



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



## 堤体内浸透流に関する実験及び数値解析

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-07-18 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 藤間, 聡 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3586">http://hdl.handle.net/10258/3586</a>

# 堤体内浸透流に関する実験及び数値解析

藤 間 聡

## Experimental Research and Numerical Analyses of Seepage Flow in the Levee

Satoshi Toma

### Abstract

The seepage problems have been done by the approximate methods, such as the flow nets, A. Casagrande's and Dupuit's methods. But these methods are unsatisfactory for the present design purposes.

For the numerical solution of seepage problems by means of a computer the finite element method is developed in recent years.

In this paper, the author presented the results of the experimental resarches of seepage through the homogeneous rectangular form and homogeneous trapezoidal shaped levees in order to determine discharge and free top flow surface.

On the other hand, he calculated the position of the free top flow surface and discharge through above levees, using numerical method...finite element method and finite differences method.

Experimental and numerical results correlate very well, so that two numerical methoes to solve the seepage problems are found to be useful.

### I. 緒 言

河川構造物のなかで、アースダム及び堤防等は建造地点に産出する岩石や土砂を用いるため、コンクリート構造物とは異なり、堤体内には多数の空隙が存在する。

空隙内の浸透流は堤体の安全に大きな影響を与え、浸透流により崩壊されないためには、浸透自由水面が堤体下流面と交わることがなく、必ず堤体内になければならない。

この空隙物質内の浸透流の水理的特性を知るためには、従来主として実験により研究されてきた<sup>1)</sup>。また水理的特性のなかで、自由水面及び浸透流量を求めるには、一般に近似解法として、A. Casagrande の図式解法、Dupuit の式が使用されているが、前者は基本放物線が上流水面を切る点と、裏法面に接するように自由水面を修正する際に不正確な要素が入る。後者は等ポテンシャル線が垂直状になる、いわゆる準一様流のみしか厳密には適用できない。

一方浸透流の場を数学的手段を用いて解析するホドグラフ法<sup>2),3)</sup>があるが、計算過程が煩雑でしかも特定の形状堤体しか解析することができない。

浸透流問題は堤体及び地下構造物の安全管理において、最も注目しなければならない重要な問題にも拘らず、既存の解析法は不備なものが多い。

今日電子計算機の発達により、大容量の計算が比較的容易に行うことができるようになり、また浸透流の解析法として有限要素法を始めとして2, 3の方法<sup>4), 5), 6)</sup>が開発され、今まで事実上不可能であった不透過ゾーンを含む実際の堤体内の浸透流の解析が行えるようになった。

本文は、空隙物質内の二次元定流の浸透流に関して、砂模型を用いて実験を行う一方有限要素法及び有限差分法の二方法を用いて、自由水面の位置形状、浸透流量、堤体内部水頭値を求め、実験値と比較検討し浸透流の解析法としての有効性を確認するとともに、二解析法の取扱いの難易による利用可能の範囲を調べたものである。

## II. 浸透実験

### 1. 実験装置

実験は砂模型を用いて、自由水面、浸透流量、内部水頭値を求めた。

砂模型は上、下流面が垂直面である矩形堤体と実際の堤体と同様上、下流面ともに一定の法勾配を有する台形堤体の二種である。

#### (i) 矩形砂模型

この模型に関する実験は図-1に示すような長さ30 cm、高さ25 cm、奥行20 cmのエポキシ樹脂製の小型実験水槽で行われた。

この水槽の一面には内径 $\phi 5$  mmのガラス管を横方向2 cm、縦方向4 cm間隔に総計60本配置し、これからビニール管によりマンメータに接続し堤体内部の水頭を測定するようになっている。動水勾配を変化させるため、上流側の壁には底面から10 cm及び20 cmの2カ所に排水孔を設け、下流壁には底面から2 cm間隔に18 cmまで9カ所の排水孔を設けビニール管を通じて水を流出させる。矩形堤体の上、下流面を垂直に保持するため、1 mmの金網を張り、これに非常に目の細かい防虫網を4枚重ね合し、また砂の重量により金網が外側に膨れ出るのを防止するため $\phi 6$  mmの丸鋼により型枠を組み金網に取り付けた。

#### (ii) 台形砂模型

台形砂模型の実験は写真-1に示す幅0.6 m、高さ0.8 m、長さ3.5 mの片面ガラス張りの鋼製浸透水槽で行なわれた。この水槽の片面は小型水槽と同様に、内部水頭値を測定するために

