



## 三弦トラスの応力解析について

|       |   |
|-------|---|
| メタデータ | 言語: jpn<br>出版者: 室蘭工業大学<br>公開日: 2014-07-04<br>キーワード (Ja):<br>キーワード (En):<br>作成者: 能町, 純雄, 小針, 憲司<br>メールアドレス:<br>所属: |
| URL   | <a href="http://hdl.handle.net/10258/3464">http://hdl.handle.net/10258/3464</a>                                   |

# 三弦トラスの応力解析について

能町純雄・小針憲司\*

## A Stress Analysis of a Three Chord Truss

Sumio G. Nomachi and Kenji Kobari

### Abstract

The presenting paper deals with a stress analysis of a truss with three main chords which locate at triangular vertices. The equilibrium of forces at an arbitrary nodal yields three finite difference equations with respect to three components of displacement at the nodal. Supposing the structure has a geometric pattern of members in regular sequence, the method of "Finite Integration Transforms" can be effectively used and the solution is expressed by finite sine or cosine series.

### 1. はじめに

断面として逆三角形を有する 図-1 のような三弦材トラスを橋梁とした場合の応力特性を論じさらに振動性状をも考察したものである。上面構は真中に一本の縦材を有しているの、この点をも考慮し、三弦材について  $3n$  個、上面補助縦材について  $n$  個、それぞれ前者については自由度 3、後者については自由度 2 をとり、それらに対応する力のつりあいを作ると、マトリックスの大きさは  $11 \times 11 \times n^2$  となる。いま  $n$  を 8 とすれば 88 元の大型マトリックスとなるので、中型の電算機では効果的に解くことができない。しかしフーリエ定和分変換を用いてこれを 11 元のマトリックスに変換できる。

### 2. 予備公式

フーリエ定和分変換公式

#### a) 逆変換公式

Symbolic Notation

$$\begin{aligned} S_i[f(x)] &= \sum_{x=1}^{n-1} f(x) \sin \frac{i\pi}{n} x, & C_i[f(x)] &= \sum_{x=1}^{n-1} f(x) \cos \frac{i\pi}{n} x \\ \bar{C}_i[f(x)] &= \sum_{x=1}^n f(x) \cos \frac{i\pi}{n} \left(x - \frac{1}{2}\right), & \bar{S}_i[f(x)] &= \sum_{x=1}^n f(x) \sin \frac{i\pi}{n} \left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

\* 室工大研究生

を導入すると,

$$f(x) = \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbf{S}_\ell[f(x)] \sin \frac{i\pi}{n} x \quad (0 < x < n) \quad (1)$$

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^n R_\ell \cos \frac{i\pi}{n} x \quad (0 \leq x \leq n) \quad (2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{n} \left\{ \mathbf{C}_0[f(x)] + \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(0) \right\} \\ R_\ell &= \frac{2}{n} \left\{ \mathbf{C}_\ell[f(x)] + \frac{1}{2} f(n) (-1)^\ell + \frac{1}{2} f(0) \right\} \\ R_n &= \frac{2}{n} \left\{ \mathbf{C}_n[f(x)] + \frac{1}{2} f(n) (-1)^n + \frac{1}{2} f(0) \right\} \quad x, i=0, 1, 2, 3, \dots, n, \\ f(x) &= \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \bar{\mathbf{C}}_\ell[f(x)] \cos \frac{i\pi}{n} \left( x - \frac{1}{2} \right) + \frac{R_0}{n} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ただし

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{x=1}^n f(x) \\ f(x) &= \frac{2}{n} \sum_{\ell=1}^n \bar{\mathbf{S}}_\ell[f(x)] \sin \frac{i\pi}{n} \left( x - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

#### b) 二次差分, 変一次差分のフーリエ定和分

ここに変一次差分というのは,  $f(x+1) - f(x-1)$  を一次差分  $f(x+1) - f(x)$  と区別して仮に名付けたものである。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i[\Delta^2 f(x-1)] &= -\sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^\ell \cdot f(n) - f(0) \right\} - D_i \cdot \mathbf{S}_i[f(x)] \\ \mathbf{C}_i[\Delta^2 f(x-1)] &= \Delta f(n-1) \cdot (-1)^\ell - \Delta f(0) - D_i \left\{ \frac{1}{2} f(n) \cdot (-1)^\ell + \frac{1}{2} f(0) + \mathbf{C}_i[f(x)] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{S}_i[f(x+1) - f(x-1)] = -2 \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ \frac{1}{2} f(n) \cdot (-1)^\ell + \frac{1}{2} f(0) + \mathbf{C}_i[f(x)] \right\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i[f(x+1) - f(x-1)] &= - \left\{ \Delta f(n-1) \cdot (-1)^\ell + \Delta f(0) \right\} \\ &+ \left( 1 + \cos \frac{i\pi}{n} \right) \left\{ f(n) \cdot (-1)^\ell - f(0) \right\} + 2 \sin \frac{i\pi}{n} \cdot \mathbf{S}_i[f(x)] \end{aligned} \quad (8)$$

ただし

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \quad D_i = 2 \left( 1 - \cos \frac{i\pi}{n} \right),$$

$$\Delta f(x-1) = f(x+1) - f(x-1)$$

3. トラスを壁要素とする三角形断面部材

a) 力のつり合い

図-1 に示すように、各弦の格点を  $0, 1, 2, \dots, n, 0^{\circ}, 1^{\circ}, 2^{\circ}, \dots, n^{\circ}, 0', 1', 2', \dots, n', 1'', 2'', 3'', \dots, n''$  とし、各格点の水平、鉛直変位をそれぞれ、 $u_x, u_{x^{\circ}}, u_{x'}, u_{x''}, v_x, v_{x'}, v_{x''}^{(1)}, v_{x''}^{(2)}, y_x, y_{x^{\circ}}, y_{x'}$  とする。各部材については、次のようにする。

