



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



静止流体中における等温回転円板上の層流境界層の研究：積分法による速度,温度分布の一計算

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-07-16 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 岸浪, 紘機, 斎藤, 囃, 戸倉, 郁夫 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/3565

静止流体中における等温回転円板上の 層流境界層の研究

— 積分法による速度，温度分布の一計算 —

岸浪 紘機・斎藤 暁・戸倉 郁夫

Studies on Laminar Flow due to a Isothermal Rotating Disk in Still Fluid

— A Calculation of the Thermal and Velocity Boundary
Layers by the Integral Method —

Kōki Kishinami, Hakaru Saitō
and Ikuo Tokura

Abstract

The analysis of the thermal and velocity boundary layers on the isothermal disk rotating in still fluid is important for its practical use.

As to the velocity boundary layer, an approximate solution was presented by von Kármán¹⁾ in the first, then the numerically calculated exact solution by Cochran²⁾ was followed.

On the other hand, for the thermal boundary layer and the heat transfer from an isothermal rotating disk to ambient fluid, an approximate solution after the Kármán's velocity profile was reported by Wagner³⁾ and the exact solution after Cochran's by Millsaps and Pohlhausen⁴⁾ and by Sparrow and Gregg⁵⁾.

This paper proposes a new method^{6),7)} of approach to the problem, by improving these approximate analysis. Furthermore, the results obtained are discussed critically, comparing with the results of the authors above mentioned.

1. 緒 言

静止した粘性流体中で回転する円板の熱伝達は，たとえば，タービンなどの回転機器の伝熱現象と関連し，工学的に重要な問題である。この種の問題は，Navier-Stokes 運動量方程式，およびエネルギー方程式を境界層内に適用し，さらにそれらを円筒座標に変換することにより解かれる。最初，Kármán¹⁾ は 1921 年，等角速度の軸回転対称流として円板の端部の影響を無視した回転円板上の速度境界層に関し，積分法による近似解を提案した。ここでは，速度場を円周方向および半径方向に関する 2 つの運動量方程式で記述し，速度境界層厚さと壁面における速度勾配とを未知数として含む円周方向，および半径方向速度プロファイルより近似解を誘導している。この結果，層流状態においての速度境界層厚さは回転円板上において一定値を有す

ることを明らかにした。Cochran²⁾は1934年、上記のKármán¹⁾方式を発展改良した後、全く別の手法で数値的に2つの運動量方程式を解いて厳密解を算出した。

一方、同一状態の等温壁回転円板上の熱伝達問題に関してWagner³⁾は1948年、Kármán¹⁾の速度分布を用いてエネルギー方程式から温度分布を算出するプロファイル解を提案し、空気($P_r=0.74$)に対する熱伝達率を数値積分で決定した。Millsaps および Pohlhause⁴⁾は1952年、ほぼ同様の方法でCochran²⁾の速度分布の厳密解を適用して、 P_r 数0.5~10の流体に対する熱伝達率を求めた。Sparrow および Gregg⁵⁾は1959年、電子計算機によりさらに広範囲の P_r 数に対する熱伝達率を求め厳密解を得た。以降、様々な条件下における多くの解が発表されている。しかし、これらの多くは、その解法が極めて複雑であることは否めない。

そこで、本報では温度プロファイルを仮定して、既知の速度プロファイルと組み合わせ積分法を用いることにより、この問題の解法の簡易化を試みた。すなわち、Kármán¹⁾の方法において欠けていた境界条件を1個追加することにより速度プロファイルの近似精度を高め⁶⁾、温度境界層厚さを未知数とする温度プロファイルを仮定し、その速度、温度プロファイルをエネルギー積分形釣合式に代入することにより温度境界層厚さと P_r 数の関係式を求め、種々の P_r 数に対する熱伝達率⁷⁾を計算した。

そして、その計算結果を従来諸解と比較検討することにより、この解法はほぼ十分な精度の近似解を与えるものであることを示した。

2. 理論的考察

使用記号の説明

r : 半径方向距離	m	k : 温度伝導率 ($k=\lambda/C_p \cdot \rho$)	m ² /h
z : 軸方向距離	m	C_p : 定圧比熱	kcal/kg·°C
θ : 円周方向		μ : 粘性係数	kg·s/m ²
U_r : 半径方向速度	m/s	ξ_0 : 無次元速度境界層厚さ	
U_z : 軸方向速度	m/s	ξ_{0r} : 無次元温度境界層厚さ	
U_θ : 円周方向速度	m/s		
T : 流体温度	°C		
λ : 熱伝導率	kcal/m·h·°C		
h_r : 局所熱伝達率	kcal/m ² ·h·°C		
ρ : 流体密度	kg·s ² /m ⁴		
P : 流体圧力	kg/m ²		
ν : 動粘性係数	m ² /s		
ω : 円板角速度	1/s		

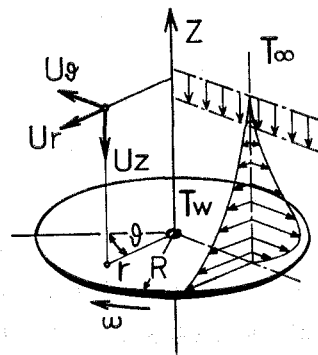


図1 座標および記号

- ξ : 無次元独立変数 ($\xi = z/\sqrt{\nu/\omega}$) G : 無次元円周方向速度 ($G(\xi) = U_\theta/r \cdot \omega$)
 H : 無次元軸方向速度 ($H(\xi) = U_z/r \cdot \omega$) Θ : 無次元温度 ($\Theta(\xi) = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$)
 F : 無次元半径方向速度 ($F(\xi) = U_r/r \cdot \omega$) P : 無次元圧力 ($P(\xi) = P(z)/(\rho \cdot \nu \cdot \omega)$)

suffix w, ∞ は、壁面および境界層外縁を意味する。

$$N_{ur} = h_r \cdot (\nu/\omega)^{1/2} / \lambda: \text{回転円板上局所ヌッセルト数}$$

$$R_{er} = r^2 \cdot \omega / \nu: \text{回転レイノルズ数} \quad P_r = C_p \cdot \mu / \lambda: \text{プラントル数}$$