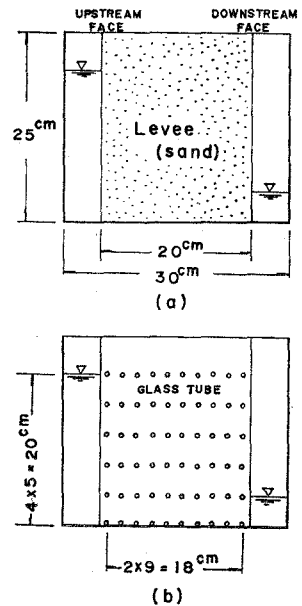


図-1 矩形堤体用小型浸透水槽

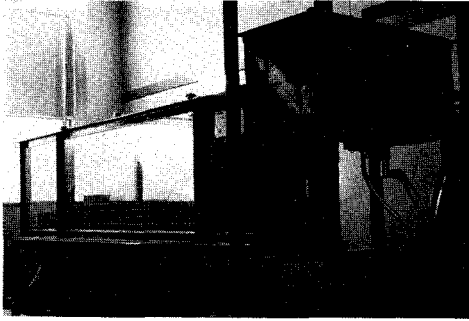


写真-1 浸透実験水槽

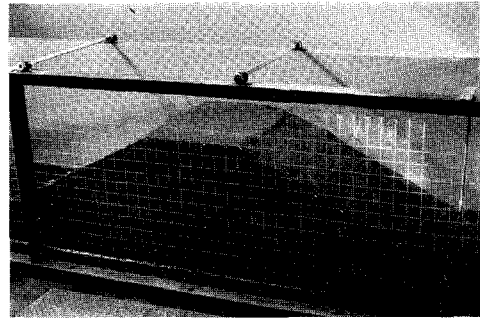


写真-2 台形堤体

縦横方向ともに 10 cm 間隔に内径  $\phi 5$  mm の L 字型ガラス管を 5 段に計 75 本配置してある。またこの浸透水槽には上下可動の越流ゼキ付きの定水頭水槽が付設されており、堤体上流側の水位を任意の一定水位に保つことができる。台形堤体は、写真-2 に示すように、天端幅 0.4 m、堤体高 0.55 m、堤体敷 2.60 m の寸法を有し表、裏法勾配はともに標準の 1:2 とした。

## 2. 実験方法

矩形砂模型では上流側の水深を 20 cm に固定し、下流側を 2 cm から 2 cm 刻みで 18 cm までの 9 通りを与えて実験を行い、一方台形砂模型では下流側水深を 0 m に保ち、上流側水深を 20 cm から 5 cm 刻みで 50 cm までの 7 通りの実験を行って自由水面形状、内部水頭値及び浸透水量を求めた。

各実験に際しては次の事項に留意した。

- (1) 堤体内部に気泡が存在しないこと。
- (2) 測定時における堤体内部の流れは定常流であること。
- (3) 流れは層流であること。

(1) については堤体内に気泡が存在すると砂の透水性に非常に大きな影響を与えるため、堤体を作る場合空気の連行を極力避けなければならない。矩形堤体を作るには、あらかじめ水槽内に 20 cm の深さまで水を入れ、砂を少量ずつ沈殿させ十分に気泡を取除いた。このような方法で高さ 20 cm まで砂を積み重ねて形成した。その後動水勾配が最も緩い実験条件を採り、下流側水深を徐々に下降させて一定水位になったならば、ある所定時間放置して締め固めを行う。このように実験は動水勾配の緩いものから急なものへと順次行うことにより、砂粒子間に空気が連行されないため含水比の変化量が非常に小さく、このため砂の透水性が一定に保つことができる。

定常流か否かの定義は各動水勾配において下流側末端における浸透流をメスシリンダーで測り、一定流量になった時に定常流とした。この状態になる時間は約 30 分である。

以後マンメータにより堤体内部の水頭値を測定し、流線を求めるため蛍光顔料のフローレ

ツセンナトリウムを注射針により一定圧力のもとで堤体内に注入し、顔料の軌跡により測定を行った。

### 3. 実 験 砂

実験に用いた砂は2種類で特性は表-1に示してある。

A砂は均等係数が2.22であるので、同一粒径が大部分で均等であるといえる。B砂において粒径範囲が0.3~0.6 mmのため粒度分布を求めることができなかつたが、ほぼ均等と考えることができる。なお透水係数は定水位透水試験器により求めた値である。

表-1 実験砂の特性

種 類	平均粒径 (mm)	均等係数	比 重	空 隙 率 (%)	透 水 係 数 (cm/s)
A	0.35	2.22	2.86	41.7	$5.95 \times 10^{-2}$
B	0.45	—	2.73	42.6	$8.36 \times 10^{-2}$

## III. 浸 透 理 論

前章において実験により求めた自由水面形状、内部水頭分布及び浸透流量を理論的に求めるには、空隙物質内の浸透流の場の支配方程式及び境界条件を誘導しなければならない。ここでは有限差分法及び有限要素法で用いる支配方程式、境界条件を求める。

### 1. 支配方程式

一般に Navier-Stokes の運動方程式は次式で表わすことができる。

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \text{grad}) \mathbf{V} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1)$$

上式中  $\mathbf{F}$  は質量力で、外力のポテンシャル  $\phi$  を導入すると (2) 式となる。

$$\mathbf{F} = - \text{grad } \phi \quad (2)$$

浸透流はきわめて緩やかな運動であるから慣性項が無視できる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = - \text{grad } \phi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (3)$$

今取扱う流れは定常流であるから、時間  $t$  に関する微分項は消える。

$$\nu \nabla^2 \mathbf{V} = \text{grad} \left( \phi + \frac{p}{\rho} \right) \quad (4)$$

堤体内の任意点における全水頭を  $H$  とすると、

$$\text{grad } H = \text{grad} \left( \frac{\phi}{g} + \frac{p}{\rho w} \right) = \frac{\nu}{g} \nabla^2 \mathbf{V} = - \frac{\nu}{g} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{V}) \quad (5)$$

