



## せまい平板間にある円柱のまわりの非定常流れの数値解法(第1報)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-07-18 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 山岸, 英明 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3595">http://hdl.handle.net/10258/3595</a>

# せまい平板間にある円柱のまわりの 非定常流れの数値解法 (第1報)

山 岸 英 明

## Numerical Study of Unsteady Viscous Incompressible Fluid Flow past a Circular Cylinder between Two Parallel Solid Surfaces (1)

Hideaki Yamagishi

### Abstract

A numerical method of unsteady viscous incompressible fluid flow past a circular cylinder between two parallel flat planes is reported. For this purpose, the hybrid coordinate system, combining with cartesian-cylindrical coordinates, is introduced. It is respected to obtain some reasonable solutions by means of trial runs.

### I. 緒 言

円柱のまわりの流れの解析は流体力学的興味よりこれまで多数行なわれている。その典型的な場合として無限に広がる一様流中に置かれた円柱を一定の速度で突然移動させる時の円柱のまわりの解析がある。この解析法として定常方程式を解く方法と非定常方程式を解く方法がある。この二つの方法の比較については川口が論じている<sup>1)</sup>。これらの解析はいずれもレイノル数  $R (\equiv UD/\nu)$ :  $D$  は円柱直径,  $U$  は円柱より充分離れたところでの速度,  $\nu$  は流体の動粘性係数) が  $0 \sim 1000$  の間で行なわれている。 $R > 1$  の領域ではナービエ・ストークスの運動方程式を解析的に解く手段が開発されておらず, 現在のところ数値解法に頼らざるを得ない。したがって厳密解が得られていないため, 求めた数値解がもとの方程式の解をどの程度よく近似しているかが問題となる。このことについては高見が論じている<sup>2)</sup>。

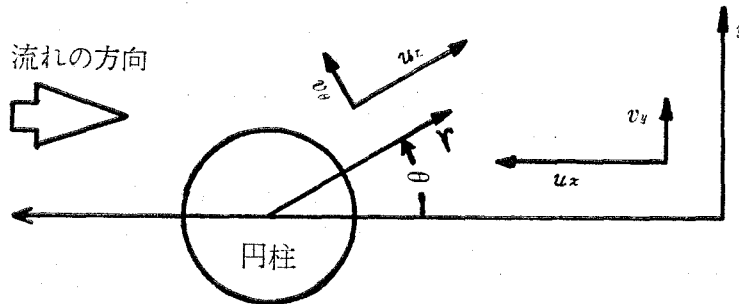
定常数値解・非定常数値解とも近年ディジタル計算機の発達につれ, より深くまた広範囲にわたって求められてきた。定常解法としては川口<sup>3)</sup>, A. Activos 等<sup>4)</sup>, 高見<sup>2)</sup>, A. E. Hamielec 等<sup>5)</sup>, R. L. Underwood<sup>6)</sup>, S. C. R. Dennis 等<sup>7)</sup> などの報告がある。また非定常解法としては川口等<sup>8)</sup>, D. C. Thoman 等<sup>9)</sup>, P. C. Jain 等<sup>10)</sup>, 高見等<sup>11)</sup>, J. S. Son 等<sup>12)</sup>, M. Collins 等<sup>13)</sup> の報告がある。このうち Thoman 等は外側境界を比較的円柱に近いところに置いているが  $R = 3 \times 10^5$  の範囲までの求解を試みている。また Collins 等は時間の初期には円柱表面に形成される境界層を考慮すべきだとして解を求めている。

Thoman 等は別に詳細な報告を行なっている<sup>14)</sup>。彼等は流れの場を円柱表面近くとその外側で区別し、内側には円柱座標系、外側には直角座標系による記述を意図しハイブリッド座標系を適用した。それにより彼等はナービエ・ストークスの方程式を陽解法で解いた。しかしそのハイブリッド・メッシュ系には非常に密になる部分があり、かつこの部分により解の安定性を得るためのタイム・ステップの大きさが制限され非常に長い計算時間を要する。本報告では直角座標領域におけるメッシュの切り方を改善し、さらに交互方向陰解法を用いての数値解法を示した。ハイブリッド・システムを導入した事により境界条件をより厳密かつ簡単に与えることができ、また積分領域を矩形の単純な形状にし得るので交互方向陰解法の適用を容易なものにできた。著者のテストランにおいても充分良好な解が得られることが確かめられている。

本報告は非常に近いところに平面境界がある場合の円柱のまわりについての圧力およびか(渦)度の分布状態、抗力、剝離角、うずの長さなどを時間依存の形で求める方法を示した。

## II. 解 析

円柱のまわりの流れを表わすために第1図のように円柱近傍を円柱座標  $(r, \theta)$  で、また遠方を直角座標  $(x, y)$  で記述する。流れの方向と座標軸の正の向きも第1図に示した。



