



深いScheibeの光弾性模型実験とその解析について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-06-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 中村, 作太郎, 志村, 政雄 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/3425

深い Scheibe の光弾性模型実験と その解析について

中村作太郎・志村政雄

On the Photoelastic Experiment and Analysis of the Deep Scheibe Models

Sakutaro Nakamura and Masao Shimura

Abstract

Recently the extremely deep Scheibe of immense height (h) for the span (l) has caused much public discussion in the field of the civil and architectural constructions, and Messrs. S. Timoshenko, Karl Girkmann and Kurt Beyer discussed in their already published books that the solution of deep Scheibe in the case of $h/l > 0.50$ was satisfied only by the Scheibe Theory, not by the Beam Theory.

The present writers performed the photoelastic experiments on some deep Scheibe models of $h/l > 0.50$ made of epoxy resin plates in order to find their stress phenomena.

Then, they carefully compared these experimental results with the theoretical values calculated by applying one Deep Beam theory and some Scheibe theories, and they clarified the tendency of stress distribution of models.

I. 緒 言

支間 l に比べ断面高さ h の比較的高い単純桁の応力現象に関する理論解析および光弾性実験などについては、すでに Coker, Filon, 福原達三, Frocht, Wilson, Stokes, Boussinesq, Lamb, Girkmann, Beyer, Timoshenko, 辻二郎, 西田正孝, 河田幸三などの諸氏^{1)~5)}のほか著者ら⁶⁾により種々研究されたところであるが、特に最近、著者らはこれらの問題に興味を持ち、支点構造と高さの異なった $h/l = 0.1 \sim 0.5$ の範囲のエポキシ樹脂単純桁模型により光弾性実験⁷⁾を行ない、支点構造と h/l の差異による諸種の新しい現象を発見した。

特に応力分布のみについていえば、 $h/l = 0.1 \sim 0.5$ の範囲では Deep Beam Theory により計算した値は割合によく実験解析値に近接することが確認出来た。

しかし、 $h/l > 0.5$ の深い Scheibe (壁桁または縦板桁) については、K. Girkmann⁸⁾, K. Beyer⁹⁾, S. Timoshenko¹⁰⁾ の諸氏の著書に発表されている通り、Beam Theory では満足されず、Scheibe Theory を用いるべきであるとされている。

著者らによる光弾性模型実験の結果よりみても Beam Theory の用い得る限界点は $h/l = 0.5$ と考えても大差ないように思う。

本研究においては、 $h/l=0.5\sim 2.0$ の範囲の深い Scheibe についてその断面応力度分布現象を見出すため、高さの異なる数種のエポキシ樹脂板模型桁を作り、単純支持の状態でご弾性実験を行ない、その解析結果を Deep Beam Theory や二・三の Scheibe Theory による理論計算値と比較吟味した。

その結果、本研究による実験解析の断面応力度分布は Deep Beam Theory と Scheibe Theory によって求めた両理論解析の断面応力度分布の中間的現象傾向を示し、現在用いられている Scheibe Theory は必ずしも万全でないことを見出し、更にまた荷重点付近の断面応力度分布には応力集中の影響が著しく入ることも更めて確認した次第である。

II. 模型実験

1. 模型について

模型材料としては理研計器 K. K. 製のエポキシ樹脂、厚さ 6 mm 板を用いた。模型の製作に対しては寸法誤差および加工歪の防止に特に注意し、やすりを用い全部手仕上げでおこない、最大誤差 2% 以内に止るようにした。また模型に時間縁効果の入らない中に来次第ただちに実験を行なうようにした。模型の形状および寸法は、図-1 の通りである。すなわち、Model No. 1~Model No. 7 で $h/l=0.5\sim 2.0$ の Scheibe 模型である。

またこのエポキシ樹脂の光弾性感度、フリッジ応力の測定^(5),11)は、Model No. 1 および Model No. 2 の中央断面 (断面 A~A) について行ない、フリッジ応力 $S=1.130 \text{ kg/mm}$ 、光弾性感度 $\alpha=0.885 \text{ mm/kg}$