(5) 式の div. をとると

$$\text{div}(\text{grad } H) = \nabla^2 H = 0 \quad (6)$$

(6) 式から支配方程式は、全水頭  $H$  に関するラプラスの方程式となる。

## 2. 境界条件

境界条件が最も基礎的な矩形堤体について考える。図-2において、

(1) 上流面 **AB**: この境界は一定水頭であるので上流水深を与える。

$$H = y_B \quad (7-1)$$

(2) 下流面 **CD**: 上流面と同じ考えにより下流水深を与える。

$$H = y_B - y_D \quad (7-2)$$

(3) 不浸透面 **BC**: この境界を通過して流量の収支がない。従って境界面に垂直方向の流速は存在しない。

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (7-3)$$

(4) 浸出面 **DE**: この境界面は大気と接触している。大気圧  $p_0=0$  とすると位置水頭のみ考えるとよい。

$$H = y_B - y \quad (7-4)$$

(5) 自由水面 **AE**: (4)と同様に大気に接しているため、位置水頭を考慮し、降雨及び蒸発散がなければ、自由水面を通過して水の収支がない。

$$\left. \begin{aligned} H &= y_B - y \\ \frac{\partial H}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

但し  $n$  は自由水面の法線方向を示す。

以上の誘導により支配方程式及び境界条件が求められ、(7-1)から(7-4)式を用いて(6)式を解くことにより、自由水面、内部水頭値が算出できることになる。

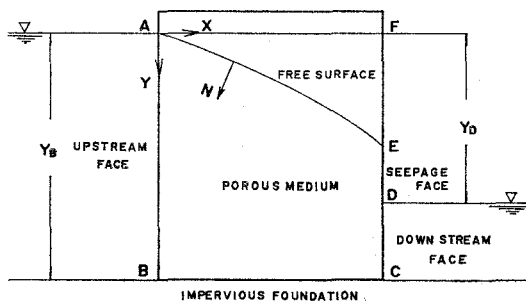


図-2 矩形堤体内の浸透

## IV. 解析法

浸透問題を解析する場合、場の支配方程式は与えられるが、自由水面が存在すると、この境界は最初未知であるため、自由水面が存在しない場合と比較すると、未知境界を決めることも解法の一部として要求されるので、手法は一般に複雑となる。

## 1. 有限差分法

有限差分法は支配方程式を差分化し、境界条件により解法し未知の物理量を求める方法である。この方法を用いて楕円形微分方程式を解くものとして古くから緩和法が知られており、後述の有限要素法に比較すると数学的に確立されている。

この緩和法を用いて1941年に Shaw と Southwell<sup>7)</sup> が、手計算ではあるが種々の浸透問題について厳密に解析を行っている。これが浸透問題における数値解析の第一歩である。

本研究では電子計算機による有限差分法を使用するが、この操作手順と Shaw と Southwell とが行った手順とを比較するため、2人の行った方法をここで述べる。

Shaw と Southwell の方法：

- (1) 浸透領域に自由水面の初期形状を与える。
- (2) この自由水面の境界を用いて、境界条件(7)式を満足する支配方程式(6)の解を求める。但し全水頭  $H$  の代りに圧力  $p$  を用いる。
- (3) 求めた圧力  $p$  により、自由水面上で  $x$  及び  $y$  軸に関する微係数  $\partial p/\partial x$ ,  $\partial p/\partial y$  を求める。
- (4) (3) で求めた圧力勾配が次式を満足するか否かを判別する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

但し、上式中  $\theta$  は自由水面上に立てた法線と水平軸間の交角を表わす。

(5) (8) 式が満足されると解が求まったことになり自由水面の位置形状が得られ同時に、浸透領域内の圧力分布が得られる。(8) 式が成立しなければ、再び新しい位置に自由水面を仮定し同様の操作を繰返し(8)式が成立するまで行う。

以上が Shaw と Southwell が行った方法であるが、電子計算機を用いて自動的に解析するためには繁雑すぎる所がある。

1は(3)段階において自由水面が任意であるため圧力勾配を求める際 Taylor 展開をしなければならないこと。2は自由水面上で法線と水平軸間の交角を見い出さなければならないことである。

差分法は浸透領域を、四角網、三角網及び六角網等を用いて分割して解析を行うが、本解析では図-3(a)に示すように四角網を用いて堤体を分割した。Shaw と Southwell の手法を、電子計算機で解析を行うのに便利よくするため次のように改める。

本解析方法：

- (1) 自由水面を仮定する。但し自由水面は格子点上に存在する。
- (2) この自由水面と(7)式の境界条件により(6)式を解く

(3) 求めた自由水面上の水頭  $H_s$  が次式を満足するか否かを判別する。

$$|H_s - y_s| \leq \epsilon \quad (9)$$

但し,  $\epsilon$  は許容誤差値であり,  $y_s$  は基準面から自由水面上の注目する点まで垂直距離である。

(4) (9) 式が満足しなければ新しい自由水面形状を仮定して同様の計算をさせ, 満足するまで繰返す。

以上の操作を計算機で自動的に行う。

(1) 段階で自由水面を格子点上に与えることによる誤差は四角網を細かくすることにより解消される。

**支配方程式の差分化**

本研究では (6) 式を中央差分化し, 収束時間が他の解析法より早いと言われる逐次加速緩和法 (SOR) を用いる。

$x, y$  軸方向の透水係数をそれぞれ  $k_x, k_y$  とし (6) 式を差分化すると次式が成立する。

$$k_x \left( \frac{H_{i+1,j} + H_{i-1,j} - 2H_{i,j}}{\Delta x^2} \right) + k_y \left( \frac{H_{i,j+1} + H_{i,j-1} - 2H_{i,j}}{\Delta y^2} \right) = 0 \quad (10)$$

$\Delta x, \Delta y$  は  $x, y$  方向の分割間隔であり,  $H_{i,j}$  は格子点  $(i, j)$  の水頭値である。逐次加速緩和法を用いると次式が得られる。 $w$  は加速係数である。