第1図 流れ場を記述するためのハイブリッド座標系

非圧縮性二次元非定常流れを記述する。ナービエ・ストークスの運動方程式および連続の式はそれぞれ次のようになる。

### a) 円柱座標領域

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r v_\theta}{r} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \\ & + \nu \left( \nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{ここで} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial(u_r r)}{r \partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} = 0 \quad (4)$$

b) 直交座標領域

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y \quad (6)$$

$$\text{ここで } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (6.a)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

1. 円柱に近い領域

第1図矢印の向きに正として流れ関数  $\phi$  を次式で定義する。

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (8)$$

またか度  $\zeta$  は

$$\zeta = \frac{\partial(rv_\theta)}{r \partial r} - \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \quad (9)$$

(1) 式を  $\theta$  で偏微分し (2) 式に  $r$  を乗じて  $r$  で偏微分し、辺々引き算により圧力項を除去してから、(8) 式、(9) 式により次式が得られる。

$$r \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = \nu \left( r \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) \quad (10)$$

また

$$\zeta = \nabla^2 \phi \quad (11)$$

流れ関数  $\phi$  は連続の式 (3) 式を満たすことは直ちに示される。

次に  $U$ ,  $D$  をスケール・ファクタとして (10) 式、(11) 式を無次元化するため次のような変換を行なう。

$$\begin{cases} r' = 2r/D, & \theta' = \theta, & t' = t/(D/U) \\ \phi' = (1/LU)\phi, & \zeta' = (D/U)\zeta \end{cases} \quad (12)$$

(12) 式より (10) 式、(11) 式は次式のように無次元化される。

$$r \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} + \frac{\partial \phi'}{\partial \theta'} \frac{\partial \zeta'}{\partial r'} - \frac{\partial \phi'}{\partial r'} \frac{\partial \zeta'}{\partial \theta'} = \frac{2}{R} \left( r \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial r'^2} + \frac{\partial \zeta'}{\partial r'} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta'}{\partial \theta'^2} \right) \quad (13)$$

$$\zeta' = \nabla'^2 \phi' \quad (14)$$

ここで上式はプライムを外してある。また  $R = DU/\nu$

(13) 式, (14) 式における境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} r = 1 : \psi = \partial\psi/\partial r = 0 \\ r = r_0, \theta = \theta_0 : \psi = \psi(r_0, \theta_0), \zeta = \zeta(r_0, \theta_0) \\ \theta = 0, \pi : \psi = \zeta = 0 \end{cases} \quad (15)$$

(13) 式, (14) 式を再び次の変換によって書き換える。

$$r = \exp(\pi\xi), \quad \eta = \theta/\pi$$

これにより

$$E^2 \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\zeta}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} = \frac{2}{R} \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2} \right) \quad (17)$$

$$E^2\zeta = \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \quad (18)$$

再び境界条件を示せば

$$\begin{cases} \xi = 1 : \psi = \partial\psi/\partial\xi = 0 \\ \xi = \xi_0, \theta = \theta_0 : \psi = \psi(\xi_0, \theta_0), \zeta = \zeta(\xi_0, \theta_0) \\ \theta = 0, \pi : \psi = \zeta = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{さらに } E = \pi \exp(\pi\xi) \quad (20)$$

## 2. 円柱より離れた領域

流れ関数を次のように定義する。

$$u_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (21)$$

またか度 $\zeta$ は

$$\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (22)$$

(4) 式を  $y$  で (5) 式を  $x$  で偏微分して辺々引き算を行なった後 (21) 式, (22) 式より次式が得られる。

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (23)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (24)$$

ここで 1. の場合と同様流れ関数  $\psi$  は連続の式 (7) 式を満たしていることがわかる。(23) 式, (24) 式を前と同様無次元化する。そしてプライムを外せば次式が得られる。

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \right) \quad (25)$$

$$\zeta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (26)$$

ここで境界条件は次のようになる。

$$\begin{cases} y \rightarrow \infty & : \phi \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow 0 \\ y = 0 & : \phi = 0 \\ (x, y) = (x_0, y_0) & : \phi = \phi(x_0, y_0), \zeta = \zeta(x_0, y_0) \end{cases} \quad (27)$$

### 3. 円柱に作用する抗力

(2)式, (8)式, (9)式, (12)式および(15)式の境界条件より円柱表面の圧力分布は次式で計算される。

$$P_{\xi=0}(\eta) = -\frac{4}{R} \int_0^\eta \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\eta + \text{const.} \quad (28)$$

