac{b}{8}\Big\{J_{00}(1-2\eta)+J'_{00}\Big\}\\
&m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v=&\sum_m\sum_n\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\Big[K_{mn}\Big\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&+K'_{mn}\Big\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_n\sum_r\frac{a^3nr}{2cba_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{E_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+E'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_n\sum_r\frac{a^3n}{4ba_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Big\{A_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+A'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_m\sum_r\frac{rb^2}{2c\beta_{mr}}\Big[G_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\\
&+G'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Big[J_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2a_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+J'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2a_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{b^2m}{2a\beta_{mr}}\\
&\times\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^4mn}{4ab(\gamma_{mn}^3)}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big[D_{mn}\Big\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+D'_{mn}\Big\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_r\frac{b^2}{4\beta_{mr}}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+B'_{mr}\Big\{\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\\
&\times\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{\gamma\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^2}{4\gamma_{mn}\mu}\Big[F_{mn}\Big\{\Big(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+F'_{mn}\Big\{\Big(2-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&-\frac{b^2}{8\mu}\sum_m\frac{a}{bm}\Big[B_{m0}\Big\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}+B'_{m0}
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\times\left\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x+\frac{a}{4}\sum_{n}\Bigg[J_{n0}\\
&\times\left\{Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}+J'_{n0}\left\{Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\Bigg]\\
&\times\cos\frac{n\pi}{b}y+\frac{b}{4}\sum_{m}\Bigg[H_{m0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\\
&+H'_{m0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_{n}\frac{ba}{8n}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\left\{A_{n0}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+A'_{n0}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_{m}\frac{ac}{4m}\\
&\times\left\{F_{m0}\phi^{(1)}(\gamma_{m0}\zeta)+F'_{m0}\phi^{(2)}(\gamma_{m0}\zeta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x-\frac{a}{4}\sum_{r}\Big\{H_{r0}Q^{(1)}(\beta_{0r}\eta)\\
&+H'_{0r}Q^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\Big\}\cos\frac{r\pi}{c}z-\frac{a}{8}\left\{H_{00}(1-2\xi)+H'_{00}\right\}\\
&m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
w=&-\sum_{m}\sum_{n}\frac{c}{2}\Bigg[K_{mn}\left\{Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+K'_{mn}\Big\{Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_{n}\sum_{r}\frac{a}{2}\Bigg[E_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+E'_{nr}\left\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_{m}\sum_{r}\frac{b}{2}\Bigg[G_{mr}\Big\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}\\
&\times P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+G'_{mr}\left\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&\times\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_{n}\sum_{r}\frac{a^3r}{4c\alpha_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\left\{A_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+A'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_{m}\sum_{n}\frac{c^3m}{4a\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{D_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+D'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_{n}\sum_{r}\frac{a^3nr}{2bc\alpha_{nr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times\left\{J_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+J'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_{m}\sum_{n}\frac{b^3r}{4c\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\Big\}B_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+B'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&\times\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_{m}\sum_{n}\frac{c^3n}{4b\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\left\{F_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+F'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_{m}\sum_{r}\frac{b^3mr}{2ac\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)
\end{aligned}
\right\}\quad(9)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+ H'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\,,\\
&m,\ n,\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}
$$

The dilatation is, therefore, written in the form:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=e=\sum_m\sum_n\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big\{K_{mn}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&+K'_{mn}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_n\sum_r\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\frac{ar}{c}\Big\{E_{nr}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+E'_{nr}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\frac{br}{c}\Big\{G_{mr}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+G'_{mr}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{bm}{a}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{mr}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+H'_{mr}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{an}{b}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{nr}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+J'_{nr}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{b}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{mr}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+B'_{mr}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a}{2\mu+\lambda}\Big\{A_{nr}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+A'_{nr}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\frac{1}{2\mu+\lambda}\\
&\times\Big\{F_{mn}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+F'_{mn}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\\
&\times\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{D_{mn}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+D'_{mn}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_n\frac{a}{4}\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{A_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+A'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_m\frac{b}{4}\frac{1}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+B'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&-\sum_m\frac{bm}{2a}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+H'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&-\sum_n\frac{an}{2b}\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+J'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\,.
\end{aligned}\right\}\quad(10)
$$

Then, the relations (6) yield the components of stress as follows:

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda e\\
&=\sum_m\sum_n\Bigg[K_{mn}\Bigg\{\Big(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}}+\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+K'_{mn}\Bigg\{\Big(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}+\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big)
\end{aligned}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\times \phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \\
&+\sum_m\sum_r\frac{br}{c}\Big[G_{mr}\Big\{\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\} \\
&+G'_{mr}\Big\{\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x \\
&\times\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\frac{ra}{c}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{E_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+E'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\} \\
&\times\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{bm}{a}\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta) \\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta) \\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r\frac{an}{b} \\
&\times\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+J'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_r \\
&\times\frac{b}{2}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+B'_{mr} \\
&\times\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z \\
&-\sum_m\sum_n\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\Big[F_{mn}\Big\{\Big(\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta) \\
&-\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+F'_{mn}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big) \\
&\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y \\
&-\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Big[A_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+A'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi) \\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\Big[D_{mn} \\
&\times\Big\{\Big(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\} \\
&-D'_{mn}\Big\{\Big(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2} \\
&\times\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\times\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\frac{a}{4}\Big[A_{n0}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi) \\
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}+A'_{n0}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y \\
&-\sum_m\frac{bm}{2a}\Big[H_{m0}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\times P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+H'_{m0}\left\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&-\sum_n\frac{an}{2b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\left\{J_{n0}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+J'_{n0}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_m\frac{b}{4}\Bigg[B_{m0}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\\
&+B'_{m0}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\,,
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_y=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda e=&\sum_m\sum_n\Bigg[K_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}+\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+K'_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}+\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\right.\\
&\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_n\sum_r\frac{ar}{c}\Bigg[E_{nr}\Bigg\{\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}\\
&+E'_{nr}\Bigg\{\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&\times\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{rb}{c}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\times\left\{G_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+G'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\frac{an}{b}\Bigg[J_{nr}\Bigg\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}+J'_{nr}\Bigg\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{am}{b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\\
&\times\left\{H_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+H'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\\
&\times\Bigg[A_{nr}\Bigg\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}+A'_{nr}\\
&\times\Bigg\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_m\sum_r\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\Bigg[D_{mn}\Bigg\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Bigg)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}+D'_{mn}\Bigg\{\left(\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Bigg\}\Bigg]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_r\frac{b}{2}\\
&\times\Bigg[B_{mr}\Bigg\{Q^{(1)}\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Bigg\}+B'_{mr}\Bigg\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)
\end{aligned}
\right\}\quad(12)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2b\gamma_{mn}}\Big[F_{mn}\\
&\times\Big\{\Big(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Big)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&+F'_{mn}\Big\{\Big(\frac{4\mu+3\lambda}{2\mu+\lambda}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n_2}{b^2\gamma_{mn}^2}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\frac{b}{4}\Big[B_{m0}\Big\{Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\\
&+B'_{m0}\Big\{Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_n\frac{an}{2b}\Big[J_{n0}\\
&\times\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}+J'_{n0}\Big\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\\
&+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\frac{bm}{2a}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{m0}P^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\\
&+H'_{m0}P^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x-\sum_n\frac{a}{4}\Big[A_{n0}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times P^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}+A'_{n0}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z=2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda e&=\sum_m\sum_n\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\Big[K_{mn}\Big\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&+K'_{mn}\Big\{\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_n\sum_r\frac{ar}{c}\\
&\times\Big[E_{nr}\Big\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+E'_{nr}\\
&\times\Big\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{r^2a^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m\sum_r\frac{br}{c}\Big[G_{mr}\Big\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\\
&\times\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+G'_{mr}\Big\{\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}\\
&\times P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r\frac{a}{2}\Big[A_{nr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{a^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+A'_{nr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{a^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\\
&\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{4a\gamma_{mn}}\Big[D_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+D'_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_n\frac{an}{b}\Big[J_{nr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{r^2a^2}{c^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$\times \frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\} + J'_{nr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda} Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi) + \frac{r^2a^2}{c^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}$$

$$\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z - \sum_m\sum_r\frac{b}{2}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)$$

$$+\frac{b^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\} + B'_{mr}\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta) + \frac{b^2r^2}{c^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z + \sum_m\sum_n\frac{c^2n}{4b\gamma_{mn}}\Big[F_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\} - F'_{mn}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\sum_r\frac{bm}{a}\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta) + \frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\} + H'_{mr}\Big\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)$$

$$+\frac{b^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z - \sum_n\frac{a}{4}\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}$$

$$\times\Big\{A_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi) + A'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_n\frac{an}{2b}\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{J_{n0}Q^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)$$

$$+J'_{n0}Q^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\frac{bm}{2a}\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{H_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)$$

$$+H'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x - \sum_m\frac{b}{4}\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{B_{m0}Q^{(1)}(\beta_{m0}\eta)$$

$$+B'_{m0}Q^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\,,$$

$$\tau_{yz} = \mu\Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = -\sum_m\sum_n\frac{cn}{b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{K_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)$$

$$+K'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\sum_r\frac{\mu\beta_{mr}}{2}\Big[G_{mr}\Big\{\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)$$

$$-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\} + G'_{mr}\Big\{\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta) - \frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{b^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}$$

$$\times\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z + \sum_n\sum_r\mu\frac{an}{2b}\Big[E_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)$$

$$-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\} + E'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi) - \frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}$$

$$\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{b}z - \sum_n\sum_r\mu\frac{br}{2c}\Big[J_{nr}\Big\{Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)$$