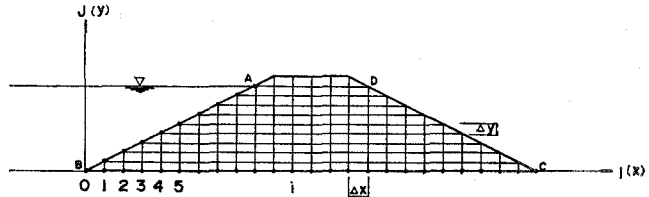
$$\text{NORM} = \frac{w}{2(k_x/\Delta x^2 + k_y/\Delta y^2)} \left\{ k_x \left( \frac{H_{i+1,j} + H_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + k_y \left( \frac{H_{i,j+1} + H_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right\} - wH_{i,j} \quad (11)$$

各水頭は  $H_{i,j}^{(k+1)} = H_{i,j}^{(k)} + \text{NORM}$  (但し  $(k)$  は繰返し回数) (12)

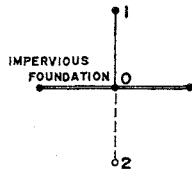
で求める。  $\sum \text{NORM} \leq \epsilon$  (13)

**境界条件**

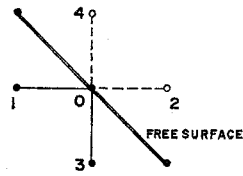
- (1) 上流面 AB: 上流水深を格子点に与える。
- (2) 下流面 CD: 水がある場合には, その水深を与え, ない場合には基準面よりの高さを格子点に与える。



(a)



(b)



(c)

図-3 有限差分法による堤体の分割法及び境界条件



- (3) 不浸透面 **BC**: この境界面に対して垂直方向の速度が存在しないので、図-3(b)において点1の水頭値と仮想点2の水頭値を等しいと考える。
- (4) 自由水面 **AD**: 降雨及び蒸発散を考慮しなければ、自由水面を通して流量の収支がないので(3)と同様に考える。一般に自由水面は勾配を有しているので、図-3(c)に示してあるように1点と仮想点2との水頭値を等しくし点3と仮想点4との水頭値を等しく置いて近似する。

実際の計算に際しては、最初に自由水面を **AD** に採り水頭値が既知の境界 **AB**, **CD** から堤体内部格子点すべてに初期値を割り当てる。次に(11), (12)式を用いて計算し、あらかじめ与えてある許容誤差値 ( $\epsilon=0.01$ ) と全格子点における **NORM** の総和を(13)式により比較し、満足されるまで計算を行う。次に(9)式で自由水面の位置を検討し満足されなければ、(12)式により得られた水頭値に最も近い格子点に自由水面を移動し再び計算を繰返し自由水面を収束させる。以上が有限差分法の計算手法である。

## 2. 有限要素法

有限要素法は電子計算機の大型化が進むなかで開発された汎用数値解析法で、特に構造物の応力解析の分野で広範囲に用いられている。

浸透問題については、有限要素法のポテンシャルエネルギーの最小化原理を利用して、1966年に Zienkiewicz<sup>4)</sup> 等が異方性地盤内の浸透流解析を行って以来、各種の解析が行われている。

以下有限要素法において用いられる式を誘導する。

堤体内部の水頭が座標  $x, y$  に関する一次式で表わすことができると仮定する。

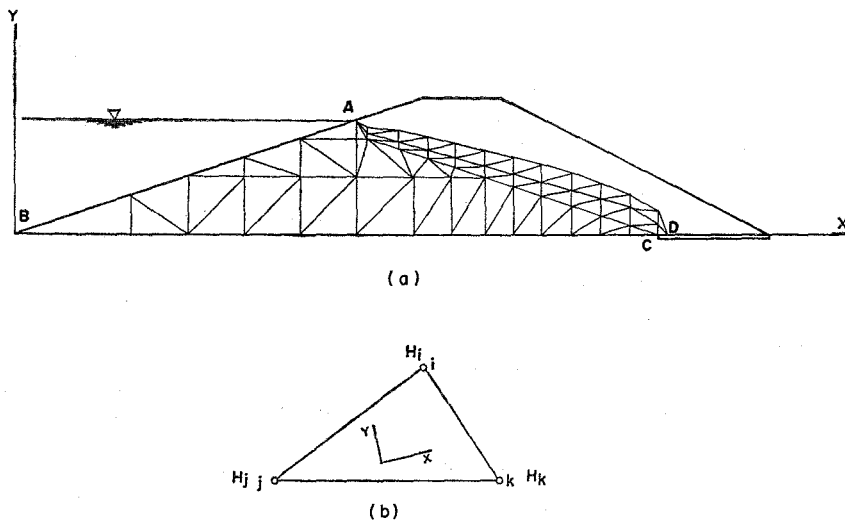


図-4 有限要素法による堤体の分割法及び三角形要素

$$H_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \quad (14)$$

堤体内の解析領域を図-4(a)に示すように三角形の要素により分割を行う。今この要素群の中から図-4(b)のような要素を取り出す。この三角形要素の三頂点を夫々  $i, j, k$  で表わすことにする。

この頂点における水頭  $H_i, H_j, H_k$  は各頂点の座標と係数との一次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix} = \{H\}^e = \begin{Bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\} \quad (15)$$