2.1 基礎微分方程式および境界条件

円筒座標に対する r, θ および z 軸方向の運動量方程式は各々つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned}
 U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \cdot \frac{\partial U_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial r} \\
 + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{r^2 \cdot \partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_r \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r \cdot U_\theta}{r} + U_z \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{r \cdot \partial \theta} \\
 + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{r^2 \cdot \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_r \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \\
 + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{r^2 \cdot \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) \quad (3)
 \end{aligned}$$

連続の方程式はつぎのように表わされる。

$$\partial U_r / \partial r + U_r / r + \partial U_\theta / r \cdot \partial \theta + \partial U_z / \partial z = 0. \quad (4)$$

エネルギー式は散逸項を無視することにより、つぎのように表わされる。

$$U_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + U_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \cdot \partial r} + \frac{\partial^2 T}{r^2 \cdot \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

速度場に対する境界条件:

$$\left. \begin{aligned}
 z = 0; \quad U_r = 0, \quad U_\theta = r \cdot \omega, \quad U_z = 0 \\
 z = \infty; \quad U_r = 0, \quad U_\theta = 0, \quad \partial U_r / \partial z = 0, \quad \partial U_\theta / \partial z = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

温度場に対する境界条件:

$$z = 0; \quad T = T_w; \quad z = \infty; \quad T = T_\infty, \quad \partial T / \partial z = 0. \quad (7)$$

ここで、回転円板端部の影響を無視し等角速度の軸回転対称流とすれば、式(1), (2), (3), (4) および(5)中の θ に関する微分項は消える。また Kármán の境界層理論を適用し、速度境界層厚さ ξ_0 は r, θ 方向の order に比し極く薄いと考えれば、 r, U_r, U_θ, T および ρ の order は 1 と、 z の order は $\xi_0 (1 \gg \xi_0)$ と考えられる。そこで連続式(4)にこれらの order を適用すれば、

釣合上両辺の各項は1のorderでなければならぬ故、 U_z のorderは ξ_0 と定まる。同様に、圧力項はBernoulli式を適用し、運動量式にこれらのorderを適用すれば、 r, θ および z 方向運動量式(1),(2)および(3)の両辺の各項はおのおの1, 1, ξ_0 のorderでなければならぬ故、 ν は $\frac{\xi_0^2}{\rho}$ のorderと定まる。またエネルギー式については、温度境界層厚さ ξ_{0t} が速度境界層厚さ ξ_0 とほとんど等しい($\xi_{0t} \approx \xi_0$)と考えれば、釣合上両辺の各項は1のorderとなり、 k は $\frac{\xi_0^2}{\rho}$ のorderと定まる。以上の考察によって各方程式はつぎのように簡単化される。

$$r \text{ 方向運動量式: } U_r \cdot \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \cdot \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{U_\theta^2}{r} = \nu \cdot \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \quad (8)$$

$$\theta \text{ 方向運動量式: } U_r \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + U_z \cdot \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_\theta \cdot U_r}{r} = \nu \cdot \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \quad (9)$$

$$z \text{ 方向運動量式: } U_r \cdot \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \cdot \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \cdot \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \quad (10)$$

$$\text{連 続 式: } \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$\text{エネルギー式: } U_r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + U_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = k \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (12)$$

2.2 基礎微分方程式の無次元化と積分形釣合式の誘導

方程式を簡単化するために、Kármán¹⁾の変数変換を行ない無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= z \cdot \sqrt{\omega/\nu} \text{ (独立変数)}, & U_r &= r \cdot \omega \cdot F(\xi), & U_\theta &= r \cdot \omega \cdot G(\xi) \\ U_z &= r \cdot \omega \cdot H(\xi), & P(z) &= \rho \cdot \nu \cdot \omega \cdot \mathbf{P}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 $F(\xi), G(\xi)$ および $H(\xi)$ は r, θ および z 方向無次元速度を意味する。式(8), (9), (10)および(11)は上の無次元変換により、おのおのつぎの常微分方程式となる。

$$r \text{ 方向無次元運動量式: } F^2(\xi) + F'(\xi) \cdot H(\xi) - G^2(\xi) - F''(\xi) = 0 \quad (14)$$

$$\theta \text{ 方向無次元運動量式: } 2 \cdot F(\xi) \cdot G(\xi) + H(\xi) \cdot G'(\xi) - G''(\xi) = 0 \quad (15)$$

$$z \text{ 方向無次元運動量式: } \mathbf{P}'(\xi) + H(\xi) \cdot H'(\xi) - H''(\xi) = 0 \quad (16)$$

$$\text{連 続 式: } 2 \cdot F(\xi) + H'(\xi) = 0 \quad (17)$$

ここで、円板上全面を等温と考えているので、無次元温度 $\theta(\xi)$ (温度関数)は独立変数 ξ のみの関数となり、つぎのよう表わすことができる。

$$\theta(\xi) = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty) \quad (18)$$