ここで圧力  $P$  は  $\rho U^2/2$  により規格化されている。上式の圧力分布により形状抵抗  $C_p$  は

$$C_p = \int_0^\pi P_{\xi=0} \cos \theta d\theta \quad (29)$$

また摩擦による抗力  $C_f$  は円柱表面のか度分布から次のように求まる。

$$C_f = -\frac{4}{R} \int_0^\pi \zeta_{\xi=0} \sin \theta d\theta \quad (30)$$

したがって合わせた全抗力  $C_D$  は

$$C_D = C_p + C_f \quad (31)$$

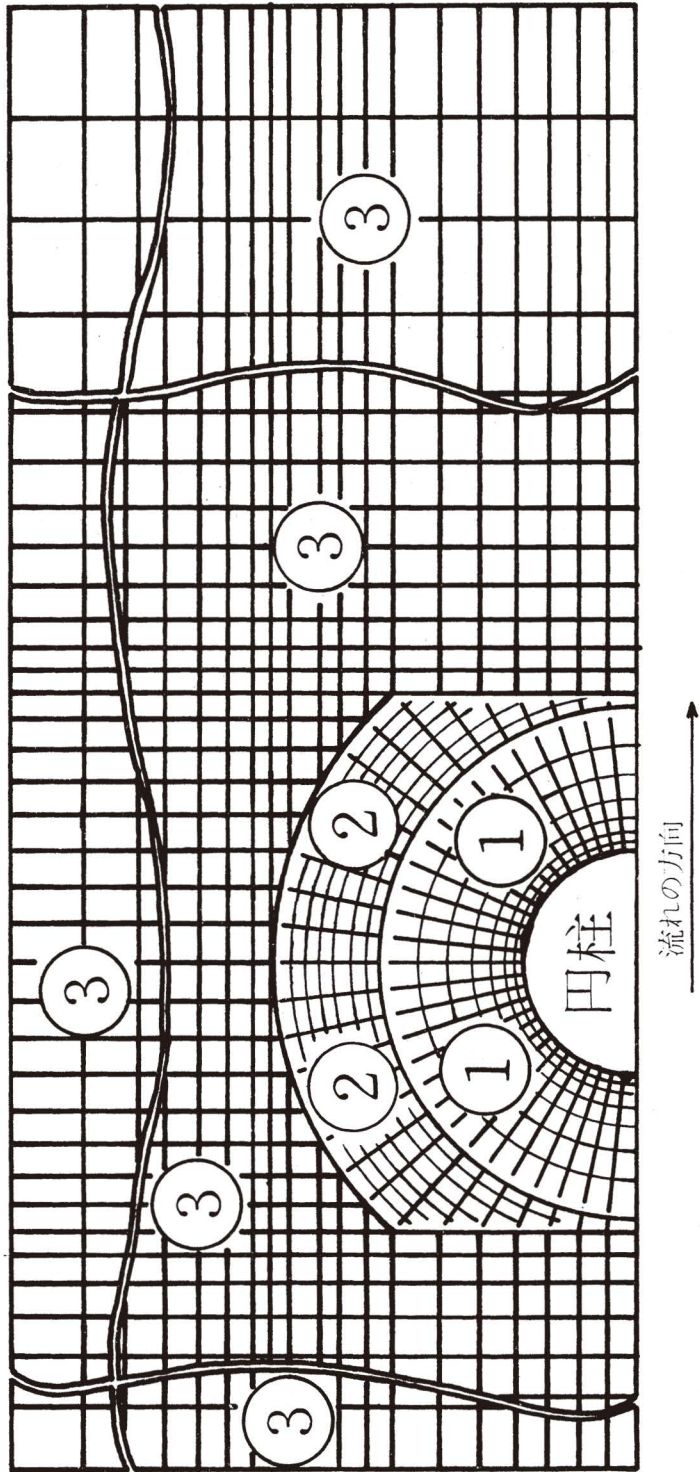
## III. 数値解析

流れの場を第2図のようなメッシュで切る。このメッシュ・システムを図で示してあるように3つの領域に分ける。①の領域には円柱座標に対応するメッシュ構成を与え、第3図に示すように  $(\xi, \eta)$  座標のメッシュ系において  $\xi, \eta$  方向とも等間隔の刻みにしてあり、それぞれ  $k, l$  とする。②の領域も同じ円柱座標系で表わされるが、第3図のメッシュ系において  $j$  によって  $k$  の値が異なっている。③は直交座標系で表わされる領域であり、第2図に示す  $x, y$  方向ともそのメッシュの刻みは常に一定ではない。