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{H\}^e \quad (16)$$

上式で逆マトリックス  $[A]^{-1}$  は

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$\Delta$ : 三角形要素の面積

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad a_{j,k} \text{ は回転順列}$$

$$b_i = y_j - y_k \quad b_{j,k} \text{ は } "$$

$$c_i = x_k - x_j \quad c_{j,k} \text{ は } "$$

(16), (17) 式から (14) 式は次の形となる。

$$H = [N_i N_j N_k] \{H\}^e \quad (18)$$

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$$

$$N_j = (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta$$

$$N_k = (a_k + b_k x + c_k y) / 2\Delta$$

今堤体の境界条件を考えると、有限差分法の章で述べたように、

(1) 上下流面では水深に等しい水頭を指定する。

$$H = H(S) \quad (19)$$

(2) 不浸透面及び自由水面では、境界面に垂直方向の流速成分が存在しない。

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = 0 \quad (20)$$

$n$  は境界面の法線方向を表わす。

変分原理を用いると、支配方程式 (6) を (19) 及び (20) 式の境界条件で解法することは、

(19) 式の境界条件で次の式を極小にすることと等価となる<sup>4)</sup>。

$$E = \frac{1}{2} \iint_R \left[ k_x \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (21)$$

(21) 式の第一変分を考えて、Gauss の定理により面積分を線積分に置きかえると

$$\iint_R \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \delta H_x + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \delta H_y \right) dx dy = \int_s \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \right) \times \delta H ds - \iint_R \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) \delta H dx dy \quad (22)$$

ここで  $\delta H$  は任意であるので (22) 式が恒等的に 0 になるには

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (23)$$

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = 0 \quad (24)$$

(23) 及び (24) 式から自由水面、不透透面の境界条件及び支配方程式は自然に満足されることになる。このため考慮すべき境界条件は上、下流面のみとなる。

次に (21) 式の  $E$  を最小にするため各要素において、水頭に関する微係数を求めて、全要素について微係数の総和を 0 にするとよいことになる。

$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial H} \right\}^e = [h] \{H\}^e \quad (25)$$

上式中  $[h]$  は 3 行 3 列の正方マトリックスで、一般に浸透性行列と呼ばれており、各成分は次の式で表わされる。

$$h_{i,j} = \{k_x(y_k - y_i)(y_j - y_k) + k_y(x_k - x_i)(x_k - x_j)\} / 4A \quad (26)$$

全要素を考えると、解析する式は次式となる。

$$\Sigma \frac{\partial E}{\partial H} = [h] \{H\} = 0 \quad (27)$$

解析領域を三角形要素で分割する場合、自由水面の位置が収束するまで各計算毎に移動するため次の様な方法をとる。

図-4(a)において、 $\overline{AC}$  を予想される自由水面より低めに与えて置き、この直線より下に位置する三角形要素群の頂点の座標を固定する。一方直線  $\overline{AC}$  と自由水面  $\overline{AD}$  間の三角形要素群は可動にし、計算機内で自動分割を行って自由水面の位置形状を算出する。

計算は式 (27) の多元連立方程式を解法することにあるが、三角形の要素の分割数により元数が支配され、一般に 100 元を越える大次元行列解析となる。本解析では最大元 118 であったが SOR 法を用いて計算を行った。

## V. 実験結果及び解析結果の考察

### 1. 矩形砂模型

#### (1) 自由水面

図-5は矩形模型堤体における上流水深20cm, 下流水深4cmの場合の実験及び二解析方法により得られた自由水面形状である。

実験で自由水面の形状を求めるには, 前述の如く, 顔料を注射針により一定圧力のもとに堤体内に注入して求めたものである。

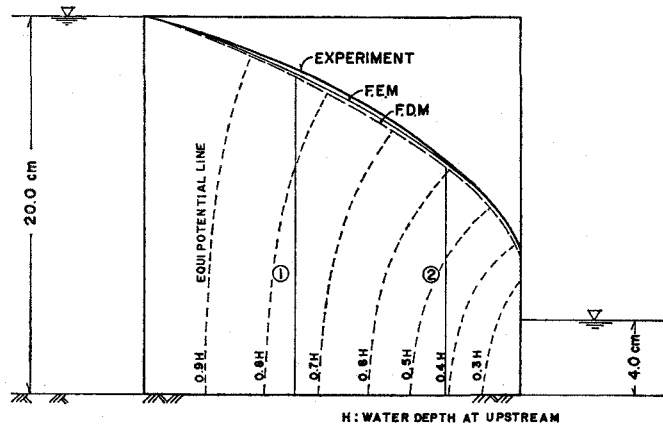


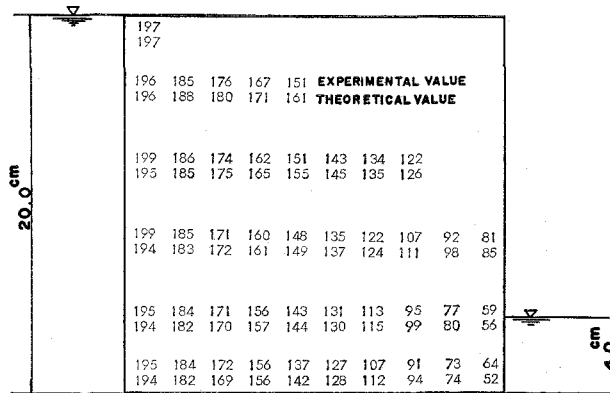
図-5 矩形堤体における浸透流の自由水面形状

この図から実験値と有限要素法による自由水面の形状はほぼ一致していると言えることができる。一方有限差分法は堤体中央部で約5mmの誤差があるが, 浸出点を含めて妥当な形状が得られる。なお同図中の等ポテンシャル線は有限差分法(F. D. M)により求めたものである。