エネルギー式(12)は式(13), (18)の変数変換により、つぎの常微分方程式となる。

$$\theta''(\xi) - P_r \cdot H(\xi) \cdot \theta'(\xi) = 0 \quad (19)$$

速度場に関する境界条件の無次元化:

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0; & F(0) = 0, \quad G(0) = 1, \quad H(0) = 0 \\ \xi = \infty; & F(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 0, \quad F'(\infty) = 0, \quad G'(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

温度場に関する境界条件の無次元化：

$$\xi = 0; \theta(0) = 1; \xi = \infty; \theta(\infty) = 0, \theta'(\infty) = 0 \quad (21)$$

運動量方程式の積分形化

r, θ 方向運動量方程式 (14), (15) を ξ に関して 0 より速度境界層厚さ ξ_0 まで積分し、連続式 (17) および境界条件 (20) を適用すれば、つぎの運動量積分形釣合式が得られる。

$$r \text{ 方向運動量積分釣合式: } 3 \cdot \int_0^{\xi_0} F^2(\xi) \cdot d\xi - \int_0^{\xi_0} G^2(\xi) \cdot d\xi = - \left(\frac{dF}{d\xi} \right)_{\xi=0} \quad (22)$$

$$\theta \text{ 方向運動量積分釣合式: } 4 \cdot \int_0^{\xi_0} F(\xi) \cdot G(\xi) \cdot d\xi = - \left(\frac{dG}{d\xi} \right)_{\xi=0} \quad (23)$$

エネルギー方程式の積分形化

エネルギー式は、温度場と速度場のあるところで適用されるのであるから、温度境界層厚さを ξ_{0t} としてつぎの二つの場合に分けて考える必要がある。

I) $\xi_0 > \xi_{0t}$ の場合

エネルギー方程式 (19) を ξ に関して 0 より ξ_{0t} まで積分すれば、つぎのようになる。

$$\int_0^{\xi_{0t}} \frac{d^2 \theta(\xi)}{d\xi^2} \cdot d\xi - P_r \cdot \int_0^{\xi_{0t}} H(\xi) \cdot \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \cdot d\xi = 0 \quad (24-1)$$

$$\text{エネルギー積分釣合式: } 2 \cdot P_r \cdot \int_0^{\xi_{0t}} F(\xi) \cdot \theta(\xi) \cdot d\xi = - \left| \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \quad (24)$$

$(\xi_0 > \xi_{0t})$

II) $\xi_0 < \xi_{0t}$ の場合

この場合の積分は、積分第 2 項中の $H(\xi)$ が $\xi > \xi_{0t}$ で $H(\xi) = H(\xi_0) = \text{一定}$ となるので 0 から ξ_0 までと、 ξ_0 から ξ_{0t} までの二つの積分にわけて計算する必要がある。

$$\int_0^{\xi_{0t}} \frac{d^2 \theta(\xi)}{d\xi^2} \cdot d\xi - P_r \cdot \left[\int_0^{\xi_0} H(\xi) \cdot \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \cdot d\xi + H(\xi_0) \cdot \int_{\xi_0}^{\xi_{0t}} \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \cdot d\xi \right] = 0 \quad (25-1)$$

$$\left| \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right|_0^{\xi_{0t}} - P_r \cdot \left[H(\xi_0) \cdot \theta(\xi_0) - \int_0^{\xi_0} \frac{dH(\xi)}{d\xi} \cdot \theta(\xi) \cdot d\xi + H(\xi_0) \cdot \left| \theta(\xi) \right|_{\xi_0}^{\xi_{0t}} \right] = 0 \quad (25-2)$$

$$\left| \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi_{0t}} - \left| \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right|_0 - P_r \cdot \left[H(\xi_0) \cdot \theta(\xi_0) - H(0) \cdot \theta(0) - \int_0^{\xi_0} \frac{dH(\xi)}{d\xi} \cdot \theta(\xi) \cdot d\xi + H(\xi_0) \cdot \theta(\xi_{0t}) - H(\xi_0) \cdot \theta(\xi_0) \right] = 0 \quad (25-3)$$

ここで、連続式 (17) および境界条件 (20), (21) を適用すれば、つぎのようになる。

$$\text{エネルギー積分釣合式: } 2 \cdot P_r \cdot \int_0^{\xi_0} F(\xi) \cdot \theta(\xi) \cdot d\xi = - \left| \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \quad (25)$$

$(\xi_0 < \xi_{0t})$

円板表面上の局所熱伝達率 h_r は定義より、つぎのようにあらわされる。

$$h_r = - \lambda \cdot (\partial T / \partial z)_{z=0} / (T_w - T_\infty) \quad (26)$$

上式を変数変換式(13)および(18)により変換すれば、ヌッセルト数はつぎのようになる。

$$N_{ur} = h_r \cdot (\nu/\omega)^{1/2} / \lambda = -(d\theta(\xi)/d\xi)_{\xi=0} \quad (\text{局所ヌッセルト数}) \quad (27)$$

2.3 速度プロファイルの仮定と運動量積分形釣合式への導入

ここでは、浮力の効果を見捨てることにすると運動量式だけから速度場が定まり、その速度場とエネルギー式から温度場が定まる。そこで、速度に関する境界条件式(20)を運動量式(14)、(15)に代入すれば、 r および θ 方向無次元速度 F および G の二階微分に関してつぎの境界条件が定まる。

$$\xi = 0; \quad F''(0) = -1, \quad G''(0) = 0; \quad \xi = \infty; \quad F''(\infty) = 0, \quad G''(\infty) = 0 \quad (28), (29)$$