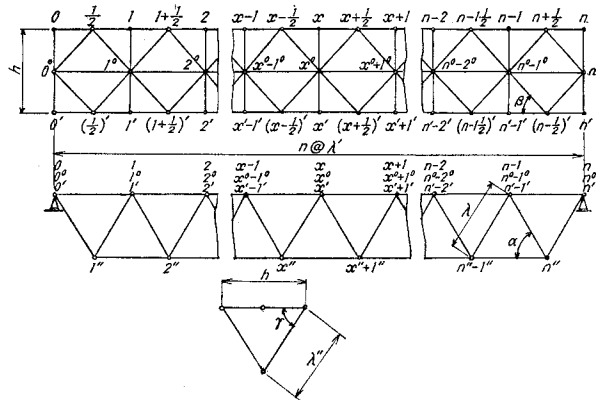


図-1

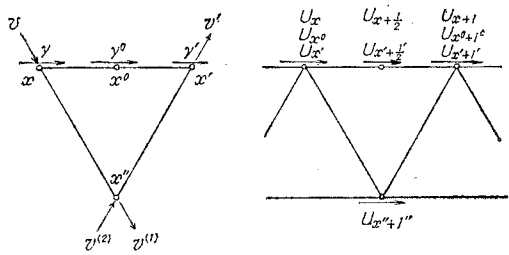


図-2 変位方向

今  $\overline{x, x+1}$  = 弦材  $(x, x+1)$  の応力とすると、フックの法則により変位と部材力の間

$$\overline{x, x+\frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_u}{\lambda'} (u_{x+\frac{1}{2}} - u_x), \quad \overline{x+1, x+\frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_u}{\lambda'} (u_{x+1} - u_{x+\frac{1}{2}}) \quad (9), (10)$$

$$\overline{x', x'+\frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_u}{\lambda'} (u_{x'+\frac{1}{2}} - u_{x'}), \quad \overline{x'+1', x'+\frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_u}{\lambda'} (u_{x'+1'} - u_{x'+\frac{1}{2}}) \quad (11), (12)$$

$$\overline{x^{\circ}, x^{\circ}+1^{\circ}} = \frac{E \cdot A_s}{\lambda'} (u_{x^{\circ}+1^{\circ}} - u_{x^{\circ}}) \quad (13)$$

$$\overline{x-1, x''} = \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x''}^{(2)} - v_{x-1}) \sin \alpha + (u_{x''} - u_{x-1}) \cos \alpha \right\} \quad (14)$$

$$\overline{x'-1', x''} = \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'-1'} - v_{x''}) \sin \alpha - (u_{x'-1'} - u_{x''}) \cos \alpha \right\} \quad (15)$$

$$\overline{x'', x} = \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x''} - v_x) \sin \alpha - (u_{x''} - u_x) \cos \alpha \right\} \quad (16)$$

$$\overline{x'', x'} = \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x''} - v_{x'}) \sin \alpha + (u_{x''} - u_{x'}) \cos \alpha \right\} \quad (17)$$

$$\overline{x, x^0} = \frac{2E \cdot A_v}{h} (y_{x^0} - y_x), \quad \overline{x^0, x'} = \frac{2 \cdot E \cdot A_v}{h} (y_{x'} - y_{x^0}) \quad (18), (19)$$

$$\overline{x^0, x + \frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_d}{h} \sin \beta \left\{ (u_{x + \frac{1}{2}} - u_{x^0}) \cos \beta + (y_{x^0} - y_{x + \frac{1}{2}}) \sin \beta \right\} \quad (20)$$

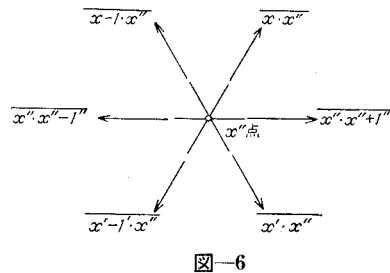
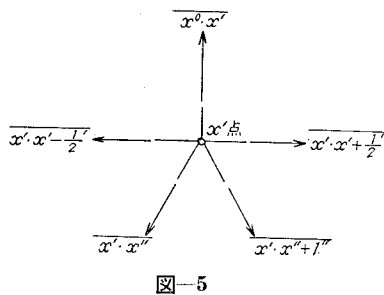
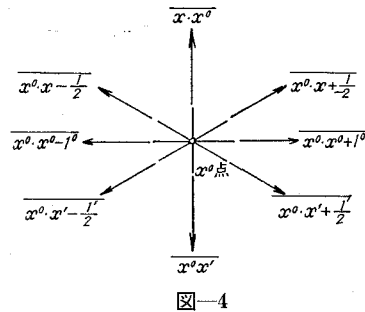
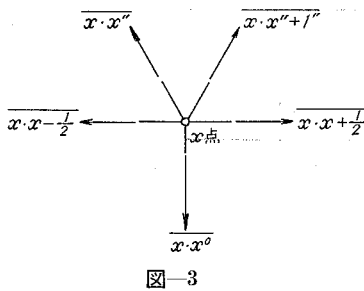
$$\overline{x^0 + 1^0, x + \frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_d}{h} \sin \beta \left\{ (u_{x^0 + 1^0} - u_{x + \frac{1}{2}}) \cos \beta + (y_{x + \frac{1}{2}} - y_{x^0 + 1^0}) \sin \beta \right\} \quad (21)$$

$$\overline{x^0, x' + \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot E \cdot A_d}{h} \sin \beta \left\{ (u_{x' + \frac{1}{2}} - u_{x^0}) \cos \beta + (y_{x' + \frac{1}{2}} - y_{x^0}) \sin \beta \right\} \quad (22)$$

$$\overline{x^0 + 1^0, x' + \frac{1}{2}} = \frac{2E \cdot A_d}{h} \sin \beta \left\{ (u_{x^0 + 1^0} - u_{x' + \frac{1}{2}}) \cos \beta + (y_{x' + \frac{1}{2}} - y_{x^0 + 1^0}) \sin \beta \right\} \quad (23)$$

上式中  $A_u, A_d, A_v, A_0, A_s, A$  はそれぞれ弦材  $(x, x + \frac{1}{2}), (x^0, x + \frac{1}{2}), (x, x^0), (x'', x'' + 1''), (x^0, x^0 + 1^0), (x'', x)$  の断面積,  $E$  は弾性係数,  $\alpha, \beta, \gamma, h, \lambda, \lambda'$  は図示した通りである。