$$-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2\alpha_{nr}^2}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\} + J'_{nr}\Big\{Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi) - \frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{n^2a^2}{b^2\alpha_{nr}^2}$$

$$\times P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z + \sum_m\sum_r\mu\frac{b^2mr}{2ac\beta_{mr}}\Big[H_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\times \phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\\
&+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{a^3rn}{2bc}\frac{1}{\beta_{mr}^2}\\
&\times\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{A_{nr}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+A'_{nr}P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\\
&\times\frac{c^3mn}{2ab\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{D_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+D'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_m\sum_r\frac{b^2r}{4c\beta_{mr}}\Big[B_{mr}\Big\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\\
&+B'_{mr}\Big\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_m\sum_n\frac{c}{2}\Big[F_{mn}\Big\{Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\\
&+F'_{mn}\Big\{Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\times P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\Big]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\\
&-\sum_n\frac{c}{4}\Big\{F_{m0}Q^{(1)}(\gamma_{m0}\zeta)+F'_{m0}Q^{(2)}(\gamma_{m0}\zeta)\Big\}\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_r\frac{ar}{4c}\\
&\times\Big\{H_{0r}Q^{(1)}(\alpha_{0r}\xi)+H'_{0r}Q^{(2)}(\alpha_{0r}\xi)\Big\}\sin\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}\right\}\quad(14)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{zx}=\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\Big)&=-\sum_m\sum_n\frac{cm}{a}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Big\{K_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+K'_{mn}\\
&\times P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\sum_r\mu\frac{\alpha_{nr}}{2}\Big[E_{nr}\Big\{\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+E'_{nr}\Big\{\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\alpha_{nr}^2}\\
&\times\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_r\sum_m\mu\frac{bm}{2a}\Big[G_{mr}\Big\{Q^{(1)}(\beta_{mn}\eta)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+G'_{mr}\Big\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{a^2r^2}{c^2\beta_{mr}^2}\\
&\times P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{a^2nr}{2bc\alpha_{nr}}\Big[J_{nr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\\
&\times\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+J'_{nr}\Big\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\\
&+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}\Big]\sin\frac{n\pi}{b}y\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\mu\frac{ar}{2c}\Big[H_{mr}\\
&\times\Big\{Q^{(1)}\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{m^2b^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}+H'_{mr}\Big\{Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\\
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{m^2b^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\Big\}\Big]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_r\frac{b^3rm}{2ac\beta_{mr}^2}
\end{aligned}\right\}\quad(15)
$$

$$\times \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\left\{B_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+B'_{mr}P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z$$

$$+\sum_m\sum_n\frac{c^3mn}{2ab\gamma_{mn}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\left\{F_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+F'_{mn}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}$$

$$\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_n\sum_r\frac{a^2r}{4c\alpha_{nr}}\left[A_{nr}\left\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}+A'_{nr}\left\{\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\right]$$

$$\times\sin\frac{n\pi}{b}y\ \sin\frac{r\pi}{c}z-\sum_m\sum_n\frac{c}{2}\left[D_{mn}\left\{Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right.$$

$$\left.+D'_{mn}\left\{Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$-\sum_n\frac{c}{4}\left\{D_{0n}Q^{(1)}(\gamma_{0n}\zeta)+D'_{0n}Q^{(2)}(\gamma_{0n}\zeta)\right\}\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_r\frac{br}{4c}\left\{J_{0r}Q^{(1)}(\beta_{0r}\eta)\right.$$

$$\left.+J'_{0r}Q^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\right\}\sin\frac{r\pi}{c}z\,,$$

$$\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\sum_m\sum_n\mu\frac{c^2}{ab}\frac{mn}{\gamma_{mn}}\left[K_{mn}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+K'_{mn}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right]$$

$$\times\cos\frac{m\pi}{a}x\times\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_r\mu\frac{b^3mr}{2ca\beta_{mr}}\left[G_{mr}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}+G'_{mr}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\right]$$

$$\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_n\sum_r\mu\frac{a^3nr}{2cba_{nr}}\left[E_{nr}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right.\right.$$

$$-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\Big\}+E'_{nr}\left\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\right.$$

$$\left.\left.\times\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\right]\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m\sum_n\frac{c^2m}{2a\gamma_{mn}}\left[F_{mn}\left\{1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\times\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}+F'_{mn}$$

$$\left.\times\left\{\left(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\right)\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right]$$

$$\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_n\frac{c^2n}{2b\gamma_{mn}}\left[D_{mn}\left\{\left(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\times\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}+D'_{mn}\left\{\left(1-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\right]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+\sum_n\sum_r \frac{a^2 n}{2b\alpha_{nr}}\Bigg[A_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\\
&+A'_{nr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\Bigg]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_m\sum_r \frac{b^2 m}{2a\beta_{mr}}\Bigg[B_{mr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\\
&+B'_{mr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\Bigg]\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&-\sum_m\sum_r \mu\frac{\beta_{mr}}{2}\left\{H_{mr}\left(1+\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\right)\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)+H'_{mr}\left(1+\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\right)\right.\\
&\left.\times\phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x\times\cos\frac{r\pi}{c}z-\sum_n\sum_r \mu\frac{\alpha_{nr}}{2}\left\{J_{nr}\left(1+\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\right)\right.\\
&\left.\times\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)+J'_{nr}\left(1+\frac{a^2n^2}{b^2\alpha_{nr}^2}\right)\phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\right\}\cos\frac{n\pi}{b}y\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\\
&+\sum_m \mu\frac{b}{4}\Bigg[B_{m0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right\}+B'_{m0}\\
&\times\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\Bigg]\cos\frac{m\pi}{a}x+\sum_n\sum_r\frac{a}{4}\\
&\times\Bigg[A_{n0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}+A'_{n0}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right.\\
&\left.+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\Bigg]\cos\frac{n\pi}{b}y-\sum_m \mu\frac{mb}{2a}\left\{H_{m0}\phi^{(1)}(\beta_{m0}\eta)\right.\\
&\left.+H'_{m0}\phi^{(2)}(\beta_{m0}\eta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x-\sum_m \mu\frac{na}{2b}\left\{J_{n0}\phi^{(1)}(\alpha_{n0}\xi)+J'_{n0}\phi^{(2)}(\alpha_{n0}\xi)\right\}\\
&\times\cos\frac{n\pi}{b}y+\sum_n \mu\frac{c}{4}\left\{D_{0n}\phi^{(1)}(\gamma_{0n}\zeta)+D'_{0n}\phi^{(2)}(\gamma_{0n}\zeta)\right\}\cos\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_r \mu\frac{rb}{4c}\left\{J_{0r}\phi^{(1)}(\beta_{0r}\eta)+J'_{0r}\phi^{(2)}(\beta_{0r}\eta)\right\}\cos\frac{r\pi}{c}z+\sum_m \mu\frac{c}{4}\\
&\times\left\{F_{m0}\phi^{(1)}(\gamma_{m0}\zeta)+F'_{m0}\phi^{(2)}(\gamma_{m0}\zeta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x+\sum_r \mu\frac{ra}{4c}\left\{H_{0r}\phi^{(1)}(\alpha_{0r}\xi)\right.\\
&\left.+H'_{0r}\phi^{(2)}(\alpha_{0r}\xi)\right\}\cos\frac{r\pi}{c}z+\frac{1}{4}(H_{00}+J_{00}),
\end{aligned}
\right\}\quad(16)
$$

where

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ Q^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{\cosh\pi\alpha_{nr}(1-\xi)\pm\cosh\pi\alpha_{nr}\xi}{\cosh\pi\alpha_{nr}\pm1},\\
&\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ P^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{\pi\alpha_{nr}\{\xi\sinh\pi\alpha_n(1-\xi)\pm(1-\xi)\sinh\pi\alpha_n\xi\}}{\cosh\pi\alpha_{nr}\pm1},\\
&\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ \phi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\}=\frac{\sinh\pi\alpha_{nr}(1-\xi)\mp\sinh\pi\alpha_{nr}\xi}{\cosh\pi\alpha_{nr}\pm1},
\end{aligned}
\right\}\quad(17)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\Psi^{(1)}(\alpha_{nr}\xi)\\ \Psi^{(2)}(\alpha_{nr}\xi)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\alpha_{nr}\{\xi\cosh\pi\alpha_n(1-\xi)\mp(1-\xi)\cosh\pi\alpha_n\xi\}}{\cosh\pi\alpha_{nr}\pm 1}\,,\\
&\alpha_n^2 = \frac{a^2}{b^2}n^2+\frac{a^2}{c^2}r^2\,,\qquad \xi=\frac{x}{a}\,,
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ Q^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{\cosh\pi\beta_{mr}(1-\eta)\pm\cosh\pi\beta_{mr}\eta}{\cosh\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ P^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\beta_{mr}\{\eta\sinh\pi\beta_{mr}(1-\eta)\pm(1-\eta)\sinh\pi\beta_{mr}\eta\}}{\cosh\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ \phi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{\sinh\pi\beta_{mr}(1-\eta)\mp\sinh\pi\beta_{mr}\eta}{\cosh\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\\ \Psi^{(2)}(\beta_{mr}\eta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\beta_{mr}\{\eta\cosh\pi\beta_{mr}(1-\eta)\mp(1-\eta)\cosh\pi\beta_{mr}\eta\}}{\cosh\pi\beta_{mr}\pm 1}\,,\\
&\beta_{mr}^2 = \frac{b^2}{a^2}m^2+\frac{b^2}{c^2}r^2\,,\qquad \eta=\frac{y}{b}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ Q^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{\cosh\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\pm\cosh\pi\gamma_{mn}\zeta}{\cosh\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ P^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\gamma_{mn}\{\zeta\sinh\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\pm(1-\zeta)\sinh\pi\gamma_{mn}\zeta\}}{\cosh\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ \phi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{\sinh\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\mp\sinh\pi\gamma_{mn}\zeta}{\cosh\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\left.\begin{matrix}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\ \Psi^{(2)}(\gamma_{mn}\zeta)\end{matrix}\right\} = \frac{\pi\gamma_{mn}\{\zeta\cosh\pi\gamma_{mn}(1-\zeta)\mp(1-\zeta)\cosh\pi\gamma_{mn}\zeta\}}{\cosh\pi\gamma_{mn}\pm 1}\,,\\
&\gamma_{mn}^2 = \frac{c^2}{a^2}m^2+\frac{c^2}{b^2}n^2\,,\qquad \zeta=\frac{z}{c}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Letting the suffix m, n, r involve zero respectively, eighteen unknown values A_{nr}, A'_{nr}, B_{mr}, B'_{mr}, D_{mn}, D'_{mn}, E_{nr}, E'_{nr}, F_{mn}, F'_{mn}, G_{mr}, G'_{mr}, H_{mr}, H'_{mr}, J_{nr}, J'_{nr}, K_{mn}, K'_{mn}, denote the finite Fourier transformations relating to both the components of stress and displacement at the boundary, as follows:

$$\left.\begin{matrix}\pi A'_{n0}\\ \pi A_{n0}\end{matrix}\right\} = \int_0^c S_n[(\sigma_x)_{x=a}]dz\mp\int_0^c S_n[(\sigma_x)_{x=0}]dz\,,\tag{20}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi B'_{m0}\\ \pi B_{m0}\end{matrix}\right\} = \int_0^c S_m[(\sigma_y)_{y=b}]dz\mp\int_0^c S_m[(\sigma_y)_{y=0}]dz\,,\tag{21}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi A'_{nr}\\ \pi A_{nr}\end{matrix}\right\} = S_nC_r[(\sigma_x)_{x=a}]\mp S_nC_r[(\sigma_x)_{x=0}]\,,\tag{22}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi B'_{mr}\\ \pi B_{mr}\end{matrix}\right\} = S_mC_r[(\sigma_y)_{y=b}]\mp S_mC_r[(\sigma_y)_{y=0}]\,,\tag{23}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi D'_{0n}\\ \pi D_{0n}\end{matrix}\right\} = \int_0^a S_n[(\tau_{zx})_{z=c}]dx \mp \int_0^a S_n[(\tau_{zx})_{z=0}]dx\,, \tag{24}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi F'_{m0}\\ \pi F_{m0}\end{matrix}\right\} = \int_0^b S_m[(\tau_{yz})_{z=c}]dy \mp \int_0^b S_m[(\tau_{yz})_{z=0}]dy\,. \tag{25}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi D'_{mn}\\ \pi D_{mn}\end{matrix}\right\} = C_m S_n[(\tau_{zx})_{z=c}] \mp C_m S_n[(\tau_{zx})_{z=0}]\,, \tag{26}$$

$$\left.\begin{matrix}\pi F'_{mn}\\ \pi F_{mn}\end{matrix}\right\} = S_m C_n[(\tau_{yz})_{z=c}] \mp S_m C_n[(\tau_{yz})_{z=0}]\,. \tag{27}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{00}\\ H_{00}\end{matrix}\right\} = \int (v_{x=a})dA_x \mp \int (v_{x=0})dA_x\,, \tag{28}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{00}\\ J_{00}\end{matrix}\right\} = \int (u_{y=b})dA_y \mp (u_{y=0})dA_y\,, \tag{29}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{m0}\\ H_{m0}\end{matrix}\right\} = \int_0^c C_m[u_{y=b}]dz \mp \int_0^c C_m[u_{y=0}]dz\,, \tag{30}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{n0}\\ J_{n0}\end{matrix}\right\} = \int_0^c C_n[v_{x=a}]dz \mp \int_0^c C_n[v_{x=0}]dz\,, \tag{31}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{0r}\\ H_{0r}\end{matrix}\right\} = \int_0^a C_r[u_{y=b}]dx \mp \int_0^a C_r[u_{y=0}]dx\,, \tag{32}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{0r}\\ J_{0r}\end{matrix}\right\} = \int_0^b C_r[v_{x=a}]dy \mp \int_0^b C_r[v_{x=0}]dy\,, \tag{33}$$

$$\left.\begin{matrix}H'_{mr}\\ H_{mr}\end{matrix}\right\} = C_m C_r[u_{y=b}] \mp C_m C_r[u_{y=0}]\,, \tag{34}$$

$$\left.\begin{matrix}J'_{nr}\\ J_{nr}\end{matrix}\right\} = C_n C_r[v_{x=a}] \mp C_n C_r[v_{x=0}]\,, \tag{35}$$

$$\left.\begin{matrix}E'_{nr}\\ E_{nr}\end{matrix}\right\} = S_n S_r[w_{x=a}] \mp S_n S_r[w_{x=0}]\,, \tag{36}$$

$$\left.\begin{matrix}G'_{mr}\\ G_{mr}\end{matrix}\right\} = S_m S_r[w_{y=b}] \mp S_m S_r[w_{y=0}]\,, \tag{37}$$

$$\left.\begin{matrix}K'_{mn}\\ K_{mn}\end{matrix}\right\} = S_m S_n[w_{z=c}] \mp S_m S_n[w_{z=0}]\,. \tag{38}$$

Boundary Conditions for a Special Case

To investigate the state of stress in a bent plate, in particular in the neighborhood of the simply supported edge, we will choose the case where the plate is supported at its opposite two edges and is hinged at the remainning edges. Set the Cartesian rectangular co-ordinate, which is refered to the plate, as Fig. 2.

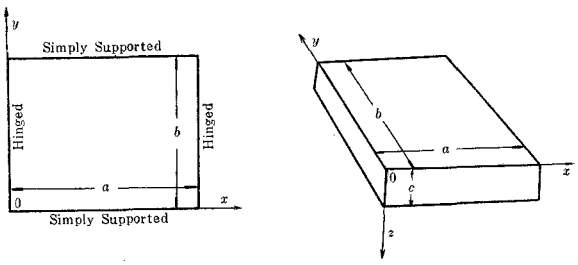


Fig. 2

The boundary conditions in this case, are satisfied by

$$w = 0 \qquad (x = 0\,, \quad x = a)\,, \tag{39}$$

$$v = 0 \qquad (x = 0\,, \quad x = a)\,, \tag{40}$$

$$\sigma_x = 0 \qquad (x = 0\,, \quad x = a)\,. \tag{41}$$

which correspond to that the edge-lines $x=0$ and $x=a$ are hinge, and

$$w = 0 \qquad (y = 0\,, \quad y = b)\,, \tag{42}$$

$$\sigma_y = 0 \qquad (y = 0\,, \quad y = b)\,, \tag{43}$$

$$\tau_{xy} = 0 \qquad (y = 0\,, \quad y = b)\,, \tag{44}$$

which coincide with the simply supported edges are on $y=0$ and $y=b$. The above conditions (39), (40), (41), (42), and (43) are identical with the relations

$$A_{nr} = A'_{nr} = 0\,, \quad B_{mr} = B'_{mr} = 0\,, \quad E_{nr} = E'_{nr} = 0\,,$$
$$G_{mr} = G'_{mr} = 0\,, \quad J_{nr} = J'_{nr} = 0\,,$$

where the suffix m, n, and r include zero in itself.

When the loads act normally to the surfaces made by $z=0$ and $z=c$, and distribute symmetrically with respect to the middle plane $z=c/2$, some remaining unknown values are eliminated, that is

$$D_{mn} = D'_{mn} = D_{0n} = D'_{0n} = 0\,, \quad F_{mn} = F'_{mn} = F_{m0} = F'_{m0} = 0\,, \quad K'_{mn} = 0\,,$$

and

$$H_{m0} = H'_{m0} = H_{00} = H'_{00} = 0\,.$$

Adding, hereon, one more restriction that the loads are also symmetrical with respect to both the center lines $x=a/2$, and $y=b/2$, then we find that

$$H'_{mr} = 0\,, \quad H_{0r} = H'_{0r} = 0\,.$$

After all, the components of displacement are written in the forms

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \sum_m\sum_n \frac{c^2 m}{2a\gamma_{mn}} K_{mn}\left\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y+\sum_m\sum_r\frac{b}{2}H_{mr}\left\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right.\\
&\left.-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{1}{\beta_{mr}^2}\left(\frac{mb}{a}\right)^2 P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}\right\}\tag{45}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
v &= \sum_m\sum_n \frac{c^2 n}{2b\gamma_{mn}} K_{mn}\left\{-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_r\frac{b^2 m}{2a\beta_{mr}}H_{mr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right.\\
&\left.+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}\right\}\tag{46}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
w &= -\sum_m\sum_n\frac{c}{2}K_{mn}\left\{Q^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&+\sum_m\sum_r\frac{b^3 mr}{2ac\beta_{mr}^2}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}H_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\,,\\
&m,\ n,\ r=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots.
\end{aligned}\right\}\tag{47}
$$