極限值 ∞ を速度境界層厚さ ξ_0 に置き換え、さらに壁面における r 方向無次元速度 $F(\xi)$ の未知の速度勾配を条件化し、つぎのようにおく。

$$\xi = 0; \quad F'(0) = |\partial F(\xi)/\partial \xi|_{\xi=0} = A \quad (30)$$

ここで、 $F(\xi)$ および $G(\xi)$ の速度関数は式(20)、(28)、(29)および(30)のそれぞれ6個および5個の境界条件を満足させるように、それらを ξ の5次式および4次式で近似して表わす。

$$F(\xi) = a + b \cdot \xi + c \cdot \xi^2 + d \cdot \xi^3 + e \cdot \xi^4 + f \cdot \xi^5 \quad (31)$$

$$G(\xi) = a' + b' \cdot \xi + c' \cdot \xi^2 + d' \cdot \xi^3 + e' \cdot \xi^4 \quad (32)$$

未知定数 a, b, c, d, e, f および a', b', c', d', e' は、 $F(\xi)$ および $G(\xi)$ の境界条件(20)、(28)、(29)および(30)から定めれば、つぎのような速度プロファイルが得られる。

$$\text{半径方向速度プロファイル: } F(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^3 \cdot \left(A \cdot \xi + \left(\frac{3 \cdot A}{\xi_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot \xi^2\right) \quad (33)$$

$$\text{円周方向速度プロファイル: } G(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\xi_0}\right) \quad (34)$$

速度プロファイル(33)、(34)を運動量積分形釣合式(22)、(23)に代入すればつぎの結果を得る。

$$\frac{47}{315} \cdot A \cdot \xi_0^2 - \frac{13}{1260} \cdot \xi_0^3 = \frac{2}{\xi_0} \quad (35)$$

$$\frac{52}{1155} \cdot A^2 \cdot \xi_0^3 - \frac{23}{3080} \cdot A \cdot \xi_0^4 + \frac{1}{3080} \cdot \xi_0^5 - \frac{23}{126} \cdot \xi_0 = -A \quad (36)$$

これらの2式より A を消去すれば、つぎの ξ_0^3 に関する二次式を得る。

$$2.3578 \times 10^{-5} \times \xi_0^3 - 1.3003 \times 10^{-1} \times \xi_0^4 + 21.493 = 0 \quad (37)$$

この根は、 $\xi_0 = \pm 3.614$ および ± 5.339 となる。 $\xi_0 = 3.614$ を解とすれば、境界値 $F'(0) = A$ および $G'(0)$ は式(35)および(34)より定まり、これらの速度プロファイルが定まる。

$$\xi_0 = 3.614; \quad F'(0) = A = 0.533, \quad G'(0) = -0.554 \quad (38)$$

なお、垂直方向無次元速度 $H(\xi)$ は、連続式(17)の積分として与えられ ($F(\xi)$ の積分)、速度プロファイル式(33)を用いれば、つぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 H(\xi) &= -2 \cdot \int_0^\xi F(\xi) \cdot d\xi \\
 &= -A \cdot \xi^2 + \xi^3/3 - (3/(2 \cdot \xi_0) - 6 \cdot A/\xi_0^2) \cdot \xi^4/2 \\
 &\quad - (8 \cdot A/\xi_0^3 - 3/(2 \cdot \xi_0^2)) \cdot 2 \cdot \xi_0^5/5 - (1/(2 \cdot \xi_0^3) - 3 \cdot A/\xi_0^4) \cdot \xi_0^6/6
 \end{aligned} \tag{39}$$

ξ 方向無次元圧力 $P(\xi)$ は, z 方向運動量式(16)を積分して, つぎのようになる。

$$P(\xi) - P_0 = H^2(\xi)/2 + 2 \cdot F(\xi) \tag{40}$$

なお Kármán¹⁾ の速度プロファイルは, $\xi = \infty$ における二階微分の境界条件 ($F''(\infty) = 0, G''(\infty) = 0$) 式(29)を考慮してないために, $F(\xi)$ および $G(\xi)$ は ξ の 4 次式および 3 次式で近似してあらわされ, つぎのようになる。

$$\text{半径方向速度プロファイル: } F(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 \cdot \left(A \cdot \xi + \left(\frac{2 \cdot A}{\xi_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot \xi^2\right) \tag{41}$$

$$\text{円周方向速度プロファイル: } G(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\xi}{2 \cdot \xi_0}\right) \tag{42}$$

速度プロファイル式(41), (42)を積分形釣合式(22), (23)に代入することにより, つぎのような解が与えられ, この場合の速度プロファイルが求められたことになる。