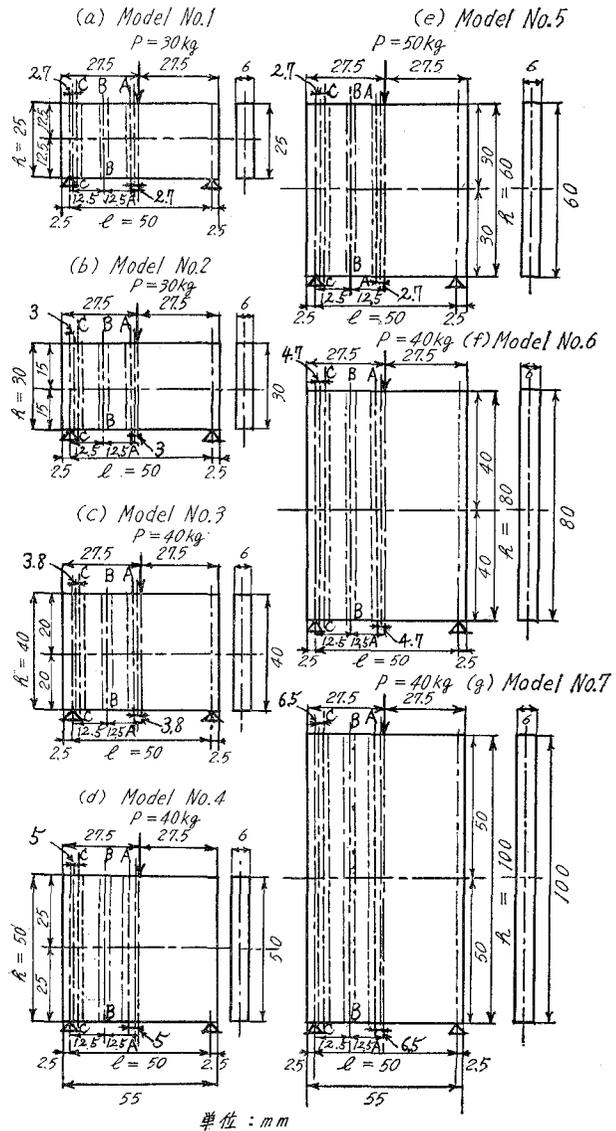


図-1 Scheibe 模型寸法

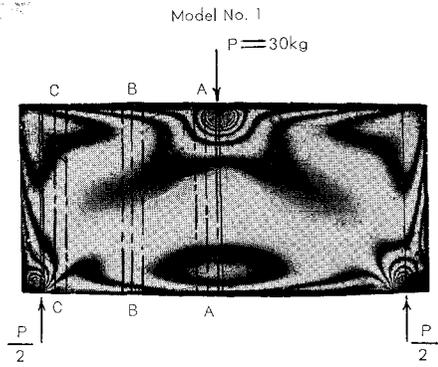


図-2 Model No. 1 等色線縞写真

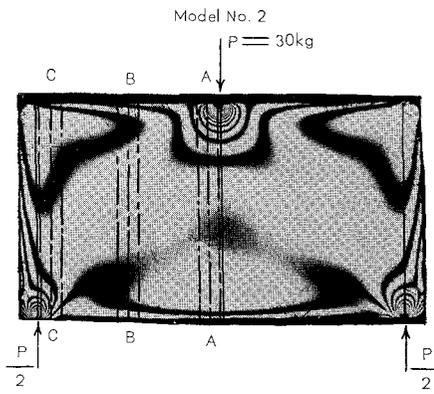


図-3 Model No. 2 等色線縞写真

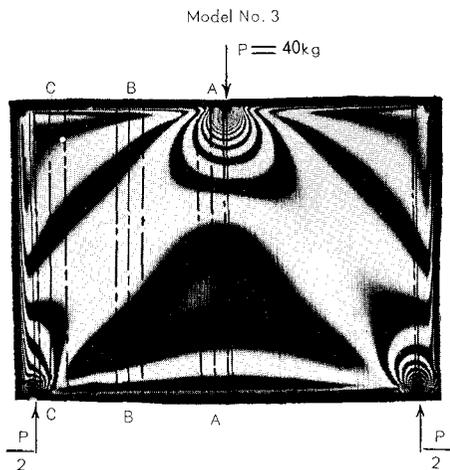


図-4 Model No. 3 等色線縞写真

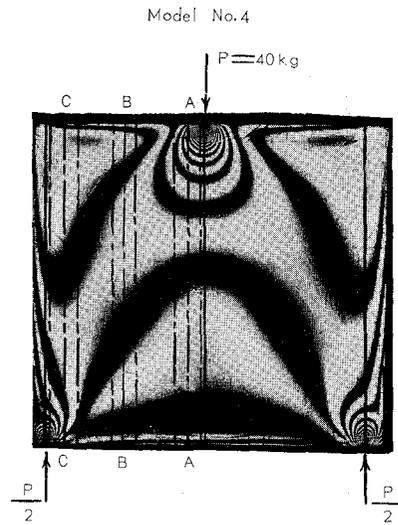


図-5 Model No. 4 等色線縞写真

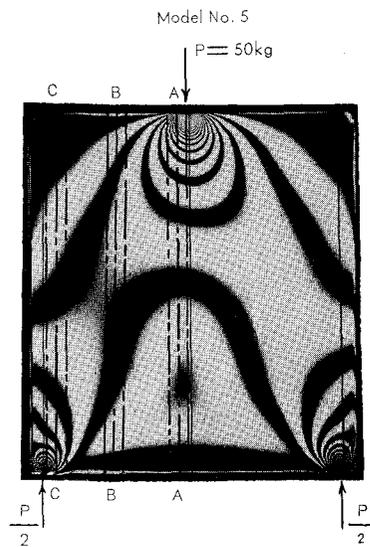


図-6 Model No. 5 等色線縞写真

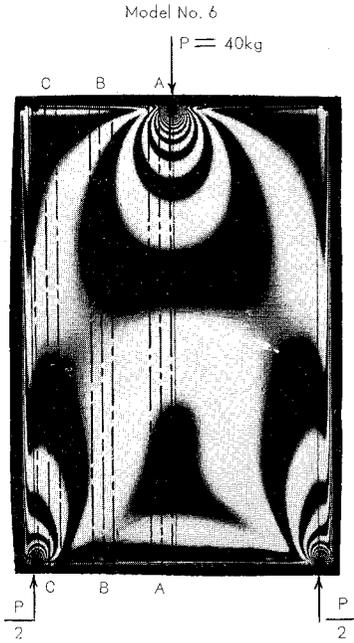


図-7 Model No. 6 等色線縞写真

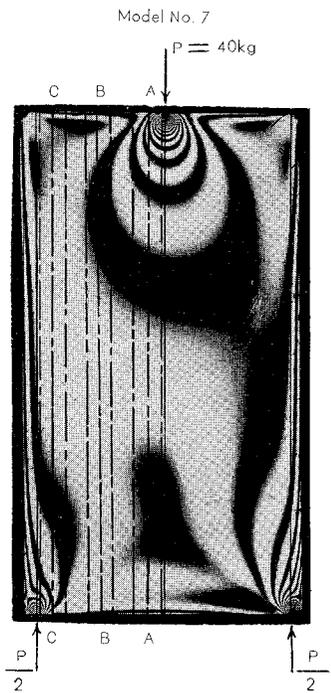


図-8 Model No. 7 等色線縞写真

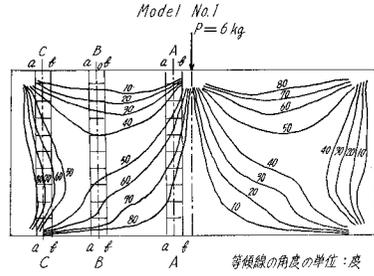


図-9 Model No. 1 等傾線

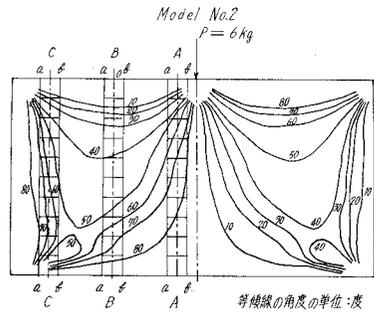


図-10 Model No. 2 等傾線

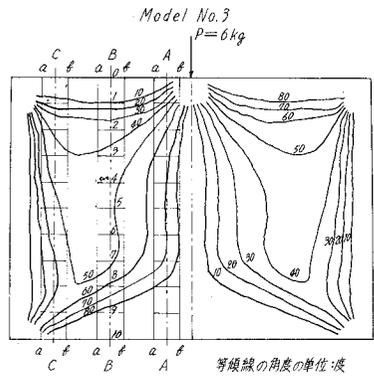


図-11 Model No. 3 等傾線

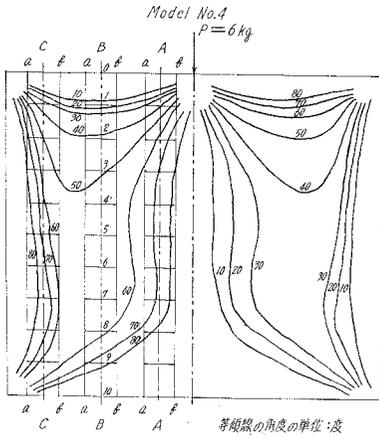


図-12 Model No. 4 等傾線

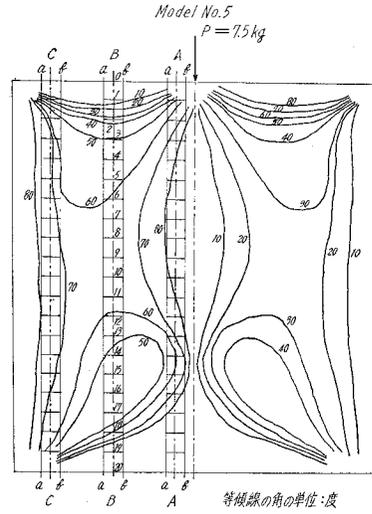


図-13 Model No. 5 等傾線

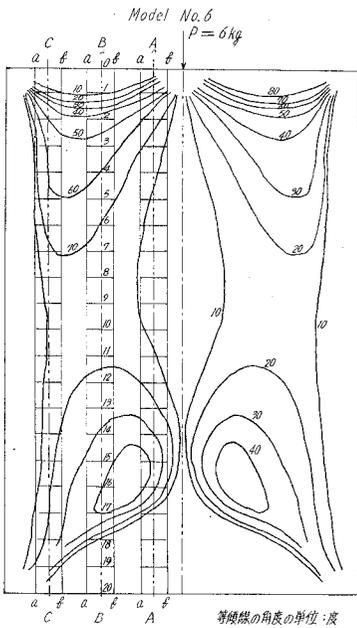


図-14 Model No. 6 等傾線

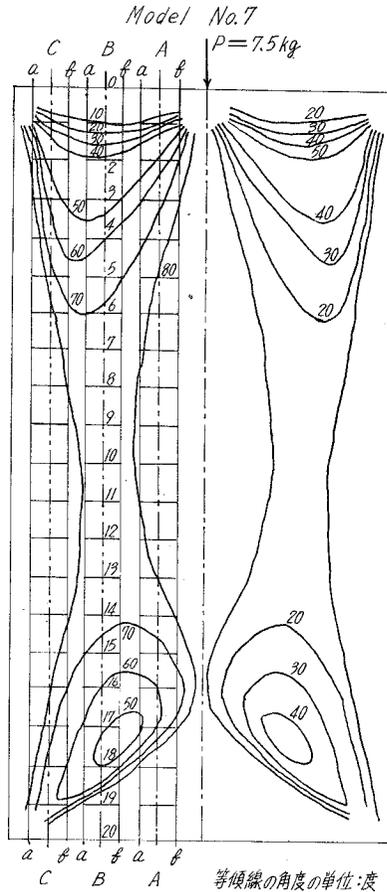


図-15 Model No. 7 等傾線

($S=(\sigma \cdot d)/N$, $\alpha=1/S$, d =厚さ)の数値を得た。

2. 実験方法

Model No. 1~Model No. 7 の7板の模型板桁を1板ずつ光弾性実験装置の荷重支持台に載せ、両端単純支持の状態にて集中線荷重 P を図-1 の通り板桁上面支間中央点に静かに載荷し水銀燈の光源によって光弾性縞写真を撮影し、更に荷重を適度に減らし白色燈の光源を用いてスクリーン上に張ったトレーシング・ペーパーに傾角 10° の変化毎に等傾線を追跡した。

3. 光弾性縞写真および等傾線

上述の実験方法によって求めた光弾性縞写真と等傾線を示せば、図-2~図-15 の通りである。すなわち、図-2~図-8 が光弾性縞写真(等色線縞写真)で、図-9~図-15 が等傾線である。