鉛直荷重  $P$ , 水平荷重  $W$  とすると  
 $x$  点のまわりの力のつり合いは 図-3 より



$$\left(\overline{x, x + \frac{1}{2} - x, x - \frac{1}{2}}\right) + (\overline{x, x'' + 1'' - x, x''}) \cos \alpha = 0 \quad (24)$$

$$\overline{x, x^\circ} + (\overline{x, x'' + x, x'' + 1''}) \sin \alpha \cdot \cos \tilde{\gamma} = -W \quad (25)$$

$$(\overline{x, x'' + x, x'' + 1''}) \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = P \quad (26)$$

$x^\circ$  点まわりの力のつり合いは 図-4 より

$$\left(\overline{x^\circ, x^\circ + 1^\circ - x^\circ, x^\circ - 1^\circ}\right) + \left(\overline{x^\circ, x + \frac{1}{2} + x^\circ, x' + \frac{1}{2} - x^\circ, x - \frac{1}{2} - x^\circ, x' - \frac{1}{2}}\right) \cos \beta = 0 \quad (27)$$

$$(\overline{x, x^\circ - x', x^\circ}) + \left(\overline{x^\circ, x + \frac{1}{2} - x^\circ, x' + \frac{1}{2} - x^\circ, x - \frac{1}{2} + x^\circ, x' - \frac{1}{2}}\right) \sin \beta = W^\circ \quad (28)$$

$x'$  点まわりの力のつり合いは 図-5 より

$$\left(\overline{x', x' + \frac{1}{2} - x', x' - \frac{1}{2}}\right) + (\overline{x', x'' + 1'' - x', x''}) \cos \alpha = 0 \quad (29)$$

$$\overline{x', x^\circ} + (\overline{x', x'' + x', x'' + 1''}) \sin \alpha \cdot \cos \tilde{\gamma} = W' \quad (30)$$

$$(\overline{x', x'' + x', x'' + 1''}) \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = P' \quad (31)$$

$x''$  点まわりの力のつり合いは 図-6 より

$$\overline{x'', x'' + 1'' - x'', x'' - 1''} + (\overline{x'', x' + x'', x - x'', x' - 1' - x'', x - 1}) \cos \alpha = 0 \quad (32)$$

$$(\overline{x'', x' - x'', x + x'', x' - 1' - x'', x - 1}) \sin \alpha \cdot \cos \tilde{\gamma} = -W'' \quad (33)$$

$$(\overline{x'', x' - 1' + x'', x' + x'', x - 1 + x'', x}) \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = P'' \quad (34)$$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)$  点と  $\left(x' + \frac{1}{2}\right)$  点のつり合いは

$$\overline{x^\circ, x + \frac{1}{2} + x^\circ + 1^\circ, x + \frac{1}{2}} = 0, \quad \overline{x^\circ, x' + \frac{1}{2} + x^\circ + 1^\circ, x' + \frac{1}{2}} = 0 \quad (35), (36)$$

となる。

(9)~(23) 式を (24)~(34) 式に代入し変位で書き換え、(35), (36) 式より  $\left(x \pm \frac{1}{2}\right)$  点、 $\left(x' \pm \frac{1}{2}\right)$  点の変位を消去すると

$$K_4 A^2 u_{x-1} - 4K_2 u_x + K_2 A^2 u_{x^\circ-1^\circ} + 4K_2 u_{x^\circ} + K_2 \tan \beta A y_{x^\circ-1^\circ} + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'+1''}^{(3)} - v_{x''}^{(3)}) \sin \alpha + (u_{x''} - 2u_x + u_{x'+1''}) \cos \alpha \right\} \cos \alpha = 0 \quad (37)$$

$$\frac{2E \cdot A_v}{h} (y_{x^\circ} - y_x) + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'}^{(3)} - 2v_x + v_{x'+1''}^{(3)}) \sin \alpha + (-u_{x''} + u_{x'+1''}) \cos \alpha \right\} \sin \alpha \cdot \cos \tilde{\gamma} = -W \quad (38)$$

$$\frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (u_{x'}^{(3)} - 2v_x + v_{x'+1''}^{(3)}) \sin \alpha + (u_{x'+1''} - u_{x''}) \cos \alpha \right\} \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = -P \quad (39)$$

$$K_3 \Delta^2 u_{x^{\circ}-1^{\circ}} - 8K_2 v_{x^{\circ}} + K_2 \Delta^2 u_x + 4K_2 u_x + K_2 \Delta^2 u_{x'-1'} + 4K_2 u_{x'} = 0 \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2E \cdot A_v}{h} (y_x + y_{x'}) - 2 \tan^2 \beta K_2 \Delta^2 y_{x^{\circ}-1^{\circ}} \\ & + 4 \frac{E \cdot A_v}{h} y_{x^{\circ}} + K_2 \tan \beta \Delta u_{x-1} - K_2 \tan \beta \Delta u_{x'-1'} = -W^{\circ} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & K_4 \Delta^2 u_{x'-1'} - 4K_2 u_{x'} + K_2 \Delta^2 u_{x^{\circ}-1^{\circ}} + 4K_2 u_{x^{\circ}} - K_2 \tan \beta \Delta y_{x^{\circ}-1^{\circ}} \\ & + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'}^{(2)} - v_{x'+1'}^{(2)}) \sin \alpha + (u_{x'} - 2u_{x'} + u_{x'+1'}) \cos \alpha \right\} \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2E \cdot A_v}{h} (y_{x'} - y_{x^{\circ}}) + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (-v_{x'}^{(2)} + 2v_{x'} - v_{x'+1'}^{(2)}) \sin \alpha \right. \\ & \left. + (-u_{x'} + u_{x'+1'}) \cos \alpha \right\} \sin \alpha \cdot \cos \tilde{\gamma} = W' \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (-v_{x'}^{(2)} + 2v_{x'} - v_{x'+1'}^{(2)}) \sin \alpha + (u_{x'+1'} - u_{x'}) \cos \alpha \right\} \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = -P' \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E \cdot A_0}{\lambda'} \Delta^2 u_{x''-1''} + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'} - v_{x'-1'}) \sin \alpha + (u_{x'} - 2u_{x''} + u_{x'-1'}) \cos \alpha \right. \\ & \left. - (v_x - v_{x-1}) \sin \alpha + (u_x - 2u_{x''} + u_{x+1}) \cos \alpha \right\} \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'} - 2v_{x'}^{(2)} + v_{x'-1'}) \sin \alpha + (u_x - u_{x'-1'}) \cos \alpha \right. \\ & \left. + (v_x - 2v_{x'}^{(2)} + v_{x+1}) \sin \alpha - (u_x - u_{x-1}) \cos \alpha \right\} \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = -W'' \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{x'} - 2v_{x'}^{(2)} + v_{x'-1'}) \sin \alpha + (u_{x'} - u_{x'-1'}) \cos \alpha \right. \\ & \left. + (-v_x + 2v_{x'}^{(2)} - v_{x-1}) \sin \alpha + (u_x - u_{x-1}) \cos \alpha \right\} \sin \alpha \cdot \sin \tilde{\gamma} = P'' \end{aligned} \quad (47)$$