The components of stress are expressed by

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_m\sum_n\left[K_{mn}\left\{\left(\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}+\frac{\lambda\mu}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\right)\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2m^2}{a^2\gamma_{mn}^2}\right.\right.\\
&\left.\times\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_r\frac{bm}{a}H_{mr}\left\{\frac{\mu(3\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right.\\
&\left.+\frac{\lambda(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\,,
\end{aligned}\right\}\tag{48}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_y &= \sum\sum K_{mn}\left\{\frac{\mu^2}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}+\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}\right)\cdot\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\\
&-\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\frac{c^2n^2}{b^2\gamma_{mn}}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\Big\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\
&-\sum_m\sum_r\frac{am}{b}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}H_{mr}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}\right\}\tag{49}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= \sum_m\sum_n\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\gamma_{mn}K_{mn}\left\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)+\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\\
&\times\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y-\sum_m\sum_r\frac{bm}{a}H_{mr}\left\{\frac{\mu\lambda}{2\mu+\lambda}Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right.\\
&\left.+\frac{r^2b^2}{c^2\beta_{mr}^2}\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}P^{(1)}(\beta_m\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\,,
\end{aligned}\right\}\tag{50}
$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz} = &-\sum_m\sum_n \frac{cn}{b}\,\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}K_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\ &+\sum_m\sum_r \mu\frac{b^2mr}{2ac\beta_{mr}}H_{mr}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right.\\ &+\left.\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\,,\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx} = &-\sum_m\sum_n \frac{cm}{a}\,\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}K_{mn}P^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\\ &-\sum_m\sum_r \mu\frac{ar}{2c}H_{mr}\left\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,\frac{m^2b^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr})\right\}\\ &\times\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{r\pi}{c}z\,,\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} = &-\sum_m\sum_n \mu\frac{c^2}{ab}\,\frac{mn}{\gamma_{mn}}K_{mn}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right.\\ &+\left.\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi^{(1)}(\gamma_{mn}\zeta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y\\ &-\sum_m\sum_r \mu\frac{\beta_{mr}}{2}H_{mr}\left(1+\frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\right)\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{r\pi}{c}z\,,\end{aligned}\right\}\quad(53)$$

The remaining unknown values K_{mn} and H_{mr} should be determined to satisfy the boundary conditions at $z=0$, and $y=0$, respectively.

Determination of K_{mn} and H_{mn}

At first, to avoid the complexities of further evaluations, we will adopt the well-known assumption of "plane-conservation" for $(u)_{y=0}$ and $(u)_{y=b}$, then we may write as $H_{mr}=H_m/r^2$ in which r denotes odd integer. As for the usual plate, the results estimated through the above assumption, seem to be practically the same as those through the rigorous theory. Let the loads act normally to the surfaces $z=0$ and $z=c$, and be also expressed as

$$q_{xy} = q\sum_m\sum_n R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\,. \quad(54)$$

Then the boundary conditions at $z=0$ and $z=c$, become

$$\sigma_z)_{z=0} = -q\sum_m\sum_n R_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y\,, \quad(55)$$

which by virtue of Eq. (50), yields

$$\mu K_{mn} = \frac{2\mu+\lambda}{\mu+\lambda} \frac{q \cdot R_{mn}}{\gamma_{mn}\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + \Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\}}$$
$$+ \frac{\mu H_m}{\mu+\lambda} \frac{nmb}{a} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{\pi/2\lambda\gamma_{mn} + \mu\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + (\mu+\lambda)\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)}{\gamma_{mn}^4\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + \Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\}} . \tag{56}$$

One more boundary condition is Eq.(44): τ_{xy} vanishs along the edge-line $y=0$ and $y=b$. Since the thickness of the plate is alwase considerably small comparing with the side-lengths a or b, so instead of Eq.(44) we can adopt the following relation

$$\int_0^c \tau_{xy}(c-2z)dz = 0 \qquad (y=0\,, \quad y=b)\,. \tag{57}$$

This means that the resultant couples due to τ_{xy} vanishs along the edge-lines $y=0$ and $y=b$. Thus obtained result is written in the following equation

$$\sum_n \mu K_{mn} \frac{c^2}{ab} \frac{mn}{\gamma_{mn}^3} \left\{ \frac{\pi}{2}\gamma_{mn} - \frac{3\mu+2\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0) \right\}$$
$$+ \sum_r \mu H_m \frac{\beta_{mr}}{2r^4}\left(1 + \frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\right)\phi^{(1)}(\beta_{mr}0) = 0\,. \tag{58}$$

Now, introducing new abbreviations

$$\begin{aligned}
\theta_{mn} &= \phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + \Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\,,\\
\rho_{mn} &= \frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\gamma_{mn} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + \Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\,,\\
\varphi_{mn} &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\mu+2\lambda}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\,,\\
\omega_m &= \sum_r \frac{\beta_{mr}}{2r^4}\left(1 + \frac{b^2m^2}{a^2\beta_{mr}^2}\right)\phi^{(1)}(\beta_{mr}0)\,,
\end{aligned} \tag{59}$$

and eliminating K_{mn} between Eqs.(56) and (58), we easily find that

$$\mu H_m = \frac{2\mu+\lambda}{\mu+\lambda} q \frac{-\dfrac{c^2}{ab}\displaystyle\sum_n \frac{nR_{mn}\cdot\varphi_{mn}}{\theta_{mn}\cdot\gamma_{mn}^4}}{\dfrac{\omega_m}{m} + \displaystyle\sum_n \left(\frac{c^4}{a^2b^2}\right)\frac{\rho_{mn}\cdot\varphi_{mn}}{\theta_{mn}\cdot\gamma_{mn}^7}} . \tag{60}$$

From Eq.(56) we have at once

$$\mu K_{mn} = \frac{2\mu+\lambda}{\mu+\lambda} q \left[\frac{R_{mn}}{\gamma_{mn}\cdot\theta_{mn}} + \frac{mn\rho_{mn}}{\gamma_m^4\theta_{mn}}\left(\frac{c^2}{ab}\right) \right.$$
$$\times \frac{-\displaystyle\sum_s \frac{R_{ms}\cdot s\cdot\varphi_{ms}}{\theta_{ms}\cdot\gamma_{ms}^4}}{\dfrac{\omega_m}{m} + \displaystyle\sum_s \frac{\rho_{ms}\cdot\varphi_{ms}\cdot s^2}{\theta_{ms}\cdot\gamma_{ms}^7}\left(\frac{c^2}{ab}\right)^2} . \tag{61}$$

Numerical Example

Let the loads q_{xy} be a sinusoidal shape shown as

$$q_{xy} = q \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} . \tag{62}$$

Then suffix m in those formulas ought to indicate number one only. Furthermore we make both the side-length a and b be equal, and also let

$$a = b = 10\,c\,, \qquad \lambda = 1.5\,\mu^{*}\,,$$

where c denote the thickness of the plate. The plate now considered, is apparently belonging to "thin plate". After computing as above, we find necessary values for determinating K_{mn} and H_m, which are given in Table 1.

Table 1.

n	θ_{1n}	n	ρ_{1n}	n	φ_{1n}
1	0.007 028 4	1	0.009 181 6	1	−0.001 436 6
3	0.067 709 3	3	0.090 024	3	−0.011 174
5	0.216 235	5	0.298 40	5	−0.017 530
7	0.411 696	7	0.595 68	7	0.012 590
9	0.593 367	9	0.913 06	9	0.108 97
11	0.736 529	11	1.213 76	11	0.269 28
13	0.835 894	13	1.484 30	13	0.483 60
15	0.899 648	15	1.727 11	15	0.736 50
17	0.937 680	17	1.951 63	17	1.020 14
19	0.965 457	19	2.161 61	19	1.303 97
21	0.979 124	21	2.363 35	21	1.606 02

$\omega_1 = 5.2023$.

Now substituting the above results into Eq. (58), we have

$$\mu H_1 = -q \times 1.4308\,,$$

by which the values of K_{1n} are obtained in Table 2.

Table 2. Values of μK_{1n}

n	μK_{1n}	n	μK_{1n}
1	−1458.64	13	− 0.11
3	− 5.72	15	− 0.08
5	− 2.21	17	− 0.06
7	− 0.58	19	− 0.05
9	− 0.29	21	− 0.04
11	− 0.17		

* In this case Poisson's ratio of the plate is assumed to be 0.3.

To illustrate the variation in stress along the center line $x=a/2$, the shearing force S_y was calculated by means of the following equation

$$S_y = \int_0^c \tau_{yz} dz\,,$$

$$\left.\begin{aligned} S_y = &-\sum_m\sum_n \frac{cn}{b}\,\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} K_{mn} \frac{2c}{\pi\gamma_{mn}} \left\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + \Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\right\} \\ &\times \sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\cos\frac{n\pi}{b}y + \sum_m\sum_r \mu H_m \frac{b_2}{a\pi}\,\frac{m}{\beta_{mr}}\,\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right. \\ &\left.+\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\Psi^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\sin\frac{m\pi}{a}x\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

that is vertical shear per unit of length acting on a cross-section of the plate normal to the y axis. In a same way, vertical shear per unit of length acting on a cross-section of the plate normal to the x axis, is denoted by S_x as follows:

$$\left.\begin{aligned} S_x = &\sum_m\sum_n \frac{cm}{a}\,\frac{\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} K_{mn} \frac{2c}{\pi\gamma_{mn}} \left\{\phi^{(1)}(\gamma_{mn}0) + \Psi^{(1)}(\gamma_{mn}0)\right\} \\ &\times \cos\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y - \sum_m\sum_r \mu\frac{a}{\pi}H_m\frac{1}{r^2}\left\{Q^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right. \\ &\left.-\frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\,\frac{m^2b^2}{a^2\beta_{mr}^2}P^{(1)}(\beta_{mr}\eta)\right\}\cos\frac{m\pi}{a}x\,. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

The values of S_y are shown in Fig. 3 by a real line, and another curve by dotted line presents the same force estimated according to the thin plate theory[6].