$$\xi_0 = 2.78; \quad F'(0) = A = 0.54, \quad G'(0) = -0.54 \tag{43}$$

$H(\xi)$ および $P(\xi)$ については前述と同様にして得ることができる。

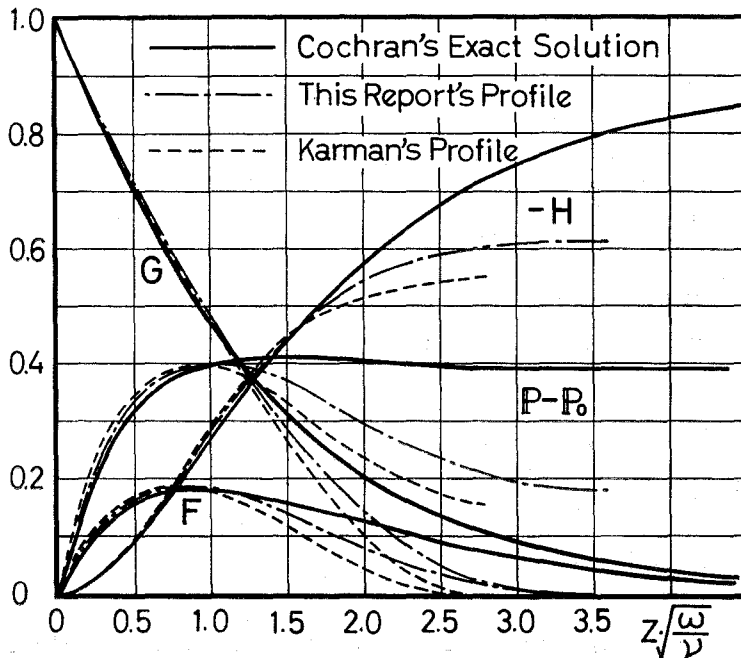


図2 速度境界層

図2には r, θ, z 方向無次元速度 $F(\xi), G(\xi), H(\xi)$ および無次元圧力 $P(\xi)$ に対する Cochran²⁾ の厳密解を実線で、Kármán¹⁾ のプロフィールを点線で、本報のプロフィール⁶⁾ を一点鎖線で比較して図示した。

2.4 温度プロフィールの仮定とエネルギー積分形釣合式への導入

極限值 ∞ を温度境界層厚さ ξ_{0t} におき換え、温度場に関する境界条件(21)をエネルギー式(19)に代入すれば、無次元温度 $\theta(\xi)$ の二階微分に関するつぎの境界条件が得られる。

$$\xi = 0; \theta''(0) = 0; \xi = \xi_{0t}; \theta''(\xi_{0t}) = 0 \quad (44), (45)$$

無次元温度 $\theta(\xi)$ は、式(21), (44) および(45) に示した5個の境界条件を満足せねばならないので、それを ξ の4次式で近似して表わす。

$$\theta(\xi) = a'' + b'' \cdot \xi + c'' \cdot \xi^2 + d'' \cdot \xi^3 + e'' \cdot \xi^4 \quad (46)$$

境界条件(21), (44) および(45) より未知定数 a'', b'', c'', d'', e'' を決定すれば、温度プロフィールはつぎのようになる。

$$\theta(\xi) = 1 - 2 \cdot (\xi/\xi_{0t}) + 2 \cdot (\xi/\xi_{0t})^3 - (\xi/\xi_{0t})^4 \quad (47)$$

温度プロフィール式(47) および速度プロフィール式(33) をエネルギー積分形釣合式(24) および(25) に代入すれば、それぞれつぎの関係式が得られる。

I) $\xi_0 > \xi_{0t}$ の場合

$$2 \cdot P_r \cdot \int_0^{\xi_0} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^3 \cdot \left\{ A \cdot \xi + \left(\frac{3 \cdot A}{\xi_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot \xi^2 \right\} \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right)^4 \right\} d\xi = \frac{2}{\xi_{0t}} \quad (24)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2 \cdot \xi_0^3} - \frac{3 \cdot A}{\xi_0^4}\right) \cdot \frac{\xi_{0t}^7}{315} + \left(\frac{8 \cdot A}{\xi_0^3} - \frac{3}{2 \cdot \xi_0^2}\right) \cdot \frac{\xi_{0t}^6}{180} + \left(\frac{3}{2 \cdot \xi_0} - \frac{6 \cdot A}{\xi_0^2}\right) \cdot \frac{3}{280} \cdot \xi_{0t}^5 - \frac{1}{84} \cdot \xi_{0t}^4 + \frac{A}{15} \cdot \xi_{0t}^3 - \frac{1}{P_r} = 0 \quad (48)$$

II) $\xi_0 < \xi_{0t}$ の場合

$$2 \cdot P_r \cdot \int_0^{\xi_0} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^3 \cdot \left\{ A \cdot \xi + \left(\frac{3 \cdot A}{\xi_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot \xi^2 \right\} \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right) + 2 \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right)^4 \right\} \cdot d\xi = \frac{2}{\xi_{0t}} \quad (25)$$

$$\therefore \left(\frac{A}{10} \cdot \xi_0^2 - \frac{\xi_0^3}{120}\right) \cdot \xi_{0t}^4 + \left(\frac{\xi_0^4}{140} - \frac{8}{105} \cdot A \cdot \xi_0^3\right) \cdot \xi_{0t}^3 - \frac{1}{P_r} \cdot \xi_{0t}^2 + \left(\frac{2}{105} \cdot A \cdot \xi_0^5 - \frac{1}{504} \cdot \xi_0^6\right) \cdot \xi_{0t} - \frac{A}{180} \cdot \xi_0^6 + \frac{1}{1680} \cdot \xi_0^7 = 0 \quad (49)$$

この場合、 A および ξ_0 は既知であるから、式(48) および(49) は ξ_{0t} に関する代数方程式である。したがって、式(48) および(49) は適当な数値解法を用いることにより種々の P_r 数に対

する ξ_{0z} について解くことが可能である。温度プロファイルは ξ_{0z} を式(47)に代入することにより得ることができる。これらの結果を用いれば、局所ヌッセルト数 N_{ur} は式(27)によりつぎのようにして算出できる。