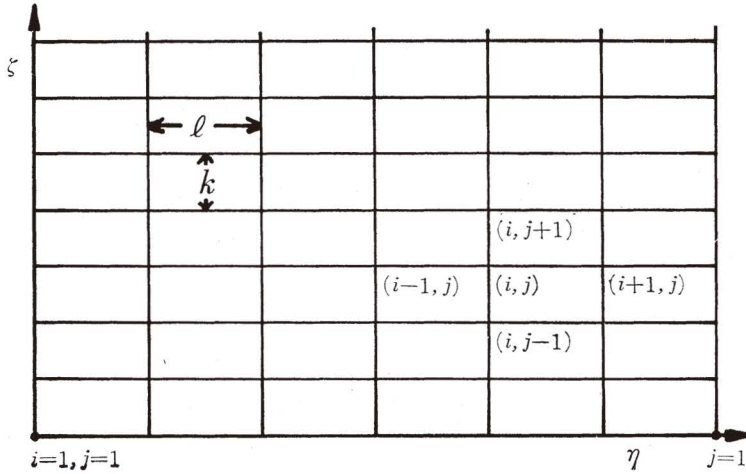
流れ関数は(18)式あるいは(26)式から計算されるが、後述のようにこれらの式を差分近似した後、加速リーブマン法(あるいはS.O.R.法)によって求められる。一方か度はか度輸送方程式である(17)式や(25)式により求められるが、これらの式もまた差分近似した後、交互方向陰解法(A.D.I.法)を用いて計算できる<sup>15)</sup>。以下A.D.I.法適用のための定式化を行なう。

### 1. 円柱座標系

①の領域に対しては次のように近似を行なう。



第2図 流れ場におけるハイブリッド格子系の概略



第3図 (η, ζ) 座標系における格子構造

(17) 式より

$$\begin{aligned} & \frac{E_j^2}{2} \frac{1}{\Delta t} (\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j}^n) + \frac{1}{4kl} (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n) \\ & - \frac{1}{4kl} (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\ & = \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{l^2} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{k^2} (\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_j^2}{2} \frac{1}{\Delta t} (\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4kl} (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}) \\ & - \frac{1}{4kl} (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\ & = \frac{2}{R} \left\{ \frac{1}{l^2} \zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{k^2} (\zeta_{i,j+1}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (33)$$

(32) 式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{2}{Rl^2} + \frac{1}{4kl} (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) \right\} \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left( \frac{E_j^2}{2} \frac{1}{\Delta t} + \frac{4}{Rl^2} \right) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ & - \left\{ \frac{2}{Rl^2} + \frac{1}{4kl} (\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n) \right\} \zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} \\ & = \frac{2}{Rk^2} (\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n) - \frac{1}{4kl} (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) (\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n) + \frac{E_j^2}{2} \frac{1}{\Delta t} \zeta_{i,j}^n \end{aligned} \quad (34)$$

同様に(33)式は

$$-\left\{ \frac{2}{Rk^2} + \frac{1}{4kl} (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n) \right\} \zeta_{i,j-1}^{n+1} + \left( \frac{E_j^2}{2} \frac{1}{\Delta t} + \frac{4}{Rk^2} \right) \zeta_{i,j}^{n+1} \quad (173)$$



$$\begin{aligned}
& + \left\{ -\frac{2}{Rk^2} + \frac{1}{4kl} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \right\} \zeta_{i,j+1}^{n+1} \\
& = \frac{2}{Rl^2} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4kl} (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n) (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{E_j^2}{2} \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (35)
\end{aligned}$$

また(18)式より

$$E_j^2 \zeta_{i,j}^n = (\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n)/l^2 + (\phi_{i,j+1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j-1}^n)/k^2 \quad (36)$$

(36)式を用いて加速リープマン法により次式を導入する。

$$\begin{aligned}
\phi_{i,j}^{m+1} & = (1-k_1) \phi_{i,j}^m + \frac{k_1}{2(1/l^2 + 1/k^2)} \\
& \times \left\{ \frac{1}{l^2} (\phi_{i+1,j}^m + \phi_{i-1,j}^m) + \frac{1}{k^2} (\phi_{i,j+1}^m + \phi_{i,j-1}^m) - E_j^2 \zeta_{i,j}^{m+1} \right\} \quad (37)
\end{aligned}$$