III. 解析理論

1. 実験解析理論

光弾性実験によって得た等傾線および等色線縞写真の結果と、これに平面応力問題における平衡方程式を補助に用い、図式計算法であるせん断応力差積分法により実験解析を行なったのでその解析理論^{9),5),11)}について述べる。

図-16, 図-17 を参照し、次の通り解式の誘導を行なった。

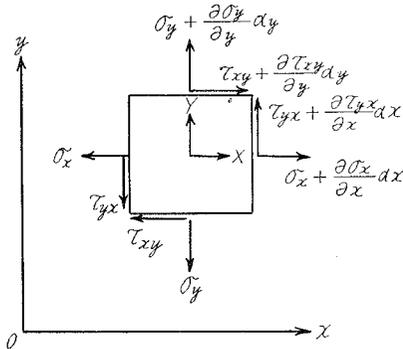


図-16 平面応力の平衡図解

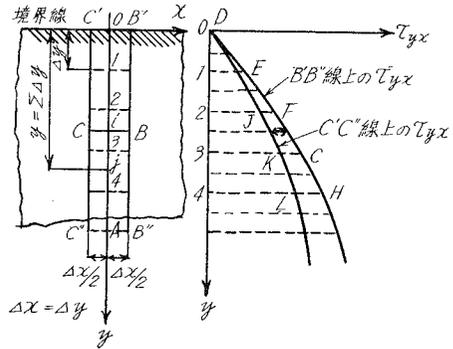


図-17 せん断応力差積分法図解

平面応力問題における応力の平衡方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

σ_x, σ_y : x 面, y 面に働く垂直応力; τ_{xy}, τ_{yx} : x 面, y 面に働くせん断応力; X, Y : x 軸, y 軸方向に働く単位体積当りの体積力; 重力や遠心力を主体に扱う問題以外の普通の場合には

$X=Y=0$ においてよい。

(1) 式を積分すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\sigma_x)_0 - \int_{x_0}^x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \\ \sigma_y &= (\sigma_y)_0 - \int_{y_0}^y \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dy \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $(\sigma_x)_0, (\sigma_y)_0$ は積分の基準点 0 (多くは境界上にとる) における σ_x, σ_y の値であってこれらは測定により既知である。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \quad (3)$$

ここに、 θ : y 軸と主応力 σ_1 の方向との間の角 (等傾線より求められる)

図-8 において、 B, C 点を i 点に充分近くとれば、

$$\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right)_i \div \frac{(\tau_{yx})_B - (\tau_{yx})_C}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta \tau_{yx}}{\Delta x} \right)_i \quad (4)$$

(2) 式の積分形は次の形に改められる。

$$(\sigma_y)_j = (\sigma_y)_0 - \sum_0^j \frac{\Delta \tau_{yx}}{\Delta x} \Delta y = (\sigma_y)_0 - \sum_0^j \Delta \tau_{yx} \quad (5)$$

そこで、同じ y 軸上の σ_x の値は

$$\sigma_x = \sigma_y - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (6)$$

ここに、 $\sigma_1 - \sigma_2$ (主応力差) = $(S/d)N$, S : フリンジ応力, N : 縞次数, d : 板厚, $\Delta \tau_{yx}$: 間隔 Δx はなれた断面の τ_{yx} の差。

2. Deep Beam Theory の理論解析法

M. M. Frocht 氏などによって取扱われた Deep Beam に関する理論解式³⁾の誘導を行なう。Deep Beam に集中荷重が作用した時の応力状態を知るには、先ず z 軸方向の厚さ t なる半無限板に集中荷重が作用した時の解式から出発しなければならない。すなわち集中荷重の作用点から流出する応力の放射状態を半無限板の場合と同様に取扱い、この影響を単純桁の応力状態の上に組み合わせたものである。

A. 半無限板に集中荷重が作用した場合の解式

図-18 を参照し、 r 方向の応力は

$$\sigma_r = \frac{A \cos \theta}{r} \quad (7)$$

いま、応力函数 ϕ を次の通り選ぶ。

(7)

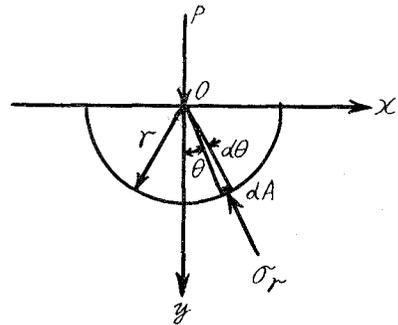


図-18 集中荷重による放射状圧力分布

$$\phi = C_r \theta \sin \theta \quad (8)$$

この ϕ は次式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} = 0 \\ \text{ここに, } \phi_1 &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(8) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \frac{C \theta \sin \theta}{r}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{C}{r} (2 \cos \theta - \theta \sin \theta) \\ \therefore \phi_1 &= \frac{2C \cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (10)$$

これより,

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} = \frac{4C \cos \theta}{r^3}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = -\frac{2C \cos \theta}{r^3}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} = -\frac{2C \cos \theta}{r^3} \quad (11)$$

また、応力成分は

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (12)$$

上述の式より,

$$\sigma_r = \frac{2C \cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (13)$$

次に応用函数 ϕ の係数 C を求める。図-18 より,

$$P - 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = Ct\pi$$

$$\therefore P = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sigma_r t r d\theta = 4Ct \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = Ct\pi \quad (14)$$

ここに, t : 半無限板の Z 軸方向の厚さ

$$\therefore C = \frac{P}{\pi t} \quad (15)$$

(15) 式を (13) 式に代入し,

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi t} \cdot \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (16)$$

また $\sigma_x = \sigma_r \sin^2 \theta$, $\sigma_y = \sigma_r \cos^2 \theta$, $\tau_{yx} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta$ となるから, これらに (16) 式を代入し,

$$\sigma_x = -\frac{2P \cos \theta \sin^2 \theta}{\pi t r}, \quad \sigma_y = -\frac{2P \cos^3 \theta}{\pi t r}, \quad \tau_{yx} = -\frac{2P \sin \theta \cos^2 \theta}{\pi t r} \quad (17)$$

(17) 式は極座標に関する式なので、 x, y の直角座標に関する式に直すため、 $\cos \theta = y/r$, $\sin \theta = x/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用い次式を得る。

$$\sigma_x = \frac{-2Px^2y}{\pi t(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_y = \frac{-2Py^3}{\pi t(x^2+y^2)^2}, \quad \tau_{yx} = \frac{-2Pxy^2}{\pi t(x^2+y^2)^2} \quad (18)$$

これは半無限板に集中荷重が作用した時の解式である。

B. Deep Beam としての解式

短形桁 (Deep Beam) としての解式は上述の (18) 式に単純桁としての条件を付け加えれば求まる。

図-19 を参照し、単純桁としての解式を $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = \frac{M}{I} y = \frac{M}{I} \left(y - \frac{h}{2} \right)$,

$$\tau_{yx} = \frac{VA\bar{y}}{tI}$$

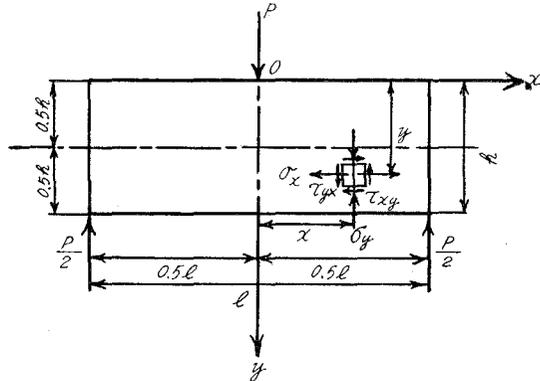


図-19 Deep Beam (短形桁) の平面応力の平衡

(ここに、 I : 桁の断面二次モーメント、 A : 桁の断面積、 t : 桁の z 軸方向の厚さ、 \bar{y} : 中立軸よりその点までの垂直距離、 V : その点における垂直力) によって求めれば次式の通りとなる。

$$\sigma_x = \frac{6P}{th^3} \left(\frac{l}{2} - x \right) \left(y - \frac{h}{2} \right), \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = \frac{-3P}{th^3} (hy - y^2) \quad (19)$$