上式中

$$K_1 = \frac{2A_u}{\lambda'} + \frac{2A_d}{h} \sin \beta \cdot \cos^2 \beta, \quad K_2 = \frac{2E \cdot A_d \cdot A_u}{K_1 \cdot h \cdot \lambda'} \sin \beta \cdot \cos^2 \beta$$

$$K_3 = \frac{E \cdot A_s}{\lambda'} - 2K_2, \quad K_4 = \frac{2 \cdot E \cdot A_u^2}{K_1 \cdot \lambda'^2}$$

とする。

### b) 変位の定和分変換と境界条件

上式(37)~(47)で与えられる基本差分方程式中(37), (40), (42), (45)に  $\mathbf{C}_i$  を(38), (39), (41), (43), (44), (46), (47)式に  $\mathbf{S}_i$  を作用させ、簡単のため

$$\bar{v}_i = \mathbf{S}_i[v_x], \quad \bar{v}_{i'} = \mathbf{S}_i[v_{x'}], \quad \bar{y}_i = \mathbf{S}_i[y_x], \quad \bar{y}_{i^{\circ}} = \mathbf{S}_i[y_{x^{\circ}}], \quad \bar{y}_{i'} = \mathbf{S}_i[y_{x'}]$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2} u_n (-1)^i + \frac{1}{2} u_0 + \mathbf{C}_i[u_x], \quad \bar{u}_{i^{\circ}} = \frac{1}{2} u_{n^{\circ}} (-1)^i + \frac{1}{2} u_{0^{\circ}} + \mathbf{C}_i[u_{x^{\circ}}]$$

$$\bar{u}_{i'} = \frac{1}{2} u_{n'} (-1)^i + \frac{1}{2} u'_0 + \mathbf{C}_i[u_{x'}], \quad \bar{u}_{i''} = \bar{\mathbf{C}}_i[u_{x''}], \quad \bar{v}_{i'}^{(2)} = \bar{\mathbf{S}}_i[v_{x'}^{(2)}]$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_{i'}^{(2)} &= \bar{S}_i[v_{x'}^{(2)}], & \bar{P}_i &= S_i[P_x], & \bar{P}_{i'} &= S_i[P_{x'}], & \bar{P}_{i''} &= \bar{S}_i[P_{x''}] \\ \bar{W}_i &= S_i[W_x], & \bar{W}_{i'} &= S_i[W_{x'}], & \bar{W}_{i''} &= \bar{S}_i[W_{x''}]\end{aligned}$$

とおき、かつ格点  $0, 0^\circ, 0', n, n^\circ, n'$  の水平方向力のつり合いは次の式となる。(ただしここに作用する水平外力を  $H_0, H_0^\circ, H_0', H_n, H_n^\circ, H_n'$  とし、外向きを正とする。)

$$\begin{aligned}K_4(u_0+u_1)+K_2(u_0^\circ+u_1^\circ)+K_2 \tan \beta(y_{1^\circ}-y_0^\circ) \\ - \frac{2E \cdot A_u}{\lambda} u_0 + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ v_1^{(1)} - v_0 \right\} \sin \alpha + (u_{1''} - u_0) \cos \alpha \Big\} \cos \alpha = H_0\end{aligned}$$

$$\frac{E \cdot A_s}{\lambda} \Delta u_0^\circ - 2K_2(u_{1^\circ} + u_0^\circ) + K_2(u_0 + u_1) + K_2(u_{1'} + u_0') = H_0^\circ$$

$$\begin{aligned}K_4(u_0' + u_1') + K_2(u_0^\circ + u_1^\circ) - K_2 \tan \beta(y_{1^\circ} - y_0^\circ) \\ - \frac{2E \cdot A_u}{\lambda} u_0' + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_0' - v_1^{(2)}) \sin \alpha + (u_{1''} - u_0') \cos \alpha \right\} \cos \alpha = H_0'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-K_4(u_n + u_{n-1}) - K_2(u_n^\circ + u_{n^\circ-1}) - K_2 \tan \beta(y_{n^\circ} - y_{n^\circ-1}) \\ + \frac{2E \cdot A_u}{\lambda} u_n + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{n'}^{(1)} - v_n) \sin \alpha + (u_n - u_{n''}) \cos \alpha \right\} \cos \alpha = H_n\end{aligned}$$

$$\frac{E \cdot A_s}{\lambda} \Delta u_{n^\circ-1} + 2K_2(u_{n^\circ} + u_{n^\circ-1}) - K_2(u_n + u_{n-1}) - K_2(u_{n'} + u_{n'-1}) = H_n^\circ$$

$$\begin{aligned}-K_4(u_{n'} + u_{n'-1}) - K_2(u_n^\circ + u_{n^\circ-1}) + K_2 \tan \beta(y_{n^\circ} - y_{n^\circ-1}) \\ + \frac{2E \cdot A_u}{\lambda} u_{n'} + \frac{E \cdot A}{\lambda} \left\{ (v_{n'} - u_{n''}^{(2)}) \sin \alpha + (u_{n'} - u_{n''}) \cos \alpha \right\} \cos \alpha = H_n'\end{aligned}$$

$$\nu = \tan \beta, \quad \nu' = \tan \alpha, \quad \xi = \frac{\lambda}{E \cdot A \cdot \cos^2 \alpha}, \quad \delta_1 = \frac{A_y \cdot \lambda}{h \cdot A \cdot \cos^2 \alpha}, \quad \eta = \frac{A_0 \cdot \lambda}{\lambda' \cdot A \cdot \cos^2 \alpha}$$