ここで緩和係数  $k_1$  は次のようにして定める。

$$k_1 = \frac{2}{1 + \pi [(I^2 + J^2)/2]^{\frac{1}{2}}} \quad (38)$$

ただし  $I, J$  はそれぞれ  $\xi, \eta$  方向のメッシュ数を表わす。

また  $n$  はタイム・ステップ数,  $m$  は計算の繰り返しの数を表わす。

② の領域に対しては次のように近似する。

(17)式より

$$\begin{aligned}
& \frac{E_j^2}{\frac{1}{2} \Delta t} (\zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2l} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \zeta_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\zeta_{i,j}^n - \beta_j^2\zeta_{i,j-1}^n \right\} \\
& - \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\phi_{i,j}^n - \beta_j^2\phi_{i,j-1}^n \right\} \frac{1}{2l} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\
& = \frac{2}{R} \left[ \frac{1}{l^2} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{2}{\beta_j(1+\beta_j)k_j^2} \left\{ \zeta_{i,j+1}^n - (1+\beta_j)\zeta_{i,j}^n + \beta_j\zeta_{i,j-1}^n \right\} \right] \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E_j^2}{\frac{1}{2} \Delta t} (\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2l} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \zeta_{i,j+1}^{n+1} - (1-\beta_j^2)\zeta_{i,j}^{n+1} - \beta_j^2\zeta_{i,j-1}^{n+1} \right\} \\
& - \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\phi_{i,j}^n - \beta_j^2\phi_{i,j-1}^n \right\} \frac{1}{2l} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) \\
& = \frac{2}{R} \left[ \frac{1}{l^2} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{2}{\beta_j(1+\beta_j)k_j^2} \left\{ \zeta_{i,j+1}^{n+1} - (1+\beta_j)\zeta_{i,j}^{n+1} + \beta_j\zeta_{i,j-1}^{n+1} \right\} \right] \quad (40)
\end{aligned}$$

(39)式を整理しなおせば

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{2}{Rl^2} + \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\phi_{i,j}^n - \beta_j^2\phi_{i,j-1}^n \right\} \right] \zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \left( \frac{E_j^2}{\frac{1}{2} \Delta t} + \frac{4}{Rl^2} \right) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& - \left[ \frac{2}{Rl^2} + \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\phi_{i,j}^n - \beta_j^2\phi_{i,j-1}^n \right\} \right] \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{R\beta_j(1+\beta_j)k_j^2} \left\{ \zeta_{i,j+1}^n - (1+\beta_j)\zeta_{i,j}^n + \beta_j\zeta_{i,j-1}^n \right\} \\
&- \frac{1}{2L\beta_j(1+\beta_j)k_j} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \left\{ \zeta_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\zeta_{i,j}^n - \beta_j^2\zeta_{i,j-1}^n \right\} + \frac{E_j^2}{2} \zeta_{i,j}^n \Delta t \quad (41)
\end{aligned}$$

同様に(40)式を整理すれば

$$\begin{aligned}
&- \left[ \frac{4}{R(1+\beta_j)k_j^2} + \frac{\beta_j}{2L(1+\beta_j)k_j} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \right] \zeta_{i,j-1}^{n+1} \\
&+ \left\{ \frac{E_j^2}{2} \Delta t + \frac{4}{R\beta_j k_j^2} - \frac{1-\beta_j^2}{2L(1+\beta_j)\beta_j k_j^2} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \right\} \zeta_{i,j}^{n+1} \\
&+ \left\{ \frac{4}{R\beta_j(1+\beta_j)k_j^2} + \frac{1}{2L(1+\beta_j)\beta_j k_j} (\phi_{i+1,j}^n - \phi_{i-1,j}^n) \right\} \zeta_{i,j+1}^{n+1} \\
&= \frac{1}{Rl^2} (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2L\beta_j(1+\beta_j)k_j} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\phi_{i,j}^n - \beta_j^2\phi_{i,j-1}^n \right\} \\
&\times (\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{E_j^2}{2} \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (42)
\end{aligned}$$

(18)式より

$$E_j^2 \zeta_{i,j}^n = (\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n)/l^2 + 2 \{ \phi_{i,j+1}^n - (1+\beta_j)\phi_{i,j}^n + \beta_j\phi_{i,j-1}^n \} / \{ \beta_j(1+\beta_j)k_j^2 \} \quad (43)$$

(43)式を用いて加速リープマン法を導入すれば

$$\begin{aligned}
\phi_{i,j}^{m+1} &= (1-k_2)\phi_{i,j}^m + \frac{k^2}{2(1/l^2 + 1/\beta_j k_j^2)} \\
&\times \left\{ \frac{\phi_{i+1,j}^m + \phi_{i-1,j}^{m+1}}{l^2} + \frac{2}{\beta_j(1+\beta_j)k_j^2} (\phi_{i,j+1}^m + \beta_j\phi_{i,j-1}^{m+1}) - E_j^2 \zeta_{i,j}^{m+1} \right\} \quad (44)
\end{aligned}$$

ここで  $\beta_j = k_j/k_{j-1}$ , また  $k_2$  は緩和係数, さらにメッシュ間隔が一定ではない時の差分法については後述の直交座標系の場合も含めて付録に示した。