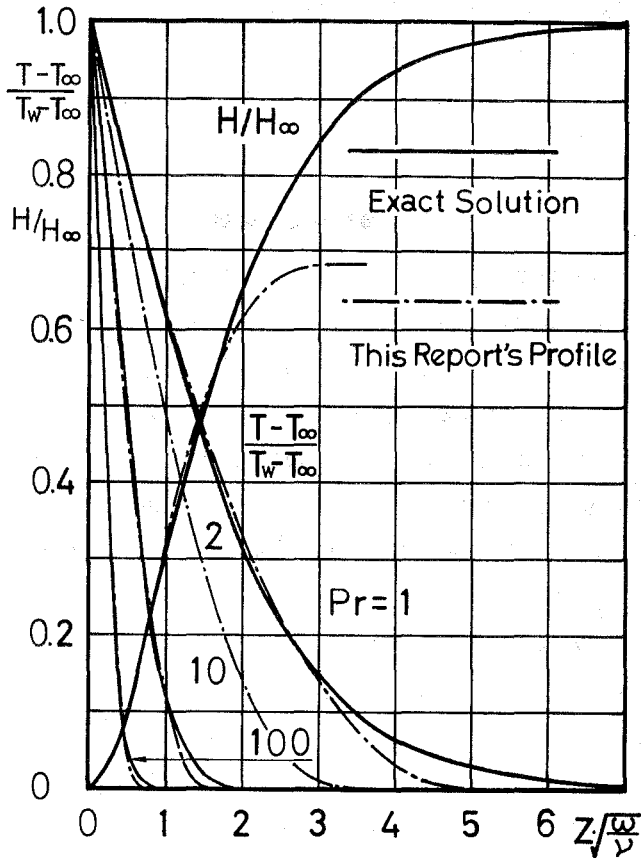


図3 温度境界層

表1 本報の結果と厳密解によるヌッセルト数

Pr 数	厳密解 Nur	本 解 (I)			本 解 (II)		
		Nur	ξ_{0t}	誤差	Nur	ξ_{0t}	誤差
0.01	0.0087	0.1136	17.59		0.0060	331.3	-30.4
0.1	0.0765	0.1335	14.98	%	0.0568	35.20	-26.4
1	0.3963	0.3682	5.431	-7.07	0.3684	5.429	-7.05
2	0.538*	0.5534	3.614	2.86	0.5534	3.614	2.86
10	1.1341	1.1675	1.713	2.94			%
100	2.6871	2.8195	0.709	4.92			
1000	6.2048	6.3509	0.315	2.41			

$$N_{ur} = h_r \cdot (\nu/\omega)^{1/2} / \lambda = -(\partial\theta(\xi)/\partial\xi)_{\xi=0} = 2/\xi_{0t} \quad (50)$$

図3は、このようにして求めた各 P_r 数に対する温度プロフィール(一点鎖線)を示したものである。なお本報で、式(48)および(49)は Newton-Rapson 法によって各 P_r 数に対する ξ_{0t} の値を解いた。比較のため、sparrow および Gregg⁵⁾ の厳密解(実線)もあわせて記入してある。表1には、本報の局所ヌッセルト数 N_{ur} と上記 sparrow らの厳密解⁵⁾ によるものとを種々の P_r 数に対し、比較して示したものである。なお、局所熱伝達率 h_r は式(50)より、位置 r に無関係に一定なることがわかる。

3. 検討および考察

図2は、本報の計算結果による r, θ, z 方向無次元速度 $F(\xi), G(\xi), H(\xi)$ および無次元圧力 $P(\xi)$ を、Cochran²⁾ の厳密解、Kármán¹⁾ のプロフィール解に対比させて図示したものである。この図によれば、本報のプロフィール解⁶⁾ は Kármán¹⁾ のプロフィール解に比し速度境界層が大きくなり、速度および圧力分布は厳密解²⁾ に近いものとなる。円板表面上の速度勾配 $G'(0)$ および $F'(0)$ は3% および1.4%の精度向上を、境界層外縁における速度 $H(\infty)$ および圧力 $P(\infty)$ はそれぞれ10%程度の精度向上を示す。しかしなお Cochran²⁾ の厳密解によれば境界値 $G'(0)$ および $F'(0)$ 値は -0.61 および 0.51 であるので、本報の積分法による境界値 $G'(0)$ および $F'(0)$ の誤差は -9.2% および $+4.3\%$ にもなる。

なお、この回転円板一面側に作用する回転モーメント $M(\text{kg}\cdot\text{m})$ および吸い込まれる流体量 $Q(\text{m}^3/\text{s})$ は、本報の積分法によればつぎのようになる。

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot r \cdot r \cdot \mu \cdot (\partial U_\theta / \partial z)_{z=0} \cdot dr \\ &= -1/2 \cdot \pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot (\nu \cdot \omega^3)^{1/2} \cdot G'(0) \quad (\text{kg}\cdot\text{m}) \end{aligned} \quad (51)$$

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \int_0^{\xi_0 \cdot \nu^{1/2} / \omega} |U_r|_{r=R} \cdot dz = 0.62 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{\nu \cdot \omega} \quad (\text{m}^3/\text{s}) \quad (52)$$

ここで、 R は回転円板半径を意味し、厳密解²⁾ によれば Q は $0.886 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{\nu \cdot \omega}$ である。