(2) 堤体内部水頭値

水頭値は図-6に示す。この測定点は横方向に上流面より1cmを始点として2cm刻みに, 縦方向には底面から4cm刻みに配置してある。

この図-6において上段の数値は実験値を, 下段の数値は有限差分法による水頭を示す。この結果, 両者の値は2, 3の点を除いて良い一致を示しており, 解析法が非常に有効性を持つと考えることができる。



UNIT: mm

図-6 矩形堤体における内部水頭値

(3) 浸透流量

浸透流量は堤体下流末端において1000ccメスシリンダーで30秒間採取した。いま単位幅当たりの流量 $q$ と透水係数 $k$ との比 $q/k$ で示すと次のようになる。

- 実験値  $q/k = 10.2 \text{ cm}$
- 有限差分法  $= 9.7 \text{ cm}$
- 有限要素法  $= 9.7 \text{ cm}$
- Dupuit式  $= 9.6 \text{ cm}$

但し実験値の詳細な値は,  $q=0.85 \text{ cm}^3/\text{sec}/\text{cm}$ ,  $k=0.0836 \text{ cm}/\text{sec}$  水温  $9.0^\circ\text{C}$  であった。

一方有限差分法 (F. D. M) は堤体中央部, 有限要素法 (F. E. M) は図-5 の ① 及び ② 断面における流量の平均値である。実験値と解析値との誤差は約 5% である。

矩形堤体であるので, Dupuit の式が適用できると仮定して算出すると 9.6 cm となり, 解析値に非常に近い値を示すことがわかる。これによると等方性矩形堤体では Dupuit の式を用いても信頼性があると思われる。

上流水深を 20 cm に固定し, 下流水深に各種水深をとった場合の  $q/k$  の値を表-2 に示す。

表-2 単位幅流量の実験値及び解析値

下流水深 (cm)	実験値 (cm)	有限差分値 (cm)	Dupuit (cm)
4.0	10.20	9.70	9.60
6.0	9.10	9.22	9.10
8.8	8.35	8.48	8.40
10.0	7.26	7.49	7.50

## 2. 台形砂模型

次に台形砂模型についての自由水面形状, 内部水頭値及び流量の実験値と解析値との比較を行う。

上流側水深 40 cm 下流側水深 0 cm の水理条件の場合について述べる。

### (1) 自由水面

自由水面については実験値, 有限差分法, 有限要素法及び実際の設計によく用いられている Casagrande の方法により得られた形状を図-7 に示してある。この図から実験値は有限差分法により求められた形状と一致し, Casagrande は有限要素法により得られた形状と一致する。後者は実験値より幾分高めに自由水面が得られるが, 設計に用いる場合には安全側となり, Casagrande の図式解法は自由水面の形状の近似解法として使用できることになる。

### (2) 堤体内部水頭値

実験及び有限差分法により得られた内部水頭値を図-8 に示す。この図中, 矩形堤体の場

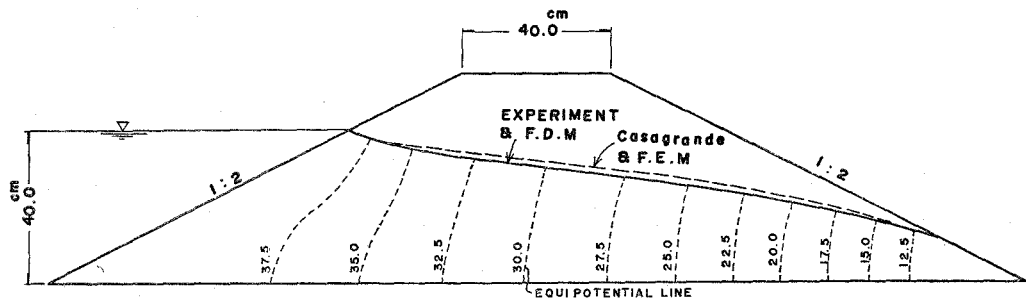


図-7 台形堤体における浸透流の自由水面形状



一方空隙物質内の浸透流が層流から乱流に移行する限界 Reynolds 数は Muskat<sup>2)</sup> によると、

同一粒径散弾	$Re \leq 4$
同一粒径ガラス球	$Re \leq 12$
異種の混合物を含む圧縮された土	$Re \leq 1$

で表わされるとしている。本実験ではいずれの限界値よりも小さいので、浸透流は層流状態であったことが証明される。台形堤体は矩形堤体の動水勾配より一層小さいので十分に層流状態であることが予想される。

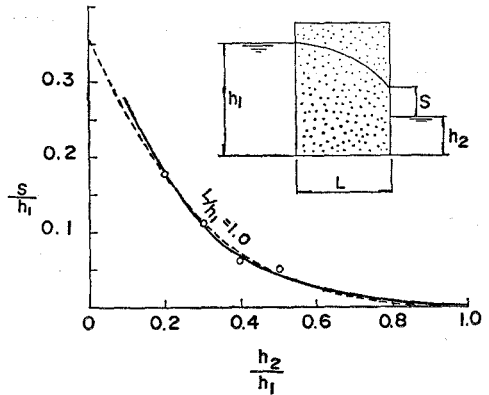


図-9 自由水面の浸出点

次に堤体の安定に大きな影響を与える浸出点の位置と動水勾配との関係について述べる。図-9において実線は有限差分法により得た関係で、白丸が実験値である。又同図の中で破線は Polubarinova-Kochina<sup>3)</sup> が求めた関係であり、両者は非常に良い一致を示している。この図から上流水深及び下流水深が与えられたならば、浸出点の位置の予想が出来ることになる。(但し本研究では  $h_1=L$  の場合のみ、浸出点が予想できる。)