とすると (37)~(47) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned}2K_2 \nu \cdot \xi \cdot \sin \frac{i\pi}{n} \bar{y}_{i^\circ} + K_2 \xi (-D_i + 4) \bar{u}_{i^\circ} - \left\{ (K_4 D_i + 4K_2) \xi + 2 \right\} \bar{u}_i \\ + 2 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + 2\nu' \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{v}_{i'}^{(1)} = \left\{ -H_{n'} (-1)^i + H_0 \right\} \xi \\ - K_2 \nu \xi \left( 1 + \cos \frac{i\pi}{n} \right) \left\{ y_{n^\circ} (-1)^i - y_0^\circ \right\} - \nu' \left\{ v_{n'} (-1)^i - v_0 \right\}\end{aligned} \quad (48)$$

$$-2\nu'^2 \cos \gamma \bar{v}_i - 2\delta_1 (\bar{y}_i - \bar{y}_{i^\circ}) - 2\nu' \cos \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + 2\nu'^2 \cos \gamma \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{v}_{i'}^{(1)} = -\xi \bar{W}_i \quad (49)$$

$$-2\nu'^2 \sin \gamma \bar{v}_i - 2\nu' \sin \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + 2\nu'^2 \sin \gamma \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{v}_{i'}^{(1)} = -\xi \bar{P}_i \quad (50)$$

$$K_2 \xi (-D_i + 4) \bar{u}_i - \xi (K_3 D_i + 8K_2) \bar{u}_{i^\circ} + K_2 \xi (-D_i + 4) \bar{u}_{i'} = \left\{ -H_{n^\circ} (-1)^i + H_0^\circ \right\} \xi \quad (51)$$

$$-2\delta_1 (\bar{y}_i + \bar{y}_{i'}) + 2K_2 \nu^2 \left( \xi D_i + \frac{2\delta_1}{K_2 \nu^2} \right) \bar{y}_{i^\circ} - 2K_2 \nu \xi \sin \frac{i\pi}{n} (\bar{u}_i - \bar{u}_{i'})$$



$$= -2K_2\nu^2\xi \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^k y_{n^0} - y_{0^0} \right\} - \xi \bar{W}_{i^0} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} & -2K_2\nu\xi \sin \frac{i\pi}{n} \bar{y}_{i^0} + K_2\xi(-D_i+4) \bar{u}_{i^0} - \left\{ (K_4D_i+4K_2)\xi+2 \right\} \bar{u}_i \\ & + 2 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i'} - 2\nu' \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{v}_{i'}^{(2)} = \left\{ -H_{n'}(-1)^k + H_{0'} \right\} \xi \\ & + K_2\nu\xi \left( 1 + \cos \frac{i\pi}{n} \right) \left\{ y_{n^0}(-1)^k - y_{0^0} \right\} + \nu' \left\{ v_{n'}(-1)^k - v_{0'} \right\} \end{aligned} \tag{53}$$

$$2\nu'^2 \cos \gamma \bar{v}_{i'} - 2\delta_1(\bar{y}_{i^0} - \bar{y}_{i'}) - 2\nu' \cos \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i'} - 2\nu'^2 \cos \gamma \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{v}_{i'}^{(2)} = \xi \bar{W}_{i'} \tag{54}$$

$$2\nu'^2 \sin \gamma \bar{v}_{i'} - 2\nu' \sin \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i'} - 2\nu'^2 \sin \gamma \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{v}_{i'}^{(2)} = -\xi \bar{P}_{i'} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} & -2\nu' \sin \frac{i\pi}{2n} (\bar{v}_i - \bar{v}_{i'}) + 2 \cos \frac{i\pi}{2n} (\bar{u}_i + \bar{u}_{i'}) - (\eta D_i + 4) \bar{u}_{i'} \\ & = -\nu' \cos \frac{i\pi}{2n} \left\{ (-1)^k \cdot v_{n'} - v_{0'} - (-1)^k \cdot v_n + v_0 \right\} \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned} & 2\nu'^2 \cos \gamma \cos \frac{i\pi}{2n} (\bar{v}_i + \bar{v}_{i'}) + 2\nu' \cos \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} (\bar{u}_i - \bar{u}_{i'}) - 2\nu'^2 \cos \gamma (\bar{v}_{i'}^{(2)} + \bar{v}_{i'}^{(2)}) \\ & = \nu'^2 \cos \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} \left\{ (-1)^k v_n - v_0 + (-1)^k \cdot v_{n'} - v_{0'} \right\} - \xi \bar{W}_{i'} \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} & -2\nu'^2 \sin \gamma \cos \frac{i\pi}{2n} (\bar{v}_i - \bar{v}_{i'}) - 2\nu' \sin \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} (\bar{u}_i + \bar{u}_{i'}) + 2\nu'^2 \sin \gamma (\bar{v}_{i'}^{(2)} - \bar{v}_{i'}^{(2)}) \\ & = \nu'^2 \sin \gamma \sin \frac{i\pi}{2n} \left\{ (-1)^k \cdot v_{n'} - v_{0'} - (-1)^k v_n + v_0 \right\} + \xi \bar{P}_{i'} \end{aligned} \tag{58}$$

今両端単純支持とし、水平外力も作用していないとする。更に荷重は  $P_x, P_{x'}, P_{x''}, W_x, W_{x'}, W_{x''}$  とすれば

$$\begin{aligned} y_n = y_0 = y_{n^0} = y_{0^0} = y_{n'} = y_{0'} = v_n = v_0 = v_{n'} = v_{0'} = 0 \\ H_n = H_0 = H_{n^0} = H_{0^0} = H_{n'} = H_{0'} = 0 \end{aligned}$$