表1は本報の局所ヌッセルト数 N_{ur} と Sparrow および Gregg による厳密解⁵⁾ を比較したものである。これによれば、プロフィール解(48)は P_r 数2以上に対し誤差4.9%の範囲内で厳密解と一致する。一方プロフィール解(49)は P_r 数0.1以下に対し誤差が大きく適用出来ないことがわかる。計算から両プロフィール解(48), (49)は P_r 数2において $\xi_{0t} = \xi_0 = 3.614$ となり、温度境界層と速度境界層の厚さは等しいこととなる。したがって $\xi_0 > \xi_{0t}$ の場合に対するプロフィール解(48)は P_r 数2以上に対して適用出来ることがわかる。しかし7%程度の誤差を許せば式(48)は P_r 数1以上に対して適用出来ることになる。他方 $\xi_0 < \xi_{0t}$ の場合に対するプロフィール解(49)は P_r 数2以下に対して適用出来るはずであるが、誤差7%を許しても P_r 数1~2程

度に適用が限定される。しかし、この式(49)は P_r 数 0.01 に対して、式(48)で解けば誤差 1300% にもなるのを、誤差 30% に抑えていることから原則的には誤りない解法と考えられ、その誤差の主なる要因は図 3 に示した本報の速度プロファイル $H(\xi_0)$ の境界層外縁における 30% 程度の誤差によるものである。また P_r 数 0.01 で温度境界層厚さ ξ_{0t} は 330 に達し、速度境界層厚さのおよそ 100 倍の厚さになるために境界層理論による仮定 “ $\xi_{0t} \approx \xi_0$ ” が成立せぬことになり、回転円板端部の影響を無視してエネルギー式(12)によって低 P_r 数域の熱伝達を論ずることには問題がある。これらの温度分布を図 3 に P_r 数 1, 2, 10, 100 の各場合に対して厳密解⁵⁾と比較して図示する。この図から本報の積分法⁷⁾による温度プロファイルは厳密解⁵⁾とかなり良く一致するがわかる。

つぎに、本報の速度プロファイル⁶⁾のかわりに Kármán¹⁾の速度プロファイルを使用して同様の手続きを行なった場合について考える。Kármán¹⁾の速度プロファイルは、境界条件 $\xi=0; G''(\infty)=0, F''(\infty)=0$ を考慮してないので、温度プロファイルもこれに対応して境界条件 $\xi=\infty; \theta''(\infty)=0$ を考慮しない。温度プロファイルが満足すべき境界条件は(21), (44)の4個だけになるから ξ の三次式で表わされることになる。したがって温度プロファイルはつぎのようになる。

$$\theta(\xi) = 1 - 3/2 \cdot (\xi/\xi_0)t + 1/2 \cdot (\xi/\xi_0)t^3 \tag{53}$$

温度プロファイル式(53)と Kármán¹⁾の速度プロファイル式(39)を組合わせエネルギー積分形釣合式(24)および(25)に代入すれば、それぞれつぎの関係式が得られる。

I) $\xi_0 > \xi_{0t}$ の場合

$$2 \cdot P_r \cdot \int_0^{\xi_{0t}} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 \cdot \left(A \cdot \xi + \left(\frac{2 \cdot A}{\xi_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot \xi^2\right) \cdot \left\{1 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right)^3\right\} \cdot d\xi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\xi_{0t}} \tag{24}'$$

$$\therefore \left(\frac{1}{40} \cdot \frac{A}{\xi_0^3} - \frac{1}{160} \cdot \frac{1}{\xi_0^2}\right) \cdot \xi_{0t}^6 + \left(\frac{3}{140} \cdot \frac{1}{\xi_0} - \frac{9 \cdot A}{140} \cdot \frac{1}{\xi_0^2}\right) \cdot \xi_{0t}^5 - \frac{1}{48} \cdot \xi_{0t}^4 + \frac{A}{10} \cdot \xi_{0t}^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{P_r} = 0 \tag{54}$$

II) $\xi_0 < \xi_{0t}$ の場合

$$2 \cdot P_r \cdot \int_0^{\xi_0} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 \cdot \left(A \cdot \xi + \left(\frac{2 \cdot A}{\xi_0} - \frac{1}{2}\right) \cdot \xi^2\right) \cdot \left\{1 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\xi}{\xi_{0t}}\right)^3\right\} \cdot d\xi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\xi_{0t}} \tag{25}'$$

$$\therefore \left(\frac{9 \cdot A}{20} \cdot \xi_0^2 - \frac{1}{20} \cdot \xi_0^3\right) \cdot \xi_{0t}^2 + \left(\frac{1}{40} \cdot \xi_0^4 - \frac{A}{5} \cdot \xi_0^3\right) \cdot \xi_{0t} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\xi_{0t}}{P_r} = 0 \tag{55}$$

式(54)および(55)において $A=0.54, \xi_0=2.78$ であるので、上式は P_r 数をパラメータとする ξ_{0t} のそれぞれ 6 次式および 2 次式である。ゆえにある P_r 数に対する ξ_{0t} は式(54), (55)を解くことにより求められる。ヌッセルト数は式(27)よりつぎのようになる。

$$Nu_r = h_r \cdot (\nu/\omega)^{1/2} / \lambda = -(\partial\theta(\xi)/\partial\xi)_{\xi=0} = 3/(2 \cdot \xi_{0t}) \tag{56}$$

表2 式(54)および(55)のヌッセルト数

Pr 数	本 解 (I)				本 解 (II) [*]		
	Nur	Nur	ξ_{0t}	誤差	Nur	ξ_{0t}	誤差
0.01	0.0087				0.0053	280.8	-38.6
0.1	0.0765			%	0.0509	29.47	-33.5
1	0.3963	0.351	4.265	-11.3	0.3502	4.283	-11.6
2	0.538 [*]	0.533	2.813	-0.88	0.5332	2.813	-0.89
10	1.1341	1.136	1.32	0.18			%
100	2.6871	2.66	0.565	-1.05			
1000	6.2048	6.00	0.250	-3.4			