この浸出面が裏法面に存在すると、パイピング現象により堤体の第一次破壊が生じる可能性が強くなり、なんらかの方法により自由水面を降下させて浸出面を消去しなければならない。このため drainage blanket, rock toe filter の排水工事が必要となる。

この排水工に対する解析は次の章で述べる。

### VI. 応用例

有限差分法は過去において手計算を含めて多数の浸透問題が解析されている。ここで過去において行なわれた一例として Shaw と Southwell の結果と、彼等の行った水理条件と同じものを本解析により計算した結果を図-10に示す。この図から両者の自由水面は一致し、本解析の妥当性を示している。

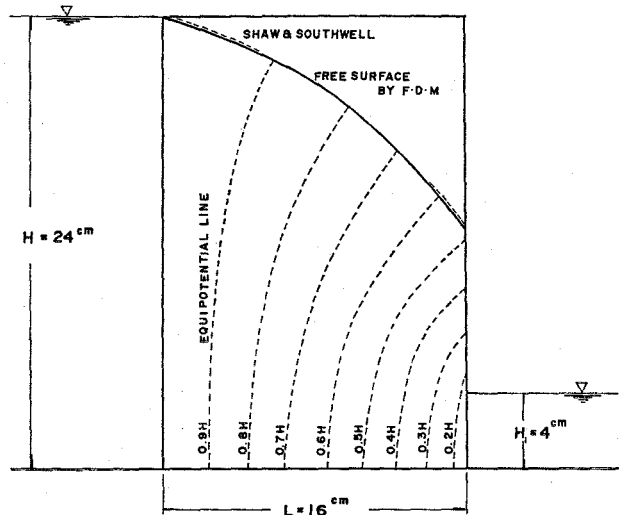


図-10 有限差分法と Shaw & Southwell 法との自由水面の比較

一方図-7の台形堤体と相似の

堤体に drainage blanket を付設した場合も、有限差分法により容易に計算することが出来る。

図-11 は上流水深 10 m 表、裏法勾配 1:2, blanket の長さ 10 m の場合の自由水面形状及び等ポテンシャル線を求めたものである。図-7 の自由水面の形状と比較すると blanket の効果が良くわかり自由水面が急激に落込み、裏法面の安全が保証される。

次に有限要素法を用いて、表法と裏法との勾配が異なる drainage blanket 付設の台形堤体について解法した結果が図-12 である。この図中、実験値は Uginchus<sup>8)</sup> が行ったものであり自由水面は両者が同じ形状をなしている。(但し blanket の長さ 15 m)

両者の誤差は 3% 程度である。

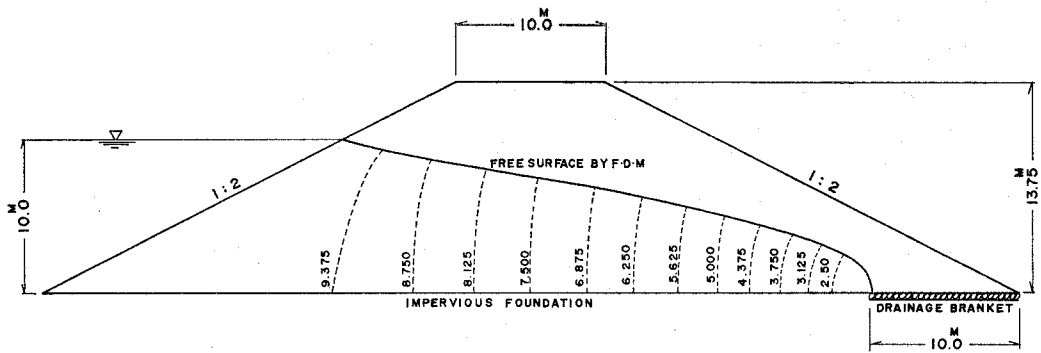


図-11 有限差分法による drainage blanket 付堤体の浸透流の自由水面形状

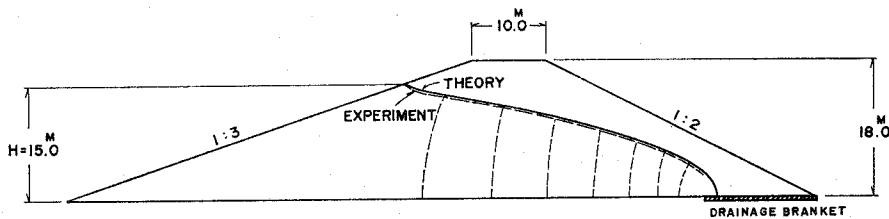


図-12 有限要素法による drainage blanket 付堤体の浸透流の自由水面形状

浸透流量については、

$$\text{Uginchus} \quad q/k = 2.280 \text{ m}$$

$$\text{有限要素法} \quad q/k = 2.325 \text{ m}$$

であり誤差は約 2% である。

次に一般のアースダムの築造の際よく用いられる不透過ゾーン (core) を有しかつ裏法先に rock toe filter を付設した場合の堤体を有限要素法により解析した結果を図-13 に示す。