そこで、(18) 式と (19) 式を組合せると Deep Beam としての解式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2P}{t} \left\{ \frac{3}{h^3} \left(\frac{l}{2} - x \right) \left(y - \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{t} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \tau_{yx} &= -\frac{2P}{t} \left\{ \frac{3}{2h^3} (hy - y^2) + \frac{1}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、 l : 支間長、 h : 桁の断面高さ、 t : z 軸方向の厚さ、 P : 集中線荷重、 x : 応力を求めんとする点の y 軸より測った水平距離、 y : 応力を求めんとする点の x 軸より測った垂直距離、 τ_{yx} の記号はせん断力の方向を示し載荷点の左右にて \oplus , \ominus とする。

また (20) 式によって求める σ_x は引張または圧縮応力度、 σ_y は圧縮応力度、 τ_{yx} は引張応力度となる。

3. Scheibe Theory の理論解析法

K. Girkmann, K. Beyer, S. Timoschenko などの諸氏によって取扱われた Sceeibe Theory の理論解析法^{7)~9)} について述べる。

いま、Scheibe における基本方程式を示せば、 x, y 座標にて、

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{yx} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{22}$$

ここに、 F : 応力函数

Scheibe を 図-20 の通り、 $\Delta x, \Delta y$ 間隔に区分し格点に記号を付ける。応力函数 F は上述の式(21)を満足しなければならない。 h, i, k, l, m などの点における F を F_h, F_i, F_k, F_l, F_m とする。

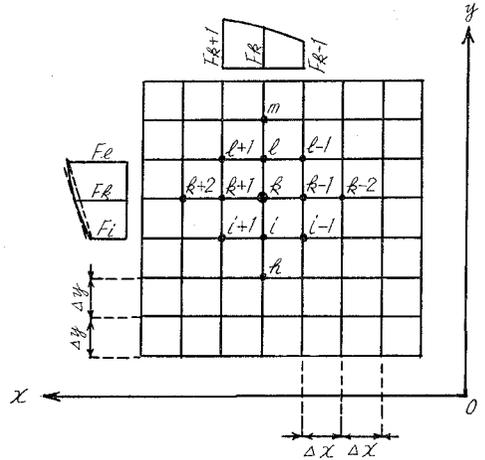


図-20 Scheibe の格点配置に関する座標図解

図-20 の k 格点で、 $\frac{F_k - F_{k-1}}{\Delta x}$, $\frac{F_{k+1} - F_{k-1}}{2\Delta x}$, $\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta x}$ の三つの定差割合を基本として考えることが出来る。そこで、

$$\left(\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} \right)_k = \frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta x} - \frac{F_k - F_{k-1}}{\Delta x} \tag{23}$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta' F}{\Delta x} &= \frac{F_{k+1} - F_{k-1}}{2\Delta x}, & \frac{\Delta' F}{\Delta y} &= \frac{F_l - F_i}{2\Delta y}, \\ \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} &= \frac{F_{k-1} - 2F_k + F_{k+1}}{\Delta x^2}, & \frac{\Delta^2 F}{\Delta y^2} &= \frac{F_l - 2F_k + F_i}{\Delta y^2}, \\ \frac{\Delta^2 F}{\Delta x \Delta y} &= \frac{(F_{l+1} + F_{i-1}) - (F_{i+1} + F_{l-1})}{4\Delta x \Delta y}, \\ \frac{\Delta^4 F}{\Delta x^4} &= \frac{6F_k - 4(F_{k+1} + F_{k-1}) + (F_{k+1} + F_{k-2})}{\Delta x^4}, \\ \frac{\Delta^4 F}{\Delta y^4} &= \frac{6F_k - 4(F_l + F_i) + (F_m + F_h)}{\Delta y^4}, \\ \frac{\Delta^4 F}{\Delta x^2 \Delta y^2} &= \frac{4F_k - 2(F_{k+1} + F_{k-1} + F_i + F_l) + (F_{i+1} + F_{i-1} + F_{l+1} + F_{l-1})}{\Delta x^2 \Delta y^2} \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

(24) 式を (21) 式および (22) 式に用い、(25), (26) 式を得る。

$$\left. \begin{aligned} F_k \left[6 \left\{ \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_y} \right)^2 \right\} + 8 \right] - 4 \left[\left\{ 1 + \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} \right)^2 \right\} (F_{k+1} + F_{k-1}) \right. \\ \left. + \dots + \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_y} \right)^2 \right\} (F_l + F_i) \right] + 2(F_{l+1} + F_{i+1} + F_{l-1} + F_{i-1}) \\ \left. + \dots + \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x} \right)^2 (F_{k+2} + F_{k-2}) + \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_y} \right)^2 (F_h + F_m) \right] = 0 \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

k 格点に対し,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{F_l - 2F_k + F_i}{\Delta_y^2} \\ \sigma_y &= \frac{F_{k+1} - 2F_k + F_{k-1}}{\Delta_x^2} \\ \tau_{yx} &= \frac{(F_{l+1} - F_{l-1}) - (F_{i+1} - F_{i-1})}{4\Delta_x \cdot \Delta_y} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$\Delta_x = \Delta_y$ にとれば, (25) 式は次式の通りとなる。

$$\left. \begin{aligned} 20F_k - 8(F_{k-1} + F_{k+1} + F_i + F_l) + 2(F_{i-1} + F_{i+1} + F_{l-1} + F_{l+1}) \\ + \dots + (F_{k-2} + F_{k+2} + F_k + F_m) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

この (27) 式は板の周辺を除く内部の各点の F の値を求める式である。

次に板の周辺における F の値を求める解式¹⁰⁾ について述べる。図-21 を参照し,

$$l = \cos(\angle Nx), \quad m = \cos(\angle Ny), \quad \bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{yx} \quad (28)$$

$$\therefore l = \cos \alpha = dy/ds, \quad m = \sin \alpha = -dx/ds$$

また

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned}$$

なる故, (28) 式より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \\ \bar{Y} &= -\frac{dx}{ds} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

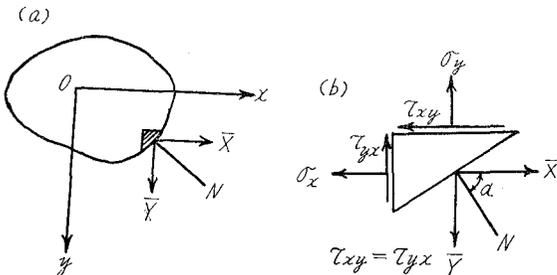


図-21 Scheibe の周辺における力の平衡図解

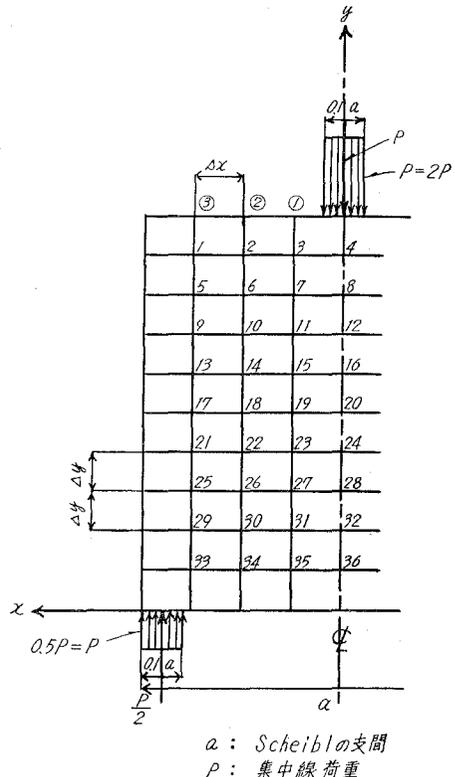


図-22 Scheibe の理論解析に関する図解

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = \int (-\bar{Y}) ds, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int \bar{X} ds \tag{30}$$

また

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds}$$

$$\therefore F = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - \int \left(x \frac{\partial^2 F}{\partial s \cdot \partial x} + y \frac{\partial^2 F}{\partial s \cdot \partial y} \right) ds \tag{31}$$

境界における F の決定

図-22を参照し、lower side unloaded part, lower side loaded part, corner of the plate, vertical side, upper side unloaded part, upper side loaded part, out side などにおける F の値を決定した。その数式を示せば次の通りである。