表2は、式(54)および(55)から種々の P_r 数に対する ξ_{0t} を式(56)に代入して求めたヌッセルト数 N_{ur} を厳密解⁵⁾によるものと比較し、誤差率を添えて表示したものである。

Kármán¹⁾ の速度プロファイルと三次式温度プロファイルの組合わせで得られた式(54) ($\xi_{0t} < \xi_0$) は P_r 数2以上に対して誤差3.4%以下の解を与える。同様に式(55) ($\xi_{0t} > \xi_0$) は P_r 数1~2に対して誤差11%の範囲内で厳密解と一致する。この場合も、 P_r 数2において $\xi_{0t} = 2.813$, $\xi_0 = 2.78$ であるからおおよそ $\xi_{0t} \approx \xi_0$ と考えられる。したがって、前と同様に式(54)は P_r 数2以上、式(55)は P_r 数2以下に対して適用されるものであることが判明する。しかし、三次式温度プロファイル式(53)と Kármán¹⁾ の速度プロファイルを組合わせることは、本質的には本報の積分法と同じであるが、つぎのような欠点がある。それは、 P_r 数2以下に対する式(55)は解法が容易であるが本報の式(49)に比べ解の精度が劣ること、および P_r 数2以上に対する式(54)は、解の直前に変曲点を有するために Newton-Rapson 法などの数値解法によって種々の P_r 数に対する ξ_{0t} を決定することの難しいことの二点である。

つぎに Wagner³⁾ のプロファイル法の概要について述べ、本報のプロファイル法⁷⁾との違いを指摘する。エネルギー方程式(19)を ξ に関して二度積分し境界条件(21)を用いて解けば、無次元温度 $\theta(\xi)$ はつぎのようになる。

$$\theta(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{[P_r \cdot \int_0^{\xi} H(\xi) \cdot d\xi]} \cdot d\xi / \int_0^{\infty} e^{[P_r \cdot \int_0^{\xi} H(\xi) \cdot d\xi]} \cdot d\xi \quad (57)$$

従って、任意位置上における局所ヌッセルト数 N_{ur} はつぎのようになる。

$$N_{ur} = \frac{h_r \cdot (\nu/\alpha)^{1/2}}{\lambda} = 1 / \int_0^{\infty} e^{[P_r \cdot \int_0^{\xi} H(\xi) \cdot d\xi]} \cdot d\xi \quad (58)$$

ここで Wagner³⁾ は、 x 方向無次元速度 $H(\xi)$ は連続式の積分による $H(\xi) = -2 \cdot \int_0^{\xi} F(\xi) \cdot d\xi$ の関係を用いて、 r 方向無次元速度 $F(\xi)$ に Kármán⁴⁾ の速度プロファイルを用い数値積分を行って P_r 数0.74に対するヌッセルト数 N_{ur} を計算した。この解法に比べ、本報の解法は⁷⁾ エネルギー式(19)を一度積分し積分形釣合式として、温度プロファイルを仮定し速度プロファイルと組

合わせ、結果として $\xi_{0,t}$ と P_r 数の関係を $\xi_{0,t}$ の高次方程式として解くものであり、この過程は式(58)を数値積分することに比べるとかなり容易である。なおここで、 r 方向無次元速度 $F(\xi)$ にCochran²⁾等の厳密解を用いれば、式(58)はSparrow⁵⁾等の厳密解を与えることになる。

4. 結 言

本報は、静止流体中の等温回転円板上の層流速度境界層、温度境界層および熱伝達に関し、積分法を用いて理論的解析を行ない、その結果をKármán¹⁾、Cochran²⁾、Wagner³⁾、SparrowおよびGregg⁵⁾らの解析値と比較検討したもので、得られた結論は、およそつぎのように要約される。

(1) 本報の方法⁶⁾によれば、Kármán¹⁾の速度プロファイルに比し、厳密解²⁾により良く近似する速度プロファイルを得ることができる。

(2) 本報の方法^{6),7)}によれば、温度プロファイルはSparrowらの厳密解⁵⁾に極めて良く一致する。

(3) 速度境界層および温度境界層の厚さは、 $P_r=2$ において互に等しい。

(4) ヌッセルト数 N_{nr} について約7%の誤差を許容すれば、本解法^{6),7)}は $P_r=1\sim 1000$ 範囲で適用しうる。

なお、本研究に対し北大工学部齋藤武教授、関信弘教授および石黒亮二教授により御批判、御助言を頂いた。付記して謝意を表わしたい。

(昭和47年5月20日受理)

参 考 文 献

- 1) Th. von Kármán: Z. angew. Math. Mech, Vol. 1, 1921, p. 245.
- 2) W. G. Cochran: Proc. Cambridge Phil. Soc, Vol. 30, 1934, p. 365.
- 3) Carl Wagner: Journal of Applied Physics, Vol. 19, 1948, p. 837.
- 4) K. Millsaps and K. Pohlhausen: Journal of Aeronautical Sci, Vol. 19, 1952, p. 120.
- 5) E. M. Sparrow and J. L. Gregg: Trans. ASME, Series C, Vol. 81, 1959, p. 249.
- 6) 岸浪紘機: 日本機械学会北海道支部第13回講演会講演論文集, 1969, p. 131.
- 7) 齋藤 図・岸浪紘機・戸倉郁夫: 日本機械学会北海道支部第15回講演会講演論文集, 1971, p. 229.