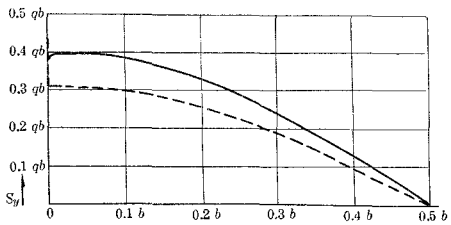


Fig. 3 S_y along the center line $x=\frac{1}{2}a$

The edge-reaction at $y=0$, in virtue of this theory, is written in

$$R_y = -0.3915\cdot qa\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\,,$$

while the same reaction acquired by the thin plate theory, is given as

$$R_y = -0.4297\cdot qa\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\,.$$

The variation of the edge-reactions along $x=0$ with y is shown in Fig. 4 in which the real line and the dotted line present the results according to Formula (64), and to the thin plate theory, respectively.

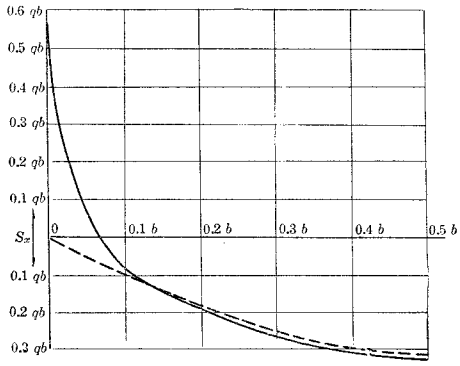


Fig. 4 S_x along the edge-line $x=0$

The prompt rise of the curved full line in the vicinity of the origin, is supposed to be the concentrated reaction at the corner of the plate, And the shearing force S_x and the bending moment M_x remain at the edge-line $y=0$, as follows:

$$S_x)_{y=0} = \int_0^c \tau_{zx}\,dz)_{y=0} = -0.5619\cdot qb\cdot\sin\frac{\pi x}{a},$$

$$M_x)_{y=0} = \int_0^c \sigma_x(c-2z)\,dz)_{y=0} = 0.07560\cdot qb^2\cdot\sin\frac{\pi x}{a},$$

respectively. While S_x and M_x at the simply supported edge $y=0$ always vanish according to the thin plate theory.

(Received April 30, 1959)

References

1) Crelles Journal, Bd. 40, S. 51 (1850).
2) W. Thomson and P. G. Tait: Natural Philosophy, 2. Ed. (1879~1883).
3) A. E. H. Love: Mathematical Theory of Elasticity, P. 458~461. 4th Ed. (1952).
4) A. Nadai: Elastischen Platten, S. 34~37, Berlin (1925).
5) S. Nomachi: "On One Method for Solving Three-Dimensional Stress Problems by Means of Finite Fourier Transforms", Memoirs of Muroran Institute of Technology, 3, 167 (1958).
6) S. Timoshenko: Theory of Plate and Shell, P. 113~117 (1940).

低温における鋼の機械的性質について (第1報)

内藤正鄰・菊地千之

On the Mechanical Properties of Steels at Low Temperatures (I)

Masachika Naito and Kazuyuki Kikuchi

Abstract

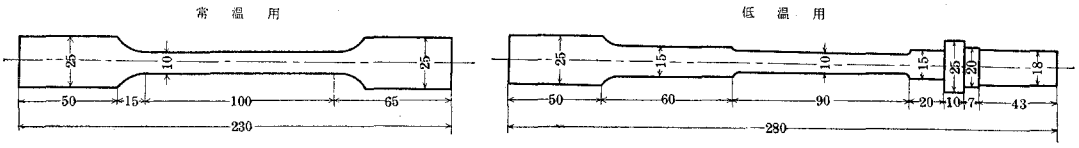
For the purpose of examining the mechanical properties of steels at low temperatures, fundamental experiments were carried out. The Young's modulus, tensile strength, yielding point, elongation, and the percentage of contraction were measured at temperature of −183°C by the cold tensile test.

I. 緒　　言

低温度における鋼の機械的性質を考究するためにまずその基本的緒性質すなわち，引張強さ，伸び，絞り，ヤング係数，降伏点等の測定を行つた。低温の引張強さ，伸び等の測定は比較的容易なので古くからかなり多く行われているが[1)2)]，ヤング係数の測定についてはその測定の困難性から研究も比較的少ない。近時抵抗線歪測定法が非常に発達したが，低温においてもその利用の可能性が認められたので，本実験においてもこれを利用し市販の軟鋼を試料に用い，−183°C において諸種の測定を行つた結果を報告する。

II. 実 験 方 法

本実験に使用した材料は市販の軟鋼丸棒 (0.13% C) で，これを 600°C で 1.5 時間加熱後炉内冷却して焼鈍を行つた。試験片寸法は第1図に示すように低温用は平行部の温度をなるべく一様に保つように特殊の形状，寸法にした。



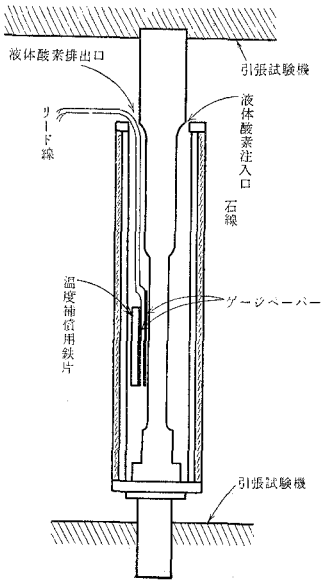
第1図 試　験　片

試験片冷却装置は第2図に示すように，外部を絶縁円筒で保護し試験中冷却剤は常に円筒内に充満するようにした。試験片の温度は冷却剤充満後5分以内で冷却剤と同一温度になることを予備実験(試験片と同一寸法で中心に熱電対挿入用の穴のあいたものを用い)で確めた。冷却剤として液体酸素(−183℃)を使用した。

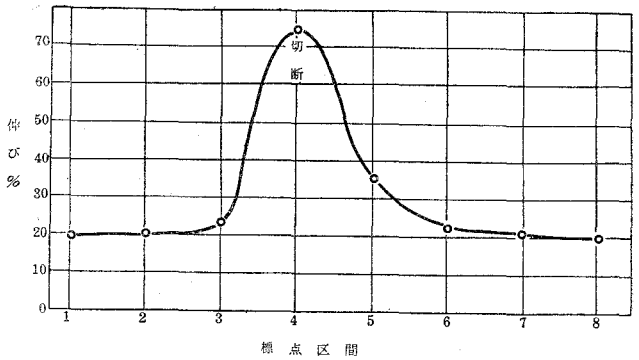
ひずみの測定には共和無線製ストレーンメーター，およびストレーンゲージ(K 12)を使用した。ゲージは−183℃でも充分使用に耐えた。伸び，絞りの測定には読取顕微鏡を使用した。

III. 測定結果

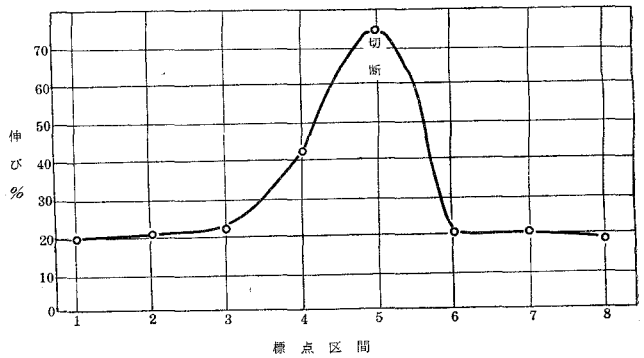
第3〜6図に常温および低温における引張の場合の，各標点区間に対する伸びを示



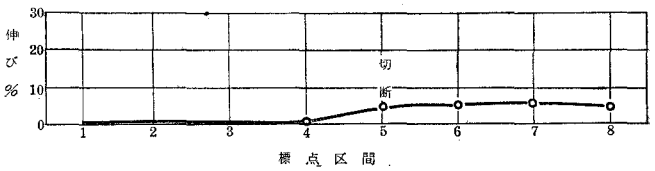
第2図 試験装置



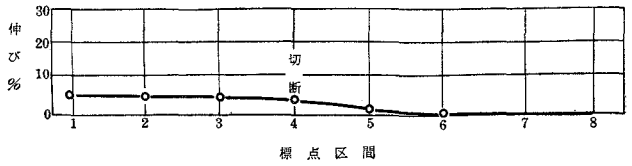
第3図 試験片 No. 2 (常温)



第4図 試験片 No. 2 (常温)



第5図 試験片 No. 3 (−183℃)



第6図 試験片 No. 4 (−183℃)