## 2. 直交座標系

③の領域に対しては次のように近似する。この場合は2方向ともメッシュが一定の間隔とはならない(付録参照)。

(25)式より

$$\begin{aligned}
&\frac{\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j}^n}{\frac{1}{2} \Delta t} + \frac{1}{\alpha_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i)(1+\beta_j)} \left[ \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2)\phi_{i,j}^n - \beta_j^2\phi_{i,j-1}^n \right\} \right. \\
&\times \left\{ \zeta_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2)\zeta_{i,j}^n - \alpha_i^2\zeta_{i-1,j}^n \right\} - \left\{ \phi_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2)\phi_{i,j}^n - \alpha_i^2\phi_{i-1,j}^n \right\} \\
&\times \left. \left\{ \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (1-\beta_i^2)\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \beta_j^2\zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{R} \left[ \frac{2}{\alpha_i(1+\alpha_i)\alpha_i^2} \left\{ \alpha_i\zeta_{i-1,j}^n - (1+\alpha_i)\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i+1,j}^n \right\} + \frac{2}{\beta_j(1+\beta_j)k_j^2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \beta_j \zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - (1+\beta_j) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \quad (45) \\
& \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \Delta t} + \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left[ \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2) \phi_{i,j}^n - \beta_j^2 \phi_{i,j-1}^n \right\} \right. \\
& \times \left\{ \zeta_{i+1,j}^{n+1} - (1-\alpha_i^2) \zeta_{i,j}^{n+1} - \alpha_i^2 \zeta_{i-1,j}^{n+1} \right\} - \left\{ \phi_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2) \phi_{i,j}^n - \alpha_i^2 \phi_{i-1,j}^n \right\} \\
& \times \left. \left\{ \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (1-\beta_j^2) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \beta_j^2 \zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right] \\
& = \frac{1}{R} \left[ \frac{2}{\alpha_i (1+\alpha_i) a_i^2} \left\{ \alpha_i \zeta_{i-1,j}^{n+1} - (1+\alpha_i) \zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i+1,j}^{n+1} \right\} + \frac{2}{\beta_j (1+\beta_j) b_j^2} \right. \\
& \times \left. \left\{ \beta_j \zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - (1+\beta_j) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right] \quad (46)
\end{aligned}$$

(45) 式を次のように整理する。

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{2}{R(1+\beta_j) b_j^2} + \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left\{ \phi_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n \right\} \right] \zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \\
& + \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} \Delta t} + \frac{1-\beta_j^2}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left\{ \phi_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n \right\} + \frac{2}{R b_j^2 \beta_j^2} \right] \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \\
& - \left[ \frac{2}{R(1+\beta_j) b_j^2} + \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left\{ \phi_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n \right\} \right] \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \\
& = \frac{2}{R a_i^2 \alpha_i (1+\alpha_i)} \left\{ \alpha_i \zeta_{i-1,j}^{n+1} - (1+\alpha_i) \zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i+1,j}^{n+1} \right\} - \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \\
& \times \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n \right\} \left\{ \zeta_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2) \zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n \right\} + \frac{1}{\frac{1}{2} \Delta t} \zeta_{i,j}^n \quad (47)
\end{aligned}$$

同様に (46) 式より

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{2}{R(1+\alpha_i) a_i^2} + \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n \right\} \right] \zeta_{i-1,j}^{n+1} \\
& + \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} \Delta t} - \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n \right\} + \frac{2}{R a_i^2 \alpha_i} \right] \zeta_{i,j}^{n+1} \\
& + \left[ -\frac{2}{R(1+\alpha_i) a_i^2} + \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \left\{ \phi_{i,j+1}^n - (1-\beta_j^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i,j-1}^n \right\} \right] \zeta_{i+1,j}^{n+1} \\
& = \frac{2}{R b_j^2 \beta_j (1+\beta_j)} \left\{ \beta_j \zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} - (1+\beta_j) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} - \frac{1}{a_i b_j \alpha_i \beta_j (1+\alpha_i) (1+\beta_j)} \\
& \times \left\{ \phi_{i+1,j}^n - (1-\alpha_i^2) \phi_{i,j}^n - \phi_{i-1,j}^n \right\} \left\{ \zeta_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (1-\beta_j^2) \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{\frac{1}{2} \Delta t} \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (48)
\end{aligned}$$

また (24) 式より

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\alpha_i (1+\alpha_i) a_i^2} \left\{ \alpha_i \phi_{i-1,j}^{m+1} - (1+\alpha_i) \phi_{i,j}^{m+1} + \phi_{i+1,j}^{m+1} \right\} \\
& + \frac{2}{\beta_j (1+\beta_j) b_j^2} \left\{ \beta_j \phi_{i,j-1}^{m+1} - (1+\beta_j) \phi_{i,j}^{m+1} + \phi_{i,j+1}^{m+1} \right\} = \zeta_{i,j}^{m+1} \quad (49)
\end{aligned}$$