となる。

#### 4. 計 算 例

上記の連立方程式を、各格点について解き逆変換を求めて、以下に示す断面諸元を用いて数値計算を行なった。

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2, \quad \alpha = 1.08002, \quad \beta = 0.61843, \quad \gamma = 1.18076 \\ A_v &= 0.002398 \text{ m}^2, \quad A_u = 0.01688 \text{ m}^2, \quad A_d = 0.01525 \text{ m}^2, \quad A_s = 0.01013 \text{ m}^2 \\ A_0 &= 0.03703 \text{ m}^2, \quad A = 0.00871 \text{ m}^2, \quad \lambda = 11.03312 \text{ m}, \quad \lambda' = 10.4 \text{ m}, \\ h &= 7.4 \text{ m}, \quad n = 7 \end{aligned}$$

以下に荷重状態と、この時の変位と軸力の影響線を図示するが、別の荷重状態については省略した。有効幅員 9.0 m とした場合の主荷重 ( $L = 20$  t) に対する部材軸力を表-1 に示す。計算は室蘭工業大学 FACOM-231-ALGOL によって行なったが、一格点荷重について、全点の変位と軸力の計算は 4 分で完了できた。

図示以外の軸力は微小故省略した。

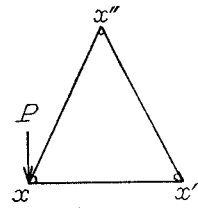


図-7 荷重状態

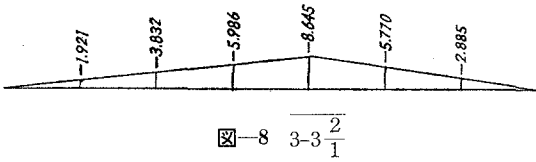


図-8  $3-3 \frac{2}{1}$

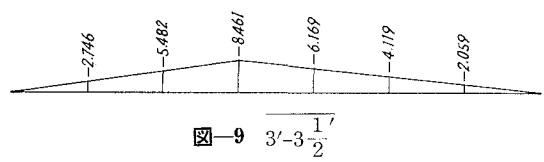


図-9  $3'-3' \frac{1}{2}$

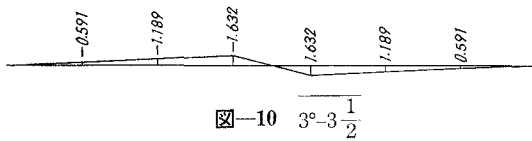


図-10  $3^o-3^o \frac{1}{2}$

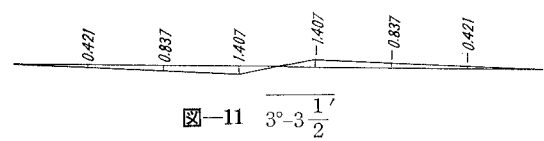


図-11  $3^o-3^o \frac{1}{2}$

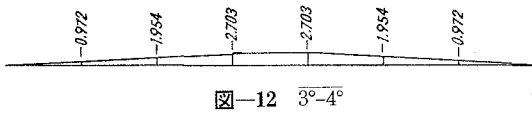


図-12  $3^o-4^o$

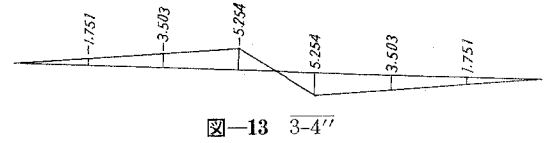


図-13  $3-4^o$

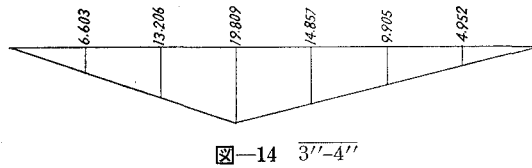


図-14  $3''-4''$

軸力影響線 ( $\times 10^{-1}$  t)

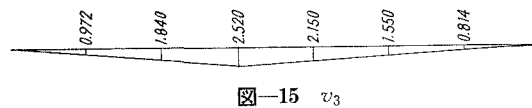


図-15  $v_3$

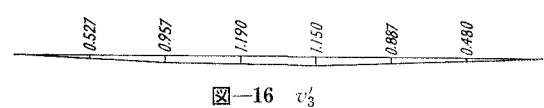


図-16  $v_3'$

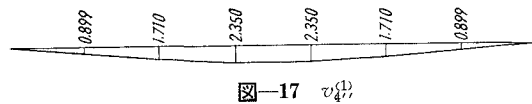


図-17  $v_3^{(1)}$

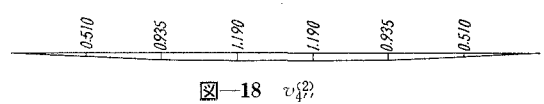


図-18  $v_3^{(2)}$

変位影響線 ( $\times 10^{-4}$  m)

表-1 軸力 (T)

| 部材番号              | 死荷重    | 活荷重    | 合計      |
|-------------------|--------|--------|---------|
| 3°-4°             | - 74.4 | - 45.9 | - 120.3 |
| 3-3°              | 23.2   | 17.8   | 41.0    |
| 3-3 $\frac{1}{2}$ | -327.5 | -121.0 | - 448.5 |
| 3''-4''           | 782.0  | 296.3  | 1078.3  |
| 1-1''             | -207.4 | - 93.2 | - 300.6 |
| $\frac{1}{2}$ -1° | - 18.7 | - 21.5 | - 40.2  |

なお  $L$  荷重による上弦材の軸力は、従来の計算方法 (平面的解析) では  $N=177.3$  t, 本方法では  $N=121.0$  t となった。

## 5. 振動解析

### a) 特性方程式

前記静的釣合い式に於ける  $v$  方向変位を次のように、各部材水平変位  $y, y', y''$  と、鉛直変位 (下向きを正)  $\delta, \delta', \delta''$  で書き換え

$$v = \delta \sin \gamma + y \cos \gamma, \quad v' = -\delta' \sin \gamma + y' \cos \gamma$$

$$v^{(1)''} = \delta'' \sin \gamma + y'' \cos \gamma, \quad v^{(2)''} = -\delta'' \sin \gamma + y'' \cos \gamma$$