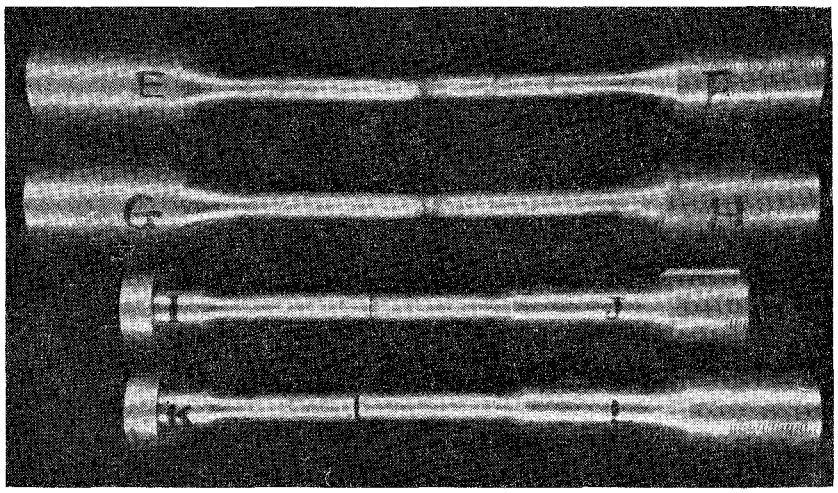
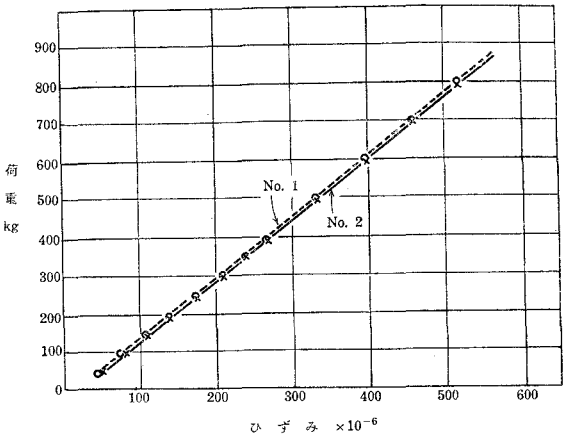
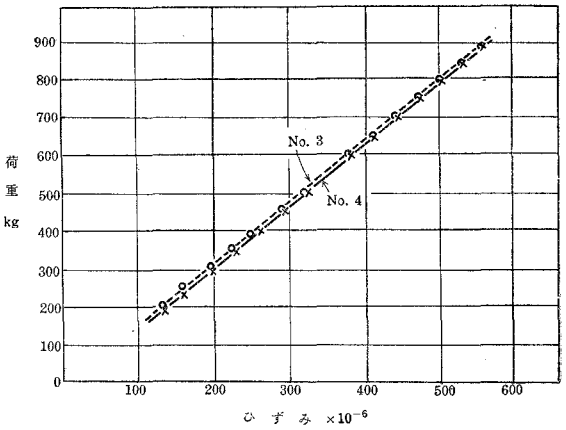


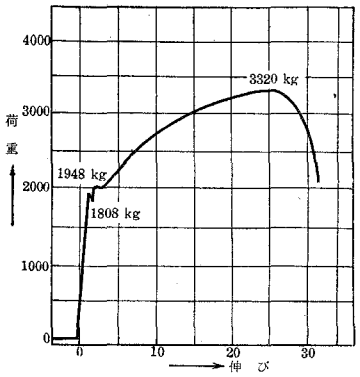
写真 1



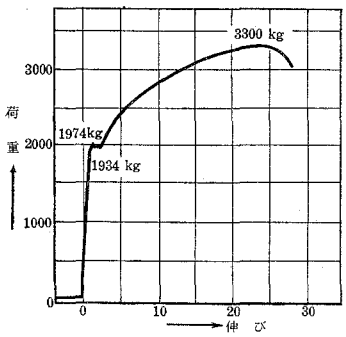
第7図　荷重-ひずみ線図（試験片 No. 1, 2 常温）



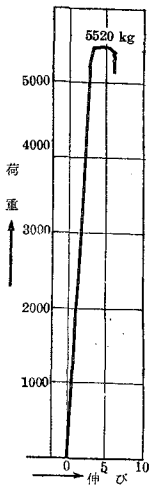
第8図　荷重-ひずみ線図（試験片 No. 3, 4 −183℃



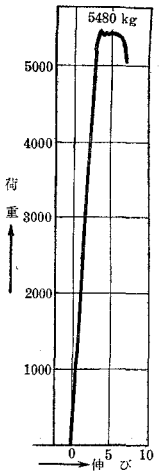
第9図　荷重-伸び線図（試験片 No. 1 常温）



第10図　荷重-伸び線図（試験片 No. 2 常温）



第11図 荷重-伸び線図
(試験片 No. 3 −183°C)



第12図 荷重-伸び線図
(試験片 No. 4 −183°C)

す。低温では常温と異なり必ずしも切断個処に最大の伸びが現れないことが分る。第7, 8図は抵抗線ひずみ測定による弾性限内の荷重ひずみ曲線を，第9〜12図は引張試験機附属の自記記録装置によるそれを示す。表は実験結果より計算した諸値をまとめたものである。写真は常温，低温それぞれの確断面を示す。

IV. 考察および結言

引張強さは −183°C において常温の場合の倍近く強度が増すが，伸び，絞りは著しく少なくなり脆性破断を示す (写真 IJ, KL 参照)。したがつて降伏点は明りようにあらわれなかつた。ヤング係数は低温でも常温とほとんど変らずほぼ同じ値を示した。

表

試験片 軟鋼(0 13% C)	試験温度 °C	降伏点 kg/mm²	引張強さ kg/mm²	伸び %	絞り %	ヤング係数 1×0⁶ kg/cm
No. 1	常温 (10)	23.6	40.2	29.3	69.6	2.0
No. 2	〃	23.9	39.9	29.8	69.8	2.0
No. 3	低温 (−183)	—	67.8	2.5	3.8	2.0
No. 4	〃	—	67.1	2.8	5.6	2.0

終りに本研究は北海道科学研究費の補助を受けて行つたものであり，液体酸素については富士鉄室蘭製鉄所の御援助を受けた。また実験の実施に当つては三橋教官ならびに若原，下出両君に負うところ多くあわせて感謝の意を表する。

(昭和 34 年 4 月 28 日受理)

文　献

1) Hadfied: IRON & STEEL INST (1905).
2) 川畑・深瀬: 金属 **28**, 597 (1958).

電位差滴定法によるシアン化物の定量*

上野幸三・太刀川哲平

The Potentiometric Determination of Free Cyanide and Argenticyanide

Kozo Ueno and Tetsuhei Tachikawa

Abstract

In the previous paper, the potentiometric titration of halides with silver nitrate solution has been investigated by our use of four bimetallic electrodes, Pt-Ni, Pt-Ag, Pt-W, and Pt-Sb.

In this paper, the determinations of free cyanide and argenticyanide with silver nitrate solution are carried out in the concentration range of N/10 and N/50, by our use of bimetallic electrodes, Pt-Ni, Pt-Ag, Pt-W, and Pt-Pd. The titration curves and the changes of potential at the end point ($\Delta E/\Delta V$) have been obtained at the same time.

The results obtained are summarised as follows;

(1) Each of the four couples has the two distinct sudden changes in the potential during the titration. The first change coincides with the appearance of turbidity. The second fluctuation in potential occurs when the silver cyanide is completely precipitated. Accordingly, both ions can be determined by the same run of the buret with silver nitrate solution in the case of both N/10 and N/50.

(2) For Pt-W, the potential increases rapidly at the two end points; on the other hand, each of the three others decreases rapidly and forms the reverse S-shaped titration curve.

I. 緒　　言

電位差滴定法によるシアン化物および銀シアン化物の定量に関しては多くの研究が行われている。すなわち，R. M. Wick[1] および E. Müller & H. Lauterbach[2] 等は甘コウ電極—銀電極(指示電極)を用いて滴定すると二つの明瞭な電位変化を生ずる。すなわち，最初の電位変化は濁りの生ずる所と一致し，また，第二の電位変化は反応の完結点とよく一致し，この位置は第一の電位変化の位置の倍の所にある。また，この第二の電位変化はシシアノ銀酸銀 (青酸銀) が完全に沈澱し，銀イオン濃度が急激に増加するため，銀電極の起電力が増加するから起ると

* 本報を電位差滴定法における電極 (双金属) の選択についての第7報とする。

述べている。

H. J. Read & C. P. Read[3] 等は白金—タングステンの組合わせを用いて銀シアン化物の定量を試み，また，J. N. Gregory & R. R. Hughan[4] 等は飽和甘コウ電極—銀電極を用いてシアン化物および銀シアン化物を定量し，銅，亜鉛，フエロシアン化物等の影響を調べている。阿知波[5] も甘コウ電極—銀電極を用いて同様の研究を行つている。

しかし，双金属電極系の電極はあまり知られていないので，前報[6] にひきつづき白金とニッケル，銀，タングステンおよびパラジウムの4組合わせを用いてそれらの滴定曲線ならびに終点における電位変化について比較，検討したので報告する。

II. 実　　験

(1) 装　　置

電位測定には島津 K-2 型精密級電位差計を用いた。

(2) 電　　極

使用電極の寸法はつぎのとおりである。

白金：0.91×15，ニッケル：0.75×18，銀：1.43×17，タングステン：0.52×20，パラジウム：0.35×8（ただし，直径×長さ　単位：mm）。

(3) 試　　薬

硝酸銀および青酸カリは1級品（関東化学）をそのまま使用し，常法のように 0.1 N および 0.02 N 溶液にそれぞれ調製した。なお，硝酸銀溶液は塩化ナトリウム標準溶液により標定した。

(4) 電位測定要領

電位は滴定前にエメリー研磨紙 0/5～0/6 でよく研磨してからベンジンで洗い，ろ紙でふきとつた。電位測定要領はつぎのとおりである。すなわち，200 mℓ ビーカーに試料 25 mℓ をピペットではかり取り，水で倍に稀釈した。これに使用電極ならびに攪拌器（電動式）を入れ，電位安定後，最初 1 mℓ ごとに，終点附近においては 0.02～0.1 mℓ 滴下ごとに電位を測定した。