(49) 式を用い加速リーブマン法を適用すれば

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{m+1} = & (1-k_3)\phi_{i,j}^m + \frac{k_3}{2\left(\frac{1}{\alpha_i a_i^2} + \frac{1}{\beta_j b_j^2}\right)} \\ & \times \left\{ \frac{2}{\alpha_i(1+\alpha_i)a_i^2} (\phi_{i+1,j}^m + \alpha_i \phi_{i-1,j}^{m+1}) + \frac{2}{\beta_j(1+\beta_j)b_j^2} (\phi_{i,j+1}^m + \beta_j \phi_{i,j-1}^{m+1}) + \zeta_{i,j}^{m+1} \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

ここで  $\alpha_i = a_i/a_{i-1}$ ,  $\beta_j = b_j/b_{j-1}$

また  $k_3$  は緩和係数, 差分法については付録を参照。

### 3. 計算の手順

詳細な計算手順は次報で示すつもりなので, 本報告では簡単に述べる。計算は次の①から⑦に概略的に示すことができる。

- ① 流れ関数の初期値を与える。これにはポテンシャル流れを想定する。またか(渦)度の初期値はすべての点でゼロ。
- ② 円柱表面で流れ関数ゼロ(ノン・スリップの条件)として(37)式, (44)式, (50)式による加速リーブマン法で流れ関数を計算する。
- ③ 円柱表面のか度を計算する。
- ④ ③の値を初期値として, タイム・ステップを1つ進めてすべての点のか度を交互方向陰解法により計算する。
- ⑤ ④で得られたか度を用いて再び(37)式, (44)式, (50)式によってすべての点での流れ関数を計算する。
- ⑥ 以上③, ④, ⑤の手順を繰り返す。また適当なタイム・ステップのところで抗力の計算を行なう。
- ⑦ 計算の終了は定常解を得られるまで行なうのが普通である。たとえば次式の条件が満たされるようにする。

$$|(\phi_{i,j}^{m+1} - \phi_{i,j}^m) / \phi_{i,j}^{m+1}| < \varepsilon \quad (51)$$

$\varepsilon$  の値としては  $10^{-4} \sim 10^{-6}$  が適当と思われる。

### 4. 検 討

詳しい議論は次報にまわし, ここでは極めて簡単にふれる。流れ関数の計算に用いるポアソン型微分方程式である(18)式, (26)式に加速リーブマン法を適用したテスト・ランにおいて収束性が悪くないことが確かめられた。 $k_1, k_2, k_3$  で示した緩和係数の組み合わせでこの収束の程度が大きく左右される。したがってこれら緩和係数の適当な選択が計算時間短縮をはかるポイントとなる。か度の計算に用いた交互方向陰解法はタイム・ステップをどのように選んでも収束することが確かめられている。したがって精度の許される範囲内でタイムステップを大きくできる<sup>15)</sup>。

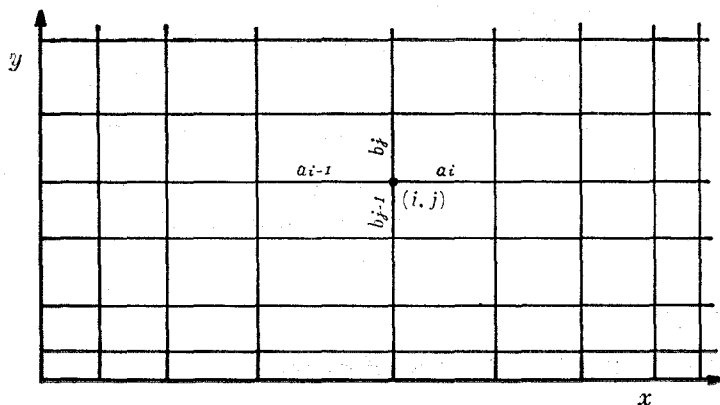
## IV. 結 言

以上非圧縮性・非定常円柱のまわりの流れの数値解法の大略を示した。この方法によって非常にせまい間隔に円柱が置かれた場合の取り扱いが容易になると思われる。この分野の最大の難点は流れの場を記述するナビエ・ストークスの運動方程式の厳密解が知られていないため得られた数値解をどのように評価すべきかということであろう。実験によるいくつかの報告例もあるがこの目的のためには不充分である。大型計算機の発達とともに今後も多くの報告が行なわれると思われるが、得られた解の吟味をどのように行なうかがより重要となろう。

最後に本報告を終るにあたり、本学の一場・奥田両教授はじめ本学機械工学科流体工学研究室の各氏のご協力により本報告がなされたことを附記し、心から謝意を表します。またテスト・ラン実行の際には松田悟君はじめ本学電算機室の方々ならびに北大大型計算機センターの各位のご協力を得ましたので合わせてお礼申し上げます。