かつ、軸方向振動を無視し、重力加速度  $g$ 、角速度  $\omega$ 、格点重量  $\mathfrak{M}$  とし、正弦振動を仮定して  $f_x = \bar{f} \sin \omega t$  とすると、次のような固有振動を与える特性方程式が得られる。

$$-\theta_1 \mu \bar{\delta}_i - \theta_1 \nu_1 \bar{y}_i - \theta_2 \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + \theta_1 \mu \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{\delta}_{i''} + \theta_1 \nu_1 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{y}_{i''} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}}{g} \bar{\delta}_i = 0$$

$$-\theta_1 \mu \bar{\delta}_{i'} + \theta_1 \nu_1 \bar{y}_{i'} - \theta_2 \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + \theta_1 \mu \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{\delta}_{i''} - \theta_1 \nu_1 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{y}_{i''} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}}{g} \bar{\delta}_{i'} = 0$$

$$-\theta_3 \mu \bar{\delta}_i - (\theta_3 \nu_1 + \theta_4) \bar{y}_i + \theta_4 \bar{y}_{i'}$$

$$-\theta_5 \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + \theta_3 \mu \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{\delta}_{i''} + \theta_3 \nu_1 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{y}_{i''} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}}{g} \bar{y}_i = 0$$

$$-\theta_4 \bar{y}_i + (\theta_6 D_i + 2\theta_4) \bar{y}_{i'} - \theta_4 \bar{y}_{i''} - \theta_7 \sin \frac{i\pi}{n} \bar{u}_i + \theta_7 \sin \frac{i\pi}{n} \bar{u}_{i'} + \omega^2 \frac{\mathfrak{M}'}{g} \bar{y}_{i'} = 0$$

$$-\theta_3 \mu \bar{\delta}_{i'} - \theta_4 \bar{y}_{i'} + (\theta_3 \nu_1 + \theta_4) \bar{y}_{i''}$$

$$-\theta_5 \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + \theta_3 \mu \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{\delta}_{i''} - \theta_3 \nu_1 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{y}_{i''} + \omega^2 \frac{\mathfrak{M}}{g} \bar{y}_{i'} = 0$$

$$\theta_7 \sin \frac{i\pi}{n} \bar{y}_{i'} - (K_4 D_i + 4K_2 + \theta_8) \bar{u}_i$$

$$+ K_2 (-D_i + 4) \bar{u}_{i'} + \theta_8 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_{i''} + \theta_9 \mu \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{\delta}_{i''} + \theta_9 \nu_1 \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{y}_{i''} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &K_2(-D_i+4)\bar{u}_i - (K_3 \cdot D_i + 8K_2)\bar{u}_i + K_2(-D_i+4)\bar{u}_i = 0 \\
 &-\theta_7 \sin \frac{i\pi}{n} \bar{y}_i + K_2(-D_i+4)\bar{u}_i \\
 &\quad - (K_4 D_i + 4K_2 + \theta_8)\bar{u}_i + \theta_8 \cos \frac{i\pi}{2n} \bar{u}_i + \theta_9 \mu \sin \frac{i\pi}{2n} \delta_i - \theta_9 \nu_1 \sin \frac{i\pi}{2n} \bar{y}_i = 0 \\
 &-\theta_9 \mu \sin \frac{i\pi}{2n} (\delta_i + \delta_{i'}) - \theta_9 \nu_1 \sin \frac{i\pi}{2n} (\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}) + \theta_8 \cos \frac{i\pi}{2n} (\bar{u}_i + \bar{u}_{i'}) - (\theta_{10} \cdot D_i + 2\theta_8)\bar{u}_{i'} = 0 \\
 &-\theta_1 \mu \cos \frac{i\pi}{2n} (\delta_i + \delta_{i'}) - \theta_1 \nu_1 \cos \frac{i\pi}{2n} (\bar{y}_i - \bar{y}_{i'}) \\
 &\quad - \theta_2 \sin \frac{i\pi}{2n} (\bar{u}_i + \bar{u}_{i'}) + 2\theta_1 \mu \delta_{i'} + \omega^2 \frac{\mathfrak{M}''}{g} \delta_{i'} = 0 \\
 &\theta_3 \mu \cos \frac{i\pi}{2n} (\delta_i - \delta_{i'}) + \theta_3 \nu_1 \cos \frac{i\pi}{2n} (\bar{y}_i + \bar{y}_{i'}) \\
 &\quad + \theta_5 \sin \frac{i\pi}{2n} (\bar{u}_i - \bar{u}_{i'}) - 2\theta_3 \nu_1 \bar{y}_{i'} - \omega^2 \frac{\mathfrak{M}''}{g} \bar{y}_{i'} = 0
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \frac{2E \cdot A}{\lambda} \sin^2 \alpha \sin \gamma, & \theta_2 &= \frac{2EA}{\lambda} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma, & \theta_3 &= \frac{2 \cdot E \cdot A}{\lambda} \sin^2 \alpha \cdot \cos \gamma, \\
 \theta_4 &= \frac{2E \cdot A_v}{h}, & \theta_5 &= \frac{2EA}{\lambda} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma, & \theta_6 &= 2 \cdot K_2 \tan^2 \beta, & \theta_7 &= 2K_2 \tan \beta, \\
 \theta_8 &= \frac{2EA}{\lambda} \cos^2 \alpha, & \theta_9 &= \frac{2EA}{\lambda} \sin \alpha \cos \alpha, & \theta_{10} &= \frac{EA_0}{\lambda'}, & \mu &= \sin \gamma, & \nu_1 &= \cos \gamma
 \end{aligned}$$

と表わせる。

**b) 計 算**

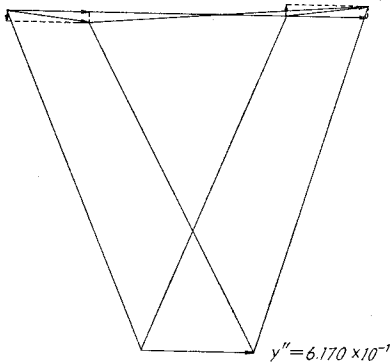
図-19~25 は、質量として自重のみを考え  $\mathfrak{M} = 6.415 \text{ t}$ ,  $\mathfrak{M}^0 = 3.018 \text{ t}$ ,  $\mathfrak{M}'' = 7.436 \text{ t}$  とし、

$$\begin{aligned}
 y &= 4.524 \times 10^{-1} \\
 z &= 6.160 \times 10^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= 4.524 \times 10^{-1} \\
 z' &= -6.160 \times 10^{-2}
 \end{aligned}$$