- (a) lower side unloaded part $F = 0$
 - (b) lower side loaded part $F = -(P/2)x^2 + 0.4Pax - 0.08Pa^2$
 - (c) corner of the plate $F = -0.005Pa^2$
 - (d) vertical side $F = -0.005Pa^2$
 - (e) upper side unloaded part $F = -0.1Pax + 0.045Pa^2$
- ①点 $F = 0.0325Pa^2$ ②点 $F = 0.02Pa^2$ ③点 $F = 0.0075Pa^2$

a) $P=30kg$	b) $P=40kg$	c) $P=50kg$
SOLUTIONS BY MSWEEPOUT		
101 +6.79597838009161E+00	201 +9.061304506788886E+00	301 +1.13266306334857E+01
102 +1.60425400926914E+01	202 +2.13900534569224E+01	302 +2.67375668211531E+01
103 +2.41946672618917E+01	203 +3.21795563491894E+01	303 +6.02244454364863E+01
104 +2.87372136415177E+01	204 +3.83162848553568E+01	304 +4.78953560691964E+01
105 +7.56252649781451E+00	205 +1.00833686637527E+01	305 +1.26042108296906E+01
106 +1.6506589821528E+01	206 +2.20087986428704E+01	306 +2.75109483035881E+01
107 +2.31445879314452E+01	207 +3.08594505752607E+01	307 +3.85743132190762E+01
108 +2.60450201245239E+01	208 +3.47266934993656E+01	308 +4.34083668742070E+01
109 +7.72712151593131E+00	209 +1.03028286879083E+01	309 +1.28785358598854E+01
110 +1.62031725465167E+01	210 +2.16042300620227E+01	310 +2.70052875775289E+01
111 +2.17828369701709E+01	211 +2.90437826268947E+01	311 +3.63047282836188E+01
112 +2.38699188034139E+01	212 +3.18265584045522E+01	312 +3.97831980056909E+01
113 +7.47604785925043E+00	213 +9.96806381233404E+00	313 +1.24600797654176E+01
114 +1.53144085239940E+01	214 +2.04192113653261E+01	314 +2.55240142066577E+01
115 +2.00734234834591E+01	215 +2.6764584646127E+01	315 +3.34557058057661E+01
116 +2.17118490795442E+01	216 +2.89491321060593E+01	316 +3.61864151323749E+01
117 +6.92071454747058E+00	217 +9.27619339582757E+00	317 +1.15345242457845E+01
118 +1.39086465676030E+01	218 +1.85448620901377E+01	318 +2.31810776126723E+01
119 +1.78717035468249E+01	219 +2.38289380527334E+01	319 +2.97861725780422E+01
120 +1.91663646928309E+01	220 +2.55551529237751E+01	320 +3.19499411547194E+01
121 +6.067441130464238E+00	221 +8.08988173952332E+00	321 +1.01123521744042E+01
122 +1.19289519522528E+01	222 +1.59052692696708E+01	322 +1.98815865870888E+01
123 +1.49876508002003E+01	223 +1.99835344002674E+01	323 +2.49794180003347E+01
124 +1.59360628739159E+01	224 +2.12480838318882E+01	324 +2.65601047898608E+01
125 +4.867008887302025E+00	225 +6.48934518306952E+00	325 +8.11168147883700E+00
126 +9.284669307782366E+00	226 +1.23795907704317E+01	326 +1.54744884630399E+01
127 +1.12968134923649E+01	227 +1.50624179898201E+01	327 +1.88280224872756E+01
128 +1.18717494469930E+01	228 +1.58289992626575E+01	328 +1.97862490783224E+01
129 +3.28479905304895E+00	229 +4.37973207073199E+00	329 +5.47466508841508E+00
130 +5.99522261125801E+00	230 +7.99363014834416E+00	330 +9.99203768543042E+00
131 +6.92384576005541E+00	231 +9.23179434674071E+00	331 +1.15397429334262E+01
132 +7.142224730266131E+00	232 +9.52299440354860E+00	332 +1.19037455044360E+01
133 +1.43917257121939E+00	233 +1.91889676162588E+00	333 +2.39862095203239E+00
134 +2.45230413845536E+00	234 +3.26973885127386E+00	334 +4.08717356409243E+00
135 +2.56674742660841E+00	235 +3.4222990214460E+00	335 +4.27791237768089E+00
136 +2.55877126109039E+00	236 +3.41169501478725E+00	336 +4.26461876848421E+00

表-1 電子計算機による F の値

$$(f) \text{ upper side loaded part} \quad F = -Px^2 + 0.0425Pa^2$$

$$(g) \text{ out side} \quad F = -0.025Pa^2$$

また図-22に示した格点1より格点36に至る F の値は(25)式または(27)式を用い、 F に関する36元連立方程式を作り、 $P=30\text{kg}$ 、 $P=40\text{kg}$ 、 $P=50\text{kg}$ の三種類の場合について電子計算機(室蘭工業大学所有の FACOM 231)を利用して求めた。その値を示せば表-1の通りである。

板の周辺および内部における総べての格点の F の値を用い、(26)式によって、 σ_x 、 σ_y および τ_{yz} を計算した。

IV. 理論と実験の比較・考察

1. 断面応力度分布の比較

Model No. 1~Model No. 7 の7枚の Scheibe 模型について、 x 軸方向の断面垂直応力度 σ_x 、 y 軸方向の断面垂直応力度 σ_y 、垂直せん断応力度 τ_{yz} の分布を A-A 断面(中央部断面)、B-B 断面(1/4 点断面)、C-C 断面(支点部断面)について、実験解析結果を Deep Beam Theory の理論解析値および Scheibe Theory の理論解析値と比較図示すれば、図-23~図-43の通りとなる。

2. 考 察

A. σ_x の分布曲線

a) 断面 A-A (支間中央部)

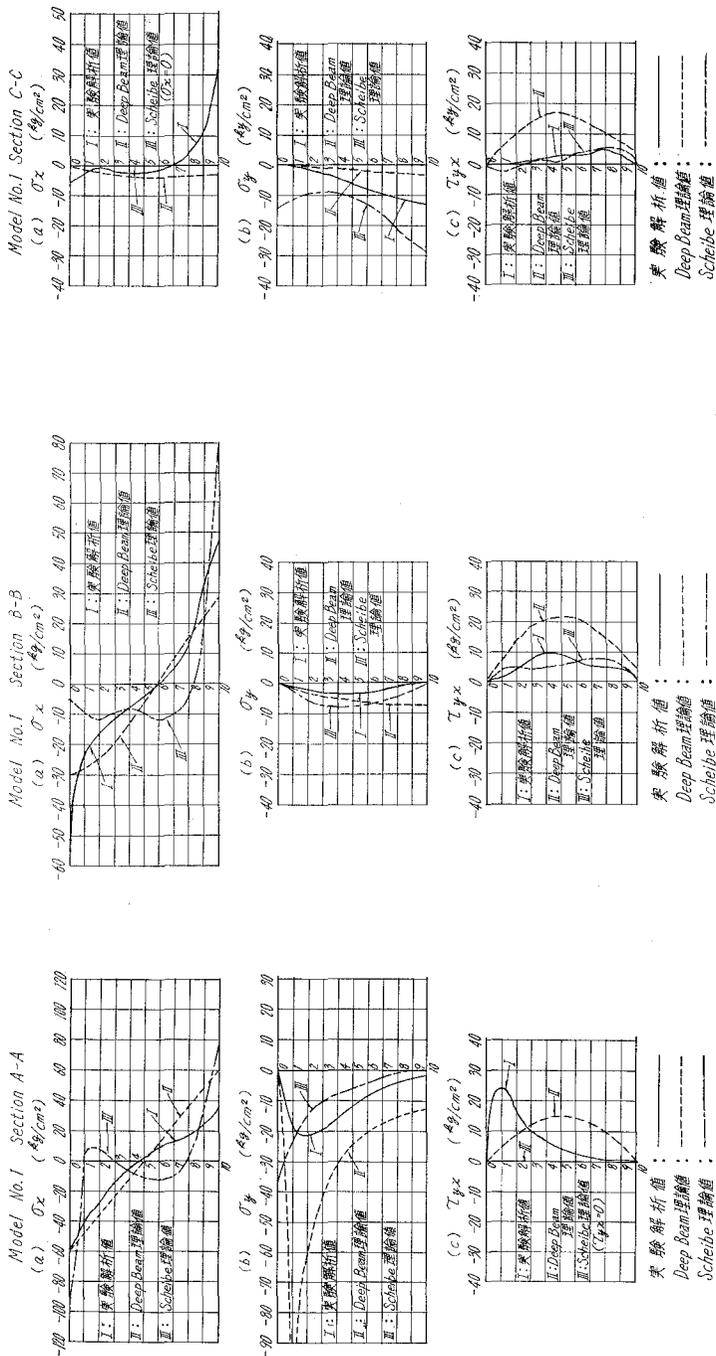
$h/l=0.5\sim 0.8$ の範囲では、Scheibe 表面(周辺境界面)の応力度についていえば、上面・底面とも実験解析値と Deep Beam, Scheibe の両理論値とは大体において接近している。しかしその内部応力度にては、実験解析値が Deep Beam と Scheibe の両理論値の中間の大きさ、中間の曲線形状を示す傾向のあることがわかった。