## 付 録

メッシュの間隔が一定ではない時の差分方程式の求め方は次のように行なう。まずメッシュ系を第A図で示されるものとする。



第A図 不等間隔格子構造

この図により次のように差分を求める。

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (\text{A-1})$$

$$\alpha_i \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad (\text{A-2})$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad (\text{A-3})$$

$$\beta_j \Delta y_j = y_{j+1} - y_j \quad (\text{A-4})$$

$$\text{ここで } \alpha_i = a_i / a_{i-1}, \quad \beta_j = b_j / b_{j-1}$$

今関数  $f(x, y)$  を導入し、これに A 図で示されるメッシュ系を与え、その  $(i, j)$  番目の点でそれぞれ前進・後退差分をとる。

$$f(x_{i+1}, y_j) = f(x_{i,j}) + \alpha_i \Delta x_i f_x(x_{i,j}) + (\alpha_i^2 \Delta x_i^2 / 2) f_{xx}(x_{i,j}) \quad (\text{A-5})$$

$$f(x_{i-1}, y_j) = f(x_{i,j}) - \Delta x_i f_x(x_{i,j}) + (\Delta x_i^2 / 2) f_{xx}(x_{i,j}) \quad (\text{A-6})$$

$$f(x_i, y_{j+1}) = f(x_{i,j}) + \beta_j \Delta y_j f_y(x_{i,j}) + (\beta_j^2 \Delta y_j^2 / 2) f_{yy}(x_{i,j}) \quad (\text{A-7})$$

$$f(x_i, y_{j-1}) = f(x_{i,j}) - \Delta y_j f_y(x_{i,j}) + (\Delta y_j^2 / 2) f_{yy}(x_{i,j}) \quad (\text{A-8})$$

以下  $f(x_i, y_j)$  を  $f_{i,j}$  と書く。(A-5) 式, (A-6) 式より  $(\partial f / \partial x)_{i,j}$  を求めれば

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i(1+\alpha_i) \Delta x_i} \left\{ f_{i+1,j} - (1-\alpha_i^2) f_{i,j} - \alpha_i^2 f_{i-1,j} \right\} \quad (\text{A-9})$$

(A-5) 式, (A-6) 式より  $(\partial^2 f / \partial x^2)_{i,j}$  を求めれば

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{2}{\alpha_i(1+\alpha_i) \Delta x_i^2} \left\{ \alpha_i f_{i-1,j} - (1+\alpha_i) f_{i,j} + f_{i+1,j} \right\} \quad (\text{A-10})$$

同様に (A-7) 式, (A-8) 式より  $(\partial f / \partial y)_{i,j}$ ,  $(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j}$  を求めれば

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{1}{\beta_j(1+\beta_j) \Delta y_j} \left\{ f_{i,j+1} - (1-\beta_j^2) f_{i,j} - \beta_j^2 f_{i,j-1} \right\} \quad (\text{A-11})$$

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{2}{\beta_j(1+\beta_j) \Delta y_j^2} \left\{ \beta_j f_{i,j-1} - (1+\beta_j) f_{i,j} + f_{i,j+1} \right\} \quad (\text{A-12})$$

(昭和 49 年 5 月 20 日受理)

## 文 献

- 1) 数理解析研究所講究録, No. 139, 京大数理解析研究所, 1972年4月.
- 2) 数理解析研究所講究録, No. 24, 京大数理解析研究所, 1967年5月.
- 3) Journal of the Physical Society of Japan Vol. 8, No. 6, Nov.-Dec. (1953), 82.
- 4) Journal of Fluid Mechanics Vol. 21, Part 4 (1965), 737.
- 5) The Physics of Fluids Vol. 12, No. 1 (1969), 11.
- 6) Journal of Fluid Mechanics Vol. 37, Part 1 (1969), 95.
- 7) Journal of Fluid Mechanics Vol. 42, Part 3 (1970), 471.
- 8) Journal of the Physical Society of Japan Vol. 21, No. 10, Oct. (1966), 93.
- 9) The Physics of Fluids Supplement II (1969), II-76.
- 10) The Physics of Fluids Supplement II (1969), II-57.
- 11) The Physics of Fluids Supplement II (1969), II-51.
- 12) Journal of Fluids Mechanics Vol. 35, Part 2 (1969), 369.
- 13) Journal of Fluids Mechanics Vol. 60, Part 1 (1973), 105.
- 14) Technical Report 66-14 (1966), University of Notre Dame.
- 15) たとえば, 電算機による偏微分方程式の解法, G. D. スミス著, 藤川洋一郎訳, サイエンス社 (昭 47).