なお解析の際不透過ゾーン部分の透水係数は  $k_c = 0.05 \text{ cm/sec}$ , その他のフィル部分の透水係数  $k = 1.0 \text{ cm/sec}$  として計算を行った。同図の中で、カッコの中の数値は上記 Uginchus の実験式より求められたものである。但し Uginchus の式は不透過ゾーンの upstream 及び downstream



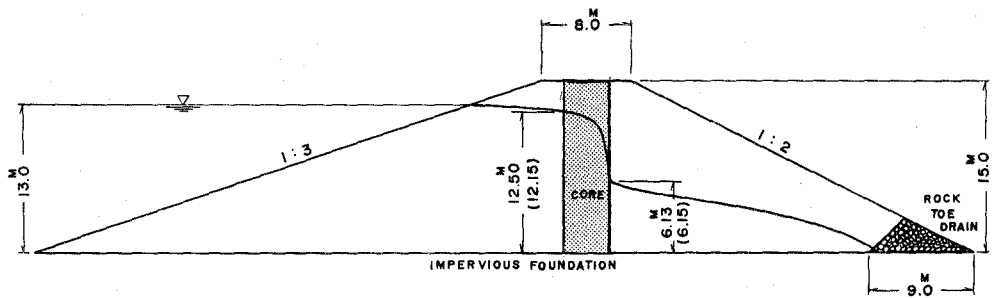


図-13 有限要素法による core 付堤体の浸透流の自由水面形状

おける水深だけが計算でき、自由水面全体の形状を求めることができない。

この場合の流量を求めると、

$$\text{Uginchus} \quad q/k = 0.820 \text{ m}$$

$$\text{有限要素法} \quad q/k = 0.825 \text{ m}$$

が得られる。流量に関しては殆んど誤差がないと言える。

この図から自由水面に対して、不透過ゾーンがいかにな有益な働きをなすか明確に理解することができる。この不透過ゾーンにより下流側部分の自由水面の降下が著しいために、下流側の透水ゾーン内の自由水面が低く堤体裏法面に自由水面が表わることがない。

またこのことは堤体本体の単位体積当たりの重量を増加させることになり、堤体の安定を図ることになる。

## VIII. 結 び

矩形堤体及び台形堤体について、自由水面、内部水頭値及び浸透流量に関して実験と解析による結果を比較検討し、有限差分法及び有限要素法は非常に高い精度で実験値と一致し現象を十分説明できるので、浸透問題の解析には有効であることが判明した。

本研究における実験が均等性堤体を注目したため範囲が非常に狭いが、応用例で述べたように、実際の堤体に近いものにおいても十分に信頼がおける解析値が得られることから今まで有力な解析法がなかった複雑な断面及び形状を有する堤体の浸透流解析について、ここで示した解析法が有意義であり、特に有限要素法は等方性、異方性に拘らず解析でき実用的であると思われる。二つの解析法について、計算時間及び操作を考慮して最も適合する解析領域を次に示す。表-3は本研究で行った各解析の計算時間、入力データ数等を示す。この表から有限差分法は矩形及び表法と裏法勾配が等しい堤体において、計算時間、入力データ数から有限要素法に比較して有利である。また電子計算機が中容量のものでも(例えば FACOM-231)容易に解析が行なうことができる。一方表法と裏法勾配が異なる堤体また不透過ゾーンを有する場合には實際上解析できるのは有限要素法のみである。

表-3 各解析に要した計算時間及び入力データ数等

堤体形状	有限差分法		有限要素法			備考
	CPU (sec)	入力データ数 (個)	CPU (sec)	入力データ数 (個)	分割数 (個)	
短形堤体	17	3	93	676	159	図-5
台形堤体	10	3	230	720	168	図-7
台形堤体	21	4	—	—	—	図-11
台形堤体	—	—	30	564	129	図-12
コア付台形堤体	—	—	108	658	152	図-13

CPU: 実演算時間

以下要約すると次のようになる。

規則正しい形状を有する堤体の浸透解析                      有限差分法

不透過ゾーン等を有する複雑な堤体の浸透解析              有限要素法

なお本解析には北大大型計算センターの FACOM 230-60 を使用した。

終わりに、本研究に対して終始ご支援下さった本学土木工学科近藤俣郎助教授に感謝の意を表し、また研究の一部には本学土木工学科卒業生谷村秀樹君の協力を得たことを記して感謝いたします。  
(昭和49年5月20日受理)

#### 参 考 文 献

- 1) 福田秀夫: 傾斜心壁形フィルタイプダムの浸潤線・透水量に関する研究 (鹿島出版, 昭和35年).
- 2) Muskat, M.: The flow of homogeneous fluids through porous media (McGraw-Hill, 1937).
- 3) Harr, M. E.: Groundwater and Seepage (McGraw-Hill, 1962).
- 4) Zienkiewicz, O., P. Mayer and Y. K. Cheung: Solution of anisotropic seepage by finite elements, Proc. A. S. C. E., No EM 1 (1966).
- 5) Jeppson, R. W.: Seepage from ditches-Solution by finite differences, Proc. A. S. C. E., No HY 1 (1968).
- 6) 岡 太郎: アースダム浸透流の三次元解析, 土木学会第25回年次学術講演会講演集 (昭45・11).
- 7) Shaw, F. S. and R. V. Southwell: Problems relating to the percolation of fluids through porous material, Proc. Roy. Soc. (A), 178, 1, 1941.
- 8) Uginchus, A. A.: Seepage through earth dams (Israel Program for Scientific Translation, 1966).