$h/l=1.0\sim 2.0$ の範囲にて、Scheibe の上面応力度では実験解析値、両理論値ともほぼ相接近し別に問題はなかったが、底面応力度にては実験と両理論による値の間にかかなりの差異を示し、実験解析値の方が大きな結果を与えている。2, 3回実験を繰返して見たがやはり大きな値を示すことに変わりなく、これは集中線荷重による応力集中現象と h/l の増加にともなう実験条件すなわち荷重の増大と載荷時における模型の x 軸方向への傾斜の影響などが加算されたためではないかと判断される。

しかし、実験解析値の曲線形状は、やはり Deep Beam と Scheibe の両理論値の曲線形状の中間の性状を示す傾向のあることを更めて発見した。

b) 断面 B-B (支間 1/4 点部)

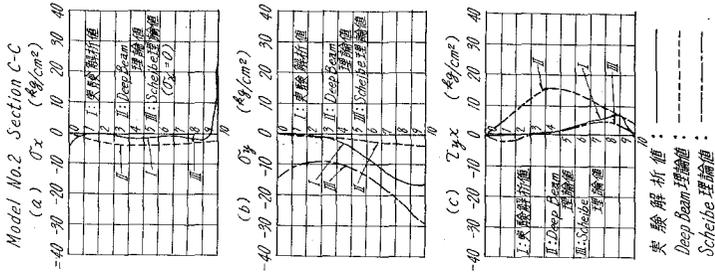
$h/l=0.5\sim 2.0$ のすべての模型について、実験解析値は大きさ、分布曲線形状とも、Deep Beam と Scheibe の両理論値の中間の性状を示していることが特に顕著である。



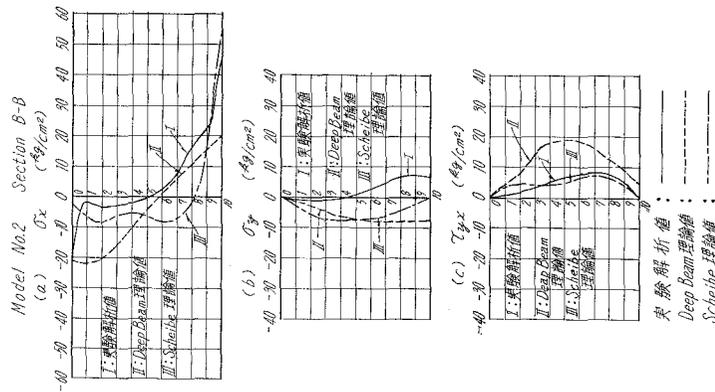
図—25 Model No. 1 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

図—24 Model No. 1 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

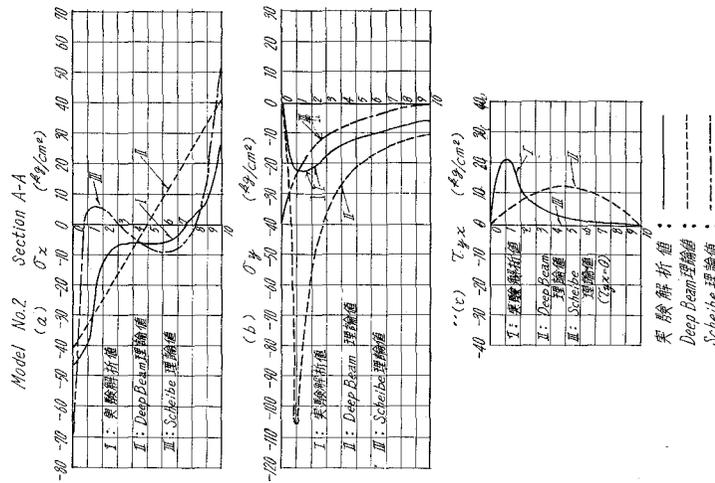
図—23 Model No. 1 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—28 Model No. 2 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—27 Model No. 2 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—26 Model No. 2 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

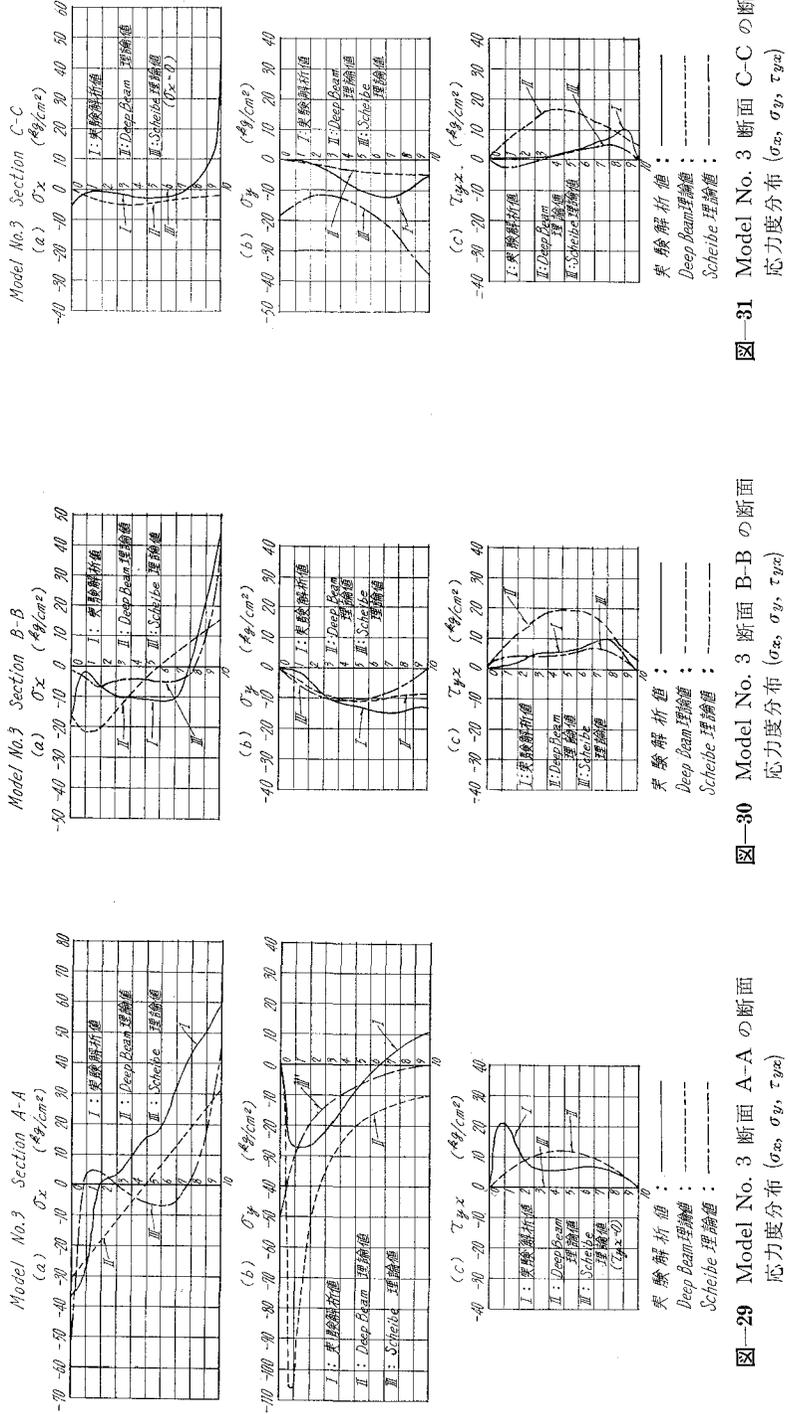
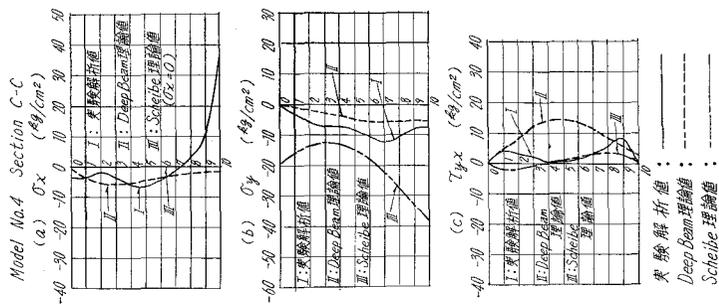