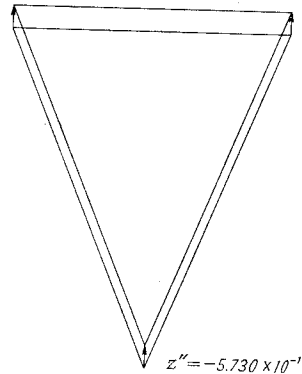
$$\begin{aligned}
 y &= 2.955 \times 10^{-3} \\
 z &= -5.795 \times 10^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= -2.955 \times 10^{-3} \\
 z' &= -5.795 \times 10^{-1}
 \end{aligned}$$



$$T_1 = 0.34 \text{ sec}$$

図-19



$$T_2 = 0.23 \text{ sec}$$

図-20

$$y = 3.837 \times 10^{-1}$$

$$z = 3.757 \times 10^{-1}$$

$$y' = -3.837 \times 10^{-1}$$

$$z' = -3.757 \times 10^{-1}$$

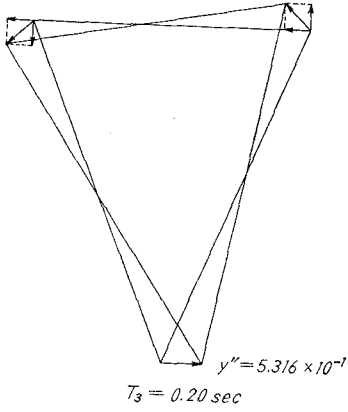


図-21

$$y = 6.714 \times 10^{-1}$$

$$z = -1.376 \times 10^{-1}$$

$$y' = -6.714 \times 10^{-1}$$

$$z' = -1.376 \times 10^{-1}$$

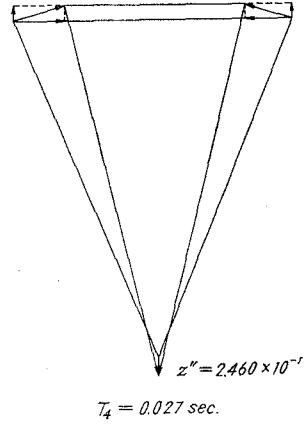


図-22

$$y = 1.778 \times 10^{-1}$$

$$z = 5.856 \times 10^{-1}$$

$$y' = 1.778 \times 10^{-1}$$

$$z' = -5.856 \times 10^{-1}$$

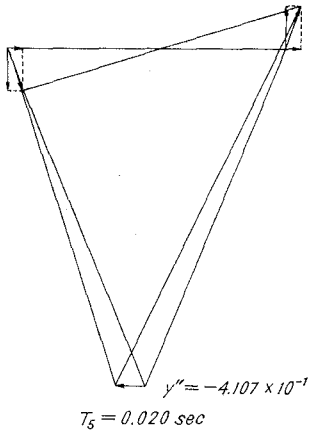


図-23

$$y = -2.409 \times 10^{-1}$$

$$z = -4.193 \times 10^{-1}$$

$$y' = 2.409 \times 10^{-1}$$

$$z' = -4.193 \times 10^{-1}$$

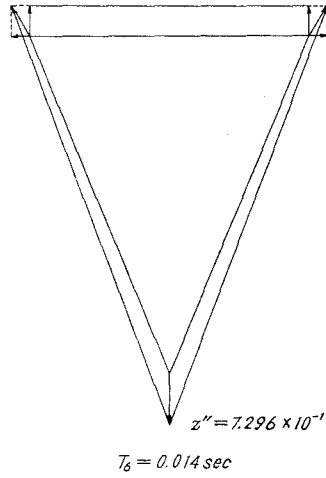


図-24

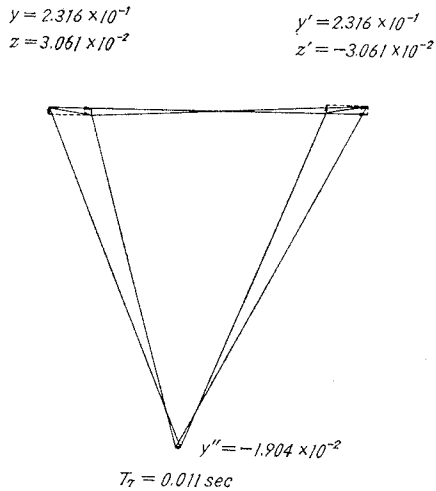


図-25

振動周期  $T$  と変形の状態を示したものである。

質量として全死荷重を考へ  $W = 62.835 \text{ t}$  とし、床板の合成効果を見放した時の最大周期(曲げ振動)  $T = 0.81 \text{ sec}$ , 考へた場合  $T = 0.56 \text{ sec}$  (曲げ振動) であった。

## 6. む す び

計算結果によれば、三角形断面トラスは外力のトルク荷重に対して、大きな抵抗力を持つと同時に、弦材の外力の曲げに対する特性も満足すべきものと考えられる。

また、二つのトラスを横構で補剛した形は、断面として不安定形であり、同一水平荷重に対して

変形しやすく、その剛度を与えるために余分の材料を用いなければならない。

(昭和44年4月30日受理)

## 文 献

- 1) 能町純雄：“差分方程式で表わされる不静定構造物の和分変換による解法例”. 土木学会北海道支部, 技術資料23号, 2/1967, pp. 173-177.
- 2) S. G. Nomachi: “On Finite Fourier Sine Series with Respect to Finite Difference”. *Memoris of Muroran Ins. Tech.*, Vol. 5, No. 1, pp. 187-202, July, 1965.
- 3) 能町純雄・小針憲司：“トラスを壁要素とする三角形断面部材の曲げについて”. 土木学会北海道支部, 研究発表論文集25号, 2/1969, pp. 37-42.