また，実験は室温（20±2°C）で行つた。1回の滴定所要時間は 30～40 分であつた。

III. 実験結果および考察

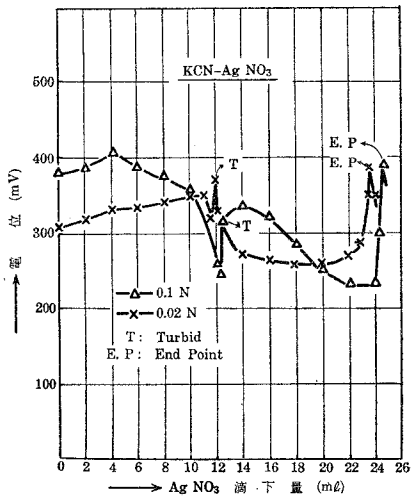
硝酸銀溶液を青酸カリ溶液に滴加すると，つぎの反応式のごとく反応は進行する。

$$AgNO_3 + 2\,KCN = KNO_3 + KAg(CN)_2 \qquad (1)$$

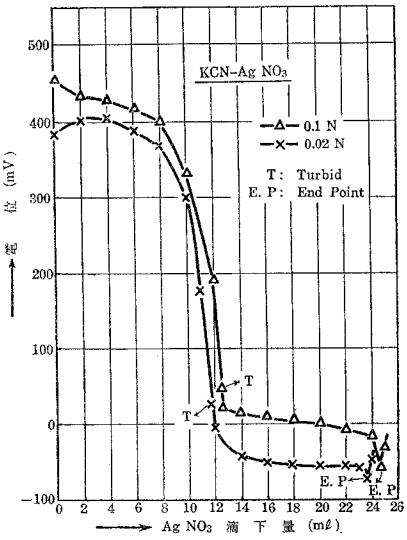
$$AgNO_3 + KAg(CN)_2 = KNO_3 + Ag[Ag(CN)_2] \qquad (2)$$

従つて滴定曲線における T* (Turbid) は反応式 (1), すなわち, 白濁の生成開始点 (Liebig 法) であり, また, E.P.** (End Point) は反応式 (2), すなわち沈澱の完結点を示す。

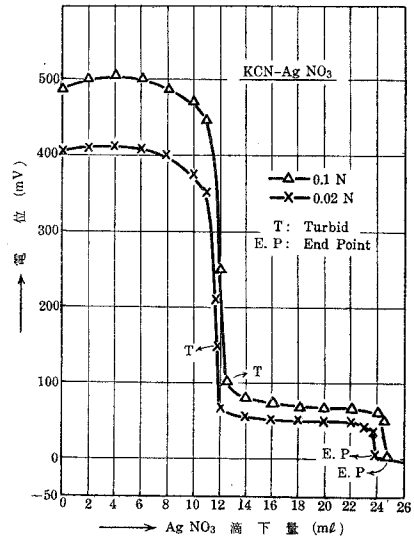
滴定開始前あるいは滴定間の電位は 4 組合わせとも各滴定ごとに数 mV から 10～20 mV の範囲の差があつた。しかし, 終点 (T および E.P.) はよく一致し, また, 上述の電位の差に



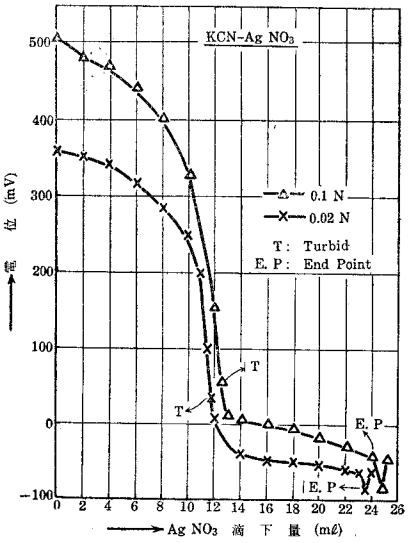
第1図　Pt-W 滴定曲線



第2図　Pt-Ag 滴定曲線



第3図　Pt-Pd 滴定曲線



第4図　Pt-Ni 滴定曲線

* T を第1終点とよぶ。

** E.P. を第2終点とよぶ。

応じ滴定曲線の再現性があつた。

0.1 N および 0.02 N 青酸カリ溶液を 0.1 N および 0.02 N 硝酸銀溶液で滴定を行つた。

Pt–W, Pt–Ag, Pt–Pd および Pt–Ni の各組合わせを用いた滴定曲細を示すと，第1，第2，第3図および第4図のとおりである。

図より分るように，滴定曲線の形は Pt–Pd, Pt–Ag および Pt–Ni が逆 S 字形を示し，一方，Pt–W のみが異なつた形を示した。ただし，Pt–Pd および Pt–Ag は Pt–Ni と異なり，第2終点後直ちに電位は上昇した。

第1および第2終点における電位変化は Pt–Pd, Pt–Ag および Pt–Ni は降下し，一方，Pt–W は上昇した。しかし，Pt–W の組合わせについては H. J. Read & C. P. Read[3] 等の結果と相違していた。すなわち，第2終点到達前に若干電位が上昇し，終点においては急激な降下を示したと述べているが，著者らのえた結果は第1および第2終点において上昇→降下の傾向を示し，この上昇点が終点となつた。特に第1終点においては 0.02 N 溶液，また，第2終点においては 0.1 N および 0.02 N 溶液いずれも明らかに上述の傾向を表わしていた。なぜこのような結果の相違が生じたかについてはまだ十分な結論がえられていない。しかし，前報[7] のこの組合わせを用いた各ハロゲン化物の定量の場合にも終点を頂点として極端な電位の上昇→降下の曲線がえられており，また，第1終点の濁り初めの点（肉眼による）と最大電位上昇点とがよく一致したことを考え合わせると，この電位上昇点を第1，第2，の終点とするのがよいと思う。かつ，異なつた結果の原因については電極（特に W）の純度が異なることも考えられ，また，Pt および W の金属電極は，滴定間に組成を変えつつある溶液と，ある時間経過後平衡状態に達する。しかし，著者等と滴定速度が違うため，この状態に相違が生じているなど挙げられるが，今後この問題に関しては電気化学的に検討を加えたい。

つぎに，4組合わせを用いてえられた 0.1 N および 0.02 N 両溶液の第1，2終点における電位変化 ($\Delta E/\Delta V$) を示すと第1表のとおりである。

第 1 表 (単位：mV)

	極名							
	Pt–W		Pt–Ag		Pt–Pd		Pt–Ni	
終点／濃度	第 1	第 2	第 1	第 2	第 1	第 2	第 1	第 2
0.1 N	30～40	50～70	90～120	10～20	80～100	10～20	50～70	30～50
0.02 N	20～30	30～70	30～50	10前後	20～40	10前後	30～40	10～20

なお，シアン化物の定量の場合，白濁の生成開始点を終点とする方法は Liebig によつて案出され，この方法がよく用いられている。そして，4組合わせによつて求められた最初の最高電位変化点と Liebig 法による終点とは，実験誤差範囲内でよく一致した。また，この終点

の2倍が第2の最高電位変化点と一致した。

上表に示すように，0.1 N 溶液の場合，第1終点における電位変化の大きさは Pt–Ag, Pt–Pd, Pt–Ni および Pt–W の順であり，一方第2終点においては Pt–W, Pt–Ni の順で Pt–Ag, Pt–Pd は同程度の電位変化を示した。

0.02 N 溶液の場合，第1終点における電位変化の大きさは，4組合わせいずれも同程度で特別優劣はつけられなかつた。また，第2終点においては，Pt–W のみが一番大きく，他の3組合わせはほぼ同じ位の電位変化を示した。

0.1 N および 0.02 N 溶液の場合，Pt–W を除く3組合わせでは，第1終点の電位変化 ($\Delta E/\Delta V$) の大きさは第2終点のそれより大きかつたが，Pt–W の組合わせにおいては，他の3組合わせとは逆の結果がえられた。この原因については今後さらに検討を加えたい。

滴定間あるいは滴定後の電極の表面は Pd および Ag 電極が白色被膜でおおわれ，ほかの Pt, W および Ni 電極はほとんど変化しなかつた。

IV. 結　　言

以上えられた結果を要約すると，つぎのとおりである。

(1) Liebig 法により求めた終点と本法により求めた第1終点とは4組合わせいずれもよく一致した。また第1終点の倍のところが第2終点となつた。

(2) 0.1 N 溶液の場合，第1終点の電位変化の大きさは Pt–Ag, Pt–Pd, PtNi, および Pt–W の順で，一方，第2終点においては Pt–W, Pt–Ni の順で，Pt–Ag, Pt–Pd は同じ位の電位変化を示した。0.02 N 溶液の場合，第1終点の電位変化は4組合わせはすべて同程度で，また第2終点においては Pt–W がよく，他の3組合わせは同程度の電位変化を示した。

(3) 0.1 N および 0.02 N 溶液の場合，第1終点の $\Delta E/\Delta V$ は第2終点のそれより大きかつた。しかし，Pt–W においては逆の結果がえられた。

(4) 4組合わせのうち，Pt–W のみが第1および第2終点において電位上昇し，他の3組合わせはいずれも電位降下を示し，逆S字形の滴定曲線をえがいた。

(昭和33年12月5日　日本分析化学会北海道支部第3回研究発表会において講演)
(昭和34年4月30日受理)

文　　献

1) R. M. Wick: Bur. Standards J. Research., **7**, 913 (1931).
2) E. Müller & H. Lauterbach: Z. anorg. Chem., **121**, 178 (1922).
3) H. J. Read & C. P. Read: Metal Finishing, **39**, 612 (1941).
4) J. N. Gregory & R. R. Hughan: Ind. Eng. Chem., Anal. Ed., **17**, 109 (1945).
5) 阿知波繁一: 電気化学, **12**, 142 (1944).
6) 上野幸三, 太刀川哲平: 室工大研報, **3**, 193 (1958).
7) 上野幸三, 太刀川哲平: 分析化学, **7**, 758 (1958).