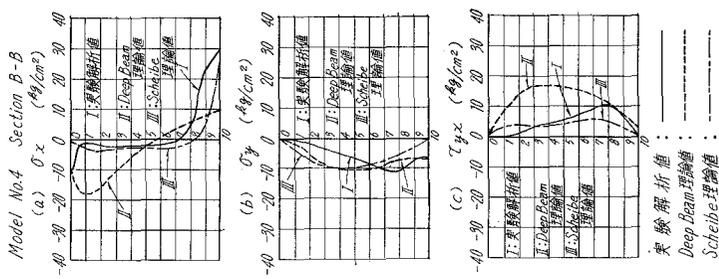
図-29 Model No. 3 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

図-30 Model No. 3 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

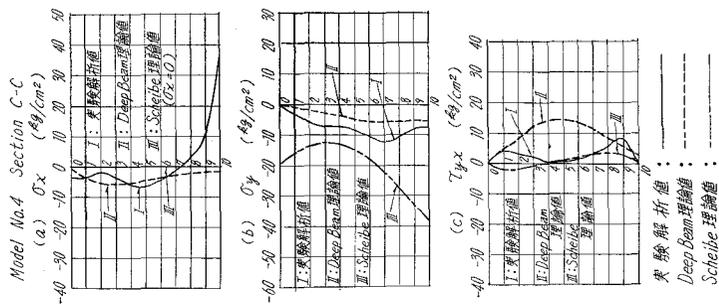
図-31 Model No. 3 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



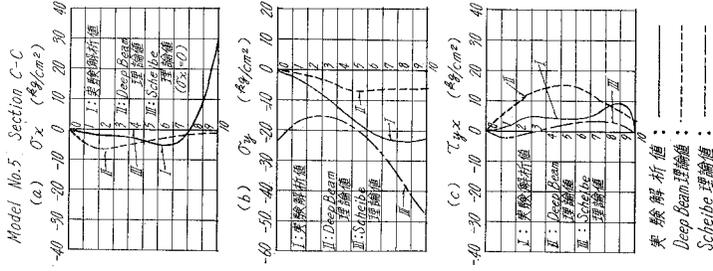
図—32 Model No. 4 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



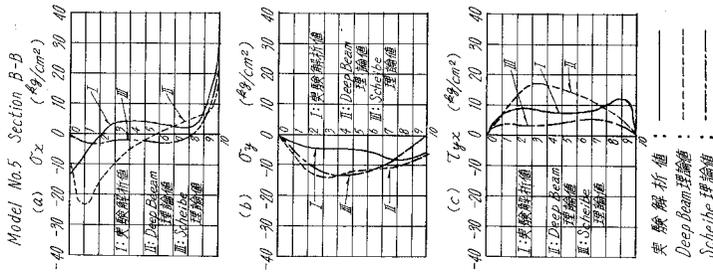
図—33 Model No. 4 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



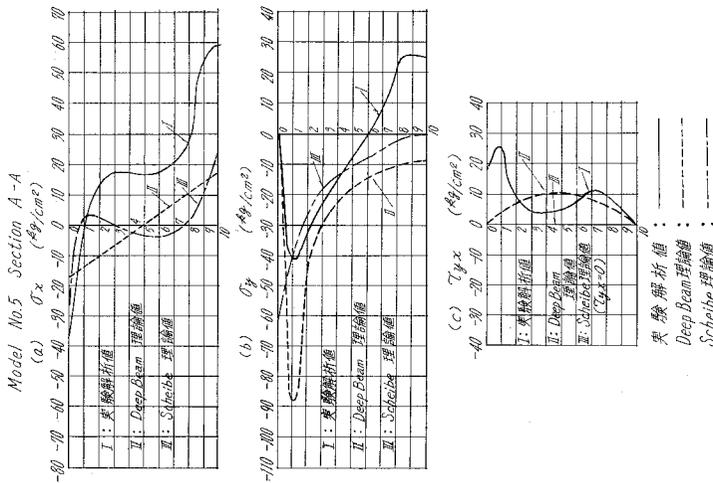
図—34 Model No. 4 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—37 Model No.5 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—36 Model No.5 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—35 Model No.5 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

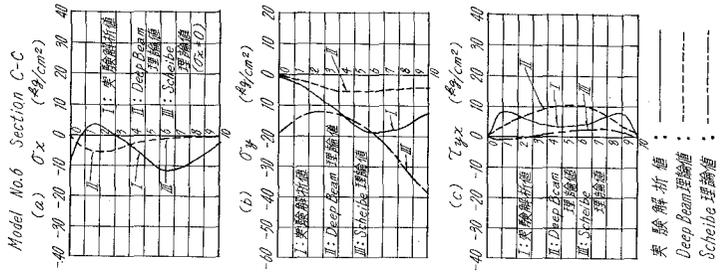


図-38 Model No. 6 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

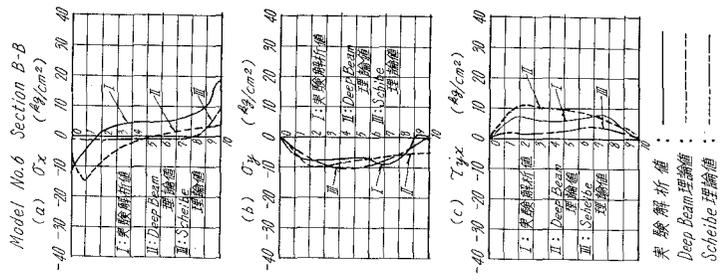


図-39 Model No. 6 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

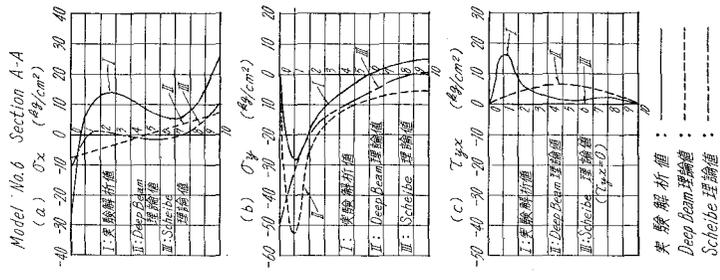
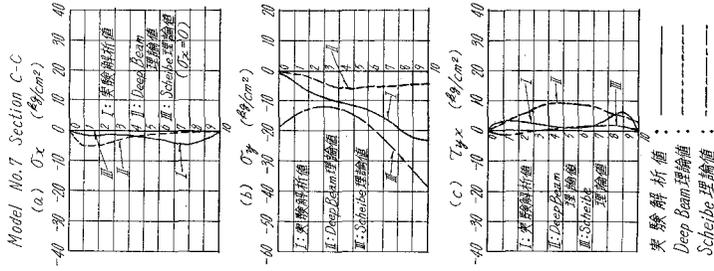
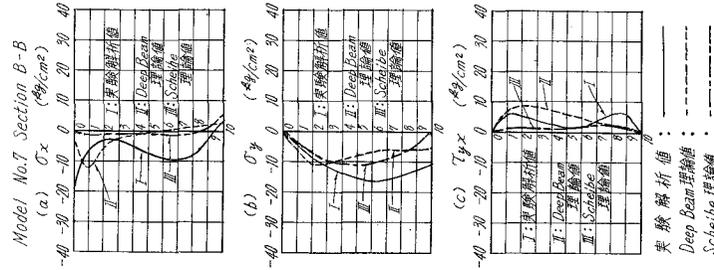


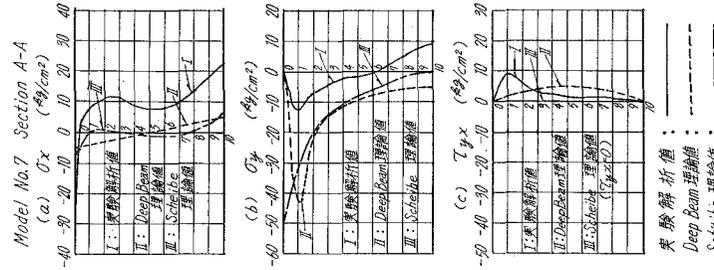
図-40 Model No. 6 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—41 Model No. 7 断面 A-A の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—42 Model No. 7 断面 B-B の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)



図—43 Model No. 7 断面 C-C の断面
応力度分布 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$)