昭和33年度研究業績

I. 論　　文

題　　目	著者名	発表機関名	月　日
鉄鋼の硫黄蒸気腐食に関する研究（第2報） （鋳鉄について）	西田恵三	電気化学 第26巻，第12号	33. 8.28
ケイソウ土担持銀触媒によるエチレンの酸化	加納久雄 金塚高次	工業化学雑誌 第61巻，第9号	33. 2. 3
イソキノリンの空気酸化について （高沸点タール塩基類酸化利用に関する研究〔その5〕）	小松藤男	コールタール協会誌 第10巻，第9号，13	33. 6.13
キナルジンの空気酸化について	小松藤男	コールタール協会誌 第10巻，第10号	33. 6.13
石炭自然発火の研究	佐藤干城	北海道科学研究報告	34. 3.
北海道噴火湾北東沿岸の段丘地形と堆積物について	沢田義男	地質学雑誌 第64巻，第759号	33.12.
アルミニウム合金構桁橋の設計について	中村作太郎	土木学会北海道支部 技術資料第14号	33. 2.
数種のレンズ形曲弦不静定構桁橋の設計比較について	中村作太郎 木崎芙美雄	土木学会北海道支部 技術資料第15号	34. 2.
On the Bending of a Rectangular Cantilever Plate (Symmetrical Deflection)	Sumio Nomachi	Proceeding of the 8 th Japan National Congress for Appl. Mech., 1958.	33. 9. 4
カンテレバー短形板の曲げについて	能町純雄	土木学会論文集 第60号	34. 1.
鋼床板のデッキプレートの極限強さについて	能町純雄	技術資料第15号	34. 2.
ふたたびアスファルト混合物のアスファルト適量の精密計算法	太田誠一郎	土木技術 第13巻，第7号	33. 7. 1
PC用グラウトの品質試験について	尾崎　誠	技術資料第15号	34. 2.
炭素鋼の低温硬度について	内藤正鄰	科学研究報告第1集 (北海道)	34. 3.
Ambrose Bierce : A Dozen Tales of Haunted Houses (註釈)	増田　貢	開文社，単行本	34. 2.
Used to　論考	増田　貢	英文法研究 (語学専門誌)	34. 2.
電位差滴定法における双金属電極の選択について （銀滴定）	上野幸三 太刀川哲平	分析化学 第7巻，第12号	33.12.

II. 講　　演

題　　目	著者名	発表機関名	月　日
硫黄精錬釜の調査並びに研究 (鋳鉄釜のスケールについて)	西田恵三 及川　弘	日本金属学会 春季講演会	34. 4. 2
硫黄精錬釜の調査並びに研究 (特殊鋼釜のスケールについて)	西田恵三 及川　弘	日本金属学会 春季講演会	34. 4. 2
アルミナイズド鋼の合金炉に関する研究	西田恵三 幸田成康	日本金属学会北海道支部春季講演会	33. 5. 22
鋳鉄の硫黄蒸気腐食に関する研究	西田恵三	第6回腐蝕防蝕討論会	33. 6. 24
遅波回路における横共振法の応用	鈴木道雄 上村正雄	北大応用電気研究所 研究発表会予稿	33. 10. 8
平行板導波管の Slit 結合部の Excess Capacity	上村正雄	北大応用電気研究所 研究発表会予稿	33. 10. 8
Resonant Slot で周期的に結合した二つの導波管	上村正雄	電気三学会 北海道支部連合大会	33. 11. 7
直列コンデンサ過補償時の不平衡故障理論	三浦五郎	電気四学会連合大会 講演論文集	33. 5. 3
負荷を有する時の凸極同期機の短絡について	三浦五郎	電気三学会 北海道支部連合大会	33. 11. 7
微小火花間隙における放電特性	沢　茂夫 伊藤隆清	電気四学会連合大会 講演論文集	33. 5.
ケイソウ土担持銀触媒によるエチレンの酸化 その1. 拡散効果の検定 その2. 反応速度及び反応機構	加納久雄 金塚高次	日本化学会 第11年会	33. 4. 3
非水溶媒中の金属の挙動 (第1報) 石炭酸溶液中の錫極の挙動	木村　一 佐竹喜代重	日本化学会 第11年会	33. 4. 3
石炭酸ソーダ溶液による炭酸ガスの吸収	木村　一	化学工学協会 第23年会	33. 4. 6
泡鐘塔における石炭酸ソーダ溶液による炭酸ガスの吸収	木村　一 本館誠一	化学工学協会 第23年会	33. 4. 6
充填塔における物質移動について (炭酸ガスの石炭酸ソーダ水溶液に対する吸収)	木村　一 岡　　宏	日本化学会 北海道地方大会	33. 7. 25
イソキノリンの空気酸化	小松藤男	日本化学会 第11年会	33. 4. 5
キノリンの空気酸化 (第2報) (高沸点タール塩基類の酸化利用に関する研究〔第6報〕)	小松藤男	日本化学会 北海道地方大会	33. 7. 25
泥炭の硝酸処理に関する研究 (その3)	佐々木満雄 平野晴望	日本化学会 北海道地方大会	33. 7. 25
泥炭のアンモニア化 (第10報) 酸化処理	佐々木満雄 佐藤久次 八幡寿雄	日本化学会 第11年会	33. 4. 5
坑道断面簡易測定器の 2, 3 について	羽鳥勝春 佐藤干城	昭和33年度日本鉱業会秋季大会	33. 10. 5

題　　目	著者名	発表機関名	月　日
北海道噴火湾北東沿岸の段丘地形と堆積物について	沢田義男	日本地質学会第65年総会	33. 9.29
管網の流量計算について	森田健造	土木学会年次学術講演会	32. 6. 1
アルミニウム合金構桁橋の設計について	中村作太郎	土木学会北海道支部研究発表会	33. 2.13
偏心荷重を受ける格子鈑桁鉄道橋の立体的計算	中村作太郎	土木学会学術講演会	33. 5.25
数種のレンズ形曲弦不静定構桁橋の設計比較について	中村作太郎 木崎芙美雄	土木学会北海道支部研究発表会	34. 3.11
コンクリート舗装板の模型実験における相似法則	能町純雄	土木学会第13回年次学術講演会	33. 5.25
PC用グラウトの品質試験について	尾崎　設	土木学会北海道支部研究発表会	34. 3.11
Degree-hour Factorによる融雪流出量の算定について	境　隆雄	土木学会年次学術講演会	33. 5.25
沙流川流域の積雪水量測定について	境　隆雄	土木学会水理研究会講演会	33. 5.23
ガス型法に関する実験的研究	内藤正鄰 菊地千之	日本機械学会北海道支部講演会	33.10. 5
誤字などの訂正能力について	川村信一	北海道心理学会第5回大会	33.11.30
英語科学習指導法について	増田　貢	後志地方高校中学校英語科教官講習会	33.10.20
電位差滴定法によるアンチモン(III)の定量	上野幸三 太刀川哲平	日本分析化学会北海道支部第2回研究発表会	33. 6.28
電位差滴定法による比素(III)の定量	上野幸三 太刀川哲平	日本化学会北海道支部室蘭地方大会	33. 7.25
電位差滴定法によるシアン化物の定量	上野幸三 太刀川哲平	日本分析化学会北海道支部第3回研究発表会	33.12. 5

昭和三十四年六月十二日 印刷
昭和三十四年六月二十日 発行

【非売品】

編輯兼発行者 室蘭工業大学

札幌市北三条東七丁目三四二番地

印刷者 山中キヨ

札幌市北三条東七丁目三四二番地

印刷所 文栄堂印刷所

〒②〇八五一・③五五六〇・③二七二

PRINTED BY
BUNYEIDO PRINTING CO.
Higashi 7-chome, Kita 3-jo
Sapporo, Japan

CONTENTS

Vol. 3, No. 2. June, 1959 Whole No. 10

Page

On the High-Temperature Corrosion of Cast Iron in Sulfur Vapor. (Part II) . . . . . K. Nishida 2 (1) 221

On the Line-to-Neutral Short Circuits of a Salient-pole Synchronous Machine in Series Capacitor Systems . . . . . G. Miura 2 (15) 235

Thermodynamics of Vapor-phase Oxidation of Ethylene . . . . . H. Kano 2 (37) 257

Liquid Film Coefficients for 10 mm Ceramic Raschig ring. — Gas Absorption in a Packed Column — . . . H. Kimura & H. Oka 2 (47) 267

Air Catalytic and Non Catalytic Oxidation of Quinoline. (II) . F. Komatsu 2 (63) 283

Theoretical and Experimental Studies in the Buckling Load of Beams with Reference of their Depth. . . . . S. Nakamura 2 (87) 307

On Elastic Behavior along Simply Supported Edges of Rectangular Plates. . . . . S. Nomachi 2 (129) 349

On the Mechanical Properties of Steels at Low Temperatures. (I) . . . . . M. Naito & K. Kikuchi 2 (153) 373

The Potentiometric Determination of Free Cyanide and Argenticyanide. . . . . K. Ueno & T. Tachikawa 2 (157) 377

Other Achievements in Studies, Oral or Written, for 1958 by Professors in this University. 2 (163) 383