詳細に吟味すれば、底面応力度の実験解析値は Scheibe の理論値に接近しており、上面応力度の場合は逆に Deep Beam の理論値に接近している。これは Scheibe の理論解析、特に载荷重周辺面の解析において、その仮定に不満足な点（実状に合致しない点）があるためと考えられる。すなわち、载荷の実状に応じて解析法の局部的修正が必要と思われる。

c) 断面 C-C (支点部)

$h/l=0.5\sim 2.0$ のすべての模型において、その上面応力度の実験解析値は $\sigma_x=0$ となっている両理論値にかなりよく相接近している。しかし、底面応力度についていえば、 $h/l=0.5\sim 1.2$ の範囲では、実験解析値の方が 0 または 0 に近い両理論値に比べ著しく大きくなっている。これは支点部における摩擦による底面張力の局部増加の影響と見る事が出来ると思う。しかし $h/l=1.6\sim 2.0$ の模型 No. 6 と No. 7 では理論値と実験値がほぼ一致している。これは Beam としての性状が全く見られなくなり、摩擦による底面張力の局部増加はほとんどなくなったためと推察される。

B. σ_y の分布曲線

a) A-A 断面 (支間中央部)

$h/l=0.5\sim 1.0$ の範囲にて、実験解析値は Deep Beam の理論値とかなりかけ離れた値を示し、むしろ Scheibe 理論値の方へ幾分接近する傾向を示した。これは Deep Beam Theory の解析仮定に不満足な点のあることを意味するものであり、研究の余地あることを強調する次第である。

また Deep Beam と Scheibe の両理論による計算値の相互の間には、かなりの差異のあることが確認され、これは両理論の仮定、基本方針の相違から生ずる当然の事象であると推察される。

$h/l=1.2\sim 2.0$ の範囲では、実験解析値の分布曲線が Deep Beam, Scheibe の両理論値の分布曲線に接近する傾向にあり、また両理論値の分布曲線形状は、 h/l の増加にともないその大きさ、形状とも段々接近する傾向にあることを見出した。ただし、実験解析値は底面において引張応力度を示す傾向にあり注目を引いた。これはやはり σ_x の増大と同様、実験条件に左右される点のかなりあることが考察された。

b) B-B 断面 (支間 1/4 点部)

$h/l=0.5\sim 0.8$ の範囲にて、実験解析値は Deep Beam, Scheibe の両理論値に比べ、かなりの差異を示したが、 h/l が大きくなり、 $h/l=1.0\sim 2.0$ の範囲では、両理論値と相接近して来る傾向を見出した。これは σ_y の分布は深い Scheibe になるほど理論解析の仮定が実状に合致して来ることを意味するものと思う。

h/l の大きさの如何にかかわらず、底面の応力度は Scheibe 理論値のように 0 とはならず、圧縮応力度を示す場合が多く見られた。勿論これは実験条件にもよるものと思われるが、境界

面での応力現象については理論解析においても種々研究の余地があると思う。

c) C-C 断面 (支点部)

$h/l=0.5\sim 2.0$ のすべての模型において、Deep Beam の理論値と Scheibe の理論値との間にはかなりの差異を示したが、実験解析値はその大き、分布曲線の形状とも、両理論値の中間の性状を示した。詳細に吟味すれば、その値の大きさとしては Scheibe Theory による計算値に近く、この点から見て Scheibe Theory の方が実状に合致していると判断される。

C. τ_{yz} の分布曲線

a) 断面 A-A (支間中央部)

h/l の大きさの如何にかかわらず、Scheibe Theory による計算値はその仮定の示すところにより、 $\tau_{yz}=0$ であり全く比較にならないが、実験解析値と Deep Beam Theory による計算値との比較では、 $h/l=0.5\sim 2.0$ のすべての模型について、実験解析値の最大は載荷重境界上面近くに生ずるのに反し、Deep Beam 理論値の最大はその解析仮定の示す通り、断面の中心線上に生ずる。これは理論値の解析仮定が実状に合致しないことを意味するものである。また実験解析値の分布曲線形状は、 h/l が大きくなるにつれ変化に富んで来る傾向のあることがわかった。

b) 断面 B-B (支間 1/4 点部)

$h/l=0.5\sim 1.0$ の範囲にて、実験解析値の大きさは Scheibe の理論値に接近しているが、その分布曲線の形状のみからいうと、Deep Beam と Scheibe の両理論値曲線の中間の形状を示す傾向にあった。また $h/l=1.2\sim 2.0$ の範囲では、その実験解析値はその大きさ、分布曲線の形状とも、両理論値の中間の性状を示していることが注目された。

c) 断面 C-C (支点部)

$h/l=0.5\sim 1.0$ の範囲にて、実験解析値の大きさは Scheibe の理論値に接近しているが、 $h/l=1.2\sim 2.0$ の範囲では、その大きさ、分布曲線の形状とも Scheibe, Deep Beam 両理論値の中間の性状を呈する傾向のあることを発見した。また、全模型の分布曲線より見て、断面 B-B の場合同様、Scheibe Theory の方が Deep Beam Theory よりも実状に合致した面のあることを確認した。

V. 結 言

二次元弾性論の Scheibe 理論と棒力学より出発した Deep Beam 理論には、それぞれの特徴があり、どちらにも利点と特別の仮定とがあるから、これを考慮の上で優れた点を生かすように適合した構造体の解析に用いなければならない。

本研究で取扱ったような h/l の大きな Scheibe に対しては、勿論、二次元弾性理論としての Scheibe 理論の方がはるかに優れていると云うべきであり、事実、実験解析値との比較においても、総合的に見てそれが実証された。

しかし Scheibe 理論にも、それ特有の仮定があり、本研究で取扱ったような集中荷重を受ける Scheibe においては、その荷重載荷面および自由境界面などにおける解析の精度を高めるように工夫する必要があると思う。

Deep Beam の理論は、 $h/l \leq 0.5$ の場合には実験解析値とよく合致するので、割合に高さの低い桁橋の計算などに用いればきわめて便利であるが、 $h/l > 0.5$ 、特に 1.0 以上にもなれば適用は無理と思う。Scheibe 理論は、Deep Beam 理論に比べ、 σ_x の内部応力度分布、 σ_y の分布曲線などにおいて割合によく実験解析値に接近する利点のあることを確認した。

等布荷重を受ける Scheibe の計算は種々行なわれているが、集中荷重を受ける Scheibe においては余り研究された例がない。Scheibe 周辺、特に載荷点、支点および自由境界面における精密解析の計算方法の開発が必要であると思う。

Deep Beam の理論においても、支点部における反力の局部的影響を更に加算した修正理論の開発が必至と考えられ、理論計算値がもっと真値に接近するよう計算方法について工夫する必要がある。

また実験解析においても、種々の実験条件による誤差を出来るだけ最小限度に止めるよう、高精度の実験方法について研究する必要があると思う。従来集中荷重を受ける深い Scheibe の理論と実験の比較に関する纏った研究論文の見当たらないことに鑑み、本研究が幾分でも役に立てば幸いである。

なお、本研究に当っては、室蘭工業大学土木工学科の教職員ならびに学生諸君の協力を得たことを付し、ここに感謝の意を表する次第である。

(昭和 43 年 4 月 30 日受理)

文 献

- 1) S. Timoshenko: Theory of Elasticity, 27, 52 (1934), McGraw-Hill.
- 2) 福原達三: 機械学会誌, 30-123, 365 (昭 2).
- 3) M. M. Frocht: Photoelasticity, Vol. I, 252 (1949), Vol. II, 104 (1948), John Wiley & Sons.
- 4) E. G. Coker, L. N. G. Filon: A Treatise on Photoelasticity, 458 (1957), Cambridge.
- 5) 辻 二郎・西田正孝・河田幸三: 光弾性実験法, 1 (昭 40), 日刊.
- 6) 中村作太郎・番匠 勲: 第 17 回土木学会学術講演会講演概要集, I-78, 165 (昭 37-5); 第 12 回応用力学連合講演会講演概要集, I-124, 43 (昭 39-9).
- 7) Sakutaro Nakamura: Memoirs of the Muroran Institute of Technology, Science and Engineering Division, Vol. 6, No. 1, 69 (1967-7).
- 8) K. Girkmann: Flächentragwerke, 18 (1963), Springer-Verlag.
- 9) K. Beyer: Die Statik in Stahlbetonbau, 712 (1956), Springer-Verlag.
- 10) S. Timoshenko & J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 461 (1951), McGraw-Hill.
- 11) 応用測定技術研究会: 応力測定法, 472 (昭 30), 